



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی (۱)

سال اول دوره متوسطه دوم



فرهاد صمدی

۱۳۹۵

ریاضی ۱ دوره‌ی متوسطه‌ی دوم

فرهاد صمدی

تابستان ۹۵

فهرست مطالب

۵	مجموعه ها و دنباله ها	۱
۵	مجموعه ها	۱.۱
۵	مجموعه های اعداد	۱.۱.۱
۹	بازه های اعداد حقیقی	۲.۱.۱
۱۱	مجموعه های متناهی و نامتناهی	۳.۱.۱
۱۴	متمم یک مجموعه	۲.۱
۱۴	مجموعه مرجع	۱.۲.۱
۱۶	تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه	۲.۲.۱
۱۸	الگو و دنباله	۳.۱
۱۸	الگو	۱.۳.۱
۲۰	دنباله ها	۲.۳.۱
۲۲	دنباله حسابی	۳.۳.۱
۲۵	دنباله هندسی	۴.۳.۱
۳۱	تست های فصل اول	۴.۱
۳۹	کلید تست های فصل اول	۵.۱
۴۰	مثلثات	۲
۴۱	نسبت های مثلثاتی	۱.۲
۴۸	دایره مثلثاتی	۲.۲
۵۲	روابط بین نسبت های مثلثاتی	۳.۲
۵۵	تست های فصل دوم	۴.۲
۶۱	کلید تست های فصل دوم	۵.۲
۶۲	توان های گویا و عبارات جبری	۳
۶۲	ریشه و توان اعداد حقیقی	۱.۳

۶۹	توان های گویا	۲.۳
۷۲	عبارت های جبری	۳.۳
۸۰	تست های فصل سوم	۴.۳
۸۶	کلید تست های فصل سوم	۵.۳
۸۷	۴ معادلات و نامعادلات	
۸۷	معادله درجه دوم و روش های حل آن	۱.۴
۹۲	سهمی ها	۲.۴
۹۶	تعیین علامت چند جمله ایها	۳.۴
۹۷	تعیین علامت دو جمله ای درجه اول	۱.۳.۴
۹۸	تعیین علامت سه جمله ای درجه دوم	۲.۳.۴
۱۰۲	نامعادله	۴.۴
۱۰۴	قدر مطلق و معادلات و نامعادلات قدر مطلق	۵.۴
۱۰۷	تست های فصل چهارم	۶.۴
۱۱۳	کلید تست های فصل چهارم	۷.۴
۱۱۴	۵ تابع	
۱۱۴	مفهوم تابع و روش های نمایش آن	۱.۵
۱۱۸	دامنه و برد توابع	۲.۵
۱۲۲	انواع توابع	۳.۵
۱۲۶	ترسیم با انتقال	۴.۵
۱۳۵	تست های فصل پنجم	۵.۵
۱۴۷	کلید تست های فصل پنجم	۶.۵
۱۴۸	۶ آنالیز ترکیبی	
۱۴۸	اصل ضرب و جمع	۱.۶
۱۵۲	جایگشت	۲.۶
۱۵۶	ترکیب	۳.۶
۱۶۰	تست های فصل ششم	۴.۶
۱۶۸	کلید تست های فصل ششم	۵.۶
۱۶۹	۷ آمار و احتمال	
۱۶۹	احتمال و اندازه گیری شانس	۱.۷
۱۷۶	مقدمه ای بر آمار، جامعه و نمونه	۲.۷

۱۷۹	متغیر و انواع آن	۳.۷
۱۸۲	تست‌های فصل هفتم	۴.۷
۱۸۸	کلید تست های فصل هفتم	۵.۷

مقدمه

مجموعه حاضر تحت عنوان ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی برای دانش‌آموزان سال دهم (سال اول متوسطه دوم) نگاشته شده است. برای اولین بار از IAT_EX استفاده کرده‌ام و از نوع آرایش صفحه و نحوه فرمول نویسی درقیاس با سایر کتابها و حتی کتاب درسی متوجه برتری IAT_EX خواهید شد. در بسیاری از موارد از متن کتاب یا شکل‌های کتاب و حتی مثال‌های کتاب استفاده شده است چراکه هدف نوشتن کتابی بود که مطالب کتاب درسی را پوشش دهد و در عین حال شامل مطالب بیشتری برای پوشش سرفصل‌های کتاب درسی باشد. تعداد تمرینات بطور چشمگیری زیاد است (نسبت به کتاب درسی) و باید تاکید کنم که شرط تسلط نسبی بر ریاضی حل تمرین است. تمرین‌ها گاه یک محاسبه سراسر است و تکراری از مثال‌های در متن هستند و گاهی هم کاملا متفاوت. وسواس زیادی برای انتخاب مثال‌ها و تمرین‌ها داشته‌ام تا بتوانم آنچه را که در ذهن به عنوان هدف آن درس دارم به تمام و کمال اجرا کنم. پس فراموش نکنید که تمرین‌ها ادامه درس هستند و باید تا آنجا که می‌توانید در جهت حل آنها اقدام کنید. چنانچه به مشکلی برخورد کردید می‌توانید با دوستان در کلاس درس مسئله را با هم فکری حل کنید و نهایتا اگر مسئله‌ای خیلی مشکل بود و با هم فکری هم حل نشد بنده همواره پاسخگوی شما هستم. (فکر کنم تعداد چنین مسائلی به تعداد انگشتان یک دست هم نرسد). در پایان هر فصل سوالات آزمون سراسری را با کلید آن قرار داده‌ام تا در تست زدن نیز مهارت خود را افزایش دهید، اگرچه به باور بنده آموزش صحیح را باید بدون تست انجام داد. امیدوارم تدریس کتاب حاضر آنچنان که در ذهن پرورنده‌ام برای شما عزیزان مفید باشد.

فرهاد صمدی

تابستان ۹۵

فصل ۱

مجموعه ها و دنباله ها

۱.۱ مجموعه ها

۱.۱.۱ مجموعه های اعداد

در این بخش ابتدا مجموعه‌ی اعدادی را که تابحال شناخته‌اید و نحوه پیدایش آنها را بررسی کرده و سپس مجموعه‌ها را در حالت کلی بررسی میکنیم و عملیات‌هایی چون اجتماع، اشتراک و تفاضل را بر آنها تعریف خواهیم کرد. تاریخچه‌ی دقیقی از نحوه شکل‌گیری و تکامل اعداد در دسترس نیست. از آثار بجای مانده از گذشتگان تنها می‌توان حدس زد که چگونه از شمارش در کارهای روزمره‌ی خود استفاده می‌کرده‌اند. خطوط موازی کوچک بر استخوان ران یک گاو که در کنگو در قاره‌ی آفریقا یافت شده است متعلق به حدود ۸۰۰۰ سال پیش است. آنها برای شمارش به ازای هر واحد شمارش (مثلا شمارش فرزندان یا گوسفندان یا افراد قبیله و...) یک خط بر استخوان یا چوب حک می‌کرده‌اند. گاهی نیز از سنگریزه برای شمارش استفاده کرده‌اند. شاید ابتدایی‌ترین راه شمارش استفاده از انگشتان دست باشد. در دسترس بودن انگشتان و خم کردن یک انگشت به ازای شمارش یک چیز کار ساده‌ایست و دلیل استفاده بشر از مبنای ۵ و ۱۰ به همین علت است. حتی مبنای ۲۰ هم در میان قوم مایاها در آمریکای جنوبی رواج داشته و یادآور دورانی است که بشر پابرهنه بوده است. در این دستگاه هر مرد معادل عدد ۲۰ بوده است. (چرا؟) ابتدایی‌ترین مجموعه مورد استفاده بشر همانطور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی بوده است. مجموعه اعداد طبیعی بصورت زیر است:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

لازم است خاصیتی جالب را در مورد مجموعه \mathbb{N} معرفی کنیم. چنانچه دو عدد دلخواه از اعداد طبیعی را باهم جمع کنیم حاصل باز هم عدد طبیعی است بعنوان مثال: $1 + 3 = 4 \in \mathbb{N}$ در حالت کلی اگر a, b دو عدد طبیعی باشند واضح است که $a + b$ نیز عددی طبیعی است. این خاصیت را اصطلاحاً بسته بودن \mathbb{N} نسبت به عمل $+$ می‌نامیم.

مثال ۱.۱. آیا مجموعه \mathbb{N} نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به عمل تفریق چطور؟ نسبت به عمل تقسیم چطور؟

تمرین ۱.۱. مجموعه $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این مجموعه نسبت به ضرب بسته است نسبت به جمع چطور؟ نسبت به تقسیم چطور؟

تمرین ۲.۱. مجموعه $B = \{-1, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه نسبت به جمع بسته است؟ نسبت به ضرب چطور؟

تمرین ۳.۱. فرض کنید مجموعه ای چون A داریم بطوریکه می دانیم این مجموعه نسبت به اعمال جمع و تفریق بسته است و شامل عدد یک نیز هست. ثابت کنید که این مجموعه A همان مجموعه اعداد صحیح است. حال با توجه به تعریف بسته بودن می توان متوجه ضعف مجموعه اعداد طبیعی شد. \mathbb{N} نسبت به تفریق بسته نیست. این بزرگترین ضعف \mathbb{N} است. زمانی که بشر برای معاملات خود متوجه شد که مقروض بودن را نمی توان با اعداد طبیعی نمایش داد خلاء اعداد صحیح را حس کرد و مجبور شد اعداد صحیح را بکار بگیرد.

تعریف ۱.۱. مجموعه اعداد صحیح را که با نماد \mathbb{Z} نشان می دهیم عبارتست از :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

اینکه اعداد صحیح را با حرف \mathbb{Z} نمایش می دهند به خاطر کلمه *Zahlen* می باشد که لغتی آلمانی است. اعداد صحیح نیز به نوبه ی خود دارای ضعف بسته نبودن نسبت به عمل تقسیم بود به عنوان مثال دقت کنید که :

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \notin \mathbb{Z}$$

برای برطرف کردن این ضعف \mathbb{Z} مجموعه ای مورد نیاز بود که شامل تمام کسرهای ممکن که می توان به کمک اعداد صحیح ساخت باشد. این مجموعه را اعداد گویا می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۱. مجموعه اعداد گویا را که با نماد \mathbb{Q} نشان می دهیم (\mathbb{Q} حرف اول کلمه *Quotient* به معنای خارج قسوت) بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا کوچکترین مجموعه ای است که نسبت به هر چهار عمل اصلی $+$, $-$, \times , \div بسته است. با این حال همین مجموعه هم بی نقص نیست. در واقع پیروان مکتب فیثاغورس که به فیثاغورثیان معروف بودند اولین بار به این حقیقت نگران کننده پی بردند که قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی توان بصورت کسر نوشت. فیثاغورثیان که ایمان کامل به اعداد گویا داشتند و آنرا بی عیب و نقص می پنداشتند از این کشف نگران شدند و تا سالها آن را پنهان نگاه داشته بودند و حتی داستانی نقل کرده اند که دو تن از پیروان این مکتب در یک کشتی عازم سفر بودند و یکی از آنها دیگری را از این راز مهم آگاه کرد و گفت پس از سفر آن را با دیگران در میان خواهیم گذاشت. همین امر باعث شد تا دوستش او را به دریا پرتاب کند.

اکنون می‌دانیم که قطر مربعی به ضلع یک عددی غیر گویا یا اصم است. این عدد عددی نیست جز $\sqrt{2}$. می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{2}$ را نمی‌توان بصورت یک کسر نوشت بعبارت بهتر به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه a, b همواره داریم: $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$

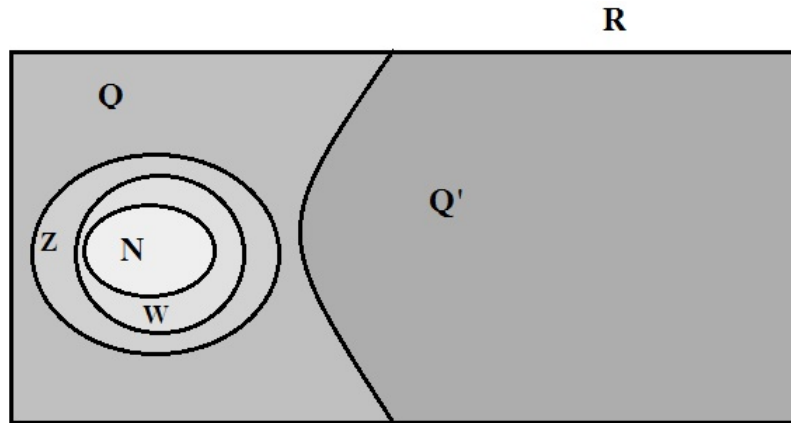
تمرین ۴.۱. اگرچه هنوز ابزار لازم برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ را در اختیار ندارید اما تلاش برای اثبات آن خالی از لطف نیست. برای اینکه ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است ثابت کنید $\sqrt{2}$ گویا نیست. بدین منظور تصور کنید که اگر $\sqrt{2}$ بخواهد گویا باشد پس باید داشته باشیم: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و فرض کنید که کسر حاصل تحویل ناپذیر است (کسری که صورت و مخرج آن دیگر ساده نشود). با به توان ۲ رساندن طرفین و استفاده از خاصیت زوج بودن به عبارتی برسید که با فرض سازگار نیست. (این روش اثبات غیرمستقیم یا همان برهان خلف نام دارد).

مجموعه اعداد گنگ را با نماد \mathbb{Q}' نشان می‌دهیم. یکی دیگر از اعداد گنگی، که قدمت زیادی دارد عدد π است. نسبت محیط دایره به قطر آن عدد π است. داستان پیدایش عدد پی با مسأله تربیع دایره در ارتباط تنگاتنگ است. برای آشنایی با تربیع دایره می‌توانید همین «تربیع دایره» را در گوگل جستجو کنید. محاسبه مقدار تقریبی عدد پی نیز داستان جالبی دارد. چنانچه علاقمند هستید می‌توانید به کتاب تاریخ ریاضیات نوشته هاوارد ایوز صفحه ۱۱۵ مراجعه کنید. (نسخه pdf این کتاب دو جلدی در سایت کتابناک موجود و رایگان است). در اینجا بد نیست به تقریبی از عدد پی اشاره کنیم که توسط غیاث الدین جمشید کاشانی منجم و ریاضی دان دربار الغ بیگ بدست آمده است. وی توانست عدد پی را تا شانزده رقم اعشار بدرستی تقریب کند. این رکورد تا حدود دویست سال پابرجا بود تا سرانجام در سال ۱۶۱۰ میلادی توسط لودولف وان کولن ریاضی دان اهل آلمان شکسته شد. وی عدد پی را تا ۳۵ رقم تقریب کرد. الغ بیگ گورکانی نوه تیمور گورکانی و پسر شاهرخ گورکانی بود. وی بر خلاف پدر بزرگش که یک خونریز تمام عیار بود، به هنر و دانش اهتمام ویژه‌ای داشت. وی حتی در نجوم تبحر داشت و کمی هم اطلاعات ریاضی نزد جمشید کاشانی فرا گرفت. تاکنون با مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ آشنا شده‌اید. رابطه بین سه مجموعه اول بصورت زیر است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

در این رابطه مجموعه \mathbb{Q}' چه جایگاهی دارد؟ حال می‌توان مجموعه اعداد حقیقی را هم تعریف کرد.

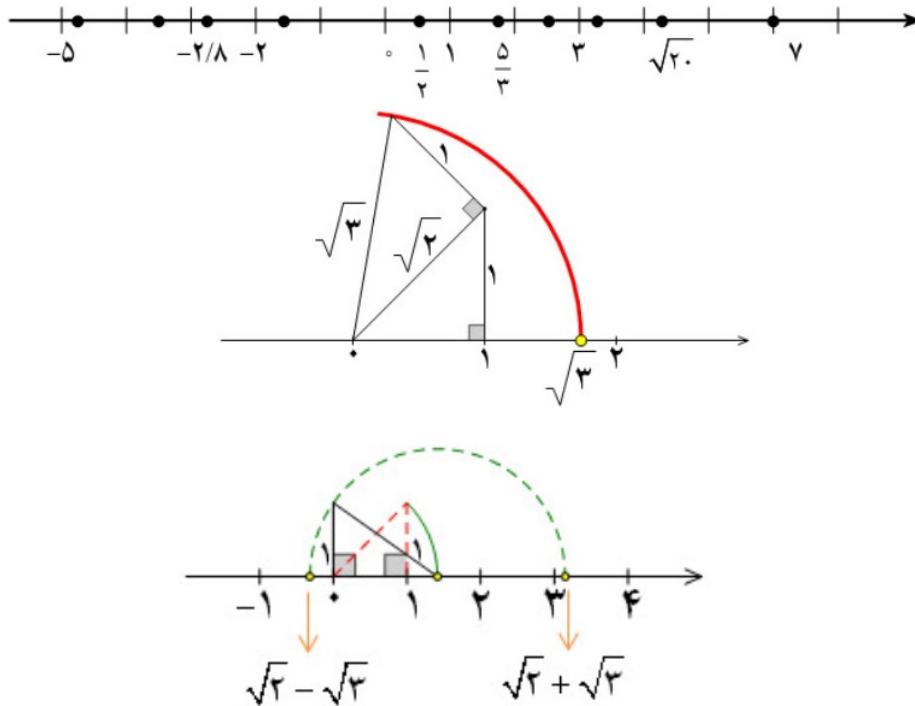
تعریف ۳.۱. مجموعه اعداد حقیقی را که با نماد \mathbb{R} نشان می‌دهیم برابر است با: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. (علامت \cup به معنای اجتماع است که در کلاس نهم تا حدودی با آن آشنا شده‌اید).



شکل ۱.۱: رابطه‌ی بین مجموعه اعداد

مجله ریاضی: مجموعه اعداد حقیقی نیز به شکلی دیگر (نه بسته بودن نسبت به اعمال اصلی) دارای نقصان است. معادلات درجه دوم را هنوز نخوانده‌اید با اینحال معادلات درجه دومی وجود دارند که جوابهای آن معادله دیگر عددی حقیقی نیست. مثل معادله $x^2 + 1 = 0$ که جواب آن عدد عجیبی است. در واقع جواب این معادله عددی است بنام i با این ویژگی عجیب که $i^2 = -1$. بله این اعداد عجیب اعداد مختلط نام دارند و با نماد \mathbb{C} نشان داده می‌شوند. برای مطالعه بیشتر ویکی‌پدیای فارسی را ملاحظه کنید.

متناظر به هر عدد حقیقی نقطه‌ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد. در اشکال زیر موقعیت برخی از اعداد روی محور نشان داده شده است.



شکل ۲.۱: نمایش اعداد گویا و گنگ روی محور اعداد

اگر به شکل ۲.۱ بدقت نگاه کنید متوجه خواهید شد که این شکل راه حل بسیار زیبایی را به شما معرفی

کرده است و ارزش آن بیش از یک شکل ساده است. سرانجام آخرین مجموعه از اعداد را که بزرگتر از \mathbb{N} و کوچکتر از \mathbb{Z} است را معرفی می‌کنیم. مجموعه اعداد حسابی که با نماد \mathbb{W} نشان می‌دهیم عبارتست از $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

تمرین ۵.۱. جاهای خالی را با مجموعه مناسب کامل کنید.

$$a) \mathbb{R} - \mathbb{Q} =$$

$$b) \mathbb{Z} - \mathbb{W} =$$

$$c) \mathbb{N} - \mathbb{W} =$$

$$d) \mathbb{Q}' - \mathbb{Q} =$$

۲.۱.۱ بازه های اعداد حقیقی

برای ورود به مطلب و آشنایی با بازه ها دو نامعادله زیر را در نظر بگیرید:

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \quad (1) \quad , \quad 3x+1 < 7 \quad (2)$$

با حل این دو نامعادله مجموعه جواب معادله شماره ۱ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ و مجموعه جواب معادله شماره ۲ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. آیا می‌توان مجموعه جواب را با نمادی ساده تر از مجموعه های فوق نوشت؟ جواب مثبت است. بازه ها جوابگوی ما برای این ساده نویسی هستند. مجموعه جواب نامعادله ۱ بازه ی $[-2, 4)$ است و مجموعه جواب نامعادله شماره ۲ بازه ی بی کران $(-\infty, 2)$ است. حال به سراغ تعریف بازه ها می‌رویم.

تعریف ۴.۱. یک بازه ، زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است که بصورت های زیر تعریف می‌شود:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{بازه ی باز}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{بازه ی نیم باز}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{بازه ی بسته}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad \text{بازه ی باز بی کران}$$

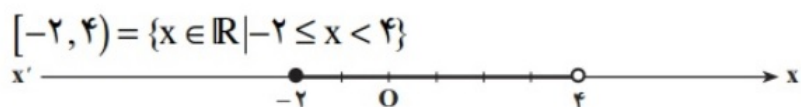
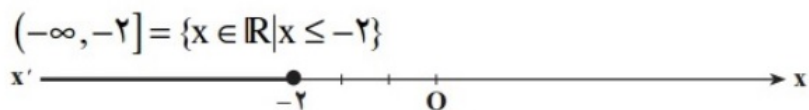
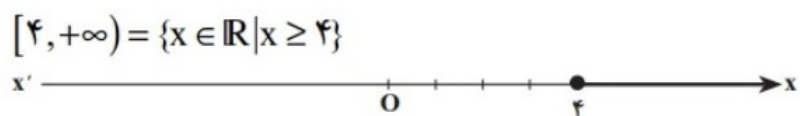
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad \text{بازه ی نیم باز بی کران}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad \text{بازه ی باز بی کران}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad \text{بازه ی نیم باز بی کران}$$

اغلب بجای اصطلاح نیم باز از اصطلاح نیم بسته هم استفاده میشود. نماد ∞ که بی نهایت خوانده می‌شود (مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت) یک عدد حقیقی نیست فقط نمادی است برای اینکه نشان دهیم بازه بی کران است. یعنی هر عددی خواه بسیار بزرگ یا خواه بسیار کوچک در این بازه ها می‌تواند وجود داشته باشد.

در اشکال زیر چند بازه را بعنوان مثال روی محور اعداد حقیقی نمایش داده ایم.



مثال ۲.۱. درست و نادرست را بررسی کنید و جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

$$(a) : 3 \in [-1, \sqrt{10})$$

$$(b) : \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1]$$

$$(c) : \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$$

$$(d) : -1395 \in (-\infty, -1396)$$

$$(e) : \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \in [3, 4]$$

$$(f) : \emptyset \subseteq (-\pi, \pi)$$

$$(g) : (-\infty, 3) \cap (-2, 0) \cap (-1, +\infty) =$$

$$(h) : \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$$

$$(m) : \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$(n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) =$$

تمرین ۶.۱. درست و نادرست را مشخص کنید و جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} (a) : [0, 1) \subset \mathbb{Q} & \quad (b) : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}' & \quad (c) : \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{Q}' \\ (e) : \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' & \quad (f) : \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{W} & \quad (g) : \frac{1 - \pi}{2} \in (-1, +\infty) \\ (h) : \sqrt{-1} \in \mathbb{R} & \quad (m) : \sqrt[3]{-27} \in \mathbb{Q} & \quad (n) : (-\infty, \sqrt{3}) \cap (0, \frac{\pi}{2}) = \\ (d) : \sqrt{841} \in \mathbb{Q} & & \end{aligned}$$

۳.۱.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

در این بخش می خواهیم در مورد تعداد اعضای یک مجموعه صحبت کنیم.

تعریف ۵.۱. مجموعه ای چون A را یک مجموعه متناهی (باپایان) گوئیم هرگاه تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد حسابی نمایش داد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را با نماد $|A|$ نمایش دهیم متناهی بودن یک مجموعه چون A به معنای آن است که به ازای یک عدد حسابی مثل k داریم $|A| = k$. در غیر اینصورت مجموعه را نامتناهی (بی پایان) گوئیم.

مثال ۳.۱. مجموعه های زیر را بررسی کنید و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را معین کنید.

- ۱ - مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی در کشور.
- ۲ - تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰
- ۳ - تعداد اعداد اول.
- ۴ - مجموعه اعداد طبیعی فرد.
- ۵ - مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان بالغ.
- ۶ - مجموعه دایره هایی که مرکزشان مبدا مختصات است.
- ۷ - مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.
- ۸ - مجموعه درختان جنگل آمازون.
- ۹ - مجموعه کسر هایی که مثبت هستند و صورتشان ۱ است.
- ۱۰ - بازه $(0, 2)$.
- ۱۱ - مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب.

فعالیت

الف) بین 0 و 1 دو عدد گویای دلخواه بنویسید.

ب) در بازه $(0, 1)$ چهار عدد گویای دیگر بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

پ) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

ت) در مورد منتهای یا نامتنهای بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) در مورد منتهای یا نامتنهای بودن Q چه می‌توان گفت؟

ج) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتنهای باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

نتیجه فعالیت بالا بیان می‌کند که اگر مجموعه‌ای چون A دارای زیرمجموعه‌ای چون B باشد ($B \subseteq A$) به طوری که B نامتنهای باشد آنگاه بناچار خود A نیز نامتنهای است. در نتیجه چون اعداد گویای واقع در بازه $(0, 1)$ نامتنهای هستند پس Q هم نامتنهای است و به همین ترتیب \mathbb{R} هم نامتنهای است. ($Q \subseteq \mathbb{R}$) پرسش: با توجه به شرایط بالا اگر A منتهای باشد در مورد B چه می‌توان گفت؟

یادداشت تاریخی: اعداد اول یکی از قدیمی‌ترین مباحث در ریاضیات می‌باشد. در دوره معاصر نیز یکی از جذابترین شاخه‌های رشته ریاضیات نظریه اعداد است که به بررسی اعداد صحیح و خواص آن می‌پردازد. حدود ۳۵۰ سال قبل از میلاد مسیح اقلیدس ثابت کرد که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. عبارت بهتر ثابت کرد مجموعه اعداد اول نامتنهای است. جالب است بدانید که این اثبات به روش برهان خلف انجام می‌شود و هنوز در طی سالیان سال نتوانسته‌اند اثباتی ساده‌تر از اثبات اقلیدس بیابند.

تمرین ۷.۱. منتهای یا نامتنهای بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

- ۱ - مجموعه کلمات بکار رفته در کتاب ریاضی دهم.
- ۲ - مجموعه مضارب مثبت عدد ۵.
- ۳ - مجموعه پلنگ‌های زنده در قاره آفریقا.
- ۴ - مجموعه تمام زیر مجموعه‌های \mathbb{N} .
- ۵ - مجموعه تمام اعدادی که در تقسیم بر ۵ باقیمانده ۱ دارند.
- ۶ - مجموعه باقی‌مانده‌ها در تقسیم اعداد طبیعی بر عدد ۷.
- ۷ - مجموعه تمام موبایل‌های تولید شده در ۲۰ سال گذشته.

بیشتر بدانیم: همانطور که از کلاس نهم می دانید چنانچه دو مجموعه دارای تعداد اعضای برابر باشند آن دو مجموعه لزوماً برابر نیستند. مثلاً دو مجموعه

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$

هر دو دارای سه عضو می باشند اما برابر نیستند. اما برابر بودن تعداد اعضا باعث می شود اصطلاح دیگری در مورد این دو مجموعه بکار رود. اگر بتوان بین اعضای دو مجموعه یک تناظر یک به یک برقرار کرد در این صورت گویند دو مجموعه هم ارزی یا هم عدد هستند. منظور از تناظر یک به یک این است که به هر عضو مجموعه A یک و فقط یک عضو از مجموعه B نظیر کرد و بعکس. در مورد مثال بالا تناظر بدین صورت است که :

$$1 \longleftrightarrow a \quad 2 \longleftrightarrow b \quad 3 \longleftrightarrow c$$

توجه داشته باشید که این تناظر باید اصطلاحاً یک به یک باشد. مثل تناظر بین انسان ها و اثر انگشتشان. هر انسانی یک اثر انگشت دارد و هر اثر انگشتی فقط متعلق به یک انسان است. حال موضوع زمانی جالب تر می شود که بدانید \mathbb{N} و \mathbb{Z} هم هم ارزی یا هم عدد هستند. برای ایجاد تناظر به این صورت عمل می کنیم که اگر n عددی طبیعی باشد دو حالت رخ می دهد یا زوج است یا فرد. اگر زوج بود آن را به $\frac{n}{2}$ نظیر می کنیم و اگر فرد بود آنرا به $\frac{1-n}{2}$ نظیر می کنیم. می توان ثابت کرد که این تناظر یک به یک است. چند مورد ابتدای این تناظر را در زیر می بینید.

$$1 \longleftrightarrow \frac{1-1}{2} = 0$$

$$2 \longleftrightarrow \frac{2}{2} = 1$$

$$3 \longleftrightarrow \frac{1-3}{2} = -1$$

$$4 \longleftrightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$5 \longleftrightarrow \frac{1-5}{2} = -2$$

در فصول بعدی که مفهوم تابع را درس خواهیم داد راحت تر می توان ضابطه تناظر را بیان کرد.

۲.۱ متمم یک مجموعه

۱.۲.۱ مجموعه مرجع

جهت روشن شدن لزوم در نظر گرفتن یک مجموعه بعنوان مجموعه مرجع مجموعه $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. اگر از شما بخواهند که اعضای مجموعه را بنویسید چه اعدادی را خواهید نوشت؟ جوابهای احتمالی شما بصورت زیر است:

$$(۱) \quad A = \{1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد طبیعی را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۲) \quad A = \{0, 1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد حسابی را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۳) \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد صحیح را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۴) \quad A = [-2, 3] \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد حقیقی را در نظر گرفته باشید}$$

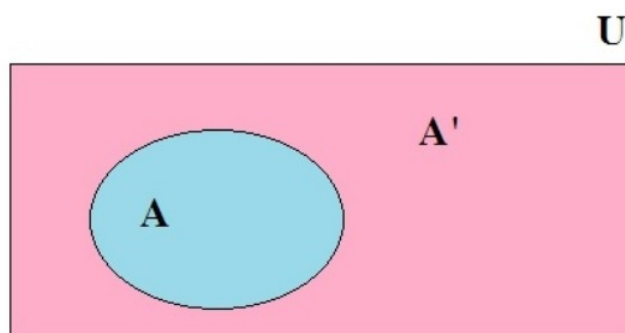
پس همانطور که مشاهده می کنید برای مجموعه می توان حالت های مختلف را در نظر گرفت و جواب یکتایی بدست نمی آید و این ابهام در تعریف مجموعه A چندان خوشایند نیست. چنانچه مجموعه را بصورت :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

تعریف کنیم دیگر تکلیف روشن است و می دانیم جواب چیست. در اینجا نبود یک مجموعه مرجع باعث بروز چنین مشکلی شد. اما با در نظر گرفتن مجموعه های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}, \mathbb{N}$ بترتیب مجموعه های $1, 2, 3, 4$ بدست می آیند. پس با تغییر مجموعه بعد از علامت \in اعضای مجموعه نیز تغییر می کنند. چنین مجموعه هایی را مجموعه مرجع گویند.

تعریف ۶.۱. در هر مبحث مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می نامند و با حرف U نشان می دهند. در این حالت اگر $A \subseteq U$ مجموعه ای دلخواه باشد، $U - A$ را با نماد A' نشان می دهیم و آن را متمم A می نامیم. به عبارت بهتر A' شامل اعضای از U است که در A نیستند.

در شکل زیر رابطه بین مجموعه های A, A', U دیده می شود.



بطور معمول در هر بحثی مجموعه مرجع را معرفی می‌کنند. چنانچه در بحثی مجموعه مرجع را معرفی نکردیم شما می‌توانید بزرگترین مجموعه موجود را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید. وقتی صحبت از اعداد باشد بزرگترین مجموعه ممکن همان \mathbb{R} است. در حالت کلی برای نوشتن یک مجموعه به صورت استاندارد می‌نویسیم $\{x \text{ دارای خاصیت } p(x) \text{ است} \mid x \in U\$ در این جا U مجموعه مرجع است و $p(x)$ خاصیتی است که x دارای آن است.

یادداشت تاریخی: آیا مجموعه مرجع به معنای مطلق وجود دارد؟ یعنی مجموعه‌ای چون U به طوری که شامل هر مجموعه‌ای که شما تصور کنید باشد. تا ابتدای قرن بیستم وجود چنین مجموعه‌ای فرضی مسلم بود. برتراند راسل ریاضی دان و فیلسوف نامدار انگلیسی در ابتدای قرن بیستم ثابت کرد چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. پارادوکس راسل در همین ارتباط است و برای مطالعه بیشتر می‌توانید در گوگل عبارت پارادوکس راسل را جستجو کنید.

مثال ۴.۱. متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$U = \mathbb{N}$$

$$B = \mathbb{N}$$

$$U = \mathbb{Z}$$

$$C = \mathbb{N}$$

$$U = \mathbb{W}$$

$$D = \mathbb{Q}$$

$$U = \mathbb{R}$$

$$E = [-\infty, -2)$$

$$U = \mathbb{R}$$

$$F = [-\infty, -2)$$

$$U = (-\infty, 0)$$

$$G = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

$$U = [0, 1]$$

$$H = \mathbb{Z}$$

$$U = \mathbb{R}$$

مثال ۵.۱. اگر U مجموعه مرجع دلخواهی باشد و $A \subseteq U$ باشند طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$a) A \cup A' =$$

$$b) A \cap A' =$$

$$c) \emptyset' =$$

$$d) U' =$$

مثال ۶.۱. فرض کنید $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q\}$ و $A = \{a, e, g, h, m, n, l\}$ و $B = \{a, b, c, d, f, g, l\}$ باشد. جدول زیر را کامل کنید.

$(A')'$	{	}
$A' \cap B'$	{	}
$A' \cup B'$	{	}
$(A \cap B)'$	{	}
$(A \cup B)'$	{	}
$A \cap B'$	{	}
$A - B$	{	}

۲.۲.۱ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

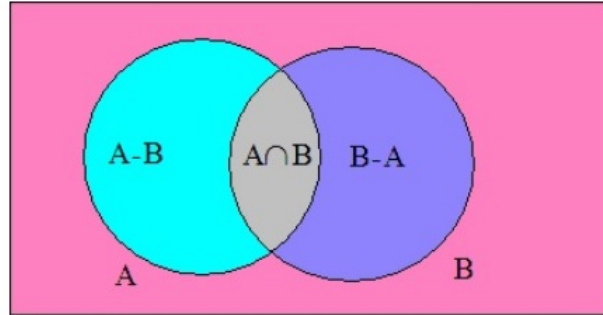
فرض کنید تعداد اعضای مجموعه های A, B معلوم باشد. می خواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را بر حسب $n(A)$ و $n(B)$ بیابیم. (تعداد اعضای یک مجموعه را هم با نماد $|A|$ و هم با نماد $n(A)$ نشان می دهند) ممکن است تصور کنید که جواب واضح است و برابر است با عدد $n(A) + n(B)$ اما این نادرست است. چرا که اگر $U = \mathbb{N}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ آنگاه:

$$4 = n(A \cup B) \neq n(A) + n(B) = 3 + 3 = 6$$

دلیل آن ها ساده است. هنگامی که می نویسیم $n(A) + n(B)$ در واقع اعضای مشترک دوبار شمارش شده اند. یعنی $n(A \cap B)$ یکبار در هنگام شمارش اعضای A و یک بار در شمارش اعضای B حساب شده است. لذا برای یافتن تعداد درست باید یکبار $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم. پس جواب درست بصورت زیر است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

به شکل زیر دقت کنید. می توان درستی رابطه فوق را از روی نمودار ون زیر تحقیق کرد.



تذکر مهم: از روی شکل فوق روابط جالب دیگری بین اعضای مجموعه های $A - B$ و $A \cap B$ بدست می آید. این روابط بصورت زیر هستند که خودتان براحتی می توانید صحت آنها را تحقیق کنید.

$$n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = n(A \cup B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

درس را با ذکر چند مثال پی میگیریم.

مثال ۷.۱. در یک کلاس مدرسه ۳۰ دانش آموز وجود دارد. ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می کنند. چند نفر هم فوتبال بازی می کنند و هم والیبال؟

مثال ۸.۱. در یک جمع ۴۰ نفره ۲۰ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه. چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند.

مثال ۹.۱. از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد؟ چند عدد بر ۵ بخش پذیر است اما بر ۷ بخش پذیر نیست؟ چند عدد نه بر ۵ بخش پذیر است نه بر ۷؟

تمرین ۸.۱. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر به زبان انگلیسی، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان می توانند صحبت کنند. در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی کنند؟

تمرین ۹.۱. در یک مدرسه، ۲۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضو هستند. ۴ نفر نیز در هر دو تیم عضو هستند. چند نفر از دانش آموزان مدرسه، در دست کم یکی از ۲ تیم ورزشی مدرسه هستند؟

تمرین ۱۰.۱. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.

(ب) فقط از شرکت A خرید داشته اند.

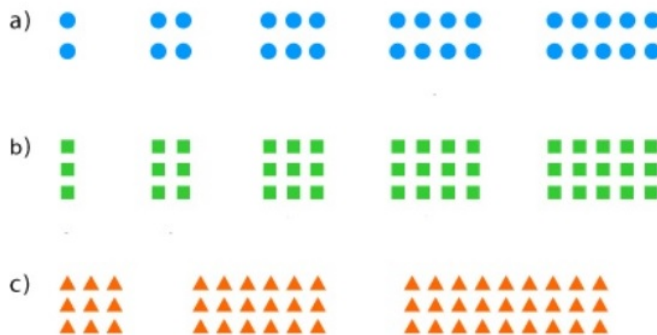
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند.

۳.۱ الگو و دنباله

۱.۳.۱ الگو

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده و یا مارپیچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد. ریاضیات به عنوان ملکه علوم، یکی از رسالت های مهم خود را مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنها می داند. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارتست از علم مطالعه الگوها. در این بخش برخی الگوهای هندسی و نیز الگوهای عددی متناظر با آنها مورد بررسی قرار می گیرند.

مثال ۱۰.۱. به شکل زیر دقت کنید در هر مورد a, b, c چه ارتباطی بین جملات است؟ در هر مورد چند جمله بعدی را بنویسید. آیا در حالت کلی می توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟ (رسم بر اینست که جمله اول را با نماد a_1 جمله دوم را با نماد a_2 و جمله n ام را با a_n نشان دهند. شماره های جمله که به شکل کوچک و پایین حرف انگلیسی نوشته شده اند را اندیس گویند)

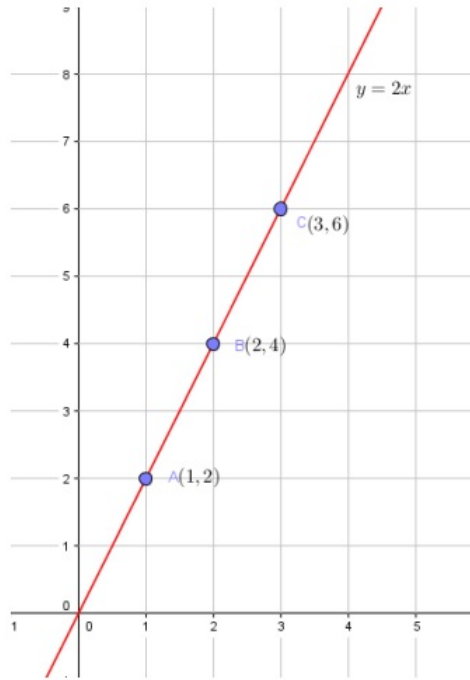


همانطور که در مثال بالا دیده شد اختلاف هر جمله از جمله قبلی مقدار ثابتی است. این نوع الگوها را الگوی خطی می نامیم چرا که به شکل معادله درجه اول $t_n = an + b$ است. در اینجا t_n جمله n ام الگو است. در نمودار زیر مشخص کرده ایم که در قسمت a اختلاف هر جمله از جمله قبلی ۲ واحد است و لذا الگوی خطی

دارد.

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} \dots$$

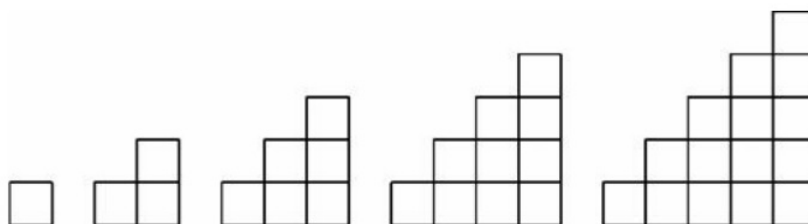
مثال ۱۱.۱. در یک اگوی خطی جمله چهارم ۱ و جمله هشتم ۱- است. جمله چندم آن برابر ۴۷- است؟



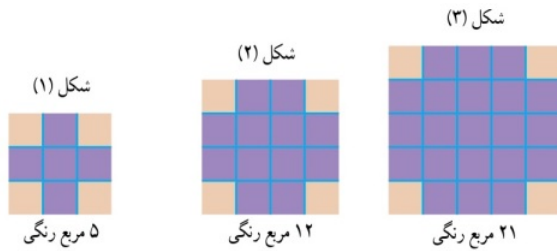
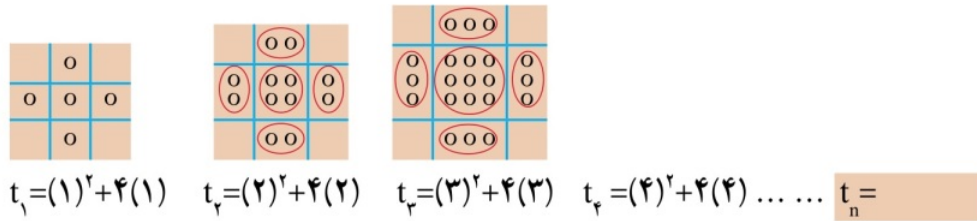
شکل ۳.۱: نمودار یک اگوی خطی

همانطور که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید اعضای دنباله ی $2, 4, 6, \dots$ در واقع عرض نقاط A, B, C, \dots روی خط $y = 2x$ هستند. به همین علت هم به این الگوها خطی گویند. اگر خوب به معادله آن که بر حسب متغیر n نوشته شده است دقت کنید بلافاصله به یاد معادله خط ار کلاس نهم خواهید افتاد یعنی عبارت $y = ax + b$. اما همه ی الگوها لزوماً خطی نیستند. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱۲.۱. با توجه به شکل زیر تعداد مربع‌ها را در هر مرحله بنویسید. آیا این الگو خطی است؟ چگونه می‌توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟



مثال ۱۳.۱. الگوی ۵, ۱۲, ۲۱, ۰۰۰ را در نظر بگیرید. آیا الگو خطی می باشد؟ به کمک دو شکل زیر سعی کنید جمله n ام آن را بیابید.



$t_1 = (1+2)^2 - 4 \quad t_2 = (2+2)^2 - 4 \quad t_3 = (3+2)^2 - 4 \quad t_4 = (4+2)^2 - 4 \dots t_n =$

تذکر : در مثال بالا نتیجه جالب و پرکاربرد $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ را بدست آوردیم. مشابه به مجموع فوق می توان مجموع مربعات و مکعبات اعداد طبیعی را هم بدست آورد. تلاش شما برای اثبات روابط بسیار مهم زیر خالی از اجر نیست!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۲.۳.۱ دنباله ها

همانطور که در بخش قبل دیدیم از روی الگوهای هندسی می توان اعدادی را استخراج کرده و به دنباله هم نوشت. اعداد بدست آمده را از چپ به راست می نویسیم و ترتیب آنها را هم حفظ می کنیم . در واقع این نکته بسیار مهمی است که اعداد نامنظم کنار هم قرار نگرفته اند بلکه دارای نظم و ترتیب هستند.

تعریف ۷.۱. به هر تعداد از اعداد که آنها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله گوئیم. هر عدد که در دنباله قرار دارد را یک عضو دنباله گوئیم و جمله n ام یا جمله عمومی دنباله را با نماد a_n نمایش می دهیم. نماد رایج برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله نماد $\{ \}$ است. مثلاً می نویسم $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n}$ یا معادلاً عبارت

$$\left\{ \frac{n^2 + 1}{5n} \right\}$$

تمرین ۱۱.۱. پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

$$b_n = (n + 2)^{-n}$$

$$c_n = n^n$$

$$d_n = -n^2 + 8n$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f_n = \frac{n}{n+2}$$

$$g_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$p_n = \sqrt[n]{n}$$

مثال ۱۴.۱. الگوهای عددی زیر همگی مثال هایی برای دنباله محسوب می شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

a) $-1, -2, -3, -4, \dots$

b) $5, 18, 31, 44, \dots$

c) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$

d) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

e) $1, 4, 9, 16, \dots$

f) $1, 2, 4, 7, \dots$

h) $3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots$

k) $-1, 8, -27, 64, \dots$

l) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

m) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$

n) $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

p) $2, 8, 24, 64, 160, \dots$

یادداشت تاریخی: لئوناردو فیبوناتچی (حدود ۱۱۷۰-حدود ۱۲۵۰) نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است. برای مطالعه بیشتر در گوگل فیبوناتچی را جستجو کنید.

در اینجا ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه یافتن جمله عمومی از روی چند جمله اول هر دنباله ای در حالت کلی ممکن نیست. مثلا دنباله اعداد اول دارای جمله عمومی نیست. دوم اینکه از روی چند جمله اول یک دنباله نمی توان بصورت منحصر بفرد جمله عمومی را یافت. مثلا دنباله قسمت e مثال بالا را که جمله عمومی آن بصورت $a_n = n^2$ بدست آمده می توانست بصورت $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n^2$ نیز باشد چرا که دقیقا همین اعداد ۱۶، ۹، ۴، ۱ را تولید می کند اما مشخص است که از جمله چهارم به بعد این دو دنباله کاملا متفاوت هستند.

مثال ۱۵.۱ الف : جمله عمومی دنباله ای بصورت $a_n = n^2 - 10n + 18$ است. کوچکترین جمله دنباله جمله چندم است. ب: جمله عمومی یک دنباله بجای اینکه بر حسب n بیان شود بر حسب $3n - 1$ بیان شده است. به عبارت بهتر داریم : $a_{3n-1} = \frac{6n-2}{3n+3}$ جمله بیستم دنباله چه عددی است؟ آیا می توان جمله عمومی دنباله را بدست آورد؟

بیشتر بدانیم: دو نوع خاص دنباله وجود دارد که از اهمیت ویژه ای برخوردار است. اول دنباله های یکنوا: دنباله ای که جملات آن مرتبا از اولین جمله افزایش یابند را دنباله صعودی گوئیم. در مقابل چنانچه دنباله ای از اولین جمله شروع به کاهش کند ، دنباله را نزولی گوئیم. توجه کنید که یک دنباله ممکن است نه صعودی باشد و نه نزولی. منظور از دنباله یکنوا دنباله ای است که یا صعودی باشد یا نزولی. دوم دنباله های کراندار: دنباله ای را کراندار گوئیم که همواره جملات آن بین دو عدد حقیقی قرار گیرند.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله صعودی و کراندار است}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله نه صعودی است و نه نزولی اما کران دار است}$$

$$c_n = \frac{1}{n} \rightarrow \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله نزولی و کران دار است}$$

$$d_n = (-1)^n n^2 \rightarrow \{-1, 4, -9, 16, -25, 36, \dots\} \rightarrow \text{نه صعودی و نه نزولی و نه کران دار}$$

۳.۳.۱ دنباله حسابی

تعریف ۸.۱. دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند. فرض کنید جمله اول دنباله a و قدر نسبت عدد d باشد در این صورت جملات ابتدایی دنباله بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1} \quad \underbrace{a+d}_{a_2} \quad \underbrace{a+2d}_{a_3} \quad \underbrace{a+3d}_{a_4} \quad \dots \quad \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}$$

به این ترتیب جمله عمومی دنباله حسابی بصورت زیر حاصل می شود:

$$a_n = a + (n - 1)d$$

تعداد جملات $n =$ ، قدر نسبت $d =$ ، جمله اول $a_1 =$

مثال ۱۶.۱. در دنباله حسابی $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots$ جمله ۱۸ ام را بیابید. آیا جمله ای وجود دارد که برابر با ۲۴- شود؟

مثال ۱۷.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{11} = 48$ ، $a_5 = 24$ مطلوبست محاسبه a_{20} .

مثال ۱۸.۱. در دنباله حسابی $200, 204, 208, \dots$ کدام جمله صفر است؟

نکته مهم: فرض کنید سه عدد a, b, c تشکیل دنباله حسابی داده باشند. در این صورت باید $b - a = c - b$ در نتیجه باید $b = \frac{a+c}{2}$. در این حالت b را واسطه حسابی بین a و c گوئیم.

مثال ۱۹.۱. در یک دنباله حسابی غیر ثابت (یعنی $d \neq 0$) چند جمله اول بصورت زیر است. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$a + 2, a^2 + 2a + 2, a^3 + 2 \dots$$

مثال ۲۰.۱. فرض کنید $b \neq 1$ باشد. نشان دهید که سه عدد $\frac{1}{1+\sqrt{b}}, \frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-\sqrt{b}}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند.

مثال ۲۱.۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بیابید که اضلاع آن تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۲.۱. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۲۷ و مجموع مربعات آنها ۲۹۳ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

مثال ۲۳.۱. بین دو عدد ۴ و ۳۶ سه واسطه حسابی درج کنید به عبارت بهتر بین این دو عدد ۳ عدد چنان قرار دهید که ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۴.۱. در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است، مجموع سه جمله اول برابر $6\sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر $6\sqrt{2}$ است. همچنین می دانیم $a_{15} = \frac{3}{4}a_{10}$. این دنباله چند جمله دارد؟

مثال ۲۵.۱. فرض کنید a_s, a_r, a_n, a_m چهار جمله از یک دنباله حسابی باشند بطوریکه $m+n = r+s$ باشد. نشان دهید در این حالت باید داشته باشیم $a_m + a_n = a_r + a_s$. بویژه اگر $m+n$ زوج باشد آنگاه $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ در حالت خاص $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$

مثال ۲۶.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{13} + a_{18} = 130$ ، $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 120$ است. جمله ۳۰ ام دنباله را بدست آورید.

مثال ۲۷.۱. مجموعه A شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۴ است. مجموعه B نیز شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۵ و قدرنسبت ۶ است. مطلوبست محاسبه $n(A \cap B)$.

تمرین ۱۲.۱. فرض کنید که p^2, q^2, r^2 سه جمله متولی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد

نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. $\frac{1}{p+q}$, $\frac{1}{r+p}$, $\frac{1}{q+r}$

تمرین ۱۳.۱. اعداد $1 + 2\sqrt{x}$, $2 + 3\sqrt{x}$, $6 - 7\sqrt{x}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱۴.۱. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲ و مجموع مربعات ۲۴۶ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۱۵.۱. در یک دنباله حسابی $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = 0$ است. در این صورت حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{3n-1}}{a_4 + a_7 + a_{10} + \dots + a_{3n+1}}$$

تمرین ۱۶.۱. در دنباله حسابی $0, -161, -152, \dots$ چند جمله منفی است؟

بیشتر بدانیم: می خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را در حالت کلی بیابیم. اگر این مجموع را با S_n نمایش دهیم هدف یافتن عبارت

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

است. بدین منظور همان روشی را که کارل فردریش گاوس معروف در دوره دبستان انجام داد را بکار میگیریم.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n)$$

حال اگر مقدار جملات را از روی جمله عمومی جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ جمله}}$$

بنابر این به دستور جالب زیر می رسم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

الف) درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

c) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

d) $3 + 7 + 11 + \dots + 79 = 820 \implies n = ?$

ب) در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از دستور $S_n = 2n^2 + n$ حاصل می‌شود. مطلوبست محاسبه a_n, d .

ج) مجموع چند جمله از دنباله $۰, ۱۶, ۲۱, ۲۶$ برابر ۷۴ است؟

۴.۳.۱ دنباله هندسی

می‌گویند یک هندی برای اولین بار شطرنج را اختراع نمود و به پادشاه هند تقدیم کرد. پادشاه که بازی شطرنج را بسیار پسندیده بود به مخترع قول داد هر جایزه‌ای درخواست کند قبول خواهد کرد. مخترع خوش ذوق و ریاضیدان، درخواستی عجیب نمود. او گفت من تقاضا و توقع زیادی ندارم فقط پادشاه لطف نموده دستور دهند به ازای خانه اول صفحه شطرنج یک دانه گندم، خانه دوم دو دانه گندم، خانه سوم چهار دانه گندم و بدین ترتیب به ازای هر خانه دو برابر خانه قبل گندم به من اهدا نمایند. پادشاه و اطرافیان درخواست مخترع را به دیده حقارت و تمسخر نگریستند و خزانه دار مامور شد فی الفور خواسته مخترع را برآورده سازد. ساعاتی بعد خزانه دار به حضور پادشاه رسید و در کمال ناباوری همگان گفت: پادشاه به سلامت باد اگر کلیه خزائن کشور را از گندم تهی نموده به مخترع دهیم باز هم تعداد زیادی از خانه‌های شطرنج باقی می‌مانند و از برآوردن خواسته مخترع عاجزیم!

جدای از صحت و سقم داستان فوق بیاید امکان تهیه گندم را بررسی کنیم. مجموع گندم خواسته شده برابر است با:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64} = 18446744073709551615$$

وزن هر دانه گندم را 0.4 گرم بگیرید در این صورت حاصل برابر است با

$$0.4 \times 18446744073709551615 = 7378697629483820646 \text{ gr} = 737869762948 \text{ ton}$$

تولید این مقدار گندم تقریباً هزار سال طول می‌کشد! در واقع هدف از بیان این داستان معرفی دنباله‌های هندسی و سرعت شگفت‌انگیز رشد یا زوال آنهاست.

تعریف ۹.۱. دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله مینامیم. جمله اول دنباله هندسی $a \neq 0$ است. قدرنسبت را با q نشان می‌دهیم. در حالت‌های خاص اگر $q = 1$ و $q = 0$ باشد دنباله‌های خاصی پدید می‌آیند. اگر $q = 0$ باشد دنباله بصورت $0, 0, 0, \dots$ و اگر $q = 1$ باشد دنباله ثابت a, a, a, \dots حاصل می‌شوند.

برای یافتن جمله عمومی یک دنباله هندسی فرض می‌کنیم جمله اول آن a و قدرنسبت q باشد در این صورت ترتیب جملات بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1} \quad \underbrace{aq}_{a_2} \quad \underbrace{aq^2}_{a_3} \quad \dots \quad \underbrace{aq^{n-1}}_{a_n} \quad \dots$$

بنابراین جمله n ام یا جمله عمومی دنباله هندسی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$a_n = aq^{n-1}$$

تعداد جملات = n ، قدر نسبت = q ، جمله اول = a

مثال ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. آنهایی را که هندسی هستند مشخص کرده و قدر نسبت و جمله عمومی آنها را بیابید.

a) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸,

b) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots$

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

d) ۵, ۵, ۵, ...

e) ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ...

f) ۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, ...

g) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{2}, \dots$

h) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$

k) ۳, $\sqrt{3}, 1, \dots$

مثال ۲۹.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ جمله چندم برابر $\frac{1}{128}$ است؟

مثال ۳۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_5 = 162, a_8 = 4374$ است. جمله سوم را بدست آورید.

مثال ۳۱.۱. سه عدد a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. ثابت کنید: $b^2 = ac$. (در این حالت b را واسطه هندسی بین a و c گویند.)

مثال ۳۲.۱. سه عدد $a + 5, a + 2, 4a + 4, 10a - 4$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. قدر نسبت را بیابید.

مثال ۳۳.۱. پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ درج کنید.

مثال ۳۴.۱. سه عدد $81^{\frac{1}{4}}, 3b^2, 3^b$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. b را بیابید.

مثال ۳۵.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}, \dots$ جمله سیزدهم را بیابید.

مثال ۳۶.۱. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{130}{3} \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{260}{9} \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

مثال ۳۷.۱. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 108 \\ a_4 \times a_6 = 162 \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

تذکر مهم: در یک دنباله هندسی که جمله اول آن مثبت است چنانچه $q > 1$ باشد دنباله افزایشی است و اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله کاهشی است. اگر $q = -1$ باشد دنباله متناوب است و اگر $q < 0$ باشد دنباله نوسانی است.

مثال ۳۸.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت افزایشی اند. قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.

مثال ۳۹.۱. چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر 2^0 و مجموع دو عدد بزرگتر برابر 4^5 است. بزرگترین این اعداد کدام است؟

تمرین ۱۷.۱. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ و جمله وسطی $3\sqrt{2}$ است. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۱۸.۱. در یک دنباله هندسی حاصلضرب سه جمله اول -8 و حاصلجمع جملات اول و سوم برابر -5 است. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۱۹.۱. در یک دنباله هندسی $a_{20} - a_{19} = 1024$, $a_{10} - a_9 = 1$ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۲۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_2 + a_4 + a_6 = 546$, $a_3 + a_5 + a_7 = 1638$ است. حاصلضرب چند جمله دنباله برابر 11664 می شود؟

تمرین ۲۱.۱. عدد 325 را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند و اختلاف دو عدد بزرگتر برابر 15^0 باشد.

تمرین ۲۲.۱. جمله اول یک دنباله هندسی $\sqrt{2} - 1$ است. جمله دوم دنباله چه عدد صحیحی باشد تا جمله ششم برابر $12\sqrt{2} + 17$ شود؟

تمرین ۲۳.۱. در یک دنباله حسابی و غیرثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

بیشتر بدانیم: در این قسمت می‌خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را بدست آوریم. اگر جمله اول را با a و قدر نسبت را با q نشان دهیم هدف محاسبه عبارت $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ است. بدین منظور داریم:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

کم کردن طرفین ۲ رابطه بالا

$$qS_n - S_n = aq^n - a$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

تعداد جملات $n =$ قدر نسبت $q =$ جمله اول $a =$

بویژه در یک حالت خاص که $|q| < 1$ است مشاهده می‌کنیم که چنانچه n به قدر کافی بزرگ باشد آنگاه $q^n \approx 0$ است و لذا رابطه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - q}$$

۱ - در یک دنباله هندسی $S_2 = 9$ ، $S_6 = -63$ است مطلوبست محاسبه S_1 .

۲ - مجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ را بیابید.

۳ - اگر $|q| < 1$ باشد حاصل $(1 - q + q^2 - q^3 + \dots)(1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$ را بدست آورید.

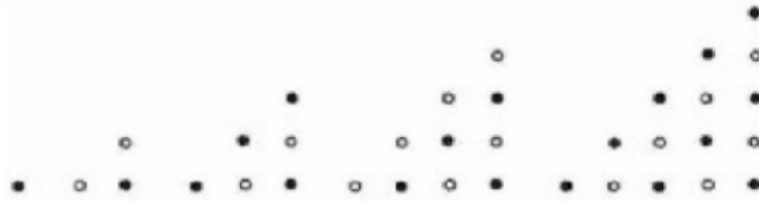
۴ - در یک دنباله هندسی داریم $S_{2n} = 17S_n$. مطلوبست محاسبه q .

۵ - حاصل عبارت $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n$ را بیابید.

۶ - توپی از ارتفاع ۵ متری پرتاب می‌شود و پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود تا ساکن شود. کل مسافتی که توپ طی می‌کند را محاسبه کنید.

تمرین الگو، دنباله های حسابی و هندسی

تمرین ۲۴.۱. با توجه به شکل زیر و الگوی آن در شکل پانزدهم چند دایره سیاه رنگ دیده می شود؟



تمرین ۲۵.۱. کوچکترین جمله ی دنباله های زیر را بیابید.

$$a) a_n = n^2 - 20n$$

$$b) a_n = n + \frac{16}{n}$$

تمرین ۲۶.۱. بزرگترین جمله دنباله های زیر را بیابید.

$$a) a_n = -2n^2 + 20n - 15$$

$$b) a_n = \frac{1}{n^2 + 10n + 5}$$

تمرین ۲۷.۱. دنباله $a_n = n + 3 + \frac{8}{n+1}$ چند جمله صحیح دارد؟

تمرین ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. کدام هندسی یا حسابی اند؟

$$a) \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$$

$$b) 2, 5, 9, 14, \dots$$

$$c) \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{16}, \dots$$

$$d) \sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}, \dots$$

تمرین ۲۹.۱. دنباله $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, \frac{1}{64}, \dots$ مفروض است. جمله عمومی آن را بنویسید.

تمرین ۳۰.۱. فرض کنید a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. ثابت کنید $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{2b}$ و $\frac{1}{b+c}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۳۱.۱. اعداد فرد را بصورت $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$ دسته بندی کرده ایم. در دسته سی ام مجموع دو جمله اول و آخر را بیابید.

تمرین ۳۲.۱. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع جملات دنباله سه برابر مجموع جملات ردیف فرد دنباله باشد قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۳۳.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول، نهم و چهل و نهم بترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۳۴.۱. اعداد a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد a, c, b تشکیل دنباله هندسی می دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بدست آورید.

تمرین ۳۵.۱. دستوری برای جمله عمومی دنباله $\frac{5}{3}, \frac{8}{6}, \frac{11}{11}, \frac{14}{18}, \dots$ بیابید.

تمرین ۳۶.۱. در دنباله زیر چند جمله مشترک کمتر از 190 وجود دارد؟

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \\ 2, 7, 12, 17, \dots \end{cases}$$

تمرین ۳۷.۱. بین دو عدد $a+8$ ، a سه واسطه هندسی درج کرده ایم. اگر مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $8\sqrt{2}$ باشد، a را بدست آورید.

تمرین ۳۸.۱. در دنباله هندسی که جمله اول آن 10 و قدرنسبت آن 5 است چند جمله کمتر از 10000 داریم؟

تمرین ۳۹.۱. مجموع جملات یک دنباله هندسی ($|q| < 1$) برابر 8 و مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر $\frac{64}{3}$ است. جمله اول را بیابید.

تمرین ۴۰.۱. حاصل عبارت $(1-x+x^2-\dots+x^8)(1+x+x^2+\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.

۴.۱ تست‌های فصل اول

۱- اعداد $5p - 1$, $3p + 4$, $2p + 3$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۴

۲- اگر $A = \sqrt{252} \cdot 0$ باشد حاصل $\frac{1}{A - 0.25}$ کدام است؟

- (۱) ۴۴۱ (۲) ۴۴۲ (۳) ۴۴۳ (۴) ۴۴۴

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۳- عرض یک مستطیل ۴ متر است. اگر اندازه‌ی طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، مربع قطر مستطیل کدام است؟

- (۱) $5(1 + \sqrt{5})$ (۲) $6(1 + \sqrt{5})$ (۳) $8(5 + \sqrt{5})$ (۴) $8(6 + \sqrt{5})$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۴- اگر جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی ۴ و حد مجموع جملات این تصاعد ۱۶ باشد جمله‌ی چهارم کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{9}{32}$ (۳) $\frac{27}{16}$ (۴) $\frac{27}{32}$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۵- اگر S_n مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی و سه جمله اول دنباله S_n به صورت $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ باشد جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) ۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۵

۶- اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در Z با پایان است؟

- (۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۷- قطار سریع‌السیر به طور آزمایشی، فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است، طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود، تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۸- در آرایه‌ی مربعی مقابل، تفاضل صفرهای توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۹- تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{3}$ و X و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$\frac{41}{32} \text{ (۱)} \quad \frac{21}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{11}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{23}{16} \text{ (۴)}$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۶

۱۰- ده عدد جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی‌اند، مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر آن‌ها ۱۳۰ می‌باشد، کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

$$3 \text{ (۱)} \quad 4 \text{ (۲)} \quad 5 \text{ (۳)} \quad 6 \text{ (۴)}$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۱- در دنباله‌ی مثلثی هر جفت از جمله‌های متوالی را با هم جمع می‌کنیم. اعداد حاصل کدام نوع دنباله است؟

$$1 \text{ (مربعی)} \quad 2 \text{ (هندسی)} \quad 3 \text{ (حسابی)} \quad 4 \text{ (فیوناتچی)}$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۲- اعداد 2^a ، $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی از تصاعد هندسی‌اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

$$2/5 \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1/5 \text{ (۳)} \quad \sqrt{2} \text{ (۴)}$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۷

۱۳- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

$$81 \frac{3}{8} \text{ (۱)} \quad 81 \frac{7}{8} \text{ (۲)} \quad 82 \frac{3}{8} \text{ (۳)} \quad 83 \frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۱۴- مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$ است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از

جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

$$132 \text{ (۱)} \quad 145 \text{ (۲)} \quad 148 \text{ (۳)} \quad 154 \text{ (۴)}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۹

۱۵- در یک دنباله‌ی هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله‌ی قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله‌ی اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله‌ی اول

کدام است؟

$$1 \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 3 \text{ (۳)} \quad 4 \text{ (۴)}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۶- در دنباله‌ی فیوناتچی، دومین عدد بخش‌پذیر بر ۱۳ کدام است؟

$$364 \text{ (۱)} \quad 377 \text{ (۲)} \quad 390 \text{ (۳)} \quad 403 \text{ (۴)}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۷- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۸- اگر $k \in Z$ (عدد صحیح نسبی) آنگاه مجموعه اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

(۱) $2k-5$ (۲) $2k+6$ (۳) $3k-1$ (۴) $3k+1$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۱

۱۹- در تصاعد هندسی $...., 4, 2, 1$ ، مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟

(۱) ۶۵ (۲) ۶۳ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۲۹

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۰

۲۰- جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۱- اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C \neq \emptyset$ (۳) $A \cap (B \cap C) = \emptyset$ (۴) $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۲- شخص در ماه اول A ریال پس‌انداز کرده، در هر ماه به اندازه‌ی $\frac{1}{4}A$ بیش‌تر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند، تا مقدار پس‌انداز یک ماه آن به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان مجموع پس‌انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چه قدر بوده است؟

(۱) ۱۶۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۲۲۰۰ (۴) ۲۴۰۰

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۳- در دنباله‌ی مثلثی $...., 6, 3, 1$ مجموع جملات دهم و یازدهم، کدام است؟

(۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۳۲ (۴) ۱۴۴

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۴- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۱

۲۵- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد، ...، (۱۱، ۹، ۷)، (۳، ۵)، (۱) جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟

$$415 \quad (1) \quad 419 \quad (2) \quad 421 \quad (3) \quad 423 \quad (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۶- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

$$428 \quad (1) \quad 484 \quad (2) \quad 486 \quad (3) \quad 488 \quad (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۷- اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $[A - (A \cap B)] - (A \cup B)$ چند عضو دارد؟

$$2 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۲۸- مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله‌ی حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله کوچک‌تر است. قدر نسبت آن کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 7 \quad (4)$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۲۹- در دنباله‌ی مثلثی با جمله اول ۱، جمله چهاردهم کدام است؟

$$84 \quad (1) \quad 98 \quad (2) \quad 105 \quad (3) \quad 108 \quad (4)$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۳۰- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

$$2 + \sqrt{3} \quad (1) \quad 5 + 2\sqrt{3} \quad (2) \quad 5 + 4\sqrt{3} \quad (3) \quad 7 + 4\sqrt{3} \quad (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۲

۳۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

$$\frac{117}{16} \quad (1) \quad \frac{125}{16} \quad (2) \quad \frac{63}{4} \quad (3) \quad \frac{127}{8} \quad (4)$$

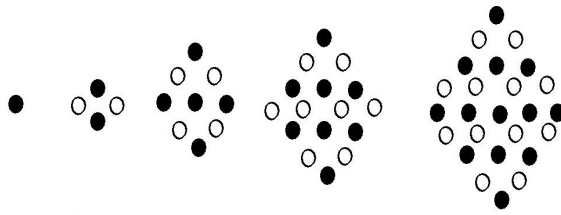
دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۳۲- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جمله‌ی سوم این تصاعد کدام است؟

$$6 \quad (1) \quad 8 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

۳۳- در آرایه‌ی لوزی مقابل تعداد صفرهای توپر، در جمله‌ی یازدهم، کدام است؟



- ۶۱ (۱)
- ۶۲ (۲)
- ۶۳ (۳)
- ۶۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

۳۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهارجمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع ۶ جمله‌ی اول کدام است؟

- ۱۰/۸ (۱)
- ۱۱/۲ (۲)
- ۱۲/۶ (۳)
- ۱۳/۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۸

۳۵- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این تصاعد، صفر است؟

- ۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۱ (۳)
- ۱۲ (۴)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۸۸

۳۶- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد:

... (۱, ۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), (۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰), ...

- ۱۶۹۱ (۱)
- ۱۷۱۰ (۲)
- ۱۷۲۹ (۳)
- ۱۷۴۸ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۷- تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک تصاعد عددی ۵ و مجموع جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست‌ویکم این تصاعد کدام است؟

- ۳۵ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۳۷/۵ (۳)
- ۳۸/۵ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۸- در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟

- ۷/۵ (۱)
- ۸ (۲)
- ۸/۵ (۳)
- ۹ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۳۹- اعداد $\frac{5}{3}, X, Y, \frac{5}{2}, \dots$ چهار جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

- ۵۷ (۱)
- ۶۲/۵ (۲)
- ۶۷/۵ (۳)
- ۶۸ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

۴۰- در یک تصاعد عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت تصاعد هندسی کدام است؟

- $\frac{6}{5}$ (۱)
- $\frac{5}{4}$ (۲)
- $\frac{4}{3}$ (۳)
- $\frac{3}{2}$ (۴)

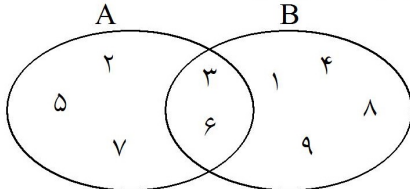
دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

۴۱- در بیست جمله‌ی اول تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۵

۴۲- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

۴۳- مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله حسابی‌اند برابر ۱۰۵، مجموع سه عدد بزرگ‌تر، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

- ۳۸ (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

۴۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

- $\frac{81}{16}$ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۹

۴۵- در یک تصاعد عددی جمله‌ی a_n به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

- ۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۸۹

۴۶- حد مجموع جملات دنباله هندسی $1, 6, 36, \dots$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۴۷- در دنباله مثلثی با جمله اول ۱، در جمله چندم عدد مربع کامل غیر ۱ نوشته است؟

- ۱) ششم ۲) هفتم ۳) هشتم ۴) نهم

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۴۸- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع

این هشت عدد کدام است؟

- ۳۰ (۱) $48\sqrt{2}$ (۲) $30(\sqrt{2}+1)$ (۳) $36(\sqrt{2}+1)$ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۴۹- در یک تصاعد عددی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این تصاعد برابر صفر است؟

۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۸

۵۰- در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۰

۵۱- در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۰

۵۲- مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟

۴۰ (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۳- در یک دنباله‌ی هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله‌ی اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می‌باشد. مجموع این ۶ جمله، کدام است؟

۱۳۳ (۱) ۱۳۸ (۲) ۱۲۴ (۳) ۱۱۵ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۴- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۵- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی چهارم ۸ برابر جمله‌ی اول است. اگر جمله‌ی ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن، کدام است؟

۴۷/۲۵ (۱) ۴۷/۵ (۲) ۴۷/۷۵ (۳) ۴۸/۵ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۶- به ازای یک مقدار x، اعداد $x-8$ ، x و $x+12$ ، به ترتیب سه جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

۱۸ (۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۳

۵۷- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

$$\frac{1}{3} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad 2 (3) \quad 3 (4)$$

دیپیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵۸- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد. ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ... مجموع دو جمله‌ی اول و آخر دسته‌ی سی‌ام، کدام است؟

$$1700 (1) \quad 1750 (2) \quad 1800 (3) \quad 1850 (4)$$

دیپیرستان - سراسری - تجربی - ۹۴

۵۹- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد، ... (۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), ... مجموع جملات در دسته‌ی بیستم، کدام است؟

$$4010 (1) \quad 4020 (2) \quad 4030 (3) \quad 4040 (4)$$

دیپیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۴

۶۰- در دو دنباله‌ی حسابی به صورت‌های $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$58 (1) \quad 59 (2) \quad 60 (3) \quad 61 (4)$$

دیپیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵.۱ کلید تست‌های فصل اول

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۲

مثلثات

از نامگذاری مثلثات می توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به نحوی با ”مثلث“ و مساله های مربوط به مثلث ارتباط داشته است . در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه ای از تلاش های ریاضی دانان در جهت رفع دشواری های مربوط به محاسبه هایی دانست که در هندسه و در اخترشناسی رو به روی دانشمندان بوده است . در ضمن دشواری های هندسی ، خود ناشی از مساله هایی بوده است که دانشمندان در اخترشناسی با آن رو به رو می شده اند و بیشتر جنبه ی محاسباتی داشته اند . پس احتمالاً مثلثات برای استفاده از ستاره شناسی (اخترشناسی) ایجاد شده و کاربرد های اولیه آن نیز در همین باره بوده است . در اخترشناسی اغلب به مساله هایی برخورد می کنیم که برای حل آن ها به مثلثات و دستورهای آن نیازمندیم . ساده ترین این مسائل، پیدا کردن یک کمان دایره (برحسب درجه) است ، وقتی که شعاع دایره و طول وتر این کمان معلوم باشد یا برعکس ، پیدا کردن طول وتری که طول شعاع دایره و اندازه کمان آن معلوم باشد . کهن ترین جداولی که از دانشمندان قدیمی به جای مانده است ، متعلق به اخترشناسان و ریاضی دانان سده ی دوم میلادی است و شاید بتوان این جداول را نخستین گام در پیدایش مثلثات دانست ولی همه ی کارهای این ریاضی دانان و اخترشناسان که یونانی بوده اند، در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم های اصلی مثلثات نرسیده اند .

نخستین گام های اصلی به وسیله ی آریابهاتا ریاضی دان هندی سده ی پنجم میلادی برداشته شد که در واقع تعریفی برای نیم وتر یک کمان داد . از این به بعد به تقریب همه کارهای مربوط به شکل گیری مثلثات (چه در روی صفحه و چه در روی کره) به وسیله ی دانشمندان ایرانی انجام گرفت .

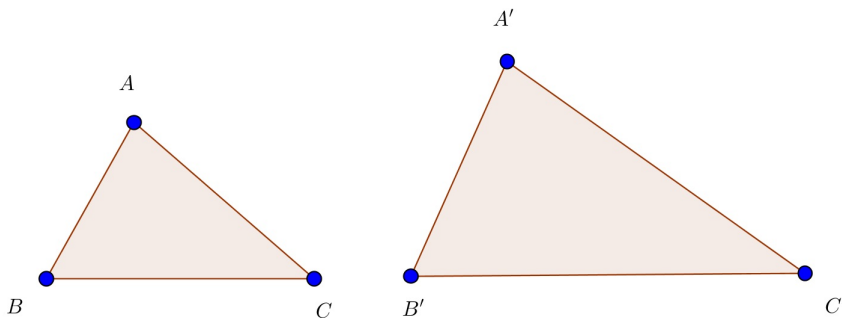
خوارزمی نخستین جدول های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ی ریاضی دانان ایرانی گام هایی در جهت تکمیل جدول ها و گسترش مفهوم های مثلثاتی برداشتند . احمدابن عبدالله حبش حاسب جدول سینوس ها را تقریباً 30° درجه به 30° درجه تنظیم کرد و برای گسترش و برای نخستین بار به دلیل نیاز های اخترشناسی مفهوم ”تانژانت“ را تعریف کرد . جدی ترین تلاش ها بوسیله ی ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت که توانستند مثلثات را تا جایی پیش ببرند که مثلث کروی را هم حل کنند . ابوالوفا با روش جالبی به یاری نابرابری ها توانست مقدار سینوس کمان 30° دقیقه را پیدا کنند و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با

جمع بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت^۱. بعد از طوسی جمشید کاشانی ریاضی دان ایرانی زمان تیموریان با روش زیبایی که برای حل معادله‌ی درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی برای محاسبه‌ی کمان یک درجه با هر دقت دلخواه پیدا کند.

پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده‌ی پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت. یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را نشان میدهد از این قرار است: ریاضی دانان ایرانی برای سینوس از واژه‌ی «جیب» و برای کسینوس از واژه‌ی «جیب تمام» استفاده می‌کردند. وقتی نوشته‌های ریاضی دانان به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان اروپایی ترجمه شد، معنای واژه‌ی جیب را در زبان خود به جای آن گذاشتند سینوس. این کلمه در لاتین همان معنای جیب را در عربی دارد.

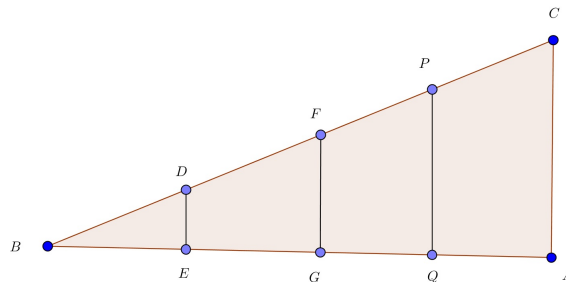
۱.۲ نسبت‌های مثلثاتی

از کلاس نهم می‌دانید چنانچه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند دو مثلث متشابه‌اند. در شکل زیر دو مثلث ABC ، $A'B'C'$ متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{cases} \implies \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

حال در دو مثلث قائم‌الزاویه برابری تنها یک زاویه حاده از مثلث اولی با یک زاویه حاده از مثلث دومی برای تشابه دو مثلث کفایت می‌کند. (چرا؟)



در شکل بالا داریم $A = E = G = Q = 90^\circ$ ولذا مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در راس B مشترکند متشابه

^۱ نام این کتاب کشف القناع فی اسرار شکل القطاع می‌باشد.

هستند. حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث‌ها بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{BE} = \frac{FG}{BG} = \frac{PQ}{BQ} = \frac{CA}{BA}$$

پس برای زاویه B همه این نسبت‌ها مقداری ثابت است. برای این نسبت ثابت نامی انتخاب می‌کنیم. این نام تانژانت زاویه B است. پس داریم:

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

عکس نسبت تانژانت را کتانژانت می‌نامیم. پس داریم:

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

به همین ترتیب در این مثلث‌های متشابه نسبت‌های زیر نیز ثابت‌اند و باید نامی برای آنها انتخاب کرد.

$$\frac{DE}{BD} = \frac{FG}{BF} = \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$$

و

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BG}{BF} = \frac{BQ}{BP} = \frac{AB}{BC}$$

اولی را سینوس و دومی را کسینوس می‌نامند. پس داریم:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

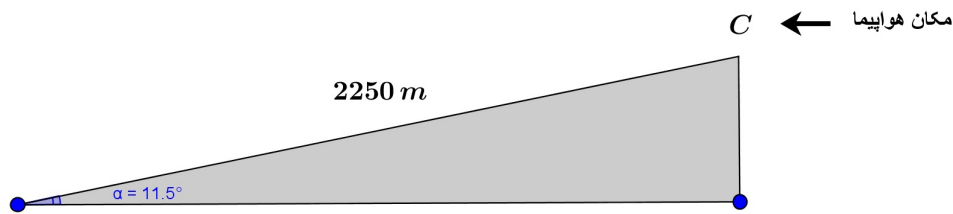
تعریف ۱.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های ، سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال ۱.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع زاویه قائمه ۱۲ و ۵ واحد تمام نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده را محاسبه کرده و مقایسه کنید.

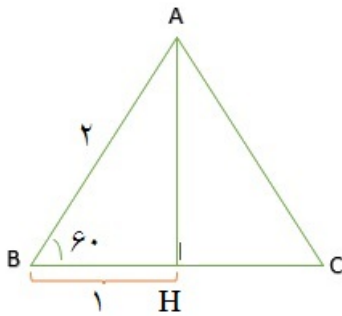
مثال ۲.۲. در مثلث قائم‌الزاویه ($\angle A = 90^\circ$)، ABC داریم: $AC = 2$ ، $\sin B = \frac{1}{3}$ مطلوبست محاسبه $\cos B$ ، $\tan B$.

مثال ۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر برابر 10° واحد است و تانژانت یکی از زوایای حاده برابر $\frac{3}{4}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

مثال ۴.۲. مطابق شکل زیر هواپیمایی در نقطه C در آسمان با خطی سیری که با افق زاویه‌ی ۱۱.۵° درجه می‌سازد به سمت فرودگاه در حال کاهش ارتفاع است. اگر هواپیما در امتداد مایل خط سیر خود ۲۲۵۰ متر طی کند تا در نقطه B در ابتدای باند به زمین بنشیند، معین کنید هواپیما در چه ارتفاعی در نقطه C قرار داشته است. ($\tan ۱۱.۵^\circ \approx ۰.۲$)

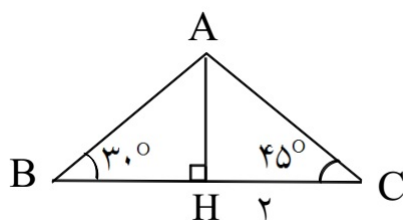


مثال ۵.۲. به کمک یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد و رسم یک ارتفاع آن نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۶۰° را محاسبه کنید.



مثال ۶.۲. یک مربع به ضلع یک رسم کرده و با رسم قطر آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° درجه را محاسبه کنید.

مثال ۷.۲. با توجه به شکل زیر مقدار BH را محاسبه کنید.



تمرین ۱.۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم: $BC = ۵$ ، $AC = ۳$ ، $\angle A = ۹۰^\circ$ ، مطلوبست محاسبه:
 $\sin B - \cos B$

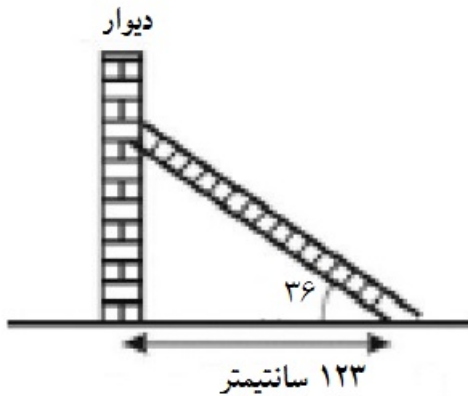
تمرین ۲.۲. مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید

$$1. \quad \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = ?$$

$$2. \quad \frac{\tan 45^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ} = ?$$

$$3. \quad 1 + \sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ + 4 \sin 30^\circ \cos 60^\circ = ?$$

تمرین ۳.۲. در شکل روبرو طول نردبان را بیابید. ($\cos 36^\circ \approx 0.8$)

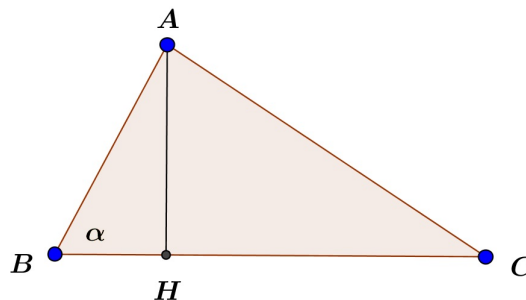


تمرین ۴.۲. سکوی پرتاب موشکی در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه ۶۰ درجه پرتاب می‌شود و به حرکت خود تحت همین زاویه ادامه می‌دهد. اگر سایه موشک روی سطح زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد خود موشک در چه ارتفاعی است و چه مسافتی در امتداد خط سیر خود طی کرده است؟

مساحت مثلث بر حسب نسبت‌های مثلثاتی

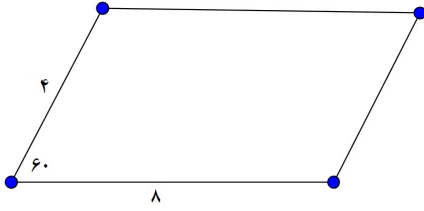
از گذشته می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر به آن ارتفاع. حال در شکل زیر می‌خواهیم مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم. برای این منظور می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times \sin \alpha \times BC}{2} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \alpha$$

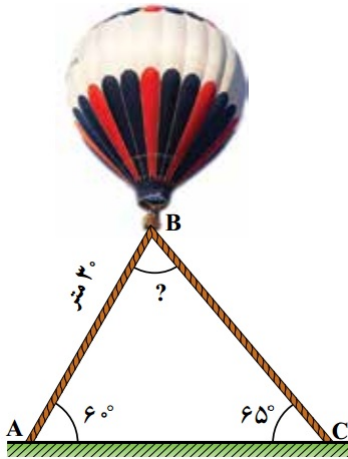


$$AH = AB \times \sin B = AB \times \sin \alpha$$

مثال ۸.۲. مساحت متوازی‌الاضلاع زیر را بدست آورید.



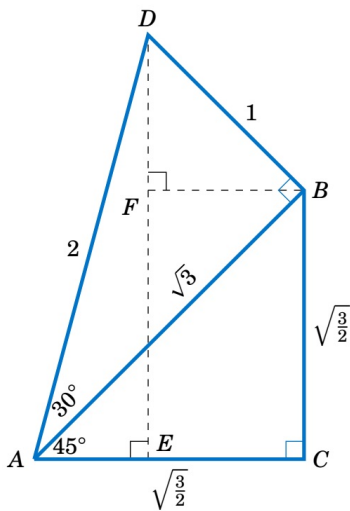
مثال ۹.۲. در شکل زیر بالنی تبلیغاتی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب دوم را بیابید.



بحث نسبت‌های مثلثاتی را با ارائه چند مثال کاربردی و متنوع پی می‌گیریم.

مثال ۱۰.۲. زاویه حاده A در مثلثی چنان است که $\sin A = \frac{2}{3}$ مطلوبست محاسبه سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه.

مثال ۱۱.۲. با توجه به شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه 75° را بدست آورید.

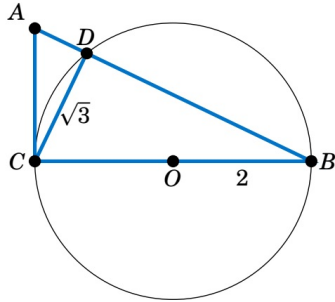


مثال ۱۲.۲. ثابت کنید در یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه حاده B , C همواره داریم: $\sin B = \cos C$ و همین‌طور $\tan B = \cot C$.

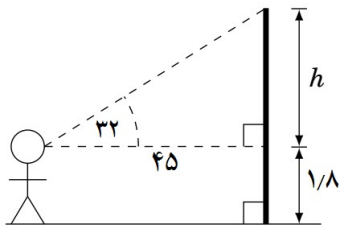
مثال ۱۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده A داریم: $\tan A = 3$. مطلوبست محاسبه سایر

نسبت‌های مثلثاتی زاویه A .

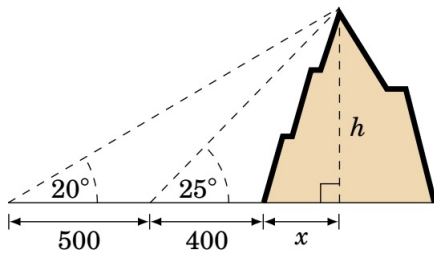
مثال ۱۴.۲. در شکل زیر قطر دایره‌ای است به شعاع ۲. مثلث ABC در راس C قائمه است و $CD = \sqrt{3}$. اولاً مقدار $\sin A$ را بدست آورید. ثانیاً طول دو پاره‌خط AD ، AC را محاسبه کنید. ثالثاً مساحت ABC را به طریق معمول و مثلثاتی بیابید.



تمرین ۵.۲. شخصی روبروی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می‌کند. زاویه دید چشمی این شخص برابر ۳۲ درجه است. (زاویه‌ی دید که نسبت به سطح افق و بالاترین نقطه میله پرچم است) ارتفاع چشم این شخص از سطح زمین برابر ۱/۸ متر است و فاصله این شخص تا میله پرچم ۴۵ متر. طول میله پرچم را بیابید.



تمرین ۶.۲. شخص در فاصله 40° متری کوهی ایستاده است و به بلندترین نقطه از کوه نگاه می‌کند. زاویه دید این شخص نسبت به افق برابر 25° درجه است. وی سپس به اندازه 50° متر به عقب برمی‌گردد و باز هم به بالاترین نقطه قله نگاه می‌کند و این بار زاویه دید برابر 20° درجه است. ارتفاع کوه را با توجه به شکل بیابید.

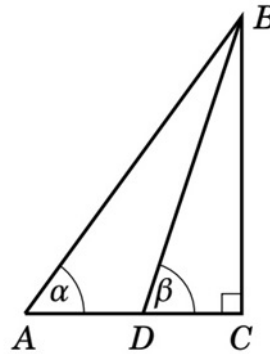


تمرین ۷.۲. با توجه به شکل زیر موارد خواسته شده را ثابت کنید.

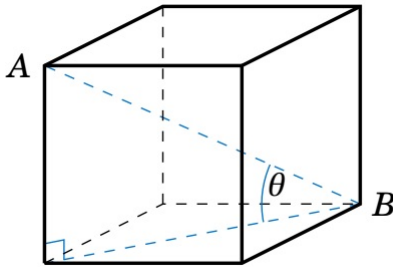
$$(a) BC = \frac{AD}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$(b) AC = \frac{AD \cdot \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

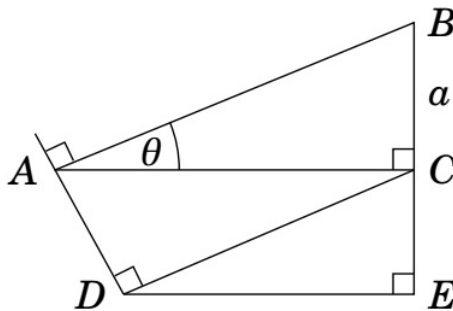
$$(c) BD = \frac{AD \cdot \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$$



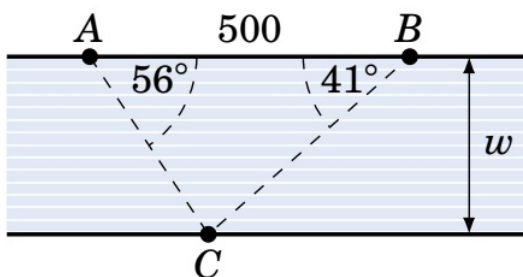
تمرین ۸.۲. مطابق شکل زیر مکعبی به ضلع a مفروض است. اولاً طول قطر مکعب را بیابید. ثانياً اندازه زاویه θ را محاسبه کنید.



تمرین ۹.۲. در شکل زیر مقادیر a ، θ را معلوم فرض کنید و طول های AC, AB, AD, DC, CE, DF را بر حسب این دو مقدار معلوم یعنی a ، θ بیابید.

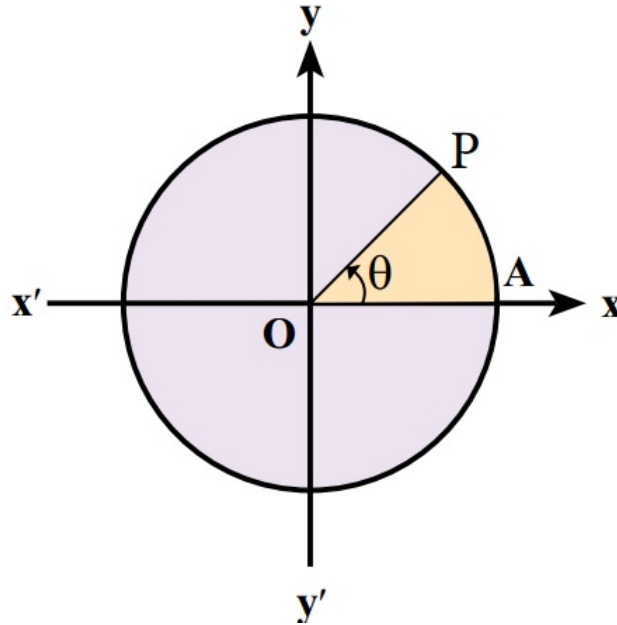


تمرین ۱۰.۲. در شکل زیر دو ساحل رودخانه موازی اند. با توجه به اطلاعات داده شده عرض رودخانه را بدست آورید.

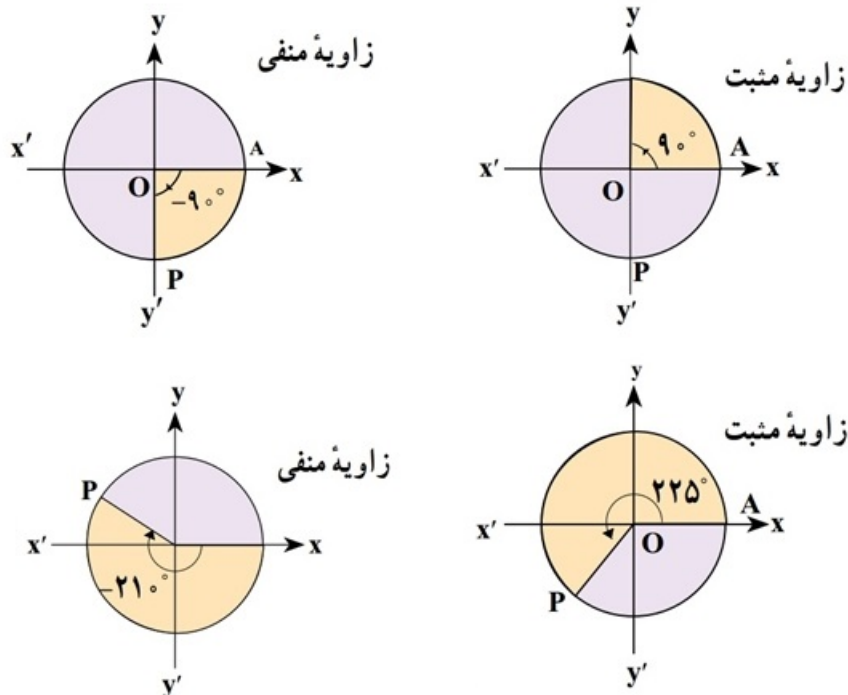


۲.۲ دایره مثلثاتی

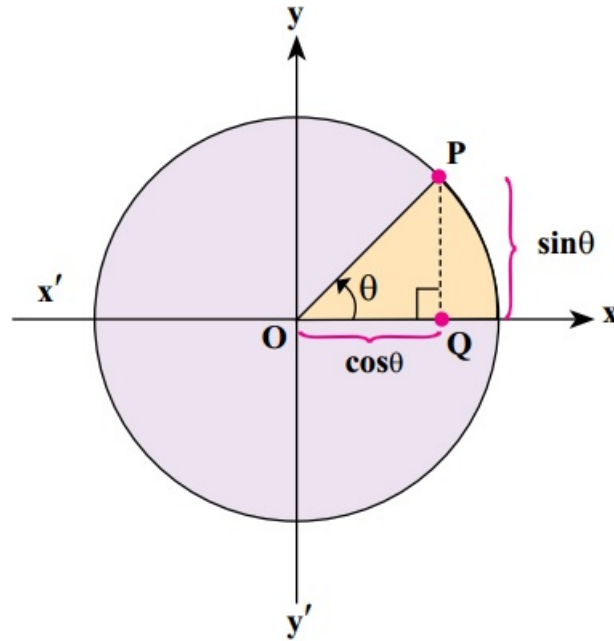
پرسشی که بطور طبیعی به ذهن می‌رسد این است که نسبت‌های مثلثاتی در مورد زوایای غیرحاده تعریف می‌شود؟ مثلاً برای زاویه 15° درجه می‌توان سینوس تعریف کرد و چگونه؟ جواب مثبت است. اما مثلث قائم‌الزاویه دیگر جوابگوی این تعریف نیست. دایره مثلثاتی را برای این منظور معرفی می‌کنیم. دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدا مختصات. اگر از نقطه $A(1, 0)$ و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت کنیم زاویه‌ای مثبت تولید خواهد شد. در صورت چرخش در جهت عقربه‌های ساعت زاویه‌ی منفی حاصل می‌شود.



در شکل زیر چند زاویه مثبت و منفی در دایره مثلثاتی دیده می‌شود.



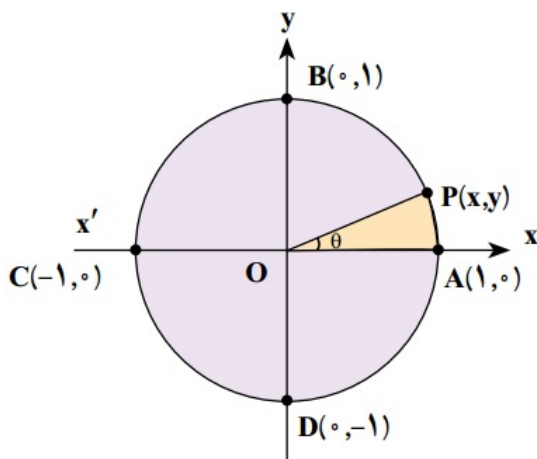
حال نقطه $p(x, y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه p عمودی بر محور طول‌ها رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی حاصل نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را محاسبه می‌کنیم.



$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = y \qquad \cos \theta = \frac{OQ}{OP} = x$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \qquad \cot \theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y}$$

مثال ۱۵.۲. در دایره مثلثاتی زیر نقاط D, C, B, A به ترتیب متناظر به زوایای $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ هستند. نسبت‌های مثلثاتی این زوایا را بدست آورید.

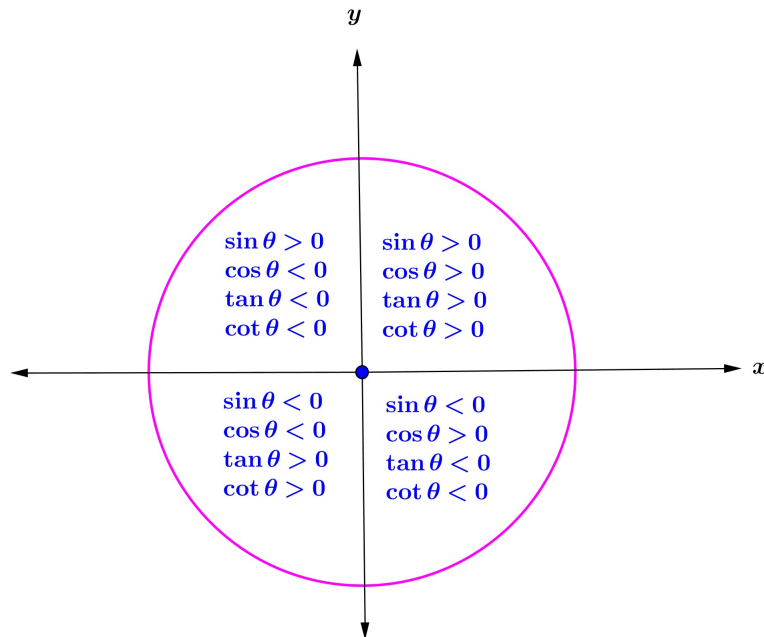


مثال ۱۶.۲. نسبت‌های مثلثاتی زاویه 225° درجه را بیابید.

مثال ۱۷.۲. زاویه θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و $\sin \theta = \frac{5}{7}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

چند تذکر مهم:

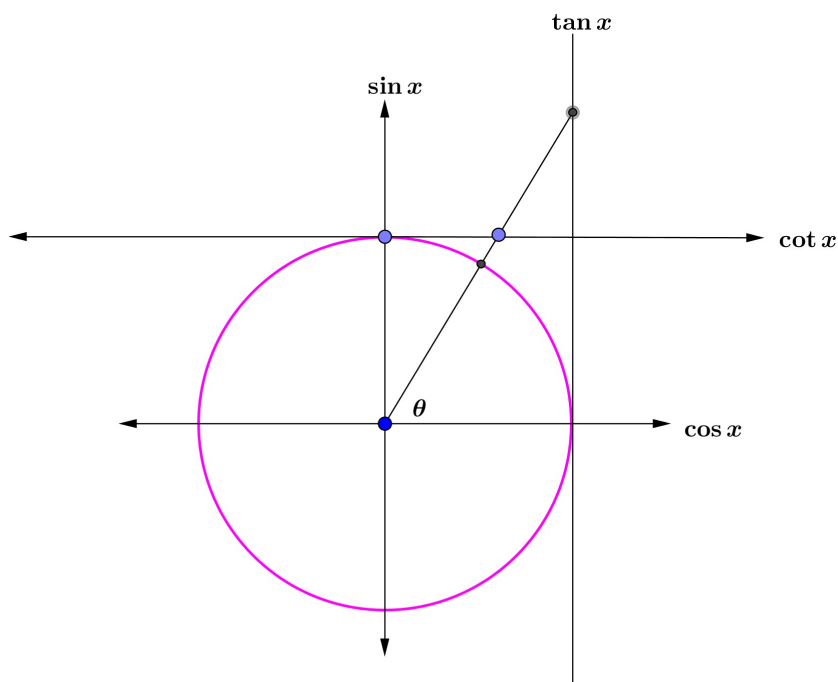
۱. علامت نسبت‌های مثلثاتی با توجه به هر ناحیه در جدول زیر گردآوری شده است.



۲. با توجه به دایره مثلثاتی و تعریف نسبت های مثلثاتی متوجه می‌شویم که همواره $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ و همین‌طور $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. اما در مورد دو نسبت دیگر یعنی $\tan \theta$, $\cot \theta$ این‌گونه نیست. در واقع این دو نسبت هر مقداری می‌توانند باشند، چه مثبت و چه منفی. به زبان ریاضی:

$$\sin \theta \in [-1, 1], \cos \theta \in [-1, 1], \tan \theta, \cot \theta \in (-\infty, +\infty)$$

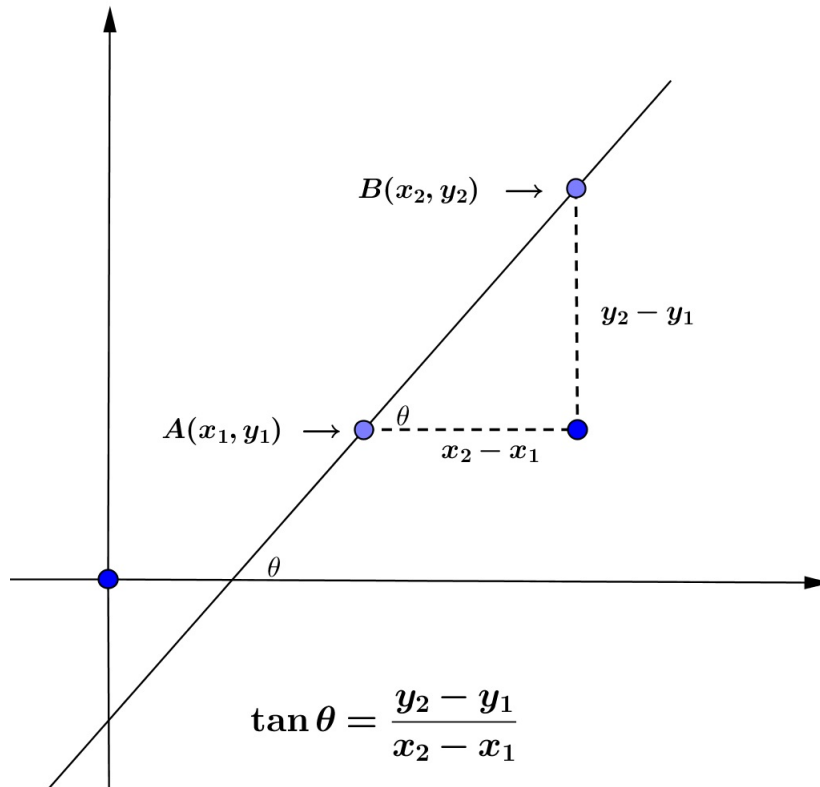
۳. شکلی دیگری از دایره مثلثاتی نیز مرسوم است که در آن چهار محور به نام نسبت های مثلثاتی بصورت زیر وجود دارد.



از روی شکل فوق بهتر متوجه خواهید شد که چرا مثلا $\tan \theta$ می‌تواند هر مقداری را اختیار کند.

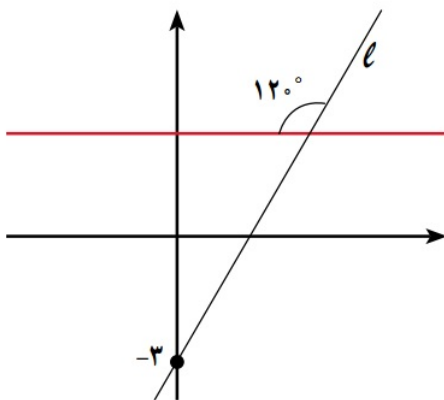
۴. در کلاس نهم معادله خط و مفهوم شیب را خوانده‌اید. برای یک خط که از نقاط $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد شیب چنین تعریف می‌شود:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$



همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد برابر شیب خط است. از این نکته می‌توان در نوشتن معادله خط استفاده کرد. درس را با حل مثال‌های متنوع پی می‌گیریم.

مثال ۱۸.۲. با توجه به شکل معادله خط l را بنویسید.



مثال ۱۹.۲. اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد و $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

مثال ۲۰.۲. زاویه α به گونه‌ای است که $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بیابید.

مثال ۲۱.۲. فرض کنید $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$ باشد حدود تغییرات m را بیابید.

مثال ۲۲.۲. کمترین و بیشترین مقدار عبارت $\frac{1}{4 + 3 \sin x}$ را بدست آورید.

۳.۲ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

شاید تا الان متوجه شده باشید که چهار نسبت مثلثاتی علیرغم نام‌های متفاوت با هم ارتباط نزدیکی دارند. این روابط را در زیر فهرست کرده‌ایم و به دنبال آن دلیل درستی آن‌ها را ذکر خواهیم کرد.

$$۱) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$۲) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$۳) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$۴) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$۵) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

مثال ۲۳.۲. فرض کنید $\cos x = -\frac{1}{3}$ باشد و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

مثال ۲۴.۲. ثابت کنید همواره رابطه $(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 1$ برقرار است.

مثال ۲۵.۲. فرض کنید $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد در این صورت مقدار عبارت $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x - \cos x}$ را بیابید.

مثال ۲۶.۲. درستی رابطه $\frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$ را بررسی کنید.

مثال ۲۷.۲. ثابت کنید رابطه زیر همواره برقرار است.

$$\cos^2 x(1 + 2 \tan^2 x) + (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 1$$

مثال ۲۸.۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید. (مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا ۲۰۰۲)

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

مثال ۲۹.۲. اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$ و $\tan \theta \times \cos \theta > 0$ باشد معین کنید انتهای کمان θ در کدام ناحیه است؟

تمرین ۱۱.۲. ثابت کنید رابطه‌ی زیر همواره درست است.

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$$

تمرین ۱۲.۲. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} - 2 \tan^2 \alpha = 2$$

تمرین ۱۳.۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin x(1 - \cos x)}$$

تمرین ۱۴.۲. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{\sin^2 x} - \cot^4 x = \cot^2 x$$

تمرین ۱۵.۲. درستی رابطه‌ی زیر را تحقیق کنید.

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

تمرین ۱۶.۲. اگر $\cot x = \frac{3}{4}$ باشد حاصل $\frac{4}{\sin x} - \frac{3}{\cos x}$ را بیابید.

تمرین ۱۷.۲. اگر $\sin x = -\frac{1}{4}$ باشد و $\cos x < 0$ ، مقدار $\sin x$ را بیابید.

تمرین ۱۸.۲. کدام نامساوی درست است؟

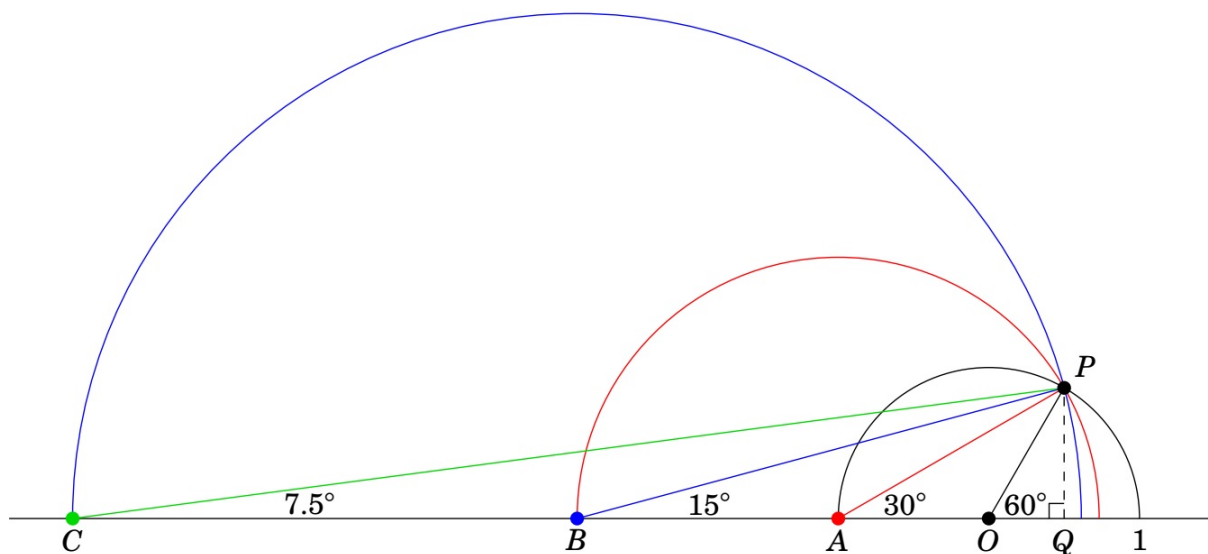
۱. $\sin 5^\circ < \sin 4^\circ$

۲. $\cos 5^\circ < \cos 4^\circ$

۳. $\tan 5^\circ < \tan 4^\circ$

۴. $\cot 4^\circ < \cot 5^\circ$

تمرین ۱۹.۲. به شکل زیر به دقت نگاه کنید. در این شکل ارتباط بین یک زاویه و نصف آن زاویه دیده کی شود. به کمک این شکل نسبت مثلثاتی زاویه ۱۵ درجه را بیابید.



۴.۲ تست‌های فصل دوم

- ۱- ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟
 (۱) $2 \cot^2 \theta$ (۲) $2 \tan^2 \theta$ (۳) $1 - 2 \cos^2 \theta$ (۴) $1 - 2 \sin^2 \theta$
- ۲- حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟
 (۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\tan^2 \theta$ (۴) $\cot^2 \theta$
- ۳- با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$
- ۴- حاصل عبارت $\frac{1 + \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z}, \theta \neq k\pi)$
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sin \theta$ (۴) $\cos \theta$
- ۵- حاصل $\left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta}\right) - 2 \tan^2 \theta$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲
- ۶- اگر $M(-1, -\sqrt{3})$ و θ زاویه شعاع \overrightarrow{OM} با جهت مثبت محور x ها باشد، $\sin \theta$ کدام است؟ (O مبدا مختصات است.)
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۷- اگر $\frac{-\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ باشد، گزاره $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ به ازای چه مقادیری از m برقرار است؟
 (۱) $2 < m \leq 3$ (۲) $-1 < m \leq +1$ (۳) $0 < m \leq 2$ (۴) $0 < m < 1$
- ۸- ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟
 (۱) $2 \cot^2 \theta$ (۲) $2 \tan^2 \theta$ (۳) $1 - 2 \cos^2 \theta$ (۴) $1 - 2 \sin^2 \theta$
- ۹- حاصل $1 - 2 \sin^2 30^\circ$ برابر با کدام است؟
 (۱) $\cos 45^\circ$ (۲) $\sin 60^\circ$ (۳) $\cos 60^\circ$ (۴) $\tan 45^\circ$

۱۰- عبارت $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1$ را با $\text{tg}\theta$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $2\sin^3\theta$ (۲) $\sin^2\theta + \text{tg}\theta$ (۳) $\sin^2\theta$ (۴) $2\sin^2\theta \cdot \text{tg}\theta$

۱۱- اگر $\text{tg}x = \frac{2m}{3}$ و $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه حدود m کدام است؟

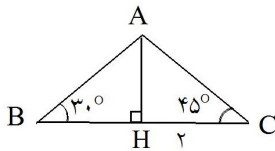
- (۱) $m > \frac{3}{2}$ (۲) $m > 1$ (۳) $m > \frac{2}{3}$ (۴) $m < \frac{2}{3}$

۱۲- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $\cos x > \frac{\sin x}{x}$ (۲) $\frac{\sin x}{x} > 1$ (۳) $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ (۴) $\sin x > x > \tan x$

۱۳- اگر $x = \frac{\pi}{18}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sin 3x}{\cos 6x} + \frac{\cos 4x}{\sin 5x}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲



۱۴- در شکل مقابل، مقدار BH کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۱۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $BC = 5$ و $AC = 3$ می‌باشد. حاصل $(\cos B - \sin B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۶- حاصل $\text{tg}^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$ کدام است؟

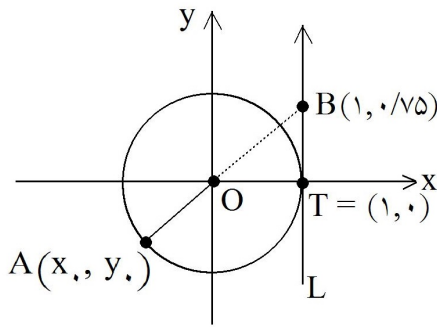
- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{10}{12}$ (۳) $\frac{13}{12}$ (۴) $\frac{8}{12}$

۱۷- اگر $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم واقع باشد، $\sin\theta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

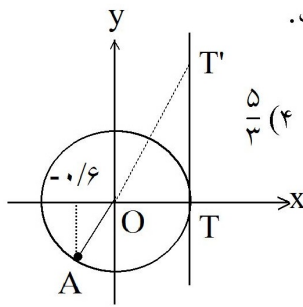
۱۸- عبارت $\tan\theta(\tan\theta + \cot\theta)$ برابر با کدام گزینه است؟ $(\theta \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) $\sin^2\theta$ (۲) $\cos^2\theta$ (۳) $\frac{1}{\sin^2\theta}$ (۴) $\frac{1}{\cos^2\theta}$



۱۹- مطابق شکل، نقطه‌ی $A(x, y)$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد و امتداد پاره‌خط واصل مبدأ مختصات و نقطه‌ی A خط L را که در نقطه‌ی $T(1, 0)$ بر دایره مماس است در نقطه‌ی $B(1, 0.75)$ قطع کرده است. حاصل $x + y$ کدام است؟

- (۱) -0.8
(۲) -1
(۳) $-1/2$
(۴) $-1/4$



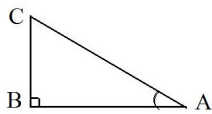
۲۰- در شکل مقابل، طول نقطه‌ی A که روی دایره‌ی مثلثاتی واقع است، برابر (-0.6) است. طول پاره‌خط TT' کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۲۱- ساده شده‌ی عبارت $a = \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x + \sin x \cos x} - \operatorname{tg} x$ همواره کدام است؟

$(\sin x \neq -1, \cos x + \sin x \cos x \neq 0)$

- (۱) $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ (۲) $\frac{-\sin^2 x}{\cos x}$ (۳) $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ (۴) $-2 \operatorname{tg} x$



۲۲- در شکل مقابل، $\hat{A} = 30^\circ$ و $BC = 2$ است. $\cos \hat{C}$ کدام است؟

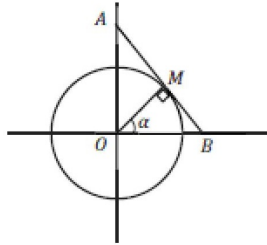
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۲۳- حاصل $\sin^2 x(1 + \cos^2 x) + \cos^2 x(1 - \sin^2 x)$ همواره کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\cos^2 x$ (۴) $\sin^2 x$

۲۴- حاصل $\sin 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$ برابر است با:

- (۱) $\sin^2 45^\circ$ (۲) $\sqrt{3} \sin^2 45^\circ$ (۳) $2 \cos 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$ (۴) $\sqrt{3} \cos^2 30^\circ$



۲۵- با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر کدام پاره خط برابر $\frac{1}{\sin \alpha}$ می‌باشد؟

- (۱) OB (۲) OA (۳) AB (۴) MB

۲۶- اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$ و $\tan \theta \cos \theta > 0$ باشد انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲۷- حاصل عبارت $(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) + \cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۲۸- اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۲۹- اگر $\sin x = 2 \cos x$ باشد، حاصل $\cot x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۰- اگر $\tan x \sin x < 0$ و $\cot x \cos x > 0$ ، آنگاه انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۱- اگر $25^\circ < x < 30^\circ$ و $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، آنگاه حدود تغییرات m در کدام فاصله است؟

- (۱) $(1, \frac{3}{2}]$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۳) $(1, \frac{3}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ)$

۳۲- اگر $\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha < 0$ و $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha > 0$ ، آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

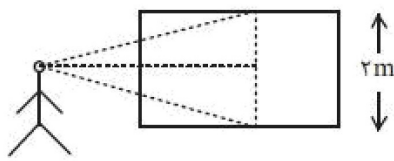
۳۳- فرض کنیم مکان یک جسم غوطه‌ور در آب نسبت به زمان با معادله $h = \sin^2 t + 2 \sin t + 9$ تغییر کند که در آن h ارتفاع جسم از کف استخر برحسب متر و t زمان است. اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع جسم از کف استخر چند متر است؟

- ۹ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴)

۳۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ، کدام یک از رابطه‌های زیر درست است؟

- (۱) $\cos \alpha = \sin \beta$ (۲) $\sin \alpha = \cos \beta$ (۳) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Cotg} \beta$ (۴) $\operatorname{Cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

۳۵- در یک نمایشگاه نقاشی زهره مقابل یک تابلوی ۲ متری ایستاده است. اگر او سر خود را تکان ندهد بالای تابلو را تحت زاویه 45° و پایین آن را تحت زاویه 30° می‌بیند. فاصله‌ی زهره تا تابلو چند متر است؟



- (۱) $3 - \sqrt{3}$
 (۲) $\sqrt{3} - 1$
 (۳) $6 - \sqrt{3}$
 (۴) $\sqrt{6} - 1$

۳۶- در مثلث ABC بین اضلاع رابطه‌ی $AB = 2BC$ برقرار است و $\hat{A} = 30^\circ$ ، آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه
 (۳) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین (۴) منفرجه‌الزاویه

۳۷- در یک متوازی‌الاضلاع یکی از زاویه‌ها 120° و طول اضلاع مجاور ۳ و ۵ سانتی‌متر است. مقدار عددی نسبت قطر بزرگ به مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) $\frac{14}{15\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{4}{105\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{28}{15\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{2}{105\sqrt{3}}$

۳۸- اگر $\sin^2 x \cdot \cot x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه دایره‌ی مثلثاتی واقع نیست؟

(۱) دوم یا چهارم (۲) اول یا چهارم (۳) اول یا دوم (۴) اول یا سوم

۳۹- در کدام ناحیه از دایره‌ی مثلثاتی، $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} < 0$ و $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$ است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۴۰- در مثلثی $a = 6$ ، $b = 6\sqrt{3}$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

- (۱) فقط $\frac{\pi}{3}$ (۲) فقط $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ یا $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{2}$

۴۱- اگر $\tan \alpha + \sin \alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ ، آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۴۲- حاصل عبارت $\text{tg} \frac{\pi}{13} + \text{tg} \frac{2\pi}{13} + \text{tg} \frac{3\pi}{13} + \dots + \text{tg} \frac{12\pi}{13}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $2 \text{tg} \frac{\pi}{13}$ (۴) ۲

۴۳- اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = 3m - 1$ باشد، m کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۴- کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

- (۱) $\cos 5^\circ < \cos 10^\circ$ (۲) $\cos 5^\circ > \sin 84^\circ$ (۳) $\sin 5^\circ > \sin 10^\circ$ (۴) $\cot 5^\circ < \tan 84^\circ$

۴۵- اگر $\pi < \theta < \frac{7\pi}{6}$ حاصل $A = \sqrt{\sin^2 \theta (1 + \cot \theta) + \cos^2 \theta (1 + \text{tg} \theta)}$ کدام است؟

- (۱) $-(\sin \theta + \cos \theta)$ (۲) $\sin \theta + \cos \theta$
 (۳) $\sin \theta - \cos \theta$ (۴) $-\sin \theta + \cos \theta$

۵.۲ کلید تست های فصل دوم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۳

توان های گویا و عبارات جبری

۱.۳ ریشه و توان اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه های دوم و سوم عددها آشنا شده اید. ریشه و توان رابطه دو سویه ای با هم دارند.

$$(-3) \xleftrightarrow[\text{ریشه سوم}]{\text{توان سه}} -27 \quad \text{یا} \quad (-3)^3 = -27 \longleftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

مثال ۱.۳. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

$$2^4 = 16 \longleftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \longleftrightarrow$$

$$(0.25)^2 = 0.0625 \longleftrightarrow$$

$$(0.5)^2 = 0.25 \longleftrightarrow$$

$$(-9)^2 = 81 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{81} = 9 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{100} = 10 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{10000} = 100\sqrt{10} \longleftrightarrow$$

مثال ۲.۳. حجم یک مکعب برابر 50 cm^3 است. ضلع مکعب با دقت یک رقم اعشار چقدر است؟

در حالت کلی توان و ریشه رابطه‌ی عکس با هم دارند. مطالب مطرح شده در بالا را بصورت دقیق تر در تعریف زیر آورده ایم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد. در این صورت عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a گوئیم هرگاه $b^n = a$ باشد.

مثلا -3 ریشه پنجم -243 است چرا که $(-3)^5 = -243$. همچنین دو عدد 2 و -2 ریشه چهارم 16 می باشند چرا که $(\pm 2)^4 = 16$ است. اگر n زوج باشد عدد حقیقی و مثبت a دارای دو ریشه n ام می باشد که قرینه یکدیگرند. در این حالت ریشه n ام مثبت را ریشه n ام اصلی می نامیم و با نماد $\sqrt[n]{a}$ نشان می دهیم. پس حاصل عبارت $\sqrt[4]{81}$ فقط برابر 3 است و هیچگاه از عبارت نادرست $\sqrt[4]{81} = -3$ استفاده نمی کنیم. اعداد منفی دارای ریشه n ام زوج نیستند ولی ریشه n ام فرد دارند. مثلا $\sqrt[5]{-32} = -2$ وجود ندارد اما $\sqrt[5]{-32} = -2$ است.

مثال ۳.۳. کامل کنید.

$$۱) \sqrt[3]{64} =$$

$$۲) \sqrt[6]{64} =$$

$$۳) \sqrt[5]{1024} =$$

$$۴) \sqrt[4]{0.0625} =$$

$$۵) \sqrt{\frac{121}{100}} =$$

$$۶) \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} =$$

$$۷) \sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$۸) \sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$$

$$۹) \sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}$$

$$۱۰) \sqrt{8\sqrt{4\sqrt{64}}}$$

مهمترین خواص رادیکال‌ها در زیر فهرست کرده ایم.

$$۱) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$۲) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{واضح است که باید } a, b \text{ مثبت باشند.}$$

$$۳) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$۴) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$$

$$۵) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$$

$$۶) a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{فرد } n, \quad n > 1 \\ \sqrt[n]{a^n b} & \text{زوج } n, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0 \\ -\sqrt[n]{a^n b} & \text{زوج } n, \quad a \leq 0, \quad b \geq 0 \end{cases}$$

$$۷) \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

یادداشت تاریخی: رسم عدد $\sqrt[3]{2}$ روی محور یا کلا رسم پاره خطی با طول $\sqrt[3]{2}$ یکی از قدیمی‌ترین مسائل در تاریخ ریاضیات است. این مسئله به تضعیف مکعب معروف است. داستانی نقل می‌کنند که یکی از فراعنه مصر که مقبره‌ای برای فرزندش می‌ساخته (مقبره به شکل مکعب مستطیل بوده است. البته مدفن اصلی مقبره) به مهندسان دستور داده که مقبره کوچک است و آن را دو برابر کنید. مهندسان به اشتباه اضلاع مکعب را دو برابر کرده‌اند و مقبره بسیار بزرگتر از انتظار پادشاه بود. در واقع مکعب مستطیلی که حجم آن دو برابر دیگری باشد نیاز به ترسیم و استفاده از عدد $\sqrt[3]{2}$ دارد. اما به کمک خط کش و پرگار ساده این کار امکان پذیر نیست. در این زمینه می‌توانید مسئله تضعیف مکعب را در گوگل جستجو کنید. حال ممکن است این سوال به ذهنتان خطور کند که از کجا بدانیم چه اعدادی را می‌شود با خط کش و پرگار ترسیم کرد. پاسخ دقیق به این پرسش در حال حاضر با اطلاعات شما غیرممکن است اما بطور خلاصه می‌توان گفت تمام اعداد گویا ترسیم پذیرند. عددی حقیقی چون r ترسیم پذیر با خط کش و پرگار است هرگاه بتوان با تعداد متناهی عملیات جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم و یا ریشه دوم گرفتن از اعداد صحیح حاصل شود. پس با این حساب چون ۲ و ۳ ترسیم پذیرند پس عدد $2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ نیز ترسیم پذیر است.

تذکر مهم: آیا بدون استفاده از ماشین حساب می توان مقدار تقریبی (اما با دقت بالا) رادیکال ها را بدست آورد؟ پاسخ مثبت است. دستور زیر در این ارتباط بسیار مفید است:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} \approx 4 + \frac{1}{3 \times 4^2} = 4 + 0.02 = 4.02$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{2^5 - 2} \approx 2 - \frac{2}{5 \times 2^4} = 2 - 0.02 = 1.98$$

مثال ۴.۳. درست و نادرست را مشخص کنید.

- ۱ - هر عدد حقیقی دو ریشه پنجم دارد که قرینه یکدیگرند.
- ۲ - ریشه های چهارم عدد ۱۶ دو عدد $\pm\sqrt[4]{16}$ می باشند
- ۳ - هر عدد همواره ریشه n ام دارد.
- ۴ - هر عدد فرد همواره دارای ریشه هفتم است.

مثال ۵.۳. آیا رابطه $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ درست است؟ چرا؟

مثال ۶.۳. آیا رابطه $(\sqrt[n]{a})^n = a$ همیشه درست است؟ چرا؟

مثال ۷.۳. اگر $x = \sqrt[n]{a}$ باشد و فرجه n را افزایش دهیم برای مقدار x چه اتفاقی می افتد؟ بزرگتر می شود یا کوچکتر می شود؟

مثال ۸.۳. از دو عدد $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[4]{3}$ کدام بزرگتر است؟

مثال ۹.۳. عدد $\sqrt[3]{321}$ مابین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

مثال ۱۰.۳. کامل کنید.

۱) $\sqrt[3]{125} =$

۲) $\sqrt[5]{-32} =$

۳) $\sqrt[7]{128} =$

۴) $\sqrt[4]{256} =$

۵) $\sqrt[3]{-1} =$

۶) $\sqrt[4]{625} =$

۷) $-\sqrt[4]{16} =$

۸) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$

۹) $\sqrt[3]{-0.001} =$

۱۰) $\sqrt[6]{0} =$

۱۱) $\sqrt[4]{(-3)^4} =$

۱۲) $\sqrt[6]{(-2)^6} =$

۱۳) $\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} =$

۱۴) $a^2 \circ a^3 \quad 0 < a < 1$

۱۵) $\sqrt{a} \circ \sqrt[3]{a} \quad 0 < a < 1$

۱۶) $\sqrt[3]{a} \circ \sqrt[5]{a} \quad 0 < a < 1$

۱۷) $(\sqrt[4]{16})^4 =$

۱۸) $(\sqrt[3]{-8})^2 =$

۱۹) $\sqrt{15^0} =$

۲۰) $\sqrt{486} =$

۲۱) $\sqrt[3]{1080} =$

۲۲) $\sqrt[5]{800} =$

۲۳) $\sqrt[2]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[2]{\frac{9}{16}} =$

۲۴) $\sqrt[2]{128 \times 314}$

مثال ۱۱.۳. حاصل عبارات زیر را تا سرحد امکان ساده کنید.

$$۱) \sqrt[۴]{\frac{(a+b)^۴}{(a-b)^۴}} =$$

$$۲) \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} =$$

$$۳) \frac{\sqrt{x^۳y^۳}}{\sqrt{xy}}$$

$$۴) ۲\sqrt{۲۷} \times ۳\sqrt{۱۲} =$$

$$۵) \sqrt[۳]{a^۲} \times \sqrt[۴]{a^۳} =$$

$$۶) \sqrt[۵]{a^۳} \times \sqrt[۶]{a^۵} \times \sqrt[۳]{a^۲} =$$

$$۷) \sqrt[۳]{۴ - ۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۶]{۶ + ۴\sqrt{۲}} =$$

$$۸) \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}\sqrt[۳]{۲}} =$$

$$۹) \sqrt[۴]{۶ + ۴\sqrt{۲}} \times \sqrt{۲ - \sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{(c-1)^۲} - \sqrt{(1+c)^۲} = \quad , c \in [-1, 1]$$

$$۱۱) (۲\sqrt{۲} - \sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲})(\sqrt{۱۸} - \sqrt{۲۰} + ۲\sqrt{۲})$$

تمرین ۱.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \sqrt[۵]{-۳۲(x-y)^{۱۰}} =$$

$$۲) \sqrt[۳]{-(x-y)^۶} =$$

$$۳) \sqrt[۳]{۲۷c^۷} =$$

$$۴) \sqrt[۳]{۲۴} \times \sqrt[۳]{۲} =$$

$$۵) \mp \sqrt{۶۲۵} =$$

$$۶) \sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۱} \times \sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱} =$$

$$۷) \sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۱۱+۴\sqrt{۶}} =$$

$$۸) \sqrt{۳۱} \times \sqrt{۶-\sqrt{۵}} \times \sqrt{۳+\sqrt{۳-\sqrt{۵}}} \times \sqrt{۳-\sqrt{۳-\sqrt{۵}}} =$$

$$۹) \sqrt{۱۱-۲\sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}} =$$

$$۱۱) \sqrt{۲+\sqrt{۳}} \times \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} \times \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}} \times$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}} =$$

$$۱۲) \sqrt[۴]{\frac{-۲۴۳}{x^۲ - \sqrt{x^۴ + ۶x^۲ + ۹}}} =$$

$$۱۳) x\sqrt{-x} \times \sqrt[۳]{x} =$$

۲.۳ توان های گویا

از کلاس نهم برخی مطالب را در مورد توان می دانید. با اینحال جهت مرور، مطالب زیر را آورده ایم.
تعریف ۲.۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$ عددی دلخواه. عدد a^n را بصورت:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$$

تعریف می کنیم. برای اعداد صحیح منفی نیز این تعریف قابل تعمیم است. a^{-n} را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

در نهایت $a^0 = 1$ تعریف می شود و حال a^n را برای تمام اعداد صحیح تعریف کرده ایم. مهمترین خواص توان عبارتند از:

$$1 - \text{همواره } a^n \times a^m = a^{m+n}$$

$$2 - \text{همواره } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3 - \text{همواره } (a^m)^n = a^{mn}$$

پرسش: آیا دو مقدار a^{m^n} و $(a^m)^n$ مساوی اند؟ چرا؟
 حال می خواهیم توان را به اعداد گویا تعمیم دهیم.

گازی با فشار وارد یک مخزن می شود. در هر دقیقه فشار گاز دو برابر می شود تا به فشار معینی برسد.

دقیقه	۱	۲	۳	...	n
فشار	۲	2^2	2^3	...	2^n

حال پرسش این است که در 3^0 ثانیه پس از دقیقه دوم فشار گاز چقدر خواهد بود؟ واضح است که جواب عددی چون a است که $2^2 < a < 2^3$. چون زمان دقیق را داریم پس می توان ادعا کرد که $a = 2^{\frac{5}{4}}$ که البته درست است اما چه معنایی می دهد؟ اگر تصور کنیم مقدار فشار در هر 3^0 ثانیه x برابر می شود پس باید بعد از ۱ دقیقه $x \times x = x^2$ برابر شود اما بعد از یک دقیقه دو برابر فشار داریم یعنی $x^2 = 2$ و لذا $x = \sqrt{2}$. حال کل زمان دو نیم دقیقه شامل ۵ زمان 3^0 ثانیه است پس فشار می شود x^5 یعنی $a = x^5 = \sqrt[4]{2^5}$. بعبارت بهتر باید داشته باشیم

$$2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5}$$

حال می توان در حالت کلی توان گویای یک عدد حقیقی را تعریف کرد.

تعریف ۳.۳. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ باشند تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۲.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $(-۸)^{\frac{1}{3}} =$

۲) $۸^{\frac{2}{3}} =$

۳) $(۳۲)^{-\frac{2}{5}} =$

۴) $(-۸)^{\frac{4}{6}} =$

۵) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[5]{y}}{\sqrt[6]{z^4}}} =$

۶) $(۰٫۲۵)^{\frac{3}{4}} =$

۷) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}} + (\sqrt[5]{\sqrt{2}})^3 - ۲^{۰٫۳} - ۸^{۰٫۱} =$

تمرین ۲.۳. درستی روابط حاکم بر اعداد تواندار که قبلا در مورد توان های صحیح گفته شده را در مورد توان های گویا تحقیق کنید. بعنوان نمونه

$$\begin{aligned} a^r \times a^s &= a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} \\ &= a^{\frac{mq+pn}{nq}} \\ &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۳. آیا تساوی $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ درست است؟ در مورد جواب بحث کنید.

مثال ۱۴.۳. هرگاه $a > ۱$ باشد ثابت کنید $a^n < a^{n-۱}$. در حالتی که $۰ < a < ۱$ باشد چه حکمی می‌توان کرد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

مثال ۱۵.۳. آیا محاسبه زیر درست است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

مثال ۱۶.۳. نیلوفر و کیوان هر کدام عبارت $\sqrt[4]{a^2}$ را ساده کرده اند. جوابهای آنها بصورت زیر است. جواب کدام دقیق تر است؟ چرا؟

$$\text{راه حل کیوان} \rightarrow \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2 \times 2]{a^2} = \sqrt{a}$$

$$\text{راه حل نیلوفر} \rightarrow \sqrt[4]{a^2} = \begin{cases} \sqrt[4]{a} & a > 0 \\ \sqrt[4]{-a} & a < 0 \end{cases}$$

مثال ۱۷.۳. از رابطه $\left(\frac{1}{p}\right)^{2\alpha-3} = 4 \times 16^\alpha$ مقدار α را بیابید.

تمرین ۳.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

۲) $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^{-1}$

۳) $\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{0.7} \div \left(d^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

۴) $\left(a^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{5}}$

۵) $\left(\sqrt[3]{32}\sqrt[4]{16}\sqrt[5]{128} \div \sqrt[4]{1024}\sqrt[5]{256}\sqrt[3]{64}\right)^{-\frac{20}{53}}$

۶) $0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0.75}$

۷) $\frac{\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}{\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}}}$

۸) $\left(\frac{1}{3}\right)^{p+2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \geq 9 \rightarrow p = ?$

۳.۳ عبارات های جبری

در این بخش به معرفی چند اتحاد جبری دیگر و استفاده از آنها در تجزیه عبارات های جبری می پردازیم. از کلاس نهم با اتحاد ها آشنا شده اید. یک تساوی که به ازای تمامی مقادیر متغیر موجود در آن تساوی درست باشد را یک اتحاد گوییم. به دو تساوی زیر دقت کنید.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1.3)$$

$$x^2 - 5 = 4 \quad (2.3)$$

تساوی (۱.۳) به ازای تمامی مقادیر x, y درست است و لذا به آن اتحاد گوییم. در حالیکه تساوی (۲.۳) به ازای دو مقدار $x = 3, x = -3$ درست است و لذا به آن معادله گوییم. از کلاس نهم با برخی اتحادها آشنا شده اید. در اینجا آن اتحادها را بازنویسی می کنیم.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

حال آماده هستیم تا چند اتحاد جدید معرفی کنیم. اولین اتحاد، اتحاد مربع سه جمله ای است. یعنی هدف یافتن حاصل $(x + y)^3$ است. به کمک اتحادهای بالا عبارت فوق را تا سرحد امکان ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)^2 \times (x + y) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) \times (x + y) \\ &= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه حاصل بصورت زیر بدست می آید:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

اگر در رابطه فوق $(-b) \rightarrow b$ تبدیل شود اتحاد زیر حاصل می شود:

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

در نهایت اگر از xy در جملات دوم و سوم فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

مثال ۱۸.۳. به کمک آخرین رابطه عبارت های $x^3 + y^3$ و $x^3 - y^3$ را تجزیه کنید.

نتیجه مثال بالا به قدری اهمیت دارد که به آنها اسم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات بدهیم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال ۱۹.۳. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$۱) (2x - y^2)^2 =$$

$$۲) \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)^2 =$$

$$۳) (x - y)(x + y)(x^2 + x^2y^2 + y^2) =$$

$$۴) (2x - 1)^3 =$$

$$۵) (1 + x^2 + x^4)(1 - x^2) =$$

$$۶) (101)^3 =$$

$$۷) \left(x - \frac{1}{4}\right)(8x^2 + 2)(2x + 1) =$$

$$۸) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3 =$$

$$۹) \frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1} \quad ۱۰) (x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$$

$$۱۱) (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3) \quad ۱۲) (a - b - c)^2 - (a - b + c)^2$$

مثال ۲۰.۳. فرض کنید $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ باشد. حاصل عددی عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$۲) x^3 + \frac{1}{x^3} =$$

$$۳) x^2 - \frac{1}{x^2} =$$

$$۴) x^3 - \frac{1}{x^3} =$$

$$۵) x^4 + \frac{1}{x^4} =$$

مثال ۲۱.۳. به کمک اتحادها عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^6 - y^6 =$$

$$۲) x^3 - ۱۲۵$$

$$۳) ۲۷x^3 + ۱$$

$$۴) ۴a^2 - b^2 - ۲b + ۴a =$$

$$۵) ۹x^2 - ۳x - ۲ =$$

$$۶) x^3 - x^2 - x + ۱ =$$

$$۷) a^4 - ۲a^2 + ۴۹ =$$

$$۸) x^2y^2 - x^2y^3 - ۱ + y =$$

$$۹) ۶۴x^3 - ۴۸x^2 + ۱۲x - ۱ =$$

$$۱۰) ۴a^4 - ۶۴ =$$

$$۱۱) (x + ۱)^3 + ۸ =$$

$$۱۲) x^5 + x + ۱ = \quad (\text{hint : } x^2 - x^2)$$

$$۱۳) ۴x^4 + ۱$$

$$۱۴) ۸x^3 - ۱۲x^2 + ۶x - ۱ =$$

تمرین ۴.۳. به کمک اتحادها حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} ۱) (x - 2y^2)^2 - (x + 2y^2)^2 & ۲) \left(\frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}y\right)^2 \\ ۳) (2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2) & ۴) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) \\ ۵) (2 + x)(4 - 2x + x^2)(8 - x^3) & ۶) (x - y)^3 - (x + y)^3 \\ ۷) (2x - y)(4x^2 + y^2)(2x + y) + y^4 & ۸) (a - b + c)(a - b - c) \end{array}$$

تمرین ۵.۳. تجزیه کنید.

$$\begin{array}{ll} ۱) ab - a^2b^2 & ۲) a + b + a^2 - b^2 \\ ۳) a^2 - b^2 + a^3 - b^3 & ۴) x^6 - (yz)^6 \\ ۵) 36a^4b - 16b^5 & ۶) a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 - 4abcd \\ ۷) c^6 + p^6 & ۸) x^3 + 64m^3 \\ ۹) (a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b & ۱۰) (a + b)^3 + (a - b)^3 - 3a \end{array}$$

کاربرد تجزیه در یافتن ب م م و ک م م چند جمله ایها

یک چندجمله‌ای مثل $a + b$ را در نظر بگیرید. اگر این دو جمله‌ای را در اعداد صحیح یا هر چندجمله‌ای دیگری ضرب کنیم، حاصل را مضربی از $a + b$ گوئیم. پس عبارات زیر همگی مضارب $a + b$ هستند.

$$2(a + b), (a^2 - b^2), (a^3 - b^3) \dots$$

همچنین عبارت $a + b$ مقسوم علیه مشترک هر سه عبارت فوق است. بطور کلی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت جبری ابتدا آنها را تجزیه کرده و سپس برای ب م م عوامل مشترک با کمترین توان در تجزیه را منظور می‌کنیم و برای ک م م هم عوامل مشترک را با بزرگترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف یافتن ب م م و ک م م دو عبارت جبری $a^2 - b^2$ ، $a^3 - b^3$ است. با تجزیه کردن آنها داریم:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$$

پس با این حساب ب م م برابر $a - b$ است و ک م م برابر $(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a - b)$. یکی از فواید محاسبه ک م م در مخرج مشترک گرفتن برای جمع و تفریق عبارات گویاست. در قسمت بعد عبارات گویا را بررسی می‌کنیم.

عبارات گویا

تعریف ۴.۳. منظور از یک عبارت گویا عبارتی است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند. اگر $p(x)$ ، $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند عبارت

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

را یک عبارت گویا گوئیم. شرط تعریف چنین عبارتی آنست که $q(x) \neq 0$ باشد.

مثال ۲۲.۳. معین کنید هر عبارت گویا به ازای چه مقادیری از متغیرش تعریف شده است؟ (دامنه‌ی تعریف آن را بیابید)

$$۱) f(x) = \frac{x + 1}{x - 3}$$

$$۲) g(x) = \frac{3y}{y^2 - 4}$$

$$۳) h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$۴) k(x) = \frac{z}{2z^2 - 7z + 5}$$

$$۵) \ell(x) = \frac{x}{x}$$

$$۶) u(x) = \frac{3}{2x^2 + 2x} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x}$$

مثال ۲۳.۳. عملیات‌های خواسته شده بر عبارات گویا را انجام دهید. اگر تنها یک کسر در صورت مسئله است هدف ساده کردن آن است.

$$۱) \frac{۶x^۲ + ۷x - ۳}{۲x^۲ - x - ۶}$$

$$۲) \frac{۱۳}{۲x - ۶} - \frac{۲x}{x^۲ - ۹}$$

$$۳) \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲} \div (x + y)$$

$$۴) \frac{m^۳ - n^۳}{(mn - n^۲)^۲} \div \frac{mn + m^۲}{m^۲ - n^۲}$$

$$۵) a \div \frac{a - ۱}{۲} - \frac{a^۳ + ۳a(a - ۱) - ۱}{۲a^۲ + ۲a} \times \frac{-۴a}{a^۲ - ۲a + ۱} - \frac{۴a^۲}{a^۲ - ۱}$$

$$۶) \left(\frac{n}{m - n} + \frac{m}{m + n} \right) \left(\frac{m + n}{m^۲ + n^۲} \right) \left(\frac{m - n}{m + n} \right)$$

حذف رادیکال از عبارات جبری

در اتحاد $a^۳ - b^۳ = (a - b)(a^۲ + ab + b^۲)$ اگر قرار دهیم $b = ۱$ ، $a = \sqrt[۳]{x}$ آنگاه:

$$(\sqrt[۳]{x})^۳ - ۱ = \underbrace{(x - ۱)}_{\text{بدون رادیکال}} = \underbrace{(\sqrt[۳]{x} - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)}_{\text{عبارت شامل رادیکال‌ها}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با ضرب دو عبارت در هم حاصل یک عبارت فارغ از رادیکال است. این کار اغلب به گویا کردن معروف است و یک دلیل ساده این کار این است که کلا کار با چندجمله‌ایها و عملیات بر آنها بسیار ساده تر از کار با عبارات رادیکالی است. بویژه زمانی که عبارت رادیکالی در مخرج باشد، از بین بردن رادیکال آن امری مستحب است. به عنوان مثال ساده مخرج عبارت $\frac{۱}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{۱}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{۱}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \end{aligned}$$

مثال ۲۴.۳. مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$۱) \frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}}$$

$$۲) \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$$

$$۳) \frac{۱}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+۱}$$

$$۴) \frac{۱}{a^{\frac{۱}{۴}}+a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}+b^{\frac{۱}{۴}}}$$

$$۵) \frac{a-۱}{\sqrt{a-۱}-\sqrt{a+۲}}$$

$$۶) \frac{۱}{\sqrt[3]{x}+۱}$$

$$۷) \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$$

تمرینات تکمیلی

تمرین ۶.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \left(\frac{1}{6}x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-4}$$

$$۲) ۱۲۵ \leq \left(\frac{1}{5}\right)^p \leq ۳۱۲۵ \rightarrow p = ?$$

$$۳) ۱۰^{۲۰} \square ۲۰^{۱۰}$$

$$۴) ۲۰ \cdot ۲^{۳۰۳} \square ۳۰ \cdot ۳^{۲۰۲}$$

$$۵) \frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۸}} \times \frac{\sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۴۸}}$$

$$۶) \left(۲۷^{\frac{1}{3}} \times ۸^{\frac{2}{3}} \times ۳۲^{\frac{2}{5}} \times ۸۱^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$۷) (۴ + \sqrt{۱۵})(\sqrt{۱۰} - \sqrt{۶})(\sqrt{۴} - \sqrt{۱۵})$$

$$۸) \sqrt{۱۷ - ۴\sqrt{۹} + ۴\sqrt{۵}}$$

تمرین ۷.۳. عبارتهایی که بصورت مجموع چند جمله‌اند را تجزیه کنید و آنهایی که بصورت حاصلضرب چند پرانتز هستند به کمک اتحادها ضرب کرده و ساده کنید. عملیات بر عبارات گویا را نیز انجام دهید.

$$۱) (1 + x + x^2)(1 - x)(1 + x)(1 - x + x^2)$$

$$۲) p^4 - 6p^2q + 9q^2$$

$$۳) x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8$$

$$۴) (x + 3z - y)(x - y - 3z)$$

$$۵) (a^6 - 3a^3 + 9)(a^3 + 3)$$

$$۶) x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$۷) 2 - b^2y^3 - by$$

$$۸) x^3 - 8 + (x + 2)^2 - 2x$$

$$۹) 8 - 2x - x^2$$

$$۱۰) \frac{3x^2 + 12x + 9}{x^6 + 5x^3 + 6}$$

$$۱۱) \frac{a^2 - 1}{a} \times \frac{a^3}{a - 1} \times \frac{1}{a + 1}$$

$$۱۲) \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) \left(x + \frac{y^2}{x + y}\right)^{-1}$$

$$۱۳) \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6}$$

$$۱۴) \frac{\frac{x+1}{y}}{x+z} - \frac{1}{y(xyz+x+z)}$$

$$۱۵) \frac{1}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} \text{ , گویا کنید}$$

$$۱۶) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$۱۷) \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

$$۱۸) \frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

۴.۳ تست‌های فصل سوم

- ۱- اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟
 (۱) ۲۱۶ (۲) ۲۳۸ (۳) ۲۴۴ (۴) ۲۶۴
- ۲- در تجزیه‌ی عبارت $x^2 - 6x - 4$ -۱۴۴ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟
 (۱) $x - 8$ (۲) $x - 4$ (۳) $x + 2$ (۴) $x + 4$
- ۳- حاصل $\sqrt{\frac{19}{6} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲
- ۴- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $x^2 - 10x + 21$ و $x^2 - 12x + 35$ را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها تقسیم کرده‌ایم، حاصل تقسیم کدام است؟
 (۱) $x^2 - 8x - 15$ (۲) $x^2 - 8x + 15$ (۳) $x^2 + 8x + 15$ (۴) $x^2 + 8x - 15$
- ۵- حاصل عبارت $(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{3}{9}})\sqrt{\frac{6}{5}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{1}{20}$ (۴) $\frac{1}{30}$
- ۶- به ازای چه مقدار m ، عبارت $4x^2 - 6x + m$ مربع کامل است؟
 (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۷- حاصل $1001^2 - 999^2$ کدام است؟
 (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۴۰۰۰ (۴) ۶۰۰۰
- ۸- در تجزیه‌ی عبارت $3 - 4b - b^2 - 4a - 4a^2$ کدام عامل وجود دارد؟
 (۱) $2a + b + 3$ (۲) $2a - b + 1$ (۳) $2a + b - 3$ (۴) $2a + b + 1$
- ۹- حاصل عبارت $(x^3 + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)$ کدام است؟
 (۱) $(x - 1)^2$ (۲) $(x - 1)^3(x^3 + 1)$ (۳) $x^3 - 1$ (۴) $x^6 - 1$
- ۱۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱- اگر عبارت $4x^2 - 3x + A$ مربع دو جمله‌ای باشد، A کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۱۲- اگر $x = 4$ باشد، حاصل $\sqrt{(-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^4}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۷ (۴) -۷

۱۳- اگر عبارت $4x^2 - 3x + A$ مربع دو جمله‌ای باشد، A کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۱۴- عبارت $6x^2 - 5x - 6$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $3x - 2$ (۲) $2x + 3$ (۳) $2x - 3$ (۴) $3x + 4$

۱۵- عبارت $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر نیست؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $x + 2$ (۳) $x - 5$ (۴) $x + 5$

۱۶- در کدام گزینه فاکتورگیری درست انجام نشده است؟

(۱) $3x^2a + 9a^2x = 3ax(x + 3a)$

(۲) $49x^2yz + 14x^3y^2 = 7x^2y(7z + 2xy)$

(۳) $19xab + 38a^2x + 2xa = 19xa(b + 2a + 2)$

(۴) $18x^2ab + 15x^3a + 3x^2a = 3x^2a(6b + 5x + 1)$

۱۷- اگر $(a > 1)$ $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ باشد، حاصل $a + \frac{1}{a}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸- ساده شده عبارت $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{27}}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt[4]{3}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt[4]{2}$ (۴) $-3\sqrt{2}$

۱۹- حاصل عبارت $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(x^2 + \frac{1}{16}\right)$ کدام است؟ ($x > 0$)

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴)

۲۰- اگر $a + b = 3$ و $ab = 2$ باشد، مقدار $a^3 + b^3$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

۲۱- عبارت $(a^4 + 4a^2 + 16)(a - 2)(a + 2)$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

- (۱) $a^6 + 64$ (۲) $(a^3 - 8)(a^3 + 8)$
(۳) $(a^3 - 4)(a^3 + 4)$ (۴) $a^8 - 64$

۲۲- در تجزیه‌ی $4a^4 - 64$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $a^2 + 4$ (۲) $a + 2$ (۳) $a - 2$ (۴) $a^2 - 8$

۲۳- در تجزیه‌ی عبارت $(x^2 - 1) + (x - 1)(y + 1)$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $x + y + 2$ (۲) $x + y - 1$ (۳) $x - y + 1$ (۴) $x + y$

۲۴- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $3x^2 - 5x - 2$ وجود دارد؟

- (۱) $3x - 1$ (۲) $3x + 1$ (۳) $x - 1$ (۴) $x + 2$

۲۵- حاصل عبارت $\sqrt[3]{3} + \sqrt{18} - \frac{(\sqrt[3]{24} - \sqrt{32})}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۲۶- حاصل $A = \frac{9}{\left(\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3}}}}\right)}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{3^7}$ (۲) $3\sqrt[3]{3^7}$ (۳) $3\sqrt[3]{3^1}$ (۴) $9\sqrt[3]{3^7}$

۲۷- مقدار عبارت $x^3 - 48x^2 + 12x - 1$ به ازای $x = \frac{1}{8}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۸- در حالت کلی، کدام عامل زیر در تجزیه‌ی عبارت $1 + y - y^3 x^2 - y^2 x^2$ وجود ندارد؟

(۱) $1 - y$ (۲) $1 + y$ (۳) $xy - 1$ (۴) $xy + 1$

۲۹- در تجزیه‌ی عبارت $14 - 25x - 25x^2$ همواره کدام یک از عامل‌های زیر وجود دارد؟

(۱) $5x + 1$ (۲) $5x + 14$ (۳) $5x - 2$ (۴) $5x - 7$

۳۰- در تجزیه‌ی عبارت $x - x^2 + (x - 1)^2$ همواره کدام عامل زیر وجود دارد؟

(۱) $2x - 1$ (۲) $2x + 1$ (۳) $x + 1$ (۴) $2x$

۳۱- در تجزیه‌ی عبارت $24 - 8x - 3x^3 + x^4$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

(۱) $x - 4$ (۲) $x - 2$ (۳) $x + 2$ (۴) $x + 3$

۳۲- مقدار x در تساوی $\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt{x} = \sqrt[4]{8}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) 2 (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) 4

۳۳- حاصل $(\sqrt{32} + \sqrt[3]{32} - \sqrt{50})^{13}$ کدام است؟

(۱) $(2\sqrt{2})^{13}$ (۲) $(\sqrt{2})^{13}$ (۳) 1 (۴) صفر

۳۴- اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $(x - \frac{1}{x})^2$ کدام است؟

(۱) 12 (۲) 14 (۳) 16 (۴) 10

۳۵- عبارت $2x + 7x^2 + 6x^3$ را تجزیه نموده‌ایم. یکی از عوامل تجزیه همواره کدام است؟

(۱) $3x + 2$ (۲) $2x - 1$ (۳) $x + 2$ (۴) $2x + 3$

۳۶- اگر $(a - 3)(a + 4) = 18$ باشد، مقدار $a(a + 4)$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) -45 (۲) 12 (۳) 21 (۴) 32

۳۷- حاصل $\sqrt{8} + \frac{1}{4}\sqrt{200} - 3\sqrt{32}$ کدام است؟

(۱) $9\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $7\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۳۸- در تجزیه‌ی عبارت $3 - 5x - 2x^2$ کدام دو جمله‌ای وجود دارد؟

(۱) $x + 3$ (۲) $2x + 1$ (۳) $x - 1$ (۴) $3x + 1$

۳۹- حاصل 998×1002 را با استفاده از کدام اتحاد می‌توان به سهولت محاسبه نمود؟

- (۱) $(a + b)^2$ (۲) $(a - b)^2$ (۳) $(a + b)(a - b)$ (۴) $(x + a)(x + b)$

۴۰- کسر $\frac{4}{\sqrt[3]{8}}$ با کدام عدد زیر برابر است؟

- (۱) $2\sqrt[4]{2}$ (۲) $\sqrt[4]{2}$ (۳) $4\sqrt[4]{2}$ (۴) $2\sqrt[4]{4}$

۴۱- در حاصل عبارت $(2x^2 - 3x - 2)^2$ ضریب x^3 کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۴۲- عبارت $6x^2 - 5x - 6$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $3x - 1$ (۲) $2x + 3$ (۳) $3x + 2$ (۴) $2x - 1$

۴۳- با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دو جمله‌ای حاصل می‌شود؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۴۴- حاصل عبارت $\sqrt[6]{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{50} - \frac{6}{\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt{12}$

۴۵- در تجزیه عبارت $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- (۱) $a - 6$ (۲) $a - 3$ (۳) $a - 2$ (۴) $a + 2$

۴۶- حاصل عبارت $\sqrt[2]{2}(\sqrt{50} - \sqrt[4]{4}) + 8^{-\frac{2}{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{33}{4}$ (۲) $\frac{29}{4}$ (۳) $\frac{33}{2}$ (۴) $\frac{25}{2}$

۴۷- حاصل $\frac{4\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{300}}{\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

$$A = \frac{\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}} \times \left(\sqrt{(32)^{-1}} \right)$$

۴۸- ساده شده‌ی عبارت A کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴)

$-\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۴۹- کدام عامل زیر در تجزیه‌ی هر دو عبارت $9x^2 - 3x - 2$ و $18x^2 + 12x + 2$ به‌طور مشترک، وجود دارد؟

$3x - 1$ (۴)

$3x + 1$ (۳)

$3x + 2$ (۲)

$3x - 3$ (۱)

۵۰- اگر $A = (2 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})$ و $B = \sqrt{27} + 5$ باشند، حاصل $\frac{2A}{B} + 1$ کدام است؟

$1 + \sqrt{3}$ (۴)

$1 - \sqrt{3}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۵.۳ کلید تست‌های فصل سوم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۴

معادلات و نامعادلات

در این فصل بسیار مهم با حل انواع معادلات و نامعادلات آشنا می‌شویم. در ابتدا حل معادله درجه دوم را بررسی کرده و سپس یک منحنی مرتبط با معادله درجه دوم یعنی سهمی‌ها را بررسی کرده، و در نهایت تعیین علامت عبارات جبری را که نقشی کلیدی در حل نامعادلات دارند را بررسی می‌کنیم.

۱.۴ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

معادله درجه دوم چیست؟ فرض کنید هدف یافتن عددی است که وقتی با مربعش جمع می‌شود حاصل برابر ۶ شود. برای یافتن جواب می‌توان آزمون-خطا کرد و با چندبار امتحان عدد ۲ را یافت که در شرایط صدق می‌کند. اما فقط عدد ۲ جواب است؟ اگر بخواهیم بازهم آزمون-خطا کنیم این بار به سادگی دفعه قبل نمی‌توان جواب را یافت که البته عدد ۳- است. حال فرض کنید بخواهیم مسئله را بدون آزمون-خطا حل کنیم. بدین منظور فرض کنید عدد مورد نظر را با x نشان دهیم. پس باید داشته باشیم $x^2 + x = 6$. حال معادله را بصورت $x^2 + x - 6 = 0$ مینویسیم. چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ پاسخ تجزیه است. داریم:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0 \implies (x + 3)(x + 2) = 0 \implies x = 2 \text{ \& } x = -3$$

معادله شکل گرفته در بالا یک معادله درجه دوم است چرا که مجهول ما یعنی x در این معادله دارای توان ۲ است.

تعریف ۱.۴. به معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم گوییم بشرطی که $a \neq 0$ باشد. اعداد $a, b, c \in \mathbb{R}$ را ضرائب معادله می‌نامیم. x مجهول معادله است و منظور از حل معادله فوق یعنی یافتن تمام اعداد حقیقی چون x که در معادله صدق کنند. با این حساب عدد λ جواب معادله است هرگاه:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

حال به معرفی روش‌های حل این معادله می‌پردازیم^۱. برای این منظور با توجه به وضعیت ضرائب معادله

^۱محمد ابن موسی خوارزمی ریاضیدان نامی ایران و جهان در قرن هشتم و نهم میلادی است. خوارزمی بحق از نوادر تاریخ ریاضیات

روش هایی ارائه می‌شود.

روش ریشه‌گیری

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $c \leq 0$ & $b = 0$ آنگاه با یک ریشه‌گیری جواب معادله بدست می‌آید. مثلاً برای حل معادله $4x^2 - 16 = 0$ داریم:

$$4x^2 - 16 = 0 \implies 4x^2 = 16 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

روش فاکتورگیری

اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $b = 0$ با یک فاکتورگیری ساده معادله حل می‌شود. به عنوان یک مثال ساده برای حل معادله $3x^2 + 12x = 0$ داریم:

$$3x^2 + 12x = 0 \implies 3x(x + 4) = 0 \implies x = 0 \text{ \& } x = -4$$

روش تجزیه

چنانچه هیچ یک از ضرائب صفر نباشد به کمک تجزیه کردن سه جمله‌ای می‌توان معادله را حل کرد. در این مورد توجه داریم که از یکی از خواص اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم که قبلاً به آن اشاره کرده ایم:

$$if \quad ab = 0 \implies a = 0 \text{ یا } b = 0$$

به یک مثال ساده برای حل معادله $x^2 - x - 12 = 0$ داریم:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \implies \begin{cases} x - 4 = 0 \implies x = 4 \\ x + 3 = 0 \implies x = -3 \end{cases}$$

تمرین ۱.۴. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $9x^2 - 25 = 0$

۲) $4x^2 + 16 = 0$

۳) $25x^2 + 5x = 0$

۴) $-\frac{1}{4}x = \frac{8}{3}x^2$

۵) $x^2 + 11x + 30 = 0$

۶) $6x^2 + x = 2$

۷) $x^2 + 9x - 136 = 0$

۸) $x^3 + x^2 = 56x$

است و وی را پدر جبر نام نهاده‌اند. وی معادله درجه دوم را طبقه بندی کرد و برای هر کدام روش حل ارائه داد.

روش مربع کامل کردن

تصور کنید می‌خواهید جواب معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ را بدست آورید. هرچه تلاش کنید، معادله به روش‌های معمول اشاره شده در بالا حل نخواهد شد. پس باید راهکار تازه‌ای بکار برد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x = 1 &\implies x^2 + 2x + 1 = 1 + 1 \\ &\implies (x + 1)^2 = 2 \\ &\implies x + 1 = \pm\sqrt{2} \\ &\implies x = \sqrt{2} - 1 \text{ \& } x = -\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

اگر خوب به محاسبات نگاه کنید هدف از اضافه کردن عدد ۱ به طرفین تساوی این بوده است که یک طرف معادله مربع کامل شود تا بتوان از طرفین جذر گرفت و جواب را یافت. چرا عدد ۱؟ جواب در محاسبه زیر نهفته است. در حالت کلی برای اینکه عبارت $x^2 + bx$ را به عبارتی تبدیل کنیم که شامل مربع کامل باشد به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید می‌خواهیم جواب معادله $3x^2 - 9x + 3 = 0$ را حل کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned}3x^2 - 9x + 3 = 0 &\implies x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\implies x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = 0 \\ &\implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 1 \\ &\implies x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\implies x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ \& } x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

روش کلی حل معادله درجه دوم

همان‌طور که مثال‌های حل شده بالا ملاحظه کردید، روش مربع کامل کردن کمی وقت‌گیر و پرمحاسبه است. به همین دلیل یکبار روش مربع کامل را روی فرم کلی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بکار می‌بریم تا دستوری کلی بر حسب رادیکال‌ها بیابیم و بعد از آن برای حل از دستور یافت شده استفاده کنیم. قبل از شروع محاسبات مبین معادله درجه دوم را بصورت $\Delta = b^2 - 4ac$ تعریف می‌کنیم. Δ یک عدد حقیقی است و لذا هر سه حالت $\Delta = 0$ ، $\Delta > 0$ ، $\Delta < 0$ ممکن است اتفاق بیافتد.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\implies x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\implies x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جواب $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد. اگر $\Delta = 0$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ و سرانجام اگر $\Delta < 0$ باشد گوییم معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\Delta : \begin{cases} \Delta > 0 \implies \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta = 0 \implies x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < 0 \implies & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

درس را با ارائه‌ی مثال‌های کلی از مطالب مطرح شده پی می‌گیریم.

کلمه حقیقی اشاره به اعداد حقیقی دارد. در واقع در حالتی که $\Delta < 0$ است باز هم معادله جواب دارد اما این جواب‌ها عدد حقیقی نیستند بلکه اعداد مختلط هستند که در فصل یک به آن‌ها اشاره‌ای داشته‌ایم. کارل فردریش گاوس در پایان نامه دوره‌ی دکتری خود ثابت کرد که یک معادله از درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

تجزیه $۱) 4x^2 - 4x + 1 = 0$

تجزیه $۲) 8x^2 - 7x - 1 = 0$

مربع کامل $۳) x^2 + 5x = 1$

مربع کامل $۴) 3x^2 + 2x = 5$

روش دلتا $۵) 4x^2 + 4x - 7 = 0$

روش دلتا $۶) 20x + 1 = 21x$

مثال ۲.۴. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 3a - 5 = 0$ برابر ۱ است. ریشه دیگر معادله را بدست آورید.

مثال ۳.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید که معادله $x^2 - (a + 2)x + 2a = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد و سپس آن ریشه مضاعف را بدست آورید.

مثال ۴.۴. از چه عدد مثبتی اگر معکوس آن کم شود باقیمانده برابر $\frac{5}{6}$ می‌شود؟

مثال ۵.۴. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۸۸ واحد باشد، محیط مستطیل را بدست آورید.

مثال ۶.۴. طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر $2x$, $2x + 1$, $2x + 2$ است. محیط این مثلث چند واحد است؟

مثال ۷.۴. جواب معادله $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} = \frac{x^2+1}{x^2+x-6}$ را بیابید.

مثال ۸.۴. حاصل عبارت $A = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}$ را بیابید.

تمرین ۲.۴. حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{\dots}}}}}$ را بدست آورید.

تمرین ۳.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

مربع کامل $۱) 5x^2 + 6x - 8 = 0$

روش دلتا $۲) 7x^2 - 5x + 2 = 0$

تمرین ۴.۴. معادله‌ی $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 5$ را حل کنید.

تمرین ۵.۴. معادله $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۶.۴. معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را حل کنید.

تمرین ۷.۴. معادله‌ی $x^4 + 25 = 26x^2$ را حل کنید.

تمرین ۸.۴. معادله‌ی $x^2 - 17x + 16 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۹.۴. یک درهم را بین چند مرد تقسیم کرده ایم ولی چون یک مرد به آن‌ها اضافه شده است، تقسیم را دوباره بین همه‌ی مردها انجام داده‌ایم. معلوم شد در تقسیم دوم به هر مرد $\frac{1}{6}$ درهم کمتر از تقسیم اول رسیده است. در آغاز چند مرد بوده است؟ (مسئله خوارزمی)

تمرین ۱۰.۴. معادله‌ی $x^2 - (2 + 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۱.۴. یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر در ۴ متر قرار دارد به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

تمرین ۱۲.۴. حدود m را طوری بیابید تا معادله‌ی درجه دوم $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

تمرین ۱۳.۴. اختلاف مربع عدد $\frac{3}{7}$ از خود $\frac{3}{7}$ برابر اختلاف مربع چه کسری از خود آن کسر است؟

تمرین ۱۴.۴. ثابت کنید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \implies x_1 = 1 \text{ \& } x_2 = \frac{c}{a} \\ a + c = b \implies x_1 = -1 \text{ \& } x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

تمرین ۱۵.۴. معادلات داده شده را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $148x^2 + 2x = 150$

۲) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} = 0$

۳) $(1 + \sqrt{2})x^2 = x + \sqrt{2}$

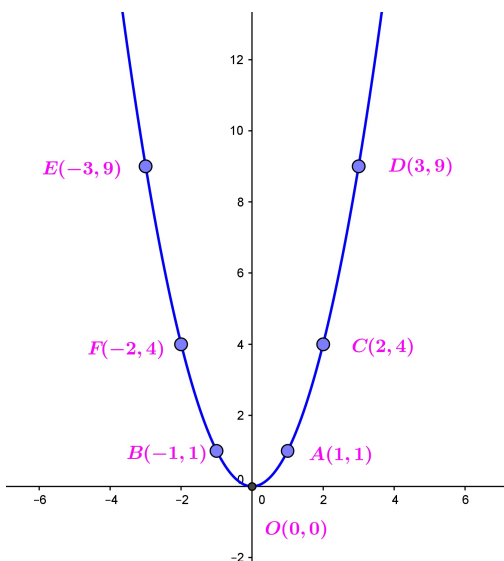
۴) $1395x^2 - 1394x - 1 = 0$

۵) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

۶) $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

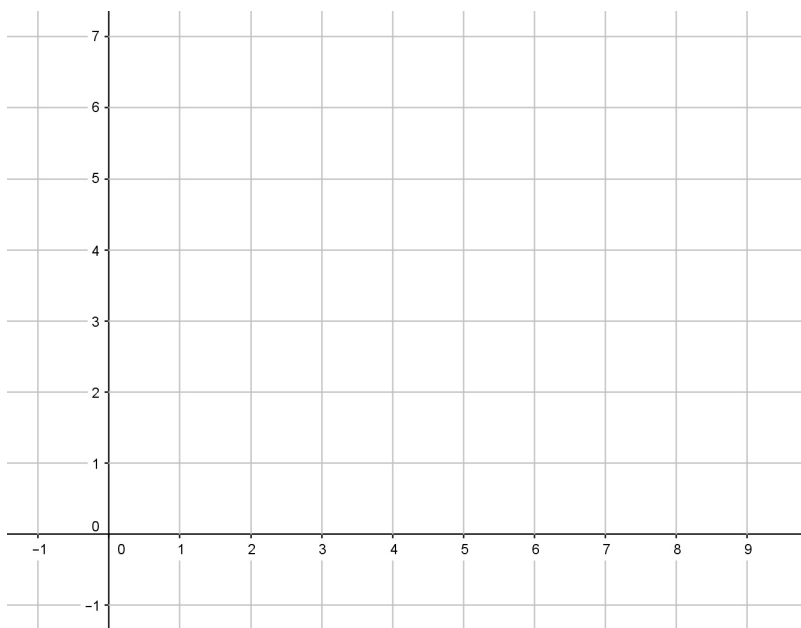
۲.۴ سهمی‌ها

یکی از کاربردی‌ترین منحنی‌ها در زندگی روزمره ما سهمی است. سهمی که سه بعدی شده سهمی است، امروزه نقش اصلی در ارسال و دریافت اطلاعات از طریق هوایی را دارد. نام امروزی سهمی (parabola) را آپولونیوس معرفی کرد و نیوتن اولین بار خاصیت همگرایی نور در کانون سهمی را بررسی کرد. ساده‌ترین سهمی دارای معادله‌ی $y = x^2$ است. اگر به متغیر x مقدار دهیم می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم. مثلاً با فرض $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 0$ مقادیر حاصل عبارتند از $1, 4, 9, 0, 1, 4, 9$. اگر این نقاط را روی محورهای مختصات مشخص کنیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم شکل زیر حاصل می‌شود.



ذکرچند نکته ضروری است. اول اینکه پایین‌ترین نقطه سهمی در شکل فوق مبداء مختصات است. نقطه $O(0, 0)$ را مینیمم (کمینه) سهمی گوئیم. دوم اینکه محور عرض‌ها سهمی را به دو قسمت یکسان تقسیم کرده است. محور عرض‌ها $x = 0$ را محور تقارن سهمی گوئیم.

مثال ۹.۴. سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ را رسم کنید.



تعریف ۲.۴. منظور از یک سهمی معادله‌ای بصورت $y = ax^2 + bx + c$ است که $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$. با مربع کامل کردن این عبارت بصورت:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

درمی‌آید که در این حالت راس سهمی یا مینیمم سهمی نقطه $M(h, k)$ است و خط $x = h$ را محور تقارن سهمی گوئیم. اگر $a > 0$ باشد دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال ۱۰.۴. راس سهمی‌های زیر را بیابید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$۱) y = 2x^2 + 1$$

$$۲) y = -x^2 + 4$$

$$۳) y = x^2 + 4x + 3$$

$$۴) y = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$۵) y = 1 - 4x - 2x^2$$

$$۶) 3y = x^2 - 4x + 7$$

رسم سهمی ساده‌تر می‌شود اگر بتوانیم دستوری صریح از راس سهمی بدست آوریم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &\implies y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

با این حساب راس سهمی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{راس سهمی} \longrightarrow M \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

به این ترتیب با داشتن راس سهمی کافیست یک یا دو نقطه قبل و بعد از آن را در معادله منحنی جایگذاری کنیم تا عرض آن نقاط حاصل شده و سپس سهمی را رسم کنیم. همچنین توجه کنید که اگر $a > 0$ باشد سهمی مینیمم دارد و اگر $a < 0$ باشد سهمی ماکزیمم (بیشینه) دارد.

مثال ۱۱.۴. نمودار سهمی $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ را رسم کنید.

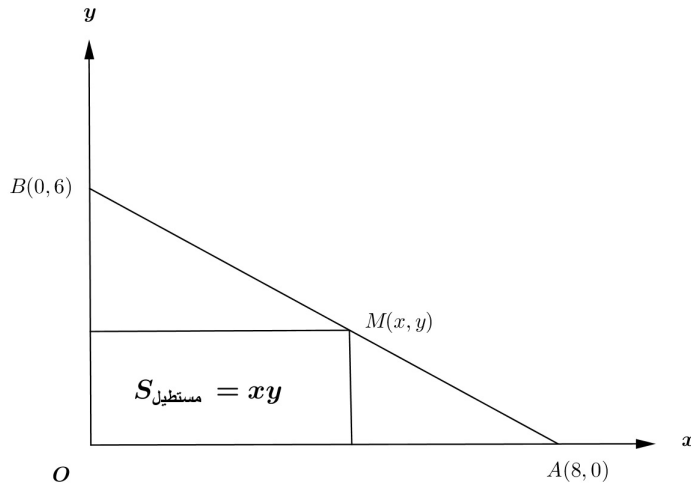
مثال ۱۲.۴. مجموع دو عدد مقدار ثابت 20° است. بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد را بدست آورید.

مثال ۱۳.۴. مستطیلی به اضلاع 20° و 60° واحد مفروض است. اگر یک واحد به عرض آن اضافه کنیم دو واحد از طول آن کم می‌شود. در بین مستطیل‌هایی که به این ترتیب ساخته می‌شود کدامیک بیشترین مساحت را داراست؟

مثال ۱۴.۴. یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است. با این طناب قرار است زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است حصار شود. بیشترین مساحتی که می‌توان با این طناب حصار کرد چقدر است؟

مثال ۱۵.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ شود.

مثال ۱۶.۴. بیشترین مساحت ممکنه برای مستطیل زیر را بیابید.



مثال ۱۷.۴. موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از دستور

$y = -5t^2 + 50t + 55$ بدست می‌آید. معین کنید پس از چند ثانیه موشک به بیشترین ارتفاع خود می‌رسد.

پس از چند ثانیه موشک به زمین می‌خورد؟

تمرین ۱۶.۴. سهمی‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$

۲) $y = 6x^2 - 24x + 24$

۳) $y = 4 - 2x - 2x^2$

۴) $y = 4x^2 + 28x = 49$

۵) $y = 2x - 3 - x^2$

۶) $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{12}x - 1$

تمرین ۱۷.۴. بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است و با طناب می‌توان

حصار کرد ۶۴۸ متر است. طول طناب را بیابید.

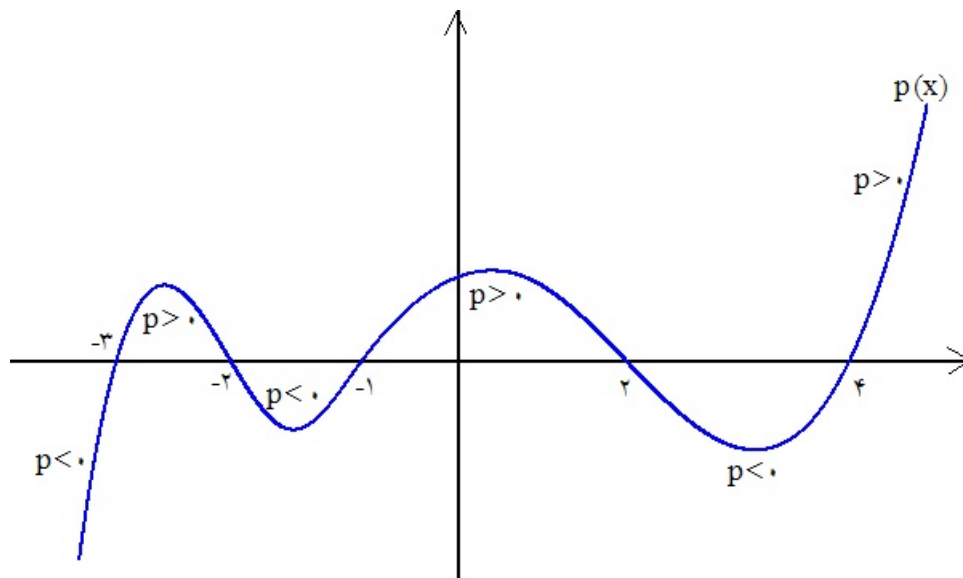
تمرین ۱۸.۴. دو ضلع مستطیلی روی محورهای مختصات در ناحیه اول و زیر خط $y = \frac{6-x}{4}$ واقع است.

یک راس آن روی مبدا و راس مقابلش M روی خط $y = \frac{6-x}{4}$ قرار دارد. بیشترین مساحت مستطیل وقتی $M(x, y)$ روی خط اشاره شده حرکت می‌کند را بیابید.

تمرین ۱۹.۴. اگر $x + 2y = 30$ باشد ماکزیمم مقدار حاصلضرب xy را بدست آورید.

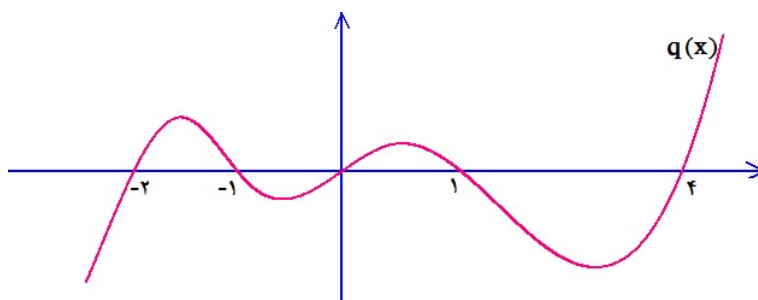
۳.۴ تعیین علامت چند جمله‌ایها

به دقت به شکل زیر نگاه کنید. نمودار یک منحنی در دستگاه مختصات ترسیم شده است. نام منحنی $p(x)$ است و در برخی بازه‌ها بالای محور x هاست و لذا مثبت است و در برخی بازه‌ها زیر محور x هاست و لذا منفی است. اگر دقت کنید نقاطی که منحنی محور طولها را در آنها قطع کرده است نقشی اساسی در تعیین اینکه p مثبت است یا منفی بازی می‌کند. چنین نقاطی را ریشه‌های p گوئیم. در حالت کلی نقاط حاصل از حل معادله $p(x) = 0$ را ریشه‌های p گوئیم.



$$\left\{ \begin{array}{ll} x < -3 \implies p(x) < 0 & \text{گوئیم عبارت منفی است} \\ -3 < x < -2 \implies p(x) > 0 & \text{گوئیم عبارت مثبت است} \\ -2 < x < -1 \implies p(x) < 0 & \\ \vdots & \\ x > 4 \implies p(x) > 0 & \end{array} \right.$$

مثال ۱۸.۴. با توجه به شکل علامت منحنی $q(x)$ را تعیین کنید.

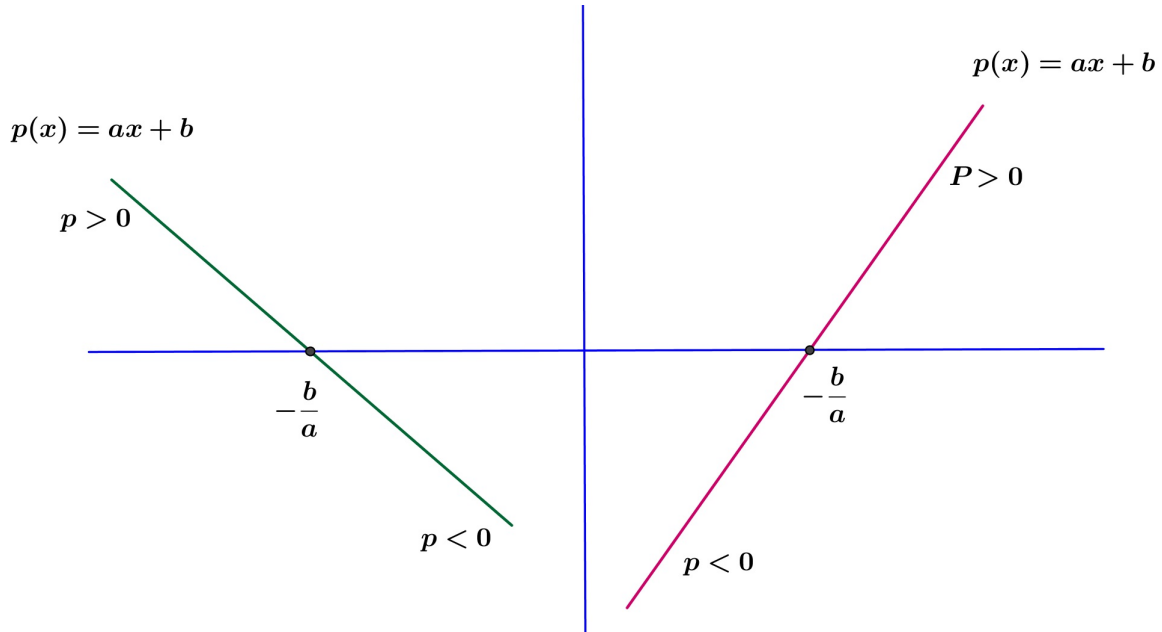


۱.۳.۴ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

می‌خواهیم عبارت $p(x) = ax + b$ را تعیین علامت کنیم. ابتدا ریشه‌ها یا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم:

$$p(x) = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$$

در حالت کلی نمودار $p(x) = y = ax + b$ یکی از دو حالت زیر را دارد:



از نمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p < 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p > 0 \end{cases} \\ a < 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p > 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

خلاصه بحث فوق در جدول زیر که آن را جدول تعیین علامت می‌نامیم آمده است.

x	$-\frac{b}{a}$
$p(x)=ax+b$:
مخالف علامت a	موافق علامت a

مثال ۱۹.۴. علامت عبارات $p(x) = 2x - 4$, $q(x) = (6 - 2x)^3$ را تعیین کنید.

تذکر مهم: چنانچه بخواهیم علامت یک عبارت جبری را که شامل چند دوجمله‌ای درجه اول است را تعیین کنیم، می‌توانیم در یک جدول همه‌ی دوجمله‌ایها را نوشته و ریشه تک‌تک آنها را یافته و هر کدام را تعیین علامت کنیم و دست آخر با ضرب علامت‌ها درهم علامت کل عبارت را بیابیم. مثال زیر را که به همین طریق حل می‌شود به دقت نگاه کنید.

مثال ۲۰.۴. عبارت $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)^5$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱.۴. چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ را تعیین علامت کنید.

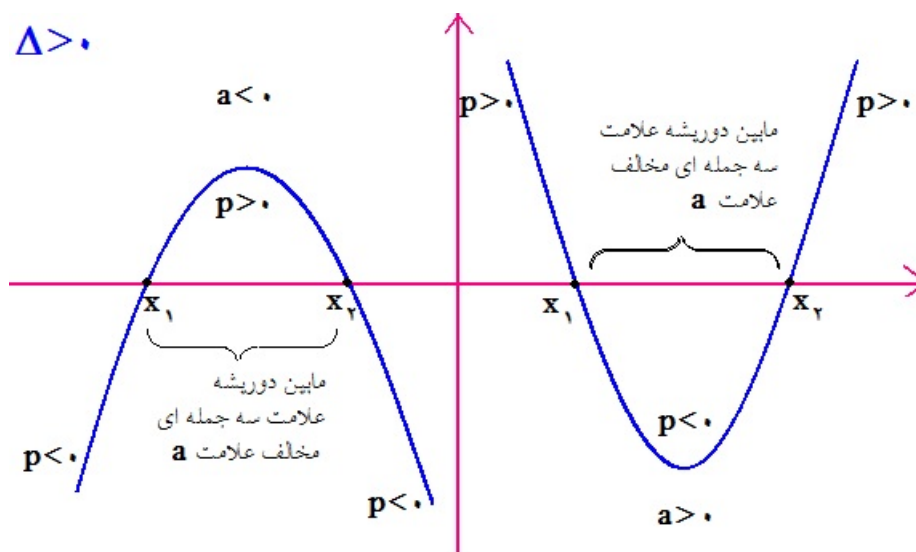
مثال ۲۲.۴. عبارت $A = \frac{(1-x)(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۳.۴. سهمی $y = x^2 - 2x - 8$ مفروض است. معین کنید در چه بازه‌ای سهمی زیر محور طولها و در چه بازه‌ای بالای محور طولهاست؟

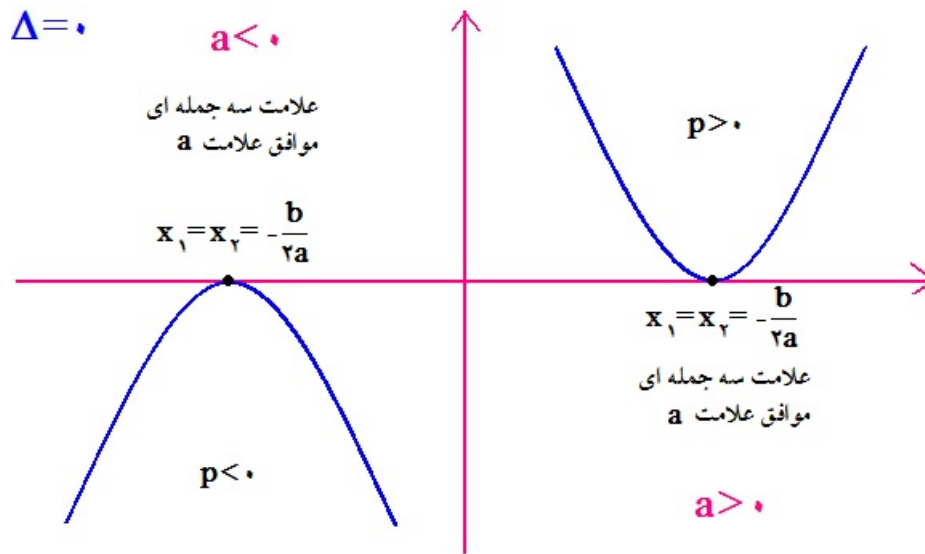
۲.۳.۴ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

همان‌طور که تا الان متوجه شدید یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان با تجزیه به عامل‌های درجه اول تعیین علامت کرد. اما این زمانی شدنی است که عبارت تجزیه شود. در صورتیکه عبارت تجزیه نشود راه‌حل چیست؟ راه‌حل یافتن روشی است که به کمک آن بتوان سه‌جمله‌ای‌ها را مستقیماً تعیین علامت کرد. در حالت کلی یک سه‌جمله‌ای درجه دوم یا همان سهمی به یکی از صورت‌های زیر است:

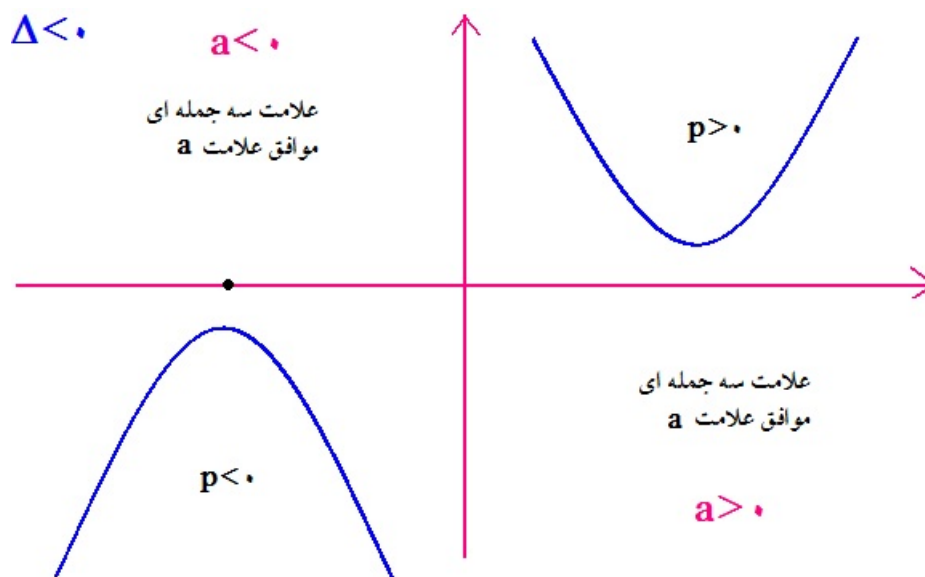
الف: اگر $\Delta > 0$



ب: اگر $\Delta = 0$



ج: اگر $\Delta < 0$



پس برای تعیین علامت سه جمله‌ای $p(x)$ ابتدا باید $p(x) = 0$ را حل کنیم. پس اولین گام یافتن مبین معادله درجه دوم است یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که بسته به علامت Δ یکی از جداول زیر را تشکیل می‌دهیم. اگر $\Delta > 0$ باشد:

x	x_1	x_2
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت مخالف a
	علامت مخالف a	علامت موافق a

اگر $\Delta = 0$ باشد:

x	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت موافق a

اگر $\Delta < 0$ باشد:

x	سه جمله ای ریشه ندارد	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	

تذکر: نتایج حاصل از بررسی نمودارهای یک سه جمله‌ای درجه دوم را می‌توان از روی معادله سه جمله‌ای درجه دوم $p(x) = ax^2 + bx + c$ نیز بدست آورد. برای این منظور فرم تبدیل شده‌ی عبارت p را که قبلاً محاسبه کرده‌ایم بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ \implies \frac{p(x)}{a} &= \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

حال اگر $\Delta < 0$ باشد عبارت $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ همواره مثبت است پس $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی اگر a مثبت باشد آنگاه $p(x)$ هم مثبت است. و اگر a منفی باشد آنگاه $p(x)$ هم منفی است.
حال اگر $\Delta = 0$ باشد عبارت حاصل بصورت $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ درمی‌آید و باز $\frac{p(x)}{a}$ مثبت است و مانند حالت قبل نتیجه حاصل می‌شود.

سرانجام اگر $\Delta > 0$ باشد پس $\sqrt{\Delta}$ با معنی است و داریم:

$$\frac{p(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \quad (*)$$

عبارت‌های داخل پرانتز که بلافاصله بعد از x آمده‌اند همان ریشه‌های معادله $p(x) = 0$ هستند. اگر قرار دهیم:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

آنگاه معادله (*) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{p(x)}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

بدون آنکه استدلال دچار نقصان شود می‌توان فرض کرد $x_1 < x_2$ است. (چرا) حال برای بررسی علامت $\frac{p(x)}{a}$ باید حالات زیر را بررسی کرد.

۱. اگر $x_1 < x < x_2$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ منفی است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ منفی است و این یعنی $p(x)$ و a از نظر علامت مخالف هم هستند. (این همان عبارت جدول تعیین علامت است)

۲. اگر $x < x_1 < x_2$ باشد و یا $x_1 < x_2 < x$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ مثبت است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی $p(x)$ و a هم علامت هستند.

همان‌طور که مشاهده کردید نتایج بدست آمده در این حالت منطبق بر نتایج بدست آمده از نمودارهای هندسی است.

درس را با بررسی چند مثال پی می‌گیریم.

مثال ۲۴.۴. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p = 2x^2 - x - 3$

۲) $p = -x^2 + x + 2$

۳) $A = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$

۴) $p = (x^2 - 9)(3x - 1)$

۵) $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

۶) $C = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)(x - 3)}$

تمرین ۲۰.۴. تعیین علامت کنید.

۱) $p = \frac{1}{3}x - 1$

۲) $p = (6 - 3x)(2 + 2x)$

۳) $A = \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(4-x)(5-x)}$

۴) $B = \frac{x^2 + x + 2}{4 - 3x - x^2}$

۵) $C = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

۶) $D = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}(x^2 + 4x + 4)}$

۴.۴ نامعادله

یکی از مهم‌ترین کاربردهای تعیین علامت حل نامعادلات جبری است. برای یافتن مقادیری از x که در شرط $p(x) > 0$ صدق می‌کند تنها راه تعیین علامت p است. حتی ممکن است p لزوماً چندجمله‌ای نباشد. قبل از هر چیز خواص مقدماتی نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

خواص اصلی نامساوی‌ها

$$۱) a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$۲) a \leq b \implies \begin{cases} c > 0 \implies ac \leq bc \\ c < 0 \implies ac \geq bc \end{cases}$$

$$۳) a \leq b \ \& \ b \leq c \implies a \leq c$$

$$۴) 0 < a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$$

$$۵) a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

$$۶) a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

مثال ۲۵.۴. نامساوی $-8x + 3(x - 2) > -x + 2$ را حل کنید و مجموعه جواب آن را بصورت بازه نمایش دهید.

مثال ۲۶.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{3} < \frac{2x + 3}{5} \leq \frac{2}{3}$ را حل کنید.

مثال ۲۷.۴. حدود پارامتر m را طوری تعیین کنید تا معادله‌ی درجه دوم $x^2 + mx + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

مثال ۲۸.۴. سهمی $y = x^2 + ax + b$ محور طولها را در دو نقطه با طول‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند. اولاً مقادیر a, b را بیابید و ثانياً معین کنید که نمودار این سهمی در چه بازه‌ای زیر خط $y = -3$ قرار می‌گیرد.

مثال ۲۹.۴. نامعادله‌ی $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$ را حل کنید.

مثال ۳۰.۴. نامعادله $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}$ را حل کنید.

مثال ۳۱.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$ را حل کنید.

مثال ۳۲.۴. دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 3 \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۳۳.۴. نامعادله‌ی $\frac{(x-4)(x^2-5x+6)(x^2+x+2)}{(-2x^2+x-5)(x^2-2x+1)} < 0$ را حل کنید.

مثال ۳۴.۴. حدود m را چنان تعیین کنید تا عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار x مثبت باشد.

مثال ۳۵.۴. نامعادله‌ی $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} < 1$ را با شرط $x > 0$ حل کنید.

تمرین ۲۱.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $-1 < \frac{x+1}{1-x} \leq 2$ را بیابید.

تمرین ۲۲.۴. حدود m را چنان بیابید که نابرابری زیر همواره درست باشد.

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -1$$

تمرین ۲۳.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $(2 - \sqrt{3})^2 + x < (2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{x}}$ با شرط $x > 0$ را بدست آورید.

تمرین ۲۴.۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{3-x^2}{x} > 2$$

$$۲) \frac{2x-1}{x} < 1$$

$$۳) \frac{3x^2-3x}{x^3-1} > 1$$

$$۴) -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2}$$

$$۵) \frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$$

$$۶) \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+4}$$

$$۷) \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} > \frac{2x+4}{x-2}$$

$$۸) (x + \sqrt{x})(2x^2 + x - 15) < 0$$

تمرین ۲۵.۴. اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ برای هر مقدار x منفی باشد حدود تغییرات a را بدست آورید.

تمرین ۲۶.۴. نامعادله $\frac{5}{3}x + 2 \leq 2x - 1 \leq 3x + 1$ را حل کنید.

تمرین ۲۷.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1}$ را حل کنید. (ببینید امکان معکوس کردن طرفین نامعادله وجود دارد؟)

۵.۴ قدرمطلق و معادلات و نامعادلات قدرمطلق

در کلاس نهم با قدرمطلق آشنا شده‌اید. یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴. قدر مطلق x را که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۳.۴.۴. قدرمطلق عبارت‌های زیر را حساب کنید.

۱) $|1 + \sqrt{2}|$

۲) $|1 + t^2|$

۳) $|1 - \sqrt{2}|$

۴) $\left|1 - \frac{\pi}{3}\right|$

مهم‌ترین خواص قدرمطلق‌ها

۱) $|u| = 0 \implies u = 0$

۲) $|u| = a \implies u = \pm a \quad , a > 0$

۳) $|u| \leq a \implies -a \leq u \leq a \quad , a > 0$

۴) $|u| \geq a \implies u \geq a \text{ یا } u \leq -a \quad , a > 0$

۵) $u^2 \leq a^2 \iff |u| \leq a \iff -a \leq u \leq a \quad , a > 0$

۶) $u^2 \geq a^2 \iff |u| \geq a \iff u \geq a \text{ یا } u \leq -a \quad , a > 0$

۷) $\begin{cases} |u| = u \iff u \geq 0 \\ |u| = -u \iff u \leq 0 \end{cases}$

۸) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ نامساوی مثلثی

۹) $|ab| = |a||b| \quad \& \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

مثال ۳۷.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x^3 - 9x| = 0$$

$$۲) |3x - 5| = 4$$

$$۳) |2x - 1| < 1$$

$$۴) |1 - x| \geq 2$$

$$۵) |x^2 + x - 2| = 2 - x - x^2$$

$$۶) |2x - 1| < x$$

مثال ۳۸.۴. ثابت کنید $|a - b| = |b - a|$.

مثال ۳۹.۴. فرض کنید $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ با این مفروضات ثابت کنید $|ab - c| < 20$.

مثال ۴۰.۴. در نامساوی مثلثی چه زمانی تساوی رخ می‌دهد؟ یعنی تحت چه شرایطی روی a , b نتیجه می‌شود:
 $|a + b| = |a| + |b|$

مثال ۴۱.۴. معادله‌ی $|x^2 - 1| + |2 - x^3| = 1$ را حل کنید.

مثال ۴۲.۴. معادله‌ی $|x - 1| + |x + 1| = 2$ را حل کنید.

مثال ۴۳.۴. نامعادله‌ی $|x^3 - x| \leq x$ را حل کنید.

مثال ۴۴.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x - 1| + |x + 3| > 2$ را بدست آورید.

تمرین ۲۸.۴. حاصل قدرمطلق‌های زیر را بدست آورید.

$$۱) |\sqrt{7} - 3|$$

$$۲) |\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi|$$

$$۳) |\sqrt{10} - 3|$$

$$۴) |\sqrt{2} - 1.41|$$

$$۵) |\pi - 3.14|$$

$$۶) |1 - 2^{\pi}|$$

تمرین ۲۹.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |b(b - 1)| = b$$

$$۲) |b| + |b - 1| = 0$$

$$۳) |b - 1| + |b| = b$$

$$۴) |x^2 - 1| < 1$$

$$۵) 2 \leq |b| \leq 3$$

$$۶) |x| + x = 2$$

تمرین ۳۰.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x| - x = ۳$$

$$۲) |x| + ۱ = ۱$$

$$۳) |x| + x = ۱$$

$$۴) |x| > x + ۲$$

$$۵) |x| - |x + ۱| = ۱$$

$$۶) |x| + |x + ۲| = ۳$$

$$۷) |x| = \frac{1}{x}$$

$$۷) |x^2 - x| < x$$

$$۹) \left| a - \frac{1}{a} \right| = |a - ۱|$$

$$۱۰) |۳x - ۵| = |x + ۲|$$

تمرین ۳۱.۴. به ازای چه مقدار m همواره رابطه $mx^2 - ۲(m - ۱)x + ۱ > ۰$ همواره برقرار است؟

تمرین ۳۲.۴. به کمک تعیین علامت نامساوی بسیار مهم و کلیدی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{cases} x > ۰ \implies x + \frac{1}{x} \geq ۲ \\ x < ۰ \implies x + \frac{1}{x} \leq -۲ \end{cases}$$

تمرین ۳۳.۴. به کمک رابطه‌ی تمرین قبل کمترین مقدار عبارات زیر را بیابید.

$$A = \frac{x^4 + ۲x^2 + ۲}{x^2 + ۱} \quad B = \frac{x^4 + ۲}{\sqrt{x^4 + ۱}}$$

تمرین ۳۴.۴. حل کنید.

$$۱) \frac{1}{x - x^2} > ۴$$

$$۲) ۴ + x^2 > ۳۰ - x^2$$

$$۳) \frac{x^2 - ۲x}{\sqrt{x} + ۱}$$

$$۴) (x^2 + ۲\sqrt{2}x + ۲)(x^2 - ۴) \leq ۰$$

$$۵) m^3 x^2 + mx + \frac{1}{m} < ۰ \rightarrow m = ?$$

$$۶) ۲x^2 - (a - ۳)x + \frac{1}{۸} > ۰ \rightarrow a = ?$$

$$۷) x^3 - ۴x^2 - x + ۴ < ۰$$

$$۷) x^4 - ۳x^2 < ۴$$

$$۹) \frac{x^2 + x - ۲}{x^2 + ۵x + ۶} < ۰$$

$$۱۰) x(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳) \leq ۲۴$$

۶.۴ تست‌های فصل چهارم

۱- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x - 1) < |x| \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $\{x: -1 < x < 1\}$ (۲) $\{x: -2 < x < 2\}$ (۳) $\{x: 0 < x < 2\}$ (۴) $\{x: -2 < x < 1\}$

۲- در کدام فاصله نامساوی $(x - 1)(2 - x) > 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < -1$ (۲) $x < 1$ (۳) $x > 2$ (۴) $1 < x < 2$

۳- اگر $A = \{x | x > 5\}$ و $B = \{x | x < -1\}$ آنگاه علامت عبارت $x(x - 2)(x - 4)$ بر A و B کدام است؟
 (۱) بر A منفی و بر B مثبت
 (۲) بر A مثبت و بر B منفی
 (۳) بر A و B هر دو مثبت
 (۴) بر A و B هر دو منفی

۴- جوابهای معادله $\frac{1 - 2x}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2} = 0$ کدام است؟
 (۱) $1, -1$ (۲) صفر, ۱ (۳) صفر, ۸ (۴) $1, 8$

۵- به ازای چه مقادیری از x نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} < 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < 1$ (۲) $1 < x < 2$ (۳) $-1 < x < 2$ (۴) $-2 < x < -1$

۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - (4a + 4)x + (3a^2 + 6a + 3) = 0$ برابر ۲ باشد ریشه دیگر کدام است؟
 (۱) -6 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 6

۷- به ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادله $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸- جوابهای دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 2x - \frac{x}{3} < 1 \\ \frac{x}{2} - 2 < x \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $x > -4$ (۲) $x < \frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5} < x < 4$ (۴) $-4 < x < \frac{3}{5}$

۹- محل تلاقی خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ کدام است؟
 (۱) $(0, 0)$ (۲) $(1, -1)$ (۳) $(1, 1)$ (۴) $(1, 1)$ و $(0, 0)$

۱۰- ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام اند؟
 (۱) $-1, \frac{1}{2}$ (۲) $1, -\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

۱۱- اگر یک ریشه معادله $ax^2 - 7x + 357 = 0$ برابر ۱۷ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۲- عدد $\frac{2}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + bx - 4 = 0$ است ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) -۳ (۴) -۶

۱۳- مجموعه جواب دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} 5x - 2 > 3 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \mid x > 4\}$ (۲) $\{x \mid x < 4\}$ (۳) $\{x \mid x > 1\}$ (۴) $\{x \mid 1 < x < 4\}$

۱۴- کدام مجموعه، جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 10 - 5x < 0 \\ \frac{x}{2} + 2 > x \end{cases}$ است؟

- (۱) $\{x: 2 < x < 4\}$ (۲) $\{x: 2 < x < 5\}$ (۳) $\{x: 4 < x < 5\}$ (۴) $\{x: 5 < x < 10\}$

۱۵- اگر $a > b > 0$ ، $c < d < 0$ کدام نامساوی همواره صحیح است؟

- (۱) $ac > bd$ (۲) $ac < bd$ (۳) $ad < bc$ (۴) $ad > bc$

۱۶- ۴ برابر عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کمتر است معکوس آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{-8}{9}$ (۴) $\frac{-9}{8}$

۱۷- در معادله درجه دوم $3x^2 + mx - 20 = 0$ یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{5}{3}$ است ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۸- مجموعه همه جوابهای نامعادله $\frac{2\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x+1}} > 1$ در کدام فاصله است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[0, 1)$

۱۹- اگر به ازای همه مقادیر m ، $4x^2 - 2mx + 4m^2 \geq 0$ باشد، آنگاه حدود m کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) \emptyset (۳) $|m| \leq 2$ (۴) $|m| \geq 2$

۲۰- فرض کنیم a و b مختلف‌العلامه باشند و $a < b$ در این صورت کدام نامساوی همواره برقرار است؟

- (۱) $a^2 < b^2$ (۲) $a^3 < b^3$ (۳) $b^2 < a^3$ (۴) $b^3 < a^3$

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ کدام است؟

(۱) $\{x \mid x \leq 1\}$ (۲) $\{x \mid x < 1\}$ (۳) $\{x \mid x \geq 1\}$ (۴) $\{x \mid x > 1\}$

۲۲- فرض کنید p و q و r اعداد حقیقی و $r < 0$, $pq \neq 0$, $pr > qr$. آنگاه همواره :

(۱) $-p > -q$ (۲) $-p > q$ (۳) $q > -p$ (۴) $p > q$

۲۳- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است مجموع این دو عدد کدام است؟

(۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷

۲۴- نسبت دو عدد برابر $\frac{3}{5}$ و مجموع مربعاتشان ۱۶۶۶ است. مجموع دو عدد کدام است؟

(۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۶۵

۲۵- اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است؟

(۱) $-2 \leq m \leq 1$ (۲) $1 \leq m \leq 2$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $-3 \leq m \leq 2$

۲۶- مجموعه جوابهای حقیقی نامعادله $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > \frac{3}{4}x(x-1)^2$ کدام است؟

(۱) $\{x : x > -3\}$ (۲) $\{x : x < -1\}$ (۳) $\{x : x < -2\}$ (۴) $\{x : -3 < x < -1\}$

۲۷- دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن مقدار ۹ واحد کمتر است. این مقدار کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۲۸- تعداد جوابهای معادله‌ی $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x-4}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۹- حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بیشتر است مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۱۹ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵

۳۰- حاصلضرب دو عدد فرد متوالی ۳۲۳ است مجموع این دو عدد کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که $0 < x < y$: آنگاه:

(۱) $\frac{-1}{x} < \frac{-1}{y}$ (۲) $-x < -y$ (۳) $-x + y < 0$ (۴) $\frac{-1}{y} < \frac{-1}{x}$

۳۲- اگر a و b متضاد علامه و ناصفر باشند، حاصل عبارت $4 - (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ همواره کدام است؟
 (۱) مثبت (۲) منفی (۳) کوچکتر یا مساوی صفر (۴) بزرگتر یا مساوی صفر

۳۳- مجموعه جوابهای نامعادله $|x|(x^2 - 3x + 2) \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $[1, 2]$ (۲) $\{0\} \cup [1, 2]$ (۳) $[-2, -1]$ (۴) $\{0\}, [-2, -1]$

۳۴- مجموعه جوابهای $x^4 - 1 \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, +1]$ (۲) $[-1, +1]$ (۳) $[-1, +1]$ (۴) $[-1, +\infty)$

۳۵- عدد ۳۶ را به دو قسمت چنان تقسیم کرده‌ایم که حاصلضرب آن دو ماکزیمم است. آن دو قسمت کدامند؟
 (۱) ۱۲ و ۲۴ (۲) ۱۶ و ۲۰ (۳) ۱۸ و ۱۸ (۴) ۲۲ و ۱۴

۳۶- مجموعه جوابهای نامعادله $(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - 4) \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (۳) $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$ (۴) $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$

۳۷- حدود تغییرات x ، در نامعادله $(x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 3) > 0$ کدام است؟
 (۱) $1 < x < 3$ (۲) $-3 < x < -1$ (۳) $x > 3$ یا $x < 1$ (۴) $x > -1$ یا $x < -3$

۳۸- کمترین مقدار عبارت $x^2 - x + 2$ وقتی که x تغییر می‌کند، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۳۹- کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله زیر منفی است؟
 (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(2, \infty)$

۴۰- جواب نامعادله $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ کدام است؟
 (۱) $-4 < x < 4$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x > 2$ یا $x < -2$ (۴) $x > 4$ یا $x < -4$

۴۱- جوابهای نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x - 1} > 1$ کدام است؟
 (۱) $R - \{1\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x : x > 1\}$ (۴) $\{x : x < 1\}$

۴۲- حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد، ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۳- اگر $x \geq 3$ ، مجموعه جوابهای نامعادله $x^2 - 2|3 - x| \leq 21$ کدام است؟
 (۱) $\{x : 3 \leq x \leq 4\}$ (۲) $\{x : 3 \leq x \leq 5\}$ (۳) $\{x : x \leq 4\}$ (۴) $\{x : x \geq 5\}$

۴۴- اگر $\forall a, b \in \mathbb{R} ; a < b < 0$ ، آنگاه کدام نامساوی نادرست است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ (۲) $a^{2n} > b^{2n}$
 (۳) $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$ (۴) $\frac{-1}{a} < \frac{-1}{b}$

۴۵- مجموعه جواب نامعادله $2x - |x - 1| > 8$ کدام است؟

(۱) $\{x : x > 7\}$ (۲) $\{x : x > 9\}$
 (۳) $\{x : x > 7 \text{ یا } x < 1\}$ (۴) $\{x : x > 9 \text{ یا } x < 1\}$

۴۶- اگر $|a| < |b|$ و b^3 منفی باشد، آنگاه همواره:

(۱) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۲) $a < b$ (۳) $a > b$ (۴) $a^2 > b^2$

۴۷- در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ ، با شرط $b = c + 1$ ، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت است؟

(۱) $-c$ (۲) $2b - 1$ (۳) $\frac{b}{2}$ (۴) c

۴۸- رابطه بین x ، y به صورت $2x + y = 16$ است. بیشترین مقدار xy وقتی x تغییر می‌کند، کدام است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۴۲

۴۹- جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq x-1 \\ x(x-4) \leq x^2-16 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\{4\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x : x \geq 4\}$ (۴) $\{x : x \leq 4\}$

۵۰- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟

(۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۵۱- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصلضرب آنها می‌نیم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۲- جواب نامعادله‌ی $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

(۱) $x < \frac{2}{3}$ (۲) $x > \frac{3}{4}$ (۳) $x > \frac{7}{6}$ (۴) $x < \frac{5}{4}$

۵۳- در معادله‌ی $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4}$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

۵۵- جواب نامعادله‌ی $2x > \frac{x-1}{x+1}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x < -1\}$ (۲) $\{x : x > -1\}$ (۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x : -2 < x < -1\}$

۵۶- در یک قطعه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود، پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود، به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود، دو کیلوگرم از متوسط محصول آن کم می‌شود. حداکثر برداشتی با این فرضیه کدام است؟

- (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۲۴۰ (۳) ۱۲۵۰ (۴) ۱۲۸۰

۵۷- جواب نامعادله زیر کدام است؟ $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$

- (۱) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ (۲) $-1 \leq x \leq 1$ (۳) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-2 \leq x \leq 1$

۵۸- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $m > 2/5$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2/5$

۵۹- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) \emptyset (۴) R

۶۰- جواب مشترک دو نامعادله $\frac{3x-1}{3} > 3x-2$ و $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $-2 < x < 2$ (۲) $-4 < x < 1$ (۳) $-2 < x < 1$ (۴) $-4 < x < 2$

۶۱- بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

- (۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸

۶۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-2| < 2x - x^2$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

۶۳- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

۷.۴ کلید تست‌های فصل چهارم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۵

تابع

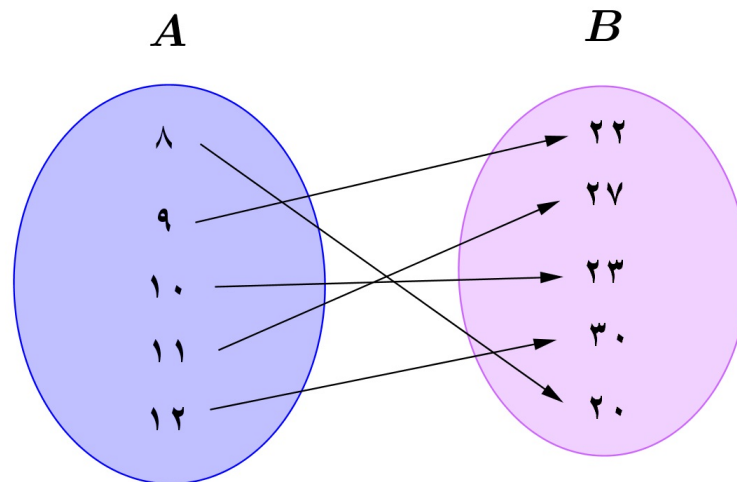
۱.۵ مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن

در این فصل با مفهوم تابع آشنا خواهید شد. مفهومی که نقشی کلیدی در تمام شاخه‌های علوم دارد. در واقع تابع را می‌توان در زیست‌شناسی، علوم مهندسی، جغرافیا، فیزیک، شیمی و... دید. این دامنه کاربرد نشان از اهمیت تابع دارد. از نظر تاریخی نمی‌توان بطور دقیق پیدایش تابع را بررسی کرد چرا که در کتیبه‌های به جای مانده از بابلیان می‌توان تناظر بین اعداد طبیعی و مربع‌های آن‌ها و مکعب‌های آن‌ها را دید که به تعبیری تابع است. افراد دیگری هم مفهوم تابع را به کار برده‌اند که عبارتند از گاليله، دکارت، جان برنولی، گاتفرید لایبنیتز، اویلر، دالامبر، کوشی، دیریکله، ژوزف فوریه و کارل وارشراس. شاید از دوره وایرشراس به بعد مفهوم تابع بی‌عیب و نقص و کامل مانند آنچه امروز هست معرفی شد. تمامی افراد نامبرده از بزرگان تاریخ ریاضیات هستند و هرکدام در تکمیل مفهوم تابع نقش داشته‌اند.

اتاقی که در آن نشسته را در نظر بگیرید. راس هر ساعت دمای اتاق را اندازه‌گیری کنید و در یک جدول یادداشت کنید مشخصاً در یک لحظه معین دمای اتاق دو مقدار ندارد. فرض کنید جدول زیر نمایش این اعداد باشد.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۲۰	۲۲	۲۳	۲۷	۳۰

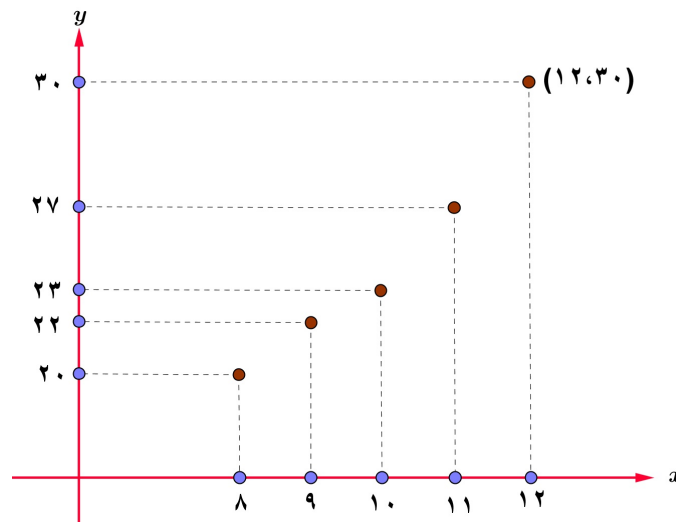
یک راه دیگر نمایش این رابطه‌ی بین زمان و درجه حرارت اتاق استفاده از نمودار ون هست. در شکل زیر این نمایش را می‌بینید. مجموعه A نشان‌دهنده‌ی زمان، و مجموعه دوم یعنی B نشان‌دهنده‌ی درجه حرارت هست. رابطه‌ی بین این‌ها با یک پیکان جهت دار نمایش داده شده است. اولاً از هر عضو مجموعه‌ی اول یک پیکان خارج شده است و هر پیکان به یک و فقط یک عضو از مجموعه‌ی B نظیر شده است.



یک راه دیگر نمایش رابطه فوق استفاده از زوج مرتب است. منظور از یک زوج مرتب نمادی بصورت (a, b) است که در آن a را مولفه اول و b را مولفه دوم گوئیم. کلمه مرتب اشاره به آن دارد که ترتیب مولفه‌ها مهم است. یعنی در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$. رابطه‌ی فوق بصورت زوج مرتب در زیر نمایش داده شده است:

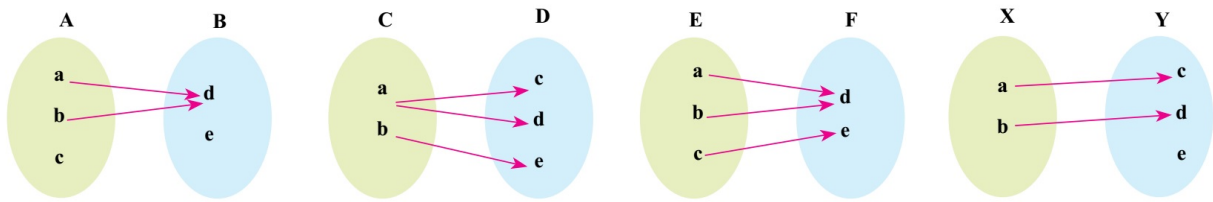
$$f = \{(8, 20), (9, 22), (10, 23), (11, 27), (12, 30)\}$$

زمانی که مولفه‌ها عدد حقیقی باشند هر زوج مرتب نشانگر نقطه‌ای روی دستگاه مختصات است. مولفه اول معرف طول و مولفه دوم معرف عرض نقطه است. نمایش رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات را در شکل زیر می‌بینید.

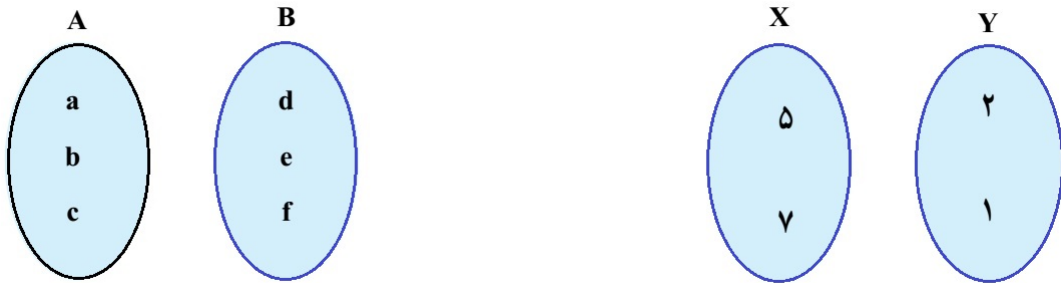


تعریف ۱.۵. یک تابع بین دو مجموعه A و B رابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

مثال ۱.۵. از نمودارهای ون زیر کدام تابع است و کدام نیست؟



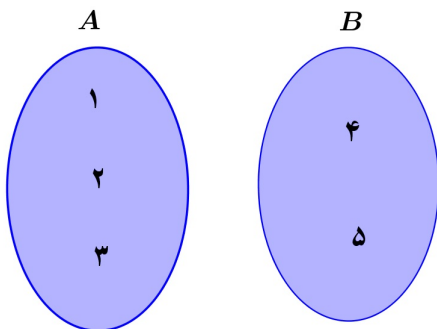
مثال ۲.۵. بیجان‌های از A به B طوری رسم کنید تا رابطه‌ی ایجاد شده تابع باشد. برای Y, X طوری رسم کنید که رابطه تابع نباشد.



مثال ۳.۵. تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر شخصی قد او را نسبت می‌دهد.
۲. رابطه‌ای که به هر شخصی وزن وی را نسبت می‌دهد.
۳. رابطه‌ای که به هر شخص غذای مورد علاقه‌اش را نسبت می‌دهد.
۴. رابطه‌ای که به هر چند ضلعی محدب مساحت آن را نسبت می‌دهد.
۵. رابطه‌ای که به هر عدد مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت می‌دهد.
۶. رابطه‌ای که به هر دو عدد طبیعی دلخواه حاصل جمع آنها را نسبت می‌دهد.

مثال ۴.۵. ۵ رابطه‌ی متفاوت بین دو مجموعه‌ی A و B زیر بنویسید که تابع باشند.



مثال ۵.۵. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد. از رابطه‌های زیر کدام تابع است و کدام نیست؟

۱) $\{(1, 2), (2, 4), (3, 5)\}$

۲) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$

۳) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

۴) $\{(2, 1), (3, 5), (2, 2), (1, 3)\}$

۵) $\{(1, 3), (2, 4)\}$

۶) $f = \{\} = \emptyset$

در مثال بالا مجموعه‌های A ، B کاملاً مشخص شده‌اند. چنانچه در مسئله‌ای فقط زوج‌های مرتب نوشته شده باشند شما می‌توانید مجموعه مولفه‌های اول را A و مجموعه مولفه‌های دوم را B می‌گیریم.

مثال ۶.۵. روابط زیر که با زوج مرتب بیان شده‌اند را بررسی کنید. کدام تابع است. کدام نیست.

$$f = \{(2, -1), (3, -1), (4, -1), (5, -1)\}$$

$$g = \{(-1, 2), (4, 4), (3, -1), (2, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (7, -1), (-1, \sqrt{4}), (10, -1)\}$$

$$h = \{(1, 1)\}$$

$$m = \{(2, -1), (3, 4), (-2, \sqrt{2}), (3, 7), (2, \sqrt{-1})\}$$

مثال ۷.۵. رابطه‌ی $f = \{(2, 4), (3, -1), (5, -1), (2, a^2 + 3a)\}$ معرف تابع است. مقدار a را بدست آورید.

تذکر مهم: همان‌طور که در مثال بالا دیده شد یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب زمانی تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشد و چنانچه دو مولفه اول یکسان باشند بناچار (برای تابع بودن) مولفه‌های دوم آن‌ها نیز یکسان باشند.

مثال ۸.۵. مقادیر a ، b را طوری بیابید تا رابطه‌ی f زیر تابع باشد.

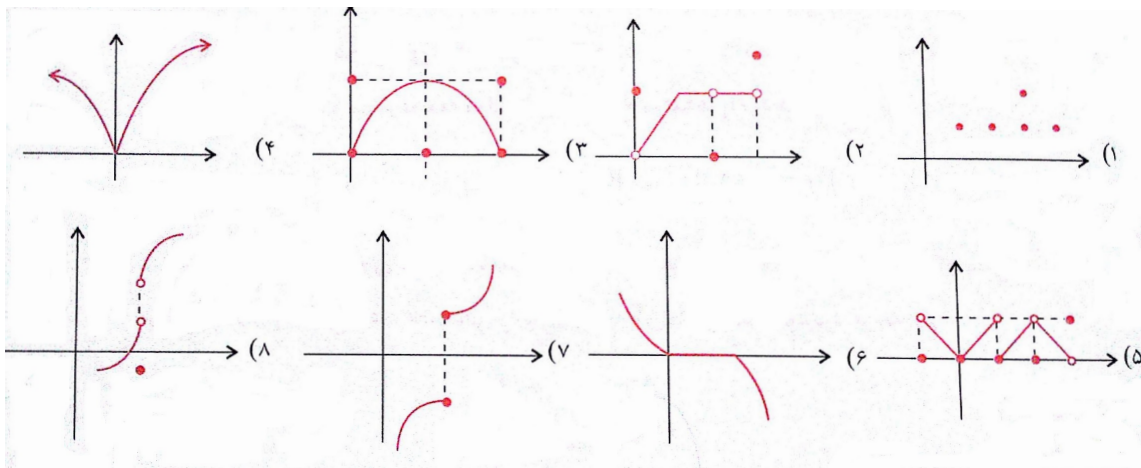
$$f = \{(a^2 + a, 1), (0, b + 4), (1, a^2 + 2b), (0, a^2 + b), \left(\frac{2-a}{4}, a-b\right)\}$$

تشخیص تابع بودن یک رابطه از روی نمودار مختصاتی آن

تاکنون متوجه شده‌اید یک نمودار پیکانی ون زمانی معرف تابع است که از هر عضو مجموعه اول یک و تنها یک پیکان به مجموعه دوم خارج شده باشد. در مورد روابطی که بصورت زوج مرتب بیان می‌شوند نیز متوجه شده‌اید که شرط تابع بودن، نبودن دو زوج مرتب متفاوت با مولفه‌های اول یکسان است. همچنین متوجه شده‌اید که روابطی که بصورت زوج‌های مرتب بیان می‌شوند و مولفه‌های آن اعداد حقیقی‌اند دارای نموداری در دستگاه مختصات هستند. حال پرسش اینجاست که اگر تنها یک نمودار به ما داده باشند چگونه از روی نمودار تشخیص دهیم که آن نمودار معرف تابع است یا خیر؟

یک نمودار در دستگاه مختصات معرف تابع است هرگاه هر خطی که به موازات محور عرض‌ها رسم شود نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۹.۵. کدام نمودار تابع است؟



۲.۵ دامنه و برد توابع

دامنه و برد یک تابع را در مثال‌های بالا دیده و بکاربرده‌ایم، بدون اینکه متوجه شده باشید. در واقع مولفه‌های اول زوج‌های مرتب در هر تابع را دامنه تابع و مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب را برد تابع می‌نامند. دامنه‌ی تابعی چون f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهیم. در اینجا برای سادگی قراردادی را معرفی می‌کنیم. اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و عضو $a \in A$ به عضو $b \in B$ نسبت داده شده باشد یعنی $a \rightarrow b$ اغلب این عبارت را با نماد $f(a) = b$ خلاصه نویسی می‌کنیم. گاهی اوقات هم گوییم تصویر a تحت f برابر b است. مثلاً در تابع:

$$f = \left\{ (2, -1), (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), \left(\pi, \frac{1}{\pi}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right) \right\}$$

می‌نویسیم:

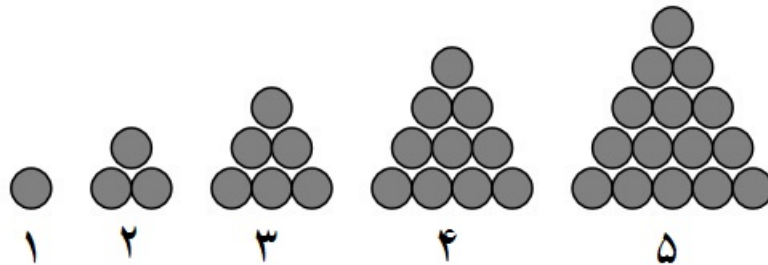
$$f(2) = -1, \quad f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}$$

واضح است که در اینجا:

$$D_f = \left\{ 2, \sqrt{2}, \pi, \frac{1}{3} \right\} \quad R_f = \left\{ -1, 1 - \sqrt{2}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{5} \right\}$$

مثال ۱۰.۵. در شکل زیر هر قسمت دارای شماره است. در شماره ۱ ما یک دایره داریم و در شکل ۲ ما سه دایره داریم و قس علی‌هذا. تابع f را اینگونه تعریف می‌کنیم که به هر مرحله تعداد دایره‌های سیاه‌رنگ را نسبت دهد. با این حساب:

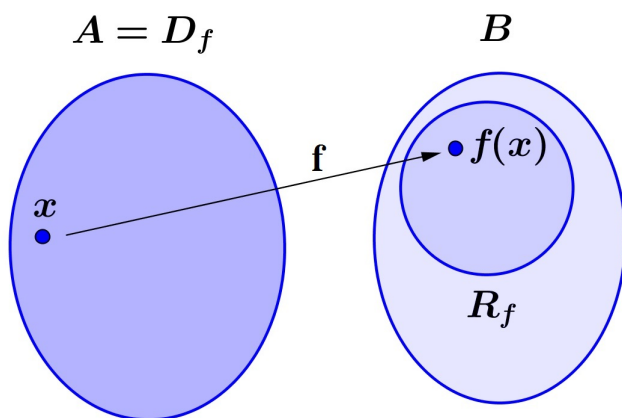
$$1 \xrightarrow{f} 1 \quad 2 \xrightarrow{f} 3 \quad 3 \xrightarrow{f} 6 \quad \dots$$



اگر مراحل شکل بالا بی‌وقفه ادامه یابند به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱. دامنه تابع را بنویسید و تابع را بصورت زوج‌های مرتب نمایش دهید. آیا نوشتن تمام اعضای تابع شدنی است؟ در حالت کلی عدد $n \in \mathbb{N}$ به چه عددی تصویر می‌شود؟ دستوری برای $f(n)$ بیابید.
۲. در مرحله دهم چند دایره داریم؟ در مرحله ۲۲ ام چندتا؟
۳. در چه مرحله‌ای تعداد دایره‌های سیاه‌رنگ به ۶۶۶ می‌رسد؟
۴. برد این تابع چیست؟

در شکل زیر شناسنامه‌ی یک تابع را نوشته‌ایم.



$$R_f \subseteq B$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

$$y = f(x) \leftarrow \text{قانون یا رابطه‌ی تابع}$$

وقتی می‌نویسیم $\left\{ \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \text{ یا } y = f(x) \end{array} \right.$ منظور از A دامنه تابع است. اما B لزوماً برد f نیست

و همان‌طور که از شکل مشخص است همواره $R_f \subseteq B$ است.^۱ به $y = f(x)$ ضابطه یا قانون تابع گویند. مجموعه B را اغلب هم دامنه تابع f می‌نامیم.

مثال ۱۱.۵. تابع $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ مفروض است. برد این تابع و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

$$x \mapsto x^2 + 4x$$

تعریف ۲.۵. به هر تابع به صورت $y = ax + b$ یا $x \mapsto ax + b$ یک تابع خطی گوئیم.

تذکر: در تابع خطی لزومی ندارد که دامنه تمام اعداد حقیقی باشد. ممکن است دامنه‌ی یک تابع خطی یک مجموعه متناهی، یا مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد صحیح باشد.

مثال ۱۲.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) = 2$ ، $f(2) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۳.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) \leq f(2)$ ، $f(3) \geq f(4)$ ، $f(5) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۴.۵. تابع خطی $f(x) = 2x - 4$ مفروض است. نمودار مختصاتی تابع را در حالتی که دامنه داده شده است رسم کنید و برد تابع را تعیین کنید.

۱. اگر دامنه تابع $D_f = \{1, \frac{3}{4}, 2, \frac{5}{4}, 3, \frac{7}{4}, 4\}$ باشد.
۲. اگر دامنه تابع $D_f = [1, 4]$ باشد.

مثال ۱۵.۵. در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه A برابر 60° درجه است و اندازه‌ی دو زاویه‌ی B ، C اعداد طبیعی بر حسب درجه هستند. رابطه‌ی بنویسید که اندازه‌ی زاویه C را بر حسب اندازه زاویه B مشخص کند. آیا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد آن را بدست آورید. این رابطه چند عضو دارد؟

مثال ۱۶.۵. طول مستطیلی ۵ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی بنویسید که محیط مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهید. تابع حاصل چه نوع تابعی است؟ حال تابعی بنویسید که مساحت مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهد. ضابطه‌ی تابع آشنا نیست؟

^۱ در سالهای بعد خواهید دید که توابعی که در آن‌ها $R_f = B$ رخ می‌دهد تابع پوشا گویند. و دلیل انتخاب این نام هم واضح است. تابع توانسته است تمام مجموعه B را پوشش دهد.

مثال ۱۷.۵. تابع f از \mathbb{N} به \mathbb{Z} به این صورت تعریف شده است که اگر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ زوج باشد آنرا به نصفش یعنی $\frac{n}{2}$ نسبت می‌دهد و اگر $n \in \mathbb{N}$ فرد باشد آنرا به $\frac{1-n}{2}$ نسبت می‌دهد. جدول زیر را کامل کنید. دامنه و برد تابع را بنویسید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...	n	n	...
y							

چنین توابعی را توابع چندضابطه‌ای گویند. در اینجا تابع دوضابطه‌ای است و دستور آن بصورت زیر است.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{1-n}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

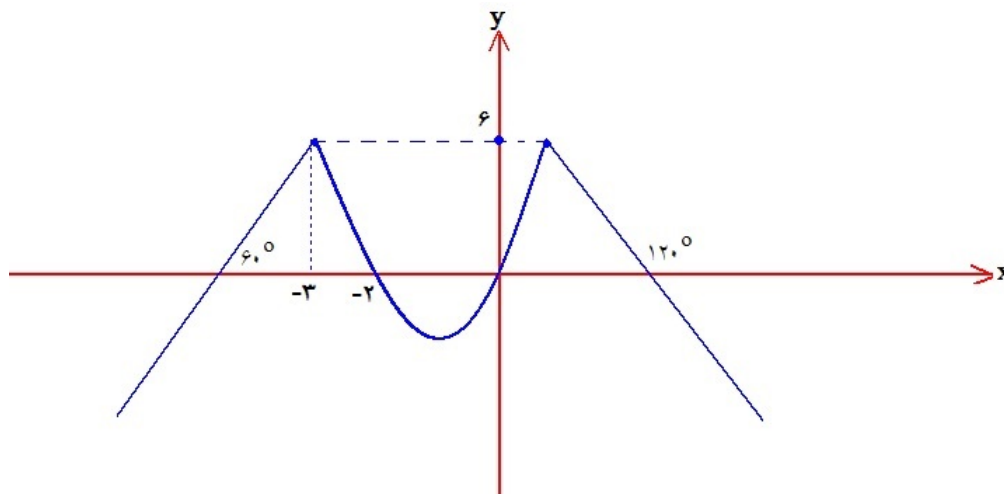
مثال ۱۸.۵. تابع سه ضابطه‌ای زیر مفروض است. نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۱۹.۵. نمودار تابع دوضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq -2 \\ 2x + 8 & x < -2 \end{cases}$$

مثال ۲۰.۵. نمودار تابعی بصورت زیر است. ضابطه‌ی آن را بنویسید.



۳.۵ انواع توابع

در این بخش پایانی به بررسی چند نوع تابع خاص و پرکاربرد می‌پردازیم.

تابع ثابت

تابع ثابت تابعی است که تمام اعضای دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد نظیر کند. توابع ذکر شده در زیر همگی تابع ثابت هستند.

$$۱) f = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a)\}$$

$$۲) g = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5), (7, 5), (100, 5)\}$$

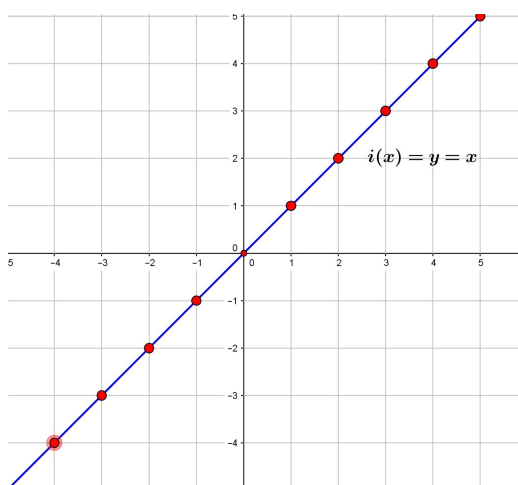
$$۳) h : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = 3$$

$$۴) q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = \sqrt{3}$$

نمودار چنین توابعی وقتی دامنه بصورت بازه باشد خطی موازی محور طول‌هاست و اگر دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد بصورت نقاطی در دستگاه مختصات است که همگی روی خطی موازی محور طول‌ها قرار دارند.

تابع همانی

تابع $i : A \rightarrow A$ را تابع همانی گوئیم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $i(x) = x$. به عبارت بهتر هر عضو از دامنه به خودش نظیر می‌شود. در حالتی که دامنه \mathbb{R} باشد، تابع همانی همان خط $y = x$ ، نیم‌ساز ناحیه اول و سوم است.



توابع چندجمله‌ای

فرض کنید مربعی به ضلع x دارید. مساحت این مربع بر حسب ضلع آن برابر است با: $S(x) = x^2$. همچنین مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر است با $S(r) = \pi r^2$. حجم مکعبی به ضلع x برابر است با $V(x) = x^3$ و حجم کره‌ای به شعاع r برابر $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. اینها همه نمونه‌هایی از توابع چندجمله‌ای هستند. در حالت کلی توابعی که ضابطه‌ی جبری آنها یک چندجمله‌ای از یک متغیر باشد را تابع چندجمله‌ای گوئیم. شکل کلی یک تابع چندجمله‌ای بصورت زیر است:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

آشناترین توابع چندجمله‌ای تابع دوجمله‌ای درجه اول $f(x) = ax + b$ یا همان تابع خطی است و تابع سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که همان سهمی است. از این توابع در ضابطه‌های توابع چندضابطه‌ای زیاد استفاده می‌کنیم. برای نمونه در تابع سه ضابطه‌ای زیر هر ضابطه به تنهایی یک تابع چندجمله‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < 0 \\ 2x - 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{3} & x > 2 \end{cases}$$

در حالت کلی در معرفی یک تابع باید دامنه آن مشخص شده باشد. درغیراین صورت بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه تابع اختیار می‌کنیم. توابع چندجمله‌ای چنانچه دامنه مشخصی نداشته باشند دامنه آنها را برابر \mathbb{R} در نظر می‌گیریم.

تابع قدرمطلق

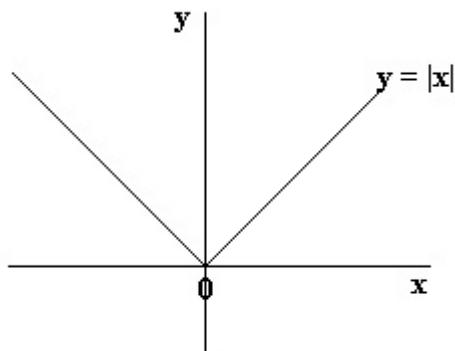
در فصل قبل با قدرمطلق و خواص آن آشنا شدید. در حالت کلی تابع قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow |x|, f(x) = |x| \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

نمودار تابع $f(x) = |x|$ یکی از مهمترین نمودارهاست و بصورت زیر است:



مثال ۲۱.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

مثال ۲۲.۵. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 - 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

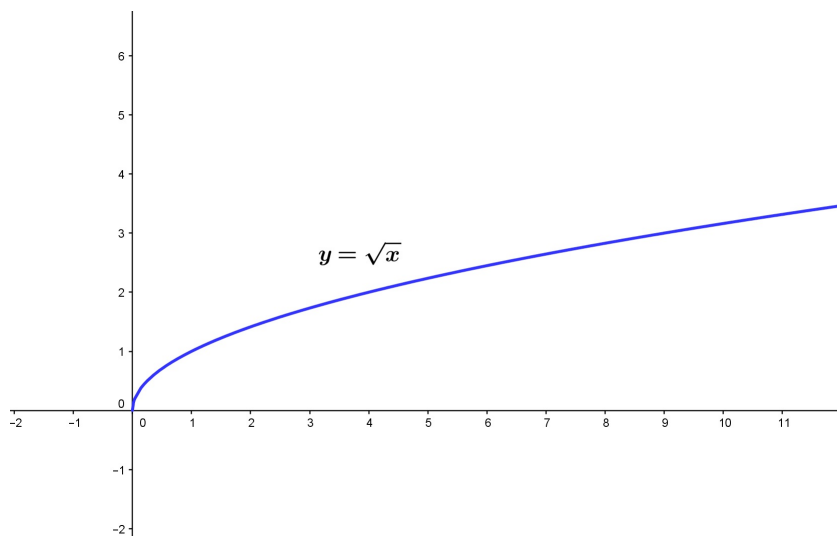
مطلوبست محاسبه‌ی $f(-5)$, $f(\sqrt{2} - 1)$, $f\left(\frac{2 + x^2}{1 + x^2}\right)$.

معرفی دو تابع رادیکالی مهم

اولین تابع رادیکالی که می‌خواهیم بررسی کنیم تابع:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt{x} \end{cases}$$

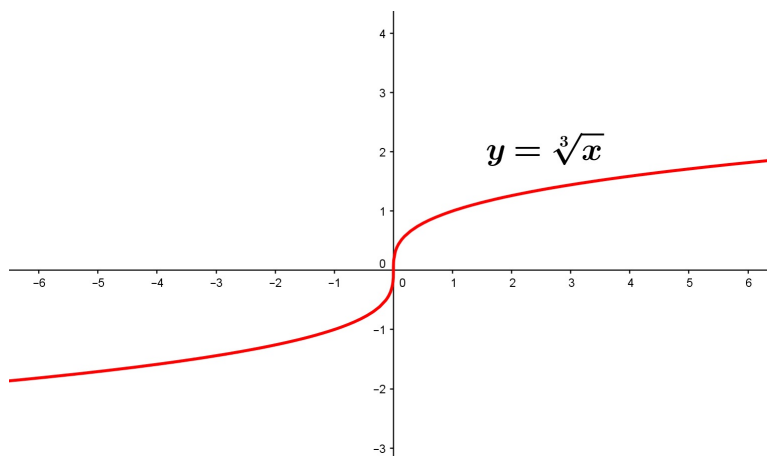
با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ است. این تابع دارای دامنه‌ای بصورت $D_f = [0, +\infty)$ است و برد آن نیز $R_f = [0, +\infty)$ است. نمودار این تابع را در شکل زیر می‌بینید.



تابع رادیکالی دیگری که قصد معرفی آن را داریم تابع ریشه سوم است:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

ضابطه‌ی این تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است. نمودار آن را در زیر می‌بینید:

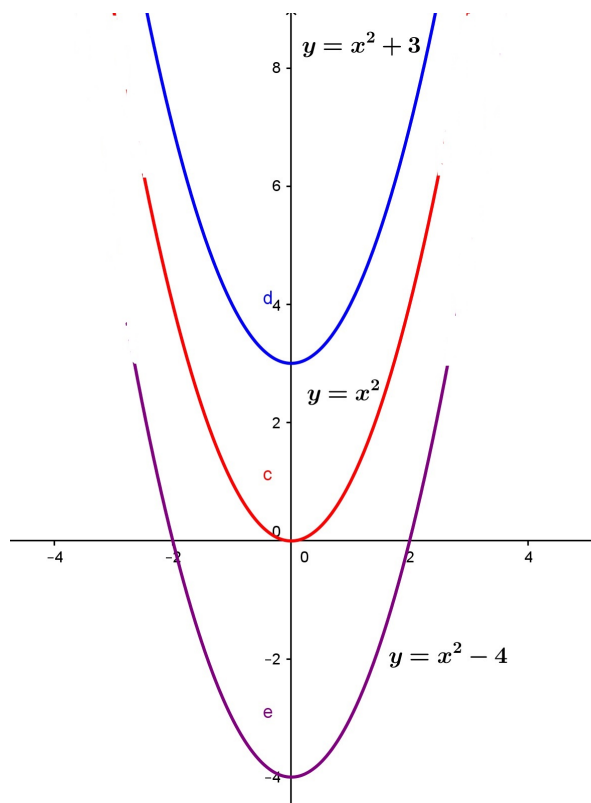
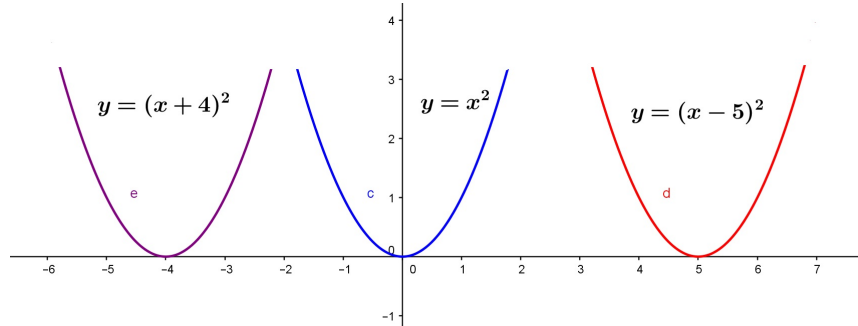


مثال ۲۳.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$$

۴.۵ ترسیم با انتقال

در این قسمت می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارهای جدیدی را به کمک نمودارهای قبلی رسم کنیم. به دقت به شکل‌های زیر نگاه کنید.



همان‌طور که دیده می‌شود با تبدیل شدن $x \rightarrow x - 5$ نمودار $y = x^2$ به اندازه ۵ واحد در جهت مثبت روی محور طول‌ها جابجا شده است و با تبدیل $x \rightarrow x + 4$ نمودار $y = x^2$ به اندازه چهار واحد در جهت منفی روی محور طول‌ها جابجا شده است.

همچنین با تبدیل $f(x) \rightarrow f(x) + 3$ نمودار $y = x^2$ به اندازه ۳ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها به بالا حرکت کرده و با تبدیل $f(x) \rightarrow f(x) - 4$ به اندازه ۴ واحد روی محور عرض‌ها به پایین حرکت کرده است.

در حالت کلی همین روابط درست است. نمودار $y = f(x - a)$ ، $a > 0$ نسبت به $y = f(x)$ به اندازه a واحد در جهت مثبت محور طول‌ها حرکت کرده است و $f(x + a)$ همان تغییر منتهای در جهت منفی. به همین

ترتیب $0 < a$, هم تغییرات روی محور عرض‌هاست.
مثال ۲۴.۵. به کمک انتقال نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$۱) y = (x + ۳)^۲$$

$$۲) y = x^۲ + ۳$$

$$۳) y = (x - ۲)^۲ + ۳$$

$$۴) y = ۴ - (x - ۲)^۲$$

$$۵) y = |x - ۳|$$

$$۶) y = |۲ + x|$$

$$۷) y = -|x - ۲|$$

$$۷) y = ۱ - |۱ + x|$$

$$۹) y = \sqrt{x - ۳}$$

$$۱۰) y = \sqrt{x + ۳} + ۲$$

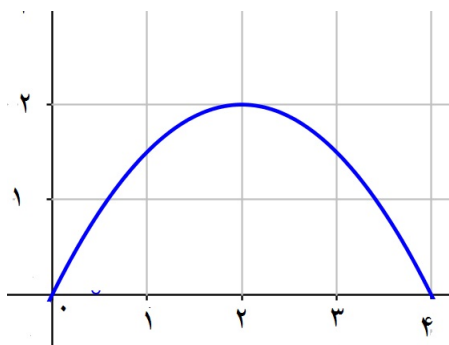
$$۱۱) y = \sqrt[۳]{x} + ۲$$

$$۱۲) y = \sqrt{-x}$$

$$۱۳) y = \sqrt{۲ - x}$$

$$۱۴) y = \sqrt[۳]{x - ۲} + ۱$$

مثال ۲۵.۵. نمودار تابع $y = f(x)$ بصورت مقابل است. نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



$$۱) y = f(x + ۲)$$

$$۲) y = f(x - ۱)$$

$$۳) y = ۳f(x)$$

$$۴) y = \frac{1}{۳}f(x)$$

$$۵) y = |f(x) - ۱|$$

$$۶) y = f(-x)$$

$$۷) y = -f(x)$$

$$۷) y = -f(-x)$$

$$۹) y = f(|x|)$$

$$۱۰) y = |f(x + ۲) - ۲|$$

بررسی تابع بودن یک رابطه‌ی جبری

در این قسمت این موضوع مهم را بررسی می‌کنیم که یک ضابطه‌ی جبری به تنهایی چه زمانی معرف تابع است. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف بررسی عبارت $|y| = x$ است. آیا این ضابطه می‌تواند معرف یک تابع باشد. یعنی به ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار y بدست می‌آید؟ با قرار دادن $x = 1$ نتیجه می‌شود $|y| = 1$ و لذا $y = \pm 1$ و این یعنی هم $1 \rightarrow 1$ و هم $1 \rightarrow -1$ و این یعنی این رابطه نمی‌تواند یک تابع باشد. البته برای اثبات اینکه رابطه‌ای تابع است، مثال کفایت نمی‌کند و باید ثابت کنید رابطه تابع است. برای این منظور باید گزاره‌ی زیر را در مورد آن رابطه یا ضابطه ثابت کنید.

$$\begin{cases} (x, y) \in f \\ (x, z) \in f \end{cases} \implies y = z$$

مثال ۲۶.۵. ثابت کنید رابطه‌ی $y^3 + y = x$ معرف تابع است.

مثال ۲۷.۵. روابط زیر را بررسی کنید. هر کدام که ادعا می‌کنید تابع است ثابت کنید و هر کدام که ادعا می‌کنید تابع نیست با مثال نقض نشان دهید.

۱) $x^2 + y^2 = 5$

۲) $|x| + |y| = 3$

۳) $x = \sin y$

۴) $y^2 = x$

۵) $|x - 2| + |y - 3| = 0$

۶) $\sin y + \cos x = 1$

تمرینات فصل تابع

تمرین ۱.۵. فرض کنید دو مجموعه A ، B بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$A = \{ \text{اصفهان, بندرعباس, رشت, شیراز, مشهد} \}$$

$$B = \{ \text{مازندران, گیلان, اصفهان, هرمزگان, فارس} \}$$

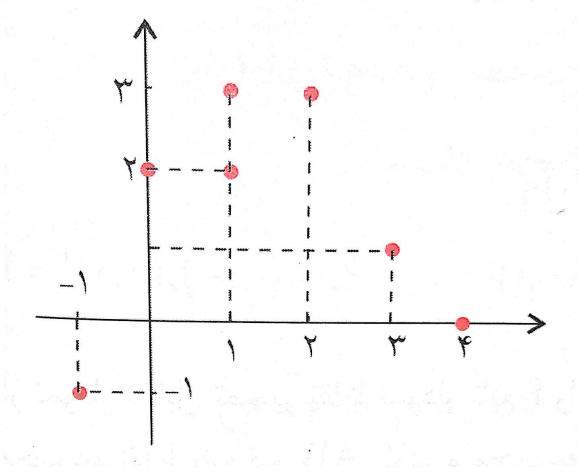
رابطه‌ی $f: A \rightarrow B$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که $a \in A$ مرکز استان $b \in B$ باشد. f را بصورت زوج‌های مرتب بنویسید.

تمرین ۲.۵. اگر دو زوج مرتب $(a^3 + b, a^2 + 2b + 1)$ و $(2^0, 9)$ برابر باشند a, b را بیابید.

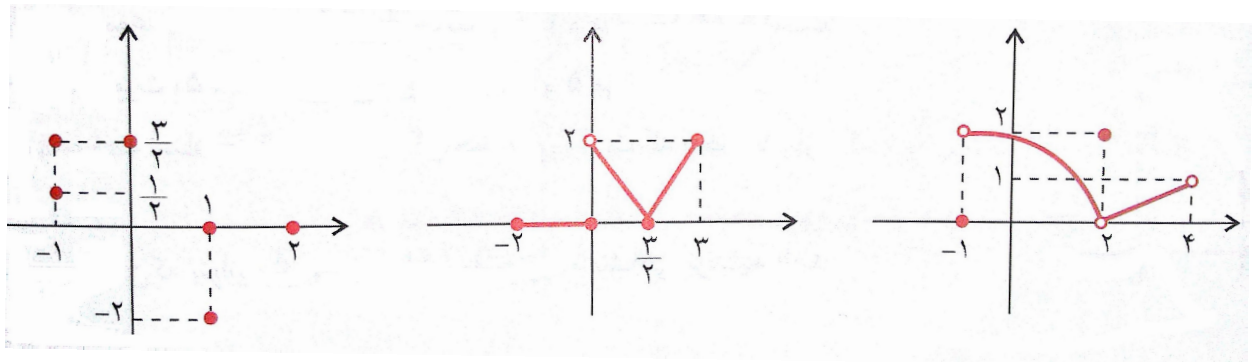
تمرین ۳.۵. اگر رابطه‌ی f زیر تابع باشد مقدار $f(m + 12)$ را بیابید.

$$f = \left\{ (\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3} - \sqrt{2}, 2), (m^2, 3), \left(\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, m - 2 \right), (0, m) \right\}$$

تمرین ۴.۵. نمودار یک رابطه بصورت مقابل است. این رابطه را بصورت زوج مرتب بنویسید. آیا رابطه تابع است؟



تمرین ۵.۵. از نمودارهای زیر کدام تابع است؟ دامنه و برد آن‌ها را بنویسید.



تمرین ۶.۵. رابطه‌های زیر را بصورت زوج مرتب بنویسید. هر کدام تابع است دامنه و بردش را تعیین کنید.

۱) $f_1 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10\}$

۲) $f_2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10, x < y\}$

۳) $f_3 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y, xy \leq 6\}$

تمرین ۷.۵. تابع f یک تابع خطی است و برای هر x داریم $f(x + 2) + f(x - 3) = 4x + 8$ ضابطه‌ی تابع را بیابید.

تمرین ۸.۵. تابعی مثال بزنید که دامنه آن نامتناهی بوده و برد آن یک عضو داشته باشید و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

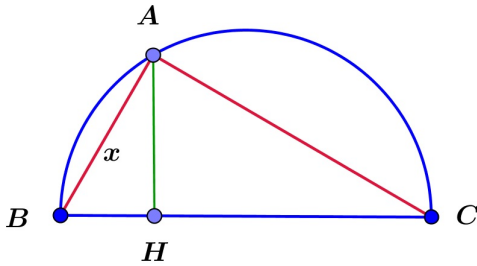
تمرین ۹.۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ مفروض است. مقادیر $f(5)$, $f(3)$, $f(\sqrt{10})$ را بیابید. به ازای چه مقادیری از x داریم $f(x) = 2$ و یا $f(x) = 3$. آیا می‌توان $f(0)$ را بدست آورد؟ دامنه تابع

چیست؟

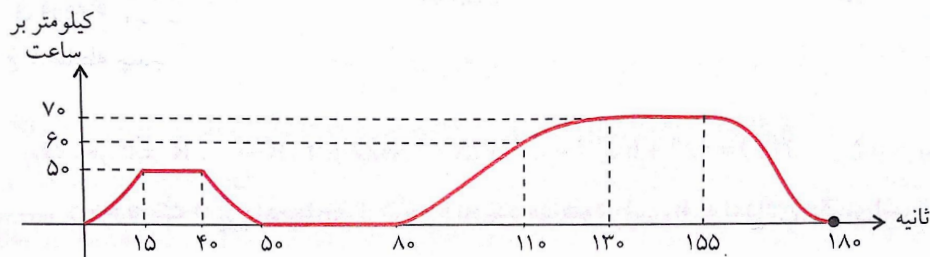
تمرین ۱۰.۵. اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد و $D_f = \{0, 1, -1, 2, 4\}$ باشد، R_f را بدست آورید.

تمرین ۱۱.۵. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ باشد و $R_f = \{2, 2\sqrt{2}, 1, 0\}$ باشد دامنه تابع را بدست آورید.

تمرین ۱۲.۵. دایره‌ای به قطر ۶ مفروض است. راس A از مثلث قائم‌الزاویه ABC روی نیم‌دایره تغییر می‌کند. اگر اندازه ضلع $AB = x$ باشد تابعی بنویسید که اندازه‌ی ضلع AC را بر حسب x بیان کند. همچنین ضابطه‌ی تابعی را بیابید که اندازه‌ی ارتفاع AH را بر حسب x نشان دهد. دامنه این دو تابع چیست؟



تمرین ۱۳.۵. خانمی برای خرید از منزل با اتومبیل خارج شده است. نمودار زیر



نمودار سرعت زمان $v(t)$ او را از لحظه حرکت نشان می‌دهد زمان شروع را O مبدأ در نظر می‌گیریم. او پس از حرکت و مدت زمانی که در شکل نشان داده شده به یک چراغ قرمز می‌رسد و پس از سبز شدن چراغ دوباره به حرکت ادامه می‌دهد تا این‌که پس از ۱۸۰ ثانیه در پارکینگ فروشگاه توقف می‌کند.

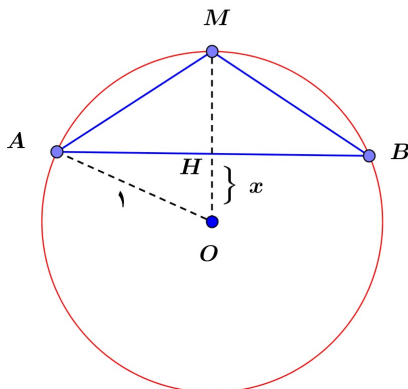
۱. آیا نمودار $y = v(t)$ یک تابع است؟ آیا می‌توانید دامنه و برد آن را پیدا کنید.

۲. در چه زمانی‌هایی سرعت او ثابت است. چه مدت او پشت چراغ قرمز می‌ایستد؟

۳. پس از ۴۵ ثانیه و همچنین ۱۲۰ ثانیه پس از حرکت سرعت آن تقریباً چقدر است؟

۴. $v(60)$ و $v(40)$ و $v(130)$ و $v(180)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۴.۵. در شکل زیر تابعی بیابید که مساحت $\triangle ABC$ را بر حسب x بیان کنید. (MH ارتفاع)



تمرین ۱۵.۵. کدام رابطه بیان‌گر یک تابع است؟

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \quad (۴) \quad |y| + x = 0 \quad (۳) \quad y^2 + |x^3 - 4x| = 0 \quad (۲) \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \quad (۱)$$

تمرین ۱۶.۵. ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. نمودار آنها را رسم کنید و تعیین کنید کدام‌ها تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 2 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad k(x) = \begin{cases} x & x \geq 2 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

تمرین ۱۷.۵. به ازای چه مقادیر a, b تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{bx^2 + 2x + 4}$ به تابعی ثابت تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۸.۵. به ازای چه مقادیری از a, b تابع $f(x) = \frac{bx + a^2 - 4}{(a - 2)x + 3}$ به تابع همانی تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۹.۵. به ازای چه مقدار a, b تابع $f(x) = ax^3 + (b - 1)x + 2$ به تابع ثابت صفر تبدیل می‌شود؟

تمرین ۲۰.۵. اگر $I = \{(1, a^2), (a + 1, b), (b^2, c - 2), (d^2, d + c)\}$ تابع همانی باشد d را بیابید.

تمرین ۲۱.۵. نمودار تابع $y = |x - 2|$ را در بازه‌ی $[-1, 5]$ رسم کرده و برد آن را بیابید.

تمرین ۲۲.۵. برد تابع $y = |x + 5| - 3$ را در هر یک از حالات زیر رسم کرده و برد آن را بیابید.

$$D_f = [-4, 0] \quad (۴) \quad D_f = [-4, 10] - \{5\} \quad (۳) \quad D_f = [-6, 10] \quad (۲) \quad D_f = \mathbb{R} \quad (۱)$$

تمرین ۲۳.۵. نمودار توابع زیر را رسم کرده و برد هر یک را مشخص کنید.

۱) $f(x) = x^2 - 4$

۲) $f(x) = x^2 - x$

۳) $f(x) = 4x - x^2$

۴) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

۵) $f(x) = |x^2 - 4x|$

۶) $f(x) = |x^3 - 1|$

۷) $f(x) = \sqrt{|x|}$

۸) $f(x) = x^2 - 2|x|$

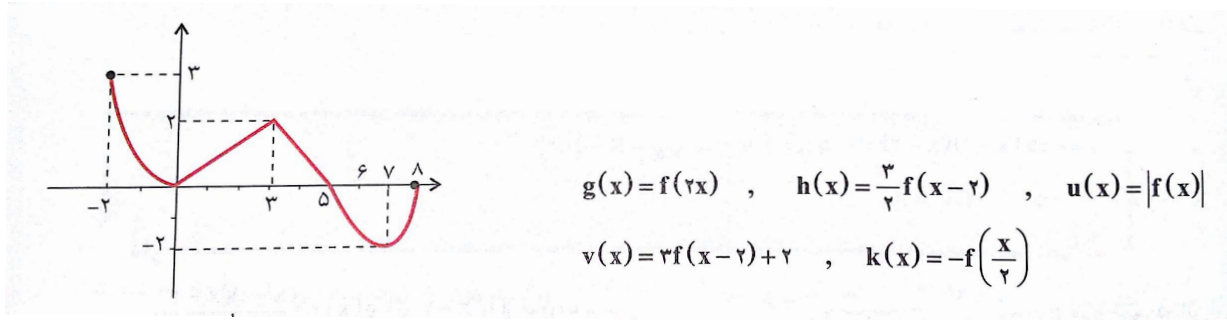
۹) $f(x) = ||x| - 1|$

۱۰) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$

۱۱) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$

۱۲) $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$

تمرین ۲۴.۵. نمودار تابع f بصورت مقابل است. دامنه و برد تابع را بیابید و توابع خواسته شده در زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را بدست آورید.



$$g(x) = f(2x) \quad , \quad h(x) = \frac{3}{4}f(x-2) \quad , \quad u(x) = |f(x)|$$

$$v(x) = 2f(x-2) + 2 \quad , \quad k(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$$

تمرین ۲۵.۵. نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$۱) |y| = x$$

$$۲) |y| = x + 2$$

$$۳) |y| = x^2 - 1$$

$$۴) |y - 1| = x$$

بیشتر بدانیم

۱. توابع گویا: به هر تابعی کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، یک تابع گویا گوئیم. اگر دامنه تعریف چنین توابعی در تعریف تابع مشخص نشده باشد، باید بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه آن در نظر بگیریم. چنین توابعی در تمام \mathbb{R} تعریف شده‌اند الا در جاهایی که مخرج صفر می‌شود. مثلاً تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$ دارای دامنه‌ای بصورت $D_f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$ است.

۲. توابع یک به یک: برخی توابع دارای ویژگی‌های خاصی هستند. همان‌طور که می‌دانید هر عضو دامنه تنها به یک عضو هم‌دامنه نظیر می‌شود. با این حال ممکن است دو عضو دامنه به یک عضو هم‌دامنه نظیر شود. چنانچه این اتفاق برای تابعی چون f رخ ندهد یعنی هر عضو برد متناظر به یک و فقط یک عضو دامنه باشد تابع f را یک به یک گوئیم. به زبان ریاضی تعریف تابع یک به یک چنین است:

$$f(a) = f(b) \implies a = b \quad \longleftarrow \quad \text{تعریف تابع یک به یک}$$

به عنوان یک مثال ساده تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست چرا که $f(1) = f(-1) = 1$ است در حالی که $1 \neq -1$ است.

از طرفی تابع گویای $f(x) = \frac{2x - 1}{3x - 6}$ دارای دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ است و یک به یک است چرا که

داریم:

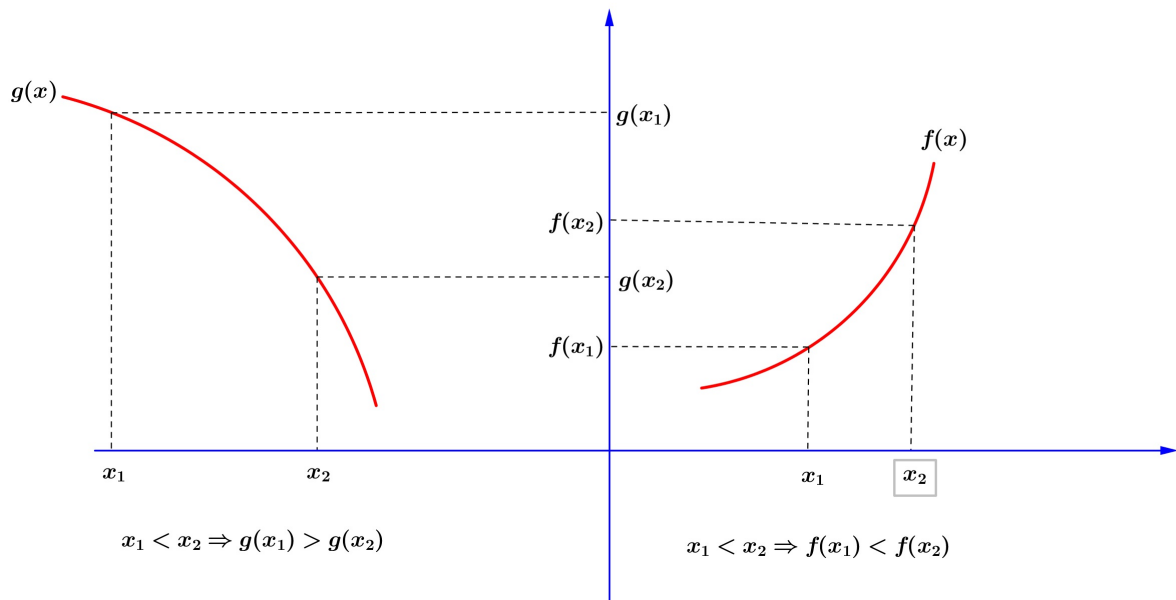
$$\begin{aligned}
 f(a) = f(b) &\iff \frac{2a-1}{3a-6} = \frac{2b-1}{3b-6} \\
 &\iff 6ab - 12a - 3b + 6 = 6ab - 3a - 12b + 6 \\
 &\iff 9a = 9b \\
 &\iff a = b
 \end{aligned}$$

۳. توابع پوشا: قبلاً دیدیم که برای هر تابع f همواره $R_f \subseteq B$ است که در آن $f: A \rightarrow B$ است. حال اگر داشته باشیم $R_f = B$ گوئیم تابع f پوشاست. پس پوشا بودن ارتباط زیادی با هم‌دامنه دارد. دو تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x} \end{cases}
 \quad
 \begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightarrow \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\sqrt{x} \geq 0$ است پس $R_f = R_g = [0, +\infty)$ است. حال $R_f \subsetneq \mathbb{R}$ است و $R_g = \mathbb{R}^+$ است. یعنی g پوشاست در حالیکه f پوشا نیست اگر چه ضابطه و دامنه هر دو تابع یکسان است.

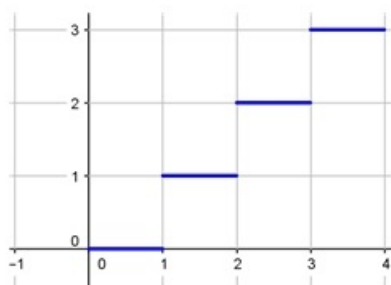
۴. توابع یکنوا: ابتدا به شکل زیر دقت کنید.



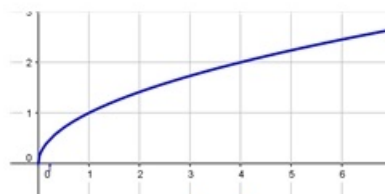
در شکل ۱ با افزایش مقدار x مقدار تابع یا همان $f(x)$ هم مرتباً افزایش می‌یابد. چنین تابعی را اکیدا صعودی گوئیم. در شکل ۲ اما داستان برعکس است. با افزایش x مقدار تابع یا $f(x)$ مرتباً کاهش می‌یابد. چنین تابعی را اکیدا نزولی گوئیم. چنانچه با افزایش تابع مقدار $f(x)$ کاهش نیابد، تابع را صعودی گوئیم و چنانچه با افزایش x مقدار تابع افزایش نیابد تابع را نزولی گوئیم.

تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد را اکیدا یکنوا گوئیم. تابعی که صعودی یا نزولی باشد را یکنوا

گوییم. در شکل زیر چند تابع با این ویژگی‌ها رسم شده‌اند.



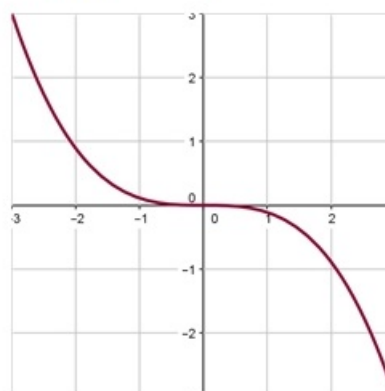
صعودی



اکیدا صعودی



نزولی



اکیدا نزولی

۵. یافتن دامنه توابع از روی ضابطه: گاهی اوقات دامنه یک تابع در زمان معرفی تابع معین نمی‌شود. در این حالت باید بزرگترین دامنه ممکن را به عنوان دامنه تابع در نظر گرفت. برای این منظور توجه به دو نکته ، اساسی است اول: توابعی که کسری هستند نباید مخرجشان صفر شود. دوم: توابع رادیکالی با فرجه زوج زمانی تعریف شده هستند که زیر رادیکال مثبت باشد. به مثال زیر دقت کنید: مثال. دامنه توابع زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{۲ + x^۲}{x^۲ + x - ۲}$$

$$۲) g(x) = \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{x^۲ - ۴}$$

$$۳) h(x) = \sqrt[۲]{\frac{۲x}{x^۲ - ۱}}$$

$$۴) \ell(x) = \frac{۱}{\sqrt{۴ - ۳x - x^۲}}$$

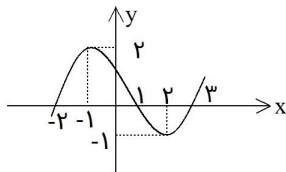
۵.۵ تست‌های فصل پنجم

۱- نمودار تابع با ضابطه $y = |x| = 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟
 (۱) اول و دوم (۲) دوم و سوم (۳) اول و سوم (۴) سوم و چهارم

۲- در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ، مقدار $f(4) - f(9)$ برابر کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳- به ازای کدامیک از مقادیر x عبارت $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$ همواره برقرار است؟
 (۱) $-1 < x < 1$ (۲) $x \leq 3$ (۳) $x < 3$ (۴) $x \geq 3$

۴- کدام یک از روابط زیر به ازای $m = -1$ یک تابع است؟
 (۱) $\{(m, 2m), (2m, m), (-1, 3m)\}$ (۲) $\{(m, 2m), (3m, -1), (-1, 3m)\}$
 (۳) $\{(m, 2m), (2m, m), (2m, -2)\}$ (۴) $\{(m, 2m), (2m, m), (3, m)\}$



۵- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد $f(-1)$ چقدر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۲

۶- اگر $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$ باشد، مقدار $f(2) - f(-2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{8}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۷- مساحت محدود بین دو نمودار تابع $y = |x-1|$ ، $y = 2-|x|$ کدام است؟

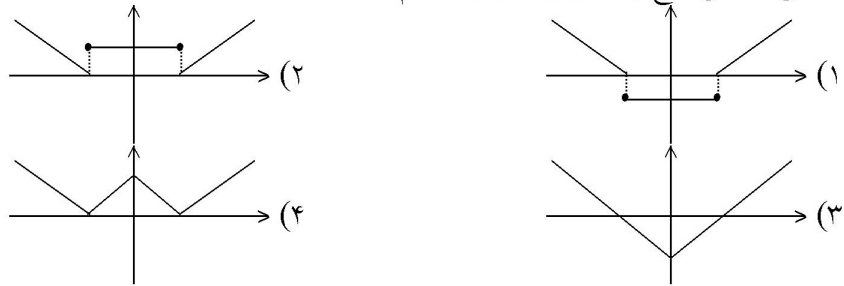
(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۸- به ازای هر $x \in [1, \infty)$ مقدار $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ کدام است؟
 (۱) $-x$ (۲) $2 - 3x$ (۳) $3x - 2$ (۴) x

۹- مجموعه جوابهای معادله $|x-1| + |x-3| = 1$ کدام است؟
 (۱) \emptyset (۲) R (۳) $[1, 3]$ (۴) $R - (1, 3)$

۱۰- اگر $0 < a < b$ و $|a| > |b|$ آنگاه حاصل عبارت $|a+b| + |a| + |b|$ برابر کدام است؟
 (۱) $-2b$ (۲) $-2a$ (۳) $2a$ (۴) $2b$

۱۱- منحنی نمایش تابع $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟



۱۲- مجموعه جوابهای $|x| + |x + 2| = 2$ چیست؟

- (۱) \emptyset (۲) $\{-2, 0\}$ (۳) $]-2, 0]$ (۴) $[-2, 0]$

۱۳- دامنه تابع $f = \left\{ (x, y) : y = \sqrt{\frac{1 - |x|}{1 + |x|}} \right\}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\{x : x \leq 1\}$ (۳) $\{x : x \geq 1\}$ (۴) $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$

۱۴- دامنه تعریف تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

- (۱) $]0, 1[$ (۲) $]0, 3[$ (۳) $]1, 2[$ (۴) $]2, 3[$

۱۵- اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟

- (۱) $]-1, 0[$ (۲) $]0, 1[$ (۳) $]-1, 1[$ (۴) $]1, \infty[$

۱۶- مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه $y = 3 - |x|$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۷- حاصل $|2x - 1| + |2 - x|$ وقتی $-1 < x < 0$ باشد کدام است؟

- (۱) $-3 - 3x$ (۲) $3 - 3x$ (۳) $-3 + 3x$ (۴) $1 + x$

۱۸- اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 1$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $(x-2)^2$ (۲) $(x-1)^2$ (۳) $x^2 - 2x$ (۴) $(x+2)^2$

۱۹- اگر $|-x + 1| < 2$ ، آنگاه x در کدام نامساوی صدق می‌کند؟

- (۱) $-3 < x < -1$ (۲) $-3 < x < 1$ (۳) $-1 < x < 3$ (۴) $1 < x < 3$

۲۰- معادله $|x + 1| + |x - 3| = 3$ در دامنه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

- ۲۱- تعداد جواب‌های معادله $|x + 1| + |x - 3| = 2$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

- ۲۲- مجموعه جواب نامعادله $|3x + 5| < 2$ کدام است؟
 (۱) $\{x : \frac{-7}{3} < x < -1\}$ (۲) $\{x : \frac{-7}{3} < x < 1\}$
 (۳) $\{x : \frac{-4}{3} < x < 1\}$ (۴) $\{x : \frac{-4}{3} < x < -1\}$

- ۲۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. $f(f(\frac{3}{4}))$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

- ۲۴- در تابع $f(x) = 2x - \sqrt{1+2x}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

- ۲۵- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟
 (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

- ۲۶- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۲۷- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x - 1|}$ کدام است؟
 (۱) $R - \{1\}$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $R - \{\pm 1\}$

- ۲۸- دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{a-x}}$ کدام است؟
 (۱) $(a, +\infty)$ (۲) $(-\infty, a)$ (۳) $\{a\}$ (۴) \emptyset

- ۲۹- اگر $f(x + \sqrt{x+5}) = x^2 - 1$ باشد، آنگاه مقدار $f(7)$ کدام است؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۱ (۴) ۹

۳۰- با فرض آنکه $f(x) + f(2) = x^2 + 4$ مقدار $f(-2)$ برابر کدام عدد می‌باشد؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) صفر (۴) ۱۲

۳۱- اگر $f(x+1) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ دامنه تعریف تابع $y = f(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $(2, \infty)$ (۲) $(1, \infty)$ (۳) $(3, \infty)$ (۴) $(4, \infty)$

۳۲- حدود x کدام باشد که نمودار $y = |1 + 2x| + |x - 1| - x$ به خط افقی تبدیل گردد؟

- (۱) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ (۲) $x \geq 1$ (۳) $x \leq -\frac{1}{2}$ (۴) $x \leq 1$

۳۳- اگر $D_f = [2, 4]$ و $D_g = [1, 2]$ دامنه تابع $g\left(\frac{x}{2}\right) + 2f(2x)$ کدام است؟

- (۱) $\{2\}$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[1, 3]$ (۴) $[1, 4]$

۳۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 3 - 2x & x < 1 \end{cases}$ حاصل $f^2(-f(2))$ کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۲۱ (۴) ۶۴

۳۵- دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{3+|x|}{3-|x-1|}}$ کدام است؟

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-4, 0)$ (۳) $(-3, 3)$ (۴) $(-2, 4)$

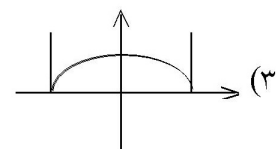
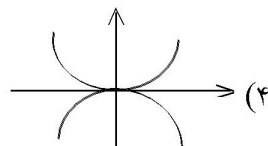
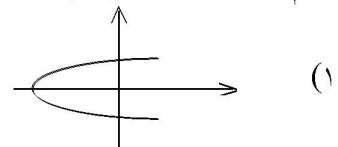
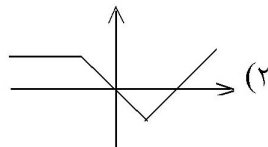
۳۶- کدام ضابطه تابع نمی‌باشد؟

- (۱) $x + |y| = 2$ (۲) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (۳) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$ (۴) $|x| + y^3 = 2$

۳۷- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2|x-1| = x+1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۸- کدام یک از اشکال زیر نمودار یک تابع است؟



۳۹- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{3x}{x-5}$ کدام است؟

- (۱) $x \geq 3, x \neq 5$ (۲) $x = 5, x \leq 3$ (۳) $x \neq 5, x \geq 3$ (۴) $x \neq 0, 3 \leq x < 5$

۴۰- هرگاه $f(x) = \begin{cases} 3x+a & x \geq -1 \\ ax+4 & x \leq -1 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) -3 (۴) 11

۴۱- هرگاه دو تابع $f(x) = x^2 + bx + 4$ و $g(x) = ax^3 - (b+1)x + 3$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول یک واقع بر نیمساز ناحیه‌ی چهارم قطع کنند، مقدار a کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 3 (۳) -3 (۴) -9

۴۲- دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x-3}}$ کدام است؟

- (۱) $R - \{3\}$ (۲) $x > 3$ (۳) $x \geq 3$ (۴) R

۴۳- به فرض آن که $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \sqrt{x}$ دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[0, 1)$

۴۴- اگر $f(1 - |x|) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، دامنه‌ی تابع f کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 3]$

۴۵- اگر برد تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ به صورت مجموعه‌ی $\{2, 1, -1\}$ باشد، دامنه‌ی این تابع برابر کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{-4, -2, 0\}$ (۲) $\{3, -2, 0\}$ (۳) $\{-4, -1, 0\}$ (۴) $\{4, -1, 1\}$

۴۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$ برابر است با:

- (۱) $R - \{-3, 1\}$ (۲) $R - \{1\}$ (۳) $R - \{1, 2\}$ (۴) $R - \{2, 3\}$

۴۷- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{3x-1} + \sqrt{3-x}$ کدام است؟

- (۱) $[3, +\infty)$ (۲) $R - \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$ (۳) $(-\infty, 3] - \left(\frac{1}{3}\right)$ (۴) $(-\infty, 0) - \left(\frac{-1}{3}\right)$

۴۸- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $2x$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

۴۹- نمودار تابع $y = \frac{x+1+|x-1|}{2}$ تشکیل زاویه با کدام مقدار زیر می‌دهد؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۵۰- برد تابع $y = \frac{x^2+2x+1}{x-2}$ شامل کدام عدد زیر نمی‌شود؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

۵۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt[4]{2x+5} + \frac{x+3}{x+2}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x | x \geq -2\}$ (۲) $\{x | x \geq \frac{-5}{2}\}$
 (۳) $\{x | x \geq \frac{-5}{2}, x \neq -2\}$ (۴) $\{x | \frac{-5}{2} \leq x \leq -2\}$

۵۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x+5}} + \sqrt{\frac{-3}{x+2}}$ کدام است؟

- (۱) $x > -5$ (۲) $x < -2$ و $x > 5$ (۳) $-5 < x < -2$ (۴) $x < -2$

۵۳- اگر مجموعه‌ی $f = \{(1,3), (-2,1), (1,a), (1-a,m)\}$ یک تابع باشد، m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۵۴- اگر $f(x) = 2x - a$ ، $g(x) = x^2 + 2x + 3$ ، $f(g(-1)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۵- اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax+b}$ برابر $R - \{-1\}$ باشد، $a+b$ چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۶- دامنه‌ی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{|x-1|} - 4$ کدام است؟

- (۱) $x \leq -4$ (۲) $-1 \leq x \leq 3$ (۳) $x > 1$ یا $x \leq 3$ (۴) $x \geq 5$ یا $x \leq -3$

۵۷- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آن‌گاه $f(8)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۸- اگر رابطه‌ی $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر X و Y و Z چگونه‌اند؟

- (۱) مساوی هم (۲) هم علامت (۳) مثبت (۴) منفی

۵۹- دامنه‌ی تعریف $f(x) = \frac{3}{2x-1} + \frac{x+2}{5x}$ عبارتست از:

- (۱) $R - \{0, -2\}$ (۲) $R - \{0, \frac{1}{2}\}$ (۳) $R - \{-2, \frac{1}{2}\}$ (۴) $R - \{0, \frac{1}{2}, -2\}$

۶۰- دامنه‌ی تعریف تابع $g(x) = \sqrt{\frac{-x+3}{|x+2|}}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 3] - \{-2\}$ (۲) $[3, +\infty) - \{-2\}$ (۳) $(-\infty, 2) - \{-3\}$ (۴) $R - \{-2, 3\}$

۶۱- دامنه‌ی تابع $\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $R - \{-1\}$ (۳) $[0, +\infty) - \{1\}$ (۴) $(-\infty, 1)$

۶۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1) - \{0\}$ (۲) $(-2, 1) - \{-1\}$ (۳) $(-1, 2) - \{1\}$ (۴) $(-1, 2] - \{1\}$

۶۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ عبارت است از:

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

۶۴- دامنه‌ی تعریف تابع کسری $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^2 - 5x + 6}$ عبارتست از:

- (۱) $R - \{2, 3\}$ (۲) $x \geq 2$ (۳) $R - \{-2, -3\}$ (۴) $x > 3$

۶۵- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\frac{-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{3}}$ عبارتست از:

- (۱) \emptyset (۲) $3 \leq x$ (۳) $2 \leq x \leq 3$ (۴) $x > 3$

۶۶- دامنه‌ی تعریف تابع $y = x^{-3} + 2$ کدام است؟

- (۱) $R - \{0\}$ (۲) R (۳) $R - \{2\}$ (۴) $R - \{-3\}$

۶۷- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{\frac{-5}{x-3}}$ کدام است؟

- (۱) $x > 3$ (۲) $x < 3$ (۳) $x < 0$ (۴) $x > 0$

۶۸- کدامیک از اعداد زیر متعلق به دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{2x}{1-x}}$ می‌باشد؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۶۹- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-2}{(x+2)(x-3)}$ عبارتست از:

- (۱) $R - \{2, -2, 3\}$ (۲) $R - \{2, -2, -3\}$ (۳) $R - \{-2, 3\}$ (۴) $R - \{2, -3\}$

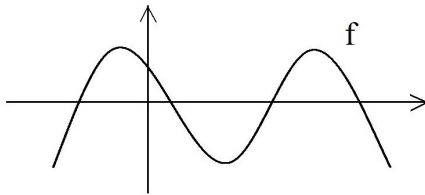
۷۰- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{-2x+5}}$ عبارت است از:

- (۱) $2 < x < \frac{5}{2}$ (۲) $x > \frac{5}{2}$ (۳) $x < \frac{5}{2}$ (۴) $2 \leq x < \frac{5}{2}$

۷۱- تمام دامنه‌ی تعریف $f(x) = \frac{\sqrt{4x-x^3}}{|x|-x}$ کدام است؟

- (۱) $\{0\} - [-2, 2]$ (۲) $(-\infty, -2]$ (۳) $[-2, 0)$ (۴) $\{-2\} \cup (0, -2]$

۷۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. معادلات $f(|x|) = 0$ و $|f(x)| = 0$ به ترتیب چند ریشه دارد؟



- (۱) ۳ و ۴
(۲) ۴ و ۳
(۳) ۶ و ۴
(۴) ۲ و ۳

۷۳- فرض کنیم $f = \{(1, 2), (-1, -1), (5, 3)\}$, $g = \{(2, 2), (3, 5), (-1, -1)\}$ چند تا از تابع‌های $f \cup g$, $f \cap g$, $f \cdot g$ یک‌به‌یک می‌باشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۷۴- اگر $f(x+1) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ دامنه تعریف تابع $y = f(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $(2 + \infty)$ (۲) $(1 + \infty)$ (۳) $(3 + \infty)$ (۴) $(4 + \infty)$

۷۵- فرض کنیم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حاصل $f(3) - 3f(2) + 3f(1)$ کدام است؟
 (۱) $f(0)$ (۲) $-f(0)$ (۳) $-f(4)$ (۴) $f(4)$

۷۶- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x + \sqrt{-x}}$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[-1, 0]$ (۳) $R - (-1, 0)$ (۴) $\{0\}$

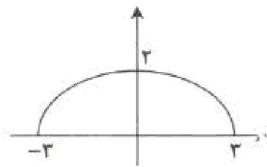
۷۷- اگر داشته باشیم $f(x) = x^2 - 6x$ حاصل $f(x + \frac{1}{x})$ با کدام برابر است؟
 (۱) $f(x - \frac{1}{x})$ (۲) $f(x - \frac{1}{x}) + 4$
 (۳) $f(x - \frac{1}{x}) - \frac{12}{x} + 4$ (۴) $f(x - \frac{1}{x}) + \frac{12}{x} + 4$

۷۸- تابع $f = \{(x, y) \mid y = \frac{x+6}{x}, x, y \in N\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) نامحدود

۷۹- اگر $f = \{(1, a+b), (2, b+c), (3, c+a)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۸۰- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف X های منفی و یک واحد به طرف Y های مثبت انتقال می‌دهیم.

نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟
 (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) -۳ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) -۲

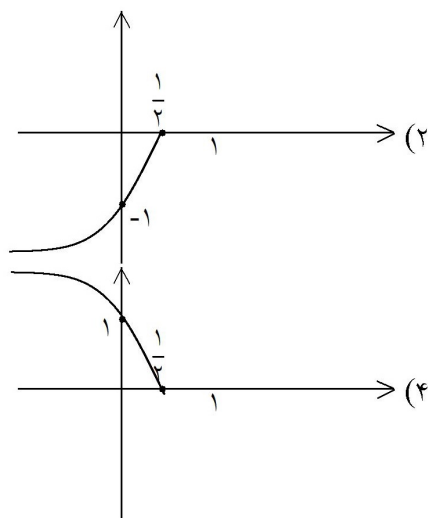


۸۱- کدام ضابطه برای نمودار مناسب است؟
 (۱) $y = 2 - \sqrt{9-x^2}$ (۲) $y = 2\sqrt{9-x^2}$
 (۳) $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ (۴) $y = 2 - \frac{x^2}{9}$

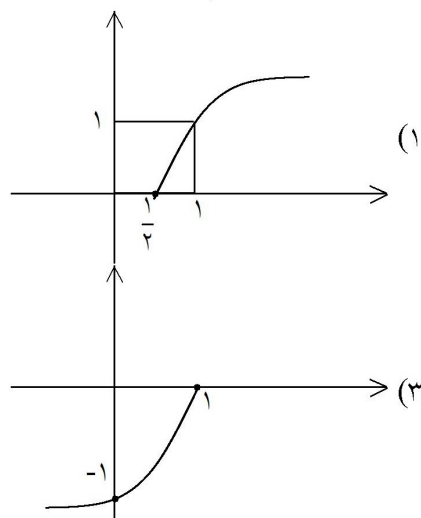
۸۲- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4x-x^3}}{\sqrt{|x|-x}}$ کدام است؟
 (۱) $\{0\} - [-2, 2]$ (۲) $(-\infty, -2]$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(0, 2]$

۸۳- اگر $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos x & x > 1 \\ \frac{2x+1}{3-2x} & x = 1 \\ 4\sin x - \tan \frac{3x}{2} & x < 1 \end{cases}$ مقدار $f(f(f(\frac{\pi}{3})))$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ (۴) تعریف نشده



۸۴- نمودار تابع $y = -\sqrt{1-2x}$ کدام است؟



۸۵- چند تا از مجموعه‌های زیر تابع می‌باشند؟

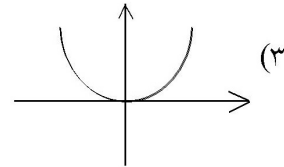
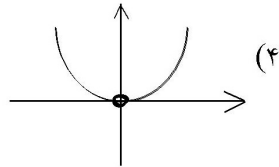
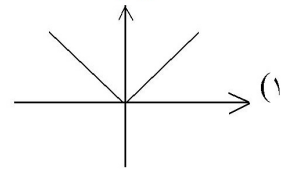
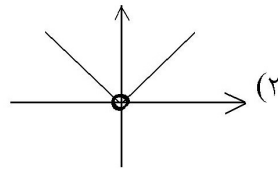
الف) $f = \{(1, 5) \text{ و } (2, 5) \text{ و } (3, 5)\}$

ب) $g = \{(1, 3) \text{ و } (4, \frac{1}{4}) \text{ و } (-6, -6) \text{ و } (1, 3)\}$

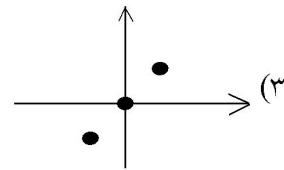
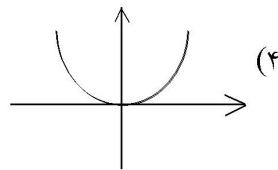
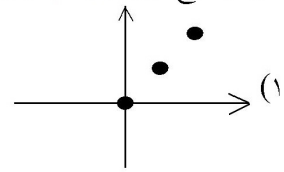
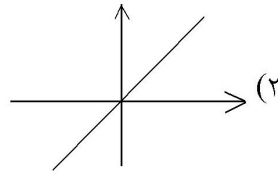
ج) $h = \{(\sqrt{5}-1, 0) \text{ و } (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ و } (3, 9) \text{ و } (\frac{4}{\sqrt{5}+1}, 7)\}$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۸۶- نمودار تابع $y = \frac{|x|^2}{|x|}$ کدام است؟



۸۷- نمودار تابع $f = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$ کدام است؟



۸۸- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ باشد، به ازای کدام مقدار k معادله $f(x) = k$ دقیقاً یک ریشه دارد؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) ۱

۸۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x - a & , x \geq -2 \\ 2ax - 3 & , x \leq -2 \end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد، مقدار $f(-3)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۹۰- دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{3 + |x|}{3 - |x - 1|}}$ کدام است؟

- (۱) (-۴, ۱) (۲) (-۴, ۲) (۳) (۱, ۴) (۴) (-۲, ۴)

۹۱- رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$ ، چند عضو زوج مرتب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹۲- اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ ، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۹۳- دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- (۱) $f \cup g$ (۲) $f \cap g$ (۳) $f - g$ (۴) $f \circ g$

۹۴- رابطه‌ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

۹۵- به ازای کدام مقدار b ، رابطه‌ی $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, b^2 - 1), (b, 6), (3, 1)\}$ تابع است؟

- (۱) ± 2 (۲) فقط ۲ (۳) فقط -۲ (۴) هیچ مقدار b

۹۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x - 1}}$ کدام است؟

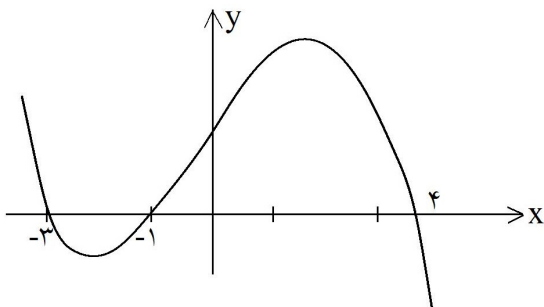
- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 10]$ (۳) $[10, +\infty)$ (۴) $[1, 10]$

۹۷- به ازای کدام مقادیر m معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - mx + m = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

- (۱) $m < 4$ (۲) $m < 0$ (۳) $0 < m < 4$ (۴) \emptyset

۹۸- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کم‌تر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$



۹۹- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است: دامنه‌ی

تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x}f(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$
 (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$
 (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$
 (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

۶.۵ کلید تست‌های فصل پنجم

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۸۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۸۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۹۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۶

آنالیز ترکیبی

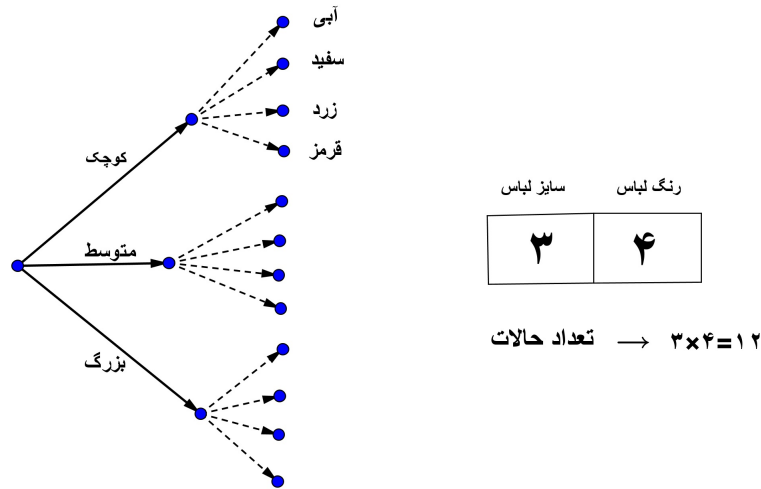
انسان قبل از اینکه نوشتن و خواندن بیاموزد با شمارش سروکار داشته است. در آنالیز ترکیبی یا ترکیبیات با شمارش سروکار داریم اما نه شمارش معمولی. در واقع شمارش در اینجا حالت تخصصی‌تری به خود می‌گیرد. حدود ۲۰۰ سال از عمر این شاخه از ریاضیات می‌گذرد و بیشترین پیشرفت ترکیبیات در ۵۰ تا ۶۰ سال گذشته شکل گرفته است. با پیدایش کامپیوتر و ساده شدن محاسبات طولانی به کمک آن، برخی مسائل که قبلاً حلشان دشوار می‌نمود. رابطه‌ی کامپیوتر و ترکیبیات رابطه‌ی دوسویه بوده است.^۱ خیلی از الگوریتم‌هایی که در کامپیوتر اجرا می‌شوند به مدد ترکیبیات نوشته شده‌اند. در این فصل ابتدا اصول مقدماتی شمارش را بیان کرده و جایگشت و ترکیب را در ادامه فصل بررسی می‌کنیم.

۱.۶ اصل ضرب و جمع

برای روشن شدن مطلب اجازه دهید مثالی ساده را بررسی کنیم.

^۱ در این زمینه قضیه چهاررنگ مثالی جالب است. قضیهٔ چهاررنگ یا حدس چهاررنگ از مسائل مشهور و قدیمی ریاضیات است که سال‌ها اثبات نشده مانده بود. به بیان ساده (و نادقیق) این قضیه می‌گوید: «برای رنگ کردن هر نقشه به طوری که کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است». سه رنگ برای نقشه‌های ساده تر کفایت ولی یک رنگ چهارم اضافی برای برخی نقشه‌ها لازم است. قضیه ۵ رنگ که اثباتی کوتاه و ابتدایی دارد، بیان می‌کند که ۵ رنگ برای رنگ آمیزی نقشه کفایت. این قضیه در اواخر قرن ۱۹ اثبات شده است (هیوو ۱۸۹۰). اثبات اینکه ۴ رنگ کفایت بسیار سخت تر است. این مسئله به صورت معادله ابتدا در سال ۱۸۵۲ عنوان شد و سرانجام در سال ۱۹۷۶ با کمک رایانه توسط کنت اپل و ولفگانگ هیکن حل شد. این اولین قضیه مهمی بود که با استفاده از کامپیوتر به اثبات رسید. آنها نشان دادند که مجموعه‌ای از ۱۹۳۶ نقشه وجود دارد که هیچ کدام از آنها نمی‌توانند قسمتی از یکی از کوچکترین مثال نقض‌های قضیه چهار رنگ باشند. اپل و هیکن از یک برنامه کامپیوتری خاص استفاده کردند تا ثابت کنند هیچ کدام از این نقشه‌ها از این قاعده مستثنی نیستند. علاوه بر این هر نقشه‌ای فارغ از این که مثال نقض هست یا نه، حتماً قسمتی را شامل می‌شود که شبیه یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه می‌باشد و اثبات این نیاز به صدها صفحه تحلیل دست نویس بود. اپل و هیکن نتیجه گرفتند که اگر بخواهد کوچکترین مثال نقضی وجود داشته باشد باید شامل یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه باشد. این تناقض به این معنی بود که هیچ مثال نقضی وجود ندارد و قضیه درست می‌باشد. در ابتدا اثبات آنها از طرف همه ریاضیدان‌ها مورد تایید واقع نشد، چرا که چک کردن یک اثبات کامپیوتری توسط انسان امکان‌پذیر نبود.

مثال ۱.۶. یک شرکت تولید پوشاک ورزشی لباس‌های ورزشی را در ۳ اندازه، کوچک، متوسط و بزرگ و در ۴ رنگ سفید، قرمز، آبی و زرد تولید می‌کند. این تولیدی در مجموع چند نوع لباس متفاوت تولید می‌کند؟



در شکل بالا می‌توان با شمارش مستقیم تعداد لباس‌های تولیدی را یافت. راه دیگر شمارش حرفه‌ای است. دوخانه به هم چسبیده را که یکی مربوط به اندازه و دیگری مربوط به رنگ می‌باشد رسم می‌کنیم. در خانه اولی سه امکان (سه سایز) و در دومی ۴ انتخاب (۴ رنگ) وجود دارد و تعداد کل انتخاب‌ها برابر ۱۲ است.

اصل ضرب: فرض کنید کاری به دو جزء تقسیم شده است، چنانکه جز اول به m طریق انجام شدنی است و جزء دوم مستقل از اولی به n طریق انجام شدنی است. در این صورت این کار به mn طریق انجام شدنی است. البته این اصل قابل تعمیم است. اگر کاری به k طریق مجزا تقسیم شده باشد بطوریکه اولی به m_1 طریق انجام شدنی باشد، دومی به m_2 طریق انجام شدنی باشد و... و k امی به m_k طریق انجام شدنی باشد آنگاه کل کار به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق شدنی است.

مثال ۲.۶. از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C چهارراه وجود دارد.
الف: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر C رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟
ب: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت، بطوریکه هر جاده حداکثر یک بار طی شود؟

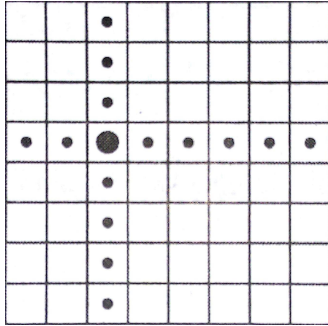
مثال ۳.۶. به چند طریق می‌توان یک کمیته دو نفره از بین ۸ مرد و ۹ زن تشکیل داد؟

مثال ۴.۶. از بین ده زوج (زن و شوهر) چگونه می‌توان یک گروه دونفره تشکیل داد که یک مرد و یک زن در آن باشد و در عین حال این دو زن و شوهر نباشند؟

مثال ۵.۶. چند کلمه سه حرفی با حروف e, d, c, b, a می‌توان ساخت؟ در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟ در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

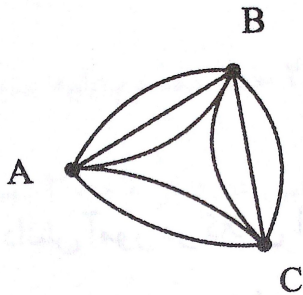
مثال ۶.۶. چند عدد فرد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۷.۶. به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ مشکی را در یک صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که یکدیگر را تهدید نکنند؟ (رخ همان قلعه است و صرفاً افقی و عمودی حرکت می‌کند).



اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان به دو روش انجام داد طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب موجود باشد. در این صورت برای انجام این کار $m + n$ روش وجود دارد. مثل اصل ضرب این اصل نیز قابل تعمیم است.

مثال ۸.۶. بین شهرهای A, B سه جاده، بین A, C ۲ جاده و بین B, C سه جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان با طی حداکثر دو جاده از A به B رفت؟



مثال ۹.۶. کمیسیون ورزش ۸ عضو و کمیسیون اقتصاد ۱۲ عضو دارد که ۳ عضو آنها مشترک است. می‌خواهیم از بین اعضای هر کمیسیون یک نفر را به عنوان نماینده‌ی کمیسیون انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به طوری‌که نمایندگان دو کمیسیون دو فرد مختلف باشند؟

مثال ۱۰.۶. با استفاده از ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند عدد طبیعی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

مثال ۱۱.۶. چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۱۲.۶. روی تخته سیاه تمام کلمات سه حرفی با استفاده از حروف a, b, c, d, e نوشته‌ایم. چندبار حرف a روی تخته سیاه نوشته شده است؟

مثال ۱۳.۶. با ارقام $\{0, 2, 3, 7\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:

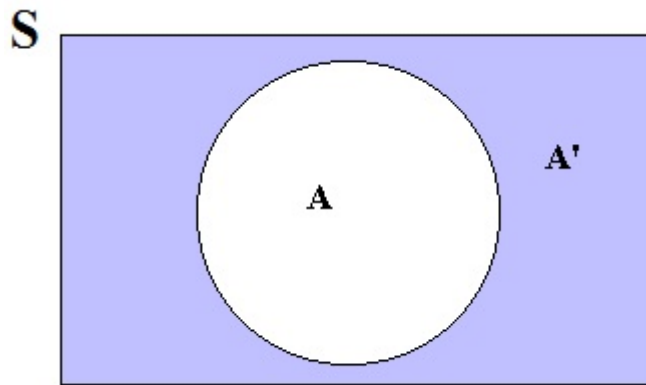
الف: تمام ارقام متمایز باشند.

ب: عدد سه رقمی و فرد با ارقام متمایز باشد.

ج: عدد زوج و سه رقمی با ارقام متمایز باشد.

مثال ۱۴.۶. در چند عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود دارد؟

تذکر مهم: تکنیک به کار رفته در حل مسئله فوق، استفاده از اصل متمم است. گاهی اوقات شمارش خاصیت ذکر شده در مسئله‌ای به مراتب مشکل‌تر از شمارش اعضای است که خاصیت ذکر شده را ندارند. در این حالت بهتر است آنهایی که آن ویژگی معین را ندارند (متمم) شمارش شده و از کل اعضای مجموعه اصلی کم شوند.



$$|S| = |A| + |A'|$$

مثال ۱۵.۶. در چند کلمه ۴ حرفی با حروف f, e, d, c, b, a حرف تکراری وجود دارد؟

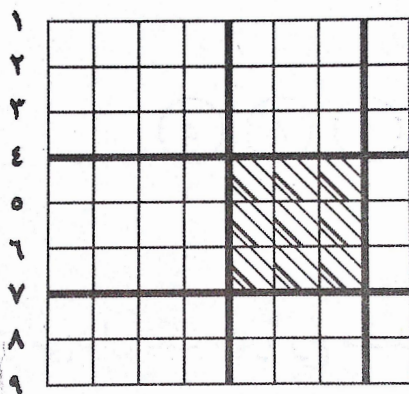
مثال ۱۶.۶. در چند عدد ۴ رقمی بزرگترین رقم برابر ۶ است؟

تمرین ۱.۶. به چند طریق می‌توان یک نفر را از بین ۶ زن و ۸ مرد انتخاب کرد؟

تمرین ۲.۶. به چند طریق می‌توان ۲ نفر را از بین ۵ کلاس اولی، ۷ کلاس دومی و ۶ کلاس سومی انتخاب کرد بطوریکه این دو نفر هم کلاس نباشند؟

تمرین ۳.۶. چند عدد فرد چهاررقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

تمرین ۴.۶. چند مربع ۳×۳ در یک صفحه شطرنجی ۸×۸ وجود دارد؟



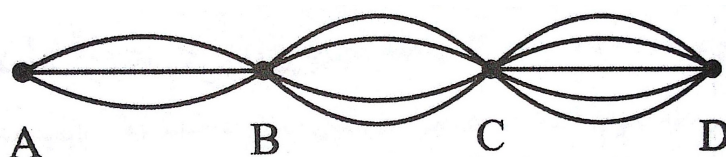
تمرین ۵.۶. الف: به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره سیاه را در دو خانه از صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

ب: به چند طریق می‌توان ۳ مهره‌ی متمایز را در سه خانه از صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که هیچ دوتایی در یک سطر یا ستون قرار نگیرند؟

تمرین ۶.۶. الف: با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

ب: به چند طریق می‌توان از A به D رفت و به A برگشت؟

ج: در چند مسیر از مسیرهای قسمت «ب» هر جاده حداکثر یک بار طی شده است؟



تمرین ۷.۶. دو خانه از خانه‌های شطرنج را مجاور گوئیم هرگاه حداقل یک راس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره سیاه را در دو خانه مجاور از صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد؟

تمرین ۸.۶. در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از دو رقم ۱ و ۲ وجود دارد؟

تمرین ۹.۶. در چند عدد ۶ رقمی، رقم تکراری وجود ندارد؟

تمرین ۱۰.۶. چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل دو عضو دارند؟

۲.۶ جایگشت

سه نفر به چند صورت متفاوت می‌توانند در یک ردیف کنار هم ایستاده و عکس بگیرند؟ اگر این سه شخص را با حروف لاتین a, b, c نمایش دهیم، تمام حالات ممکنه در زیر آمده است:

$$abc, acb, bca, bac, cab, aba$$

هر یک از این ۶ حالت را یک جایگشت از سه حرف $\{a, b, c\}$ گوئیم. حال اگر ۴ نفر بخواهند در یک ردیف و کنار هم عکس بگیرند چند حالت متفاوت پدید می‌آید؟

$$abcd, abdc, acbd, acdb, adcb, adbc$$

$$bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca$$

$cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba$

$dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$

به کمک اصل ضرب می‌توان تعداد جایگشت‌ها را بدون رسم کردن بدست آورد. تعداد جایگشت‌های ۴ شیء برابر است با $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و تعداد جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با $6 = 3 \times 2 \times 1$. در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم در این صورت تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با:

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

معرفی یک نماد: حاصلضرب $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$ را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و n فاکتوریل خوانده می‌شود.

مثال ۱۷.۶. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{8!}{5!}$

۲) $\frac{10!}{8!2!}$

۳) $\frac{7!4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!} \right)$

۴) $\frac{n!}{(n-2)!}$

۵) $\frac{n!}{(n-3)!}$

۶) $\frac{n!}{(n-k)!}$

۷) $\frac{5!}{m(m+1)} \times \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$

۸) $\frac{m! - (m-1)!}{(m+1)!} = \frac{1}{6} \rightarrow m = ?$

مثال ۱۸.۶. الف: ثابت کنید $20! = 19!(19! + 19)$. ب: عبارت $24 \times \dots \times 9 \times 8$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. ج: عبارت $40 \times \dots \times 6 \times 4 \times 2$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. د: عبارت $39 \times \dots \times 5 \times 3 \times 1$ را به نماد فاکتوریل بنویسید.

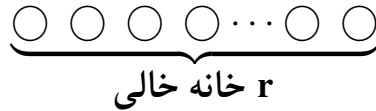
حال تصور کنید هفت شیء متمایز $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, a_7$ داشته باشیم. می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های بطول ۳ (یعنی با سه شیء) را که می‌توان از ۷ شیء فوق ساخت محاسبه کنیم. یک جایگشت بطول ۳ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:



اولین خانه به هفت طریق، دومین خانه به ۶ طریق و سومین خانه به ۵ طریق پر می‌شود. پس طبق اصل ضرب تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر $5 \times 6 \times 7$ است. می‌توان این عبارت را طور دیگری هم نوشت:

$$7 \times 6 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4!}{4!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

عدد ۳ و ۷ که نقشی اصلی در مسئله داشتند را در آخرین کسر می‌بینیم. در حالت کلی اگر $r \leq n$ باشد و بخواهیم تعداد جایگشت های r شیء را از n شیء بیابیم همانند مثال بالا عمل می‌کنیم:



اولین خانه دارای n انتخاب، دومین خانه $(n - 1)$ انتخاب، سومین خانه $(n - 2)$ انتخاب و... و r امین خانه دارای $(n - r + 1)$ انتخاب است. حال حاصلضرب این اعداد برابر است با:

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!} = p(n, r)$$

عبارت $p(n, r)$ را برای تعداد جایگشت های r شیء از n شیء انتخاب کرده‌ایم. پس تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء یا $p(n, r)$ برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

مثال ۱۹.۶. چند جایگشت از حروف کلمه *table* با حرف t شروع می‌شود؟

مثال ۲۰.۶. چند جایگشت از حروف کلمه *nature* به حروف صدادار ختم می‌شوند؟

مثال ۲۱.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *logarithm* عبارت *log* وجود دارد؟

مثال ۲۲.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *triangle* حروف صدادار مجاورند؟ در چند جایگشت ۵ حرفی با استفاده از حروف این کلمه حرف اول بی‌صدا است؟

مثال ۲۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *flexicam* هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

مثال ۲۴.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *talking* بین دو حرف k, t دقیقاً دو حرف قرار دارد؟

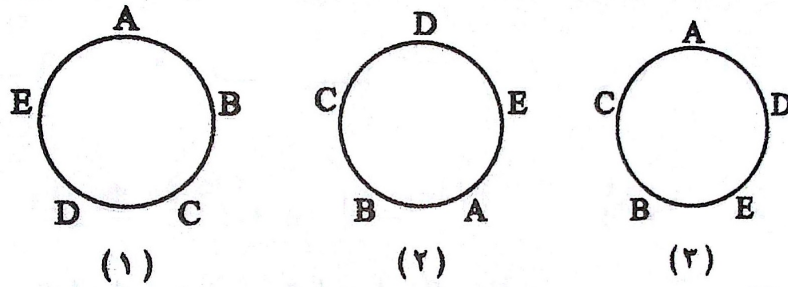
مثال ۲۵.۶. ۴ معلم و ۳ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به طوری که هیچ دو معلمی مجاور یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۶.۶. با حروف کلمه جهانگردی و بدون تکرار حروف:

۱. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به «ی» ختم می‌شود؟
۲. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار گرفته باشند؟
۳. چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چندتا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟
۴. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» ۴ حرف اول باشند؟
۵. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
۶. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شوند؟

جایگشت‌های دوری

به هر روش قرار گرفتن n شیء دور یک دایره یک جایگشت دوری آن n شیء گوئیم، با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران یک آرایش دیگر بدست آید این دو آرایش را هم‌ارز گوئیم. در شکل زیر آرایش‌های ۱ و ۲ از جایگشت‌های دوری E, D, E, B, A هم‌ارزند اما این دو با ۳ هم‌ارز نیست.



قضیه: تعداد جایگشت‌های دوری n شیء برابر است با $(n - 1)!$.

مثال ۲۷.۶. در چند جایگشت دوری از حروف کلمه‌ی *triangle* حروف صدادر مجاورند؟

مثال ۲۸.۶. سه معلم و هشت دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۹.۶. پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند بطوریکه هر فرد کنار همسر خود نشسته باشد؟

تمرین ۱۱.۶. ۶ دکتر و ۵ مهندس را در نظر بگیرید.

۱. به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند؟

۲. در چند حالت دکترها مجاور هدیگرند؟

۳. در چند حالت هیچ دو دکتری مجاور یکدیگر نیستند؟

۴. در چند حالت هم دکترها مجاورند و هم مهندسین؟

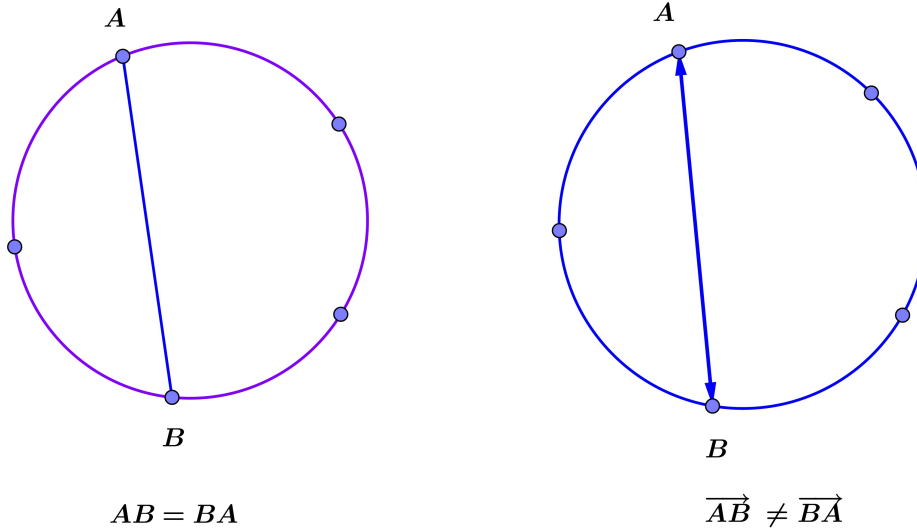
تمرین ۱۲.۶. ۱۱ مرد و ۱۴ زن به چند طریق می‌توانند تشکیل ۱۱ زوج بدهند؟

تمرین ۱۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه *triangle* حرف t قبل از حرف n قرار دارد؟

تمرین ۱۴.۶. چند جایگشت دوری شامل ۶ حرف از حروف کلمه‌ی *Logarithm* وجود دارد؟ در چندتا از این جایگشت‌ها حرف t وجود دارد؟ در چندتا هر سه حرف صدادر وجود دارد؟ در چندتا حداقل یکی از حروف m ، t و t وجود دارد؟

۳.۶ ترکیب

به دقت به شکل زیر نگاه کنید.



پنج نقطه روی دایره انتخاب شده‌اند. با این پنج نقطه ده پاره خط متمایز چون AB می‌توان ساخت، اما دو برابر این تعداد یعنی 20 بردار چون \overrightarrow{AB} می‌توان رسم کرد. در واقع $P(5, 2) = \frac{5!}{3!} = 20$. در این دو مسئله به ظاهر یکسان ترتیب انتخاب بسیار تاثیرگذار است. در انتخاب پاره خط ما با انتخاب هر دو نقطه از بین این ۵ نقطه روی محیط دایره یک پاره خط داریم و این مانند انتخاب زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه ۵ عضوی است که مثلاً مجموعه‌های $\{A, B\}$ ، $\{B, A\}$ یکی هستند. اگر در انتخاب r شیء از میان n شیء $r \leq n$ ترتیب انتخاب مهم نباشد با مسئله ترکیب روبرو هستیم. تعداد راه‌های انتخاب r شیء بدون اهمیت ترتیب آنها را ترکیب r شیء از n شیء گوئیم و با نماد $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۳۰.۶. به چند طریق می‌توان از بین ده عضو شورای شهر دو نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب کرد؟

مثال ۳۱.۶. یک هفت ضلعی منتظم مفروض است. تمام قطرهایش را رسم کرده ایم. کلاً چند قطر رسم شده است؟ اگر بدانیم هیچ سه قطری در یک نقطه متقاطع نیستند، تعداد محل‌های برخورد این قطرها را بیابید.

مثال ۳۲.۶. شانزده تیم فوتبال بصورت دوره‌ای باهم بازی می‌کنند. کلاً چند بازی در این دوره انجام می‌شود؟

مثال ۳۳.۶. به ازای کدام مقدار n داریم: $\binom{n}{2} = 21$.

مثال ۳۴.۶. ثابت کنید: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال ۳۵.۶. به کمک مثال بالا ثابت کنید :

الف: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n - r$ عضوی برابر است.

ب:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ج: اتحاد پاسکال
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

مثال ۳۶.۶. از بین شش کتاب مفروض :

۱. به چند طریق می‌توان ۴ تا را در یک قفسه کنار هم چید؟

۲. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب به یک کتابخانه هدیه داد؟

برای جمع بندی تمام مطالب فصل مثال‌های متنوع زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳۷.۶. پنج ماشین پژو و سه ماشین بنز به چند طریق در یک ردیف می‌توانند کنار هم پارک کنند که

ماشین‌های بنز کنار هم و ماشین‌های پژو هم کنار هم باشند؟

مثال ۳۸.۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز با استفاده از ارقام مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ می‌توان

ساخت بطوری‌که دو عدد مضرب ۳ همواره کنار هم باشند؟

مثال ۳۹.۶. مجموعه ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مفروض است. چند عدد ۸ رقمی با ارقام متمایز با

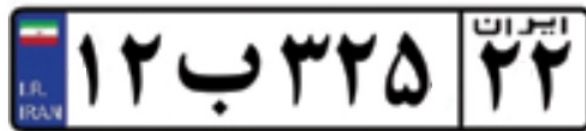
استفاده از این ارقام می‌توان نوشت بطوری‌که هیچ دو عدد فرد اول این مجموعه کنار هم نباشند؟

مثال ۴۰.۶. یک پلاک ماشین بصورت شکل زیر است. ارقامی که در سمت راست پلاک استفاده می‌شود از

مجموعه $\{99, 000, 22, 11\}$ است. ارقام سمت چپ از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ انتخاب می‌شود

و حروف بین ارقام سمت چپ تنها ۱۳ حرف از حروف الفبای فارسی است. معین کنید به این ترتیب چند

پلاک ماشین می‌توان ساخت؟



مثال ۴۱.۶. تعداد کلماتی یازده حرفی که با حروف کلمه‌ی *Mississippi* می‌توان نوشت را بیابید.

مثال ۴۲.۶. چند کلمه ده حرفی با حروف a, b, c می‌توان ساخت بطوریکه دقیقاً شامل سه حرف a باشد؟

جایگشت با تکرار

اگر مثال ۴۱ را با دقت بیشتری بررسی کنید و ترکیب‌های در راه حل را به فاکتوریل تبدیل کنید به نتیجه‌ی جالبی بین تعداد اشیاء تکراری و تعداد کل و جواب مسئله می‌رسید. اثبات این مطلب در حالت کلی هم چندان مشکل نیست. فرض کنید m_1 شیء از نوع a_1 و m_2 شیء از نوع a_2 و ... و m_k شیء از نوع a_k داریم که $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. در اینصورت هر چیدن این n شیء را یک جایگشت با تکرار می‌نامیم. تعداد این جایگشت‌ها برابر است با :

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

با این حساب در مثال ۴۱ می‌توان تعداد جواب‌ها را از دستور یافت که برابر است با : $\frac{11!}{1! 4! 4! 2!}$.

مثال ۴۳.۶ چند عدد ده رقمی با استفاده از سه رقم ۴ و دو رقم ۲ و پنج رقم ۸ می‌توان نوشت؟

تمرین ۱۵.۶ ده نقطه روی محیط یک دایره داده شده است. کلیه وترهای بین دودوی این نقاط را رسم می‌کنیم.

الف: چند وتر رسم شده است؟

ب: تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آنها روی محیط دایره و اضلاع آنها روی وترهای رسم شده باشد.

تمرین ۱۶.۶ به چند طریق می‌توان ۷ کتاب یکسان را بین ده نفر توزیع کرد بطوریکه به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

تمرین ۱۷.۶ در چند زیر مجموعه ۵ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل سه عدد فرد وجود دارد؟

تمرین ۱۸.۶ مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ مفروض است.

۱. مجموعه A چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

۲. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود دارند؟

۳. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی هیچ یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود ندارند؟

۴. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل یکی از اعضای $\{1, 2, 3\}$ وجود دارند؟

۵. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی، عددی بزرگتر از ۱۵ وجود دارد؟

۶. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی کوچکترین عضو ۵ و بزرگترین ۱۵ است؟

۷. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اختلاف بزرگترین عضو از کوچکترین عضو برابر ۱۰ است؟

۸. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۶ عدد فرد وجود دارد؟

۹. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۳ عدد فرد و حداقل ۳ عدد زوج وجود دارد؟

تمرین ۱۹.۶ در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *Gallery* حروف l غیرمجاورند؟

تمرین ۲۰.۶ در یک جمع ۹ زوج (زن و شوهر) حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر از این جمع

انتخاب کرد طوری که در بین آنها دقیقاً ۳ زوج حضور داشته باشند؟

تمرین ۲۱.۶. در یک کلاس ۳۰ دانش‌آموز وجود دارد. می‌خواهیم ۶ نفر از این دانش‌آموزان را برای تیم والیبال و ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم بطوری که تمام اعضای تیم والیبال از اعضای تیم فوتبال بلندتر باشد. به چند طریق این کار شدنی است؟

تمرین ۲۲.۶. در یک صفحه شطرنجی 6×4 چند مستطیل دیده می‌شود؟

تمرین ۲۳.۶. در چند عدد ۸ رقمی با ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ دقیقاً ۵ رقم فرد وجود دارد؟

تمرین ۲۴.۶. در چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمه‌ی *logarithm* دقیقاً دو حرف صدادار وجود دارد؟

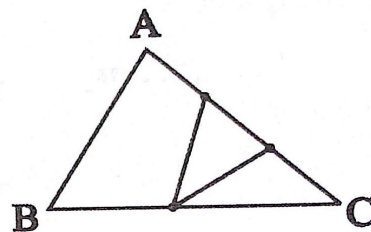
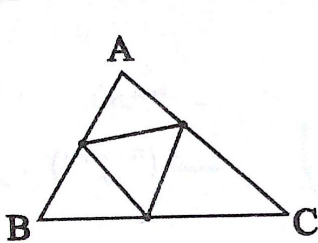
تمرین ۲۵.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *computers* حروف صدادار به ترتیب الفبایی وجود دارند و همچنین حرف *p* جلوتر از حرف *c* قرار دارد؟

تمرین ۲۶.۶. در چند کلمه‌ی ده حرفی با حروف *a, b, c* سومین حرف *a* در مکان هفتم کلمه آمده است؟

تمرین ۲۷.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره *A, B* تقسیم کرد؟

تمرین ۲۸.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

تمرین ۲۹.۶. روی هر ضلع مثلث *ABC* پنج نقطه را علامت گذاشته‌ایم. چند مثلث وجود دارد که رئوس هر یک متعلق به این ۱۵ نقطه باشد؟



۴.۶ تست‌های فصل ششم

۱- سه نوع کتاب علمی و ۴ نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که ابتدا کتابهای علمی یک در میان قرار گیرند؟

(۱) ۱۴۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۶ (۴) ۷۲

۲- با حروف کلمه بلوچستان چند کلمه ۲ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان ساخت به طوری که حرفی در هر یک از آنها تکرار نشده باشد؟

(۱) $\frac{8!}{5!3!}$ (۲) $\frac{8!}{5!}$ (۳) $\frac{8!}{3!}$ (۴) $8!$

۳- با چهار رقم ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

۴- مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

۵- برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعداد صورت‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی C, D رفت به طوری که از هر نوع وسیله نقلیه حداکثر یک بار استفاده شده باشد، کدام است؟

(۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۵

۶- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه رقمی که تکرار ارقام مجاز باشد می‌توان نوشت؟

(۱) ۹ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۷- از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم این عمل به چند طریق ممکن است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۱۵۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۴۲۰

۸- دانش‌آموزی باید به ۱۸ سوال از ۲۰ سوال امتحان به دلخواه پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سوال را انتخاب کند؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹۰ (۴) ۳۸۰

۹- با چهار عدد ۰، ۹، ۶، ۵ چند عدد چهار رقمی (بدون تکرار) می‌توان ساخت؟

(۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۱۰- با ارقام ۰، ۴، ۵، ۱ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۱- شخصی از میان ۱۰ کتاب خود می‌خواهد دو کتاب را انتخاب نموده و به یکی از دوستانش هدیه کند چند صورت ممکن است؟

- ۴۰ (۱) ۴۵ (۲) ۹۰ (۳) ۲۰ (۴)

۱۲- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۴۰ (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۱۳- سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوتند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع همواره کنار هم باشند؟

- ۲۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۴)

۱۴- مجموعه اعداد چهار رقمی که با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ بدون تکرار رقم می‌توان نوشت، چند عضو دارد؟

- ۲۴۰ (۱) ۲۶۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۳۰۰ (۴)

۱۵- یک مجموعه ۸ عضوی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد؟

- ۸۴ (۱) ۷۰ (۲) ۵۶ (۳) ۴۲ (۴)

۱۶- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

- $(\binom{11}{7}) 4! \times 3! \times 2! \times 2!$ (۱) $(\binom{11}{7}) 4! \times 3! \times 2!$ (۲) $(\binom{6}{4}) (\binom{5}{3}) 4! \times 3!$ (۳) $(\binom{6}{4}) (\binom{5}{3}) 4! \times 3! \times 2!$ (۴)

۱۷- یک قفل رمزی دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... ۹ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

- ۱۲ (۱) ۱۲/۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۳/۵ (۴)

۱۸- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت بطوریکه حرف اول آنها نقطه‌دار نباشد؟

- ۱۰۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴)

۱۹- مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟

- $n(n+1)$ (۱) $n(n-1)$ (۲) $\frac{n+1}{n-1}$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴)

۲۰- حروف کلمه ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۲۱- بر روی یک دایره ۸ نقطه متمایز وجود دارد، تعداد چهار ضلعیهای محدب که هر رأس یک چهار ضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۵۶ (۱) ۶۸ (۲) ۷۰ (۳) ۷۲ (۴)

۲۲- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟

۴۵ (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۷۲ (۴)

۲۳- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته‌ی ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟

۴۵۰ (۱) ۵۴۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۴۲۰ (۴)

۲۴- پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{ب***}$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است.

در سری ب و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟
۱۱۶۶۴ (۱) ۱۴۵۸۰ (۲) ۱۵۴۸۰ (۳) ۱۸۲۲۵ (۴)

۲۵- یک مجموعه‌ی n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه‌ی $2 - n$ عضوی دارد، n کدام است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۲۶- ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

۲۷- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۵ دانش‌آموز دوم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، هرگاه دانش‌آموزان کلاس اول یک در میان باشند؟

۴! × ۵! (۱) ۴! × ۵! × ۲ (۲) ۴! × ۵! × ۳ (۳) ۴! × ۵! × ۳! (۴)

۲۸- ۵ نقطه متمایز بر روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چندضلعی‌هایی که رئوس آنها بر این نقاط قرار دارند، کدام است؟

۲۶ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲۰ (۴)

۲۹- با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۳۰- اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$ باشد، حاصل $C(n, 3)$ چیست؟

۷۲ (۱) ۸۴ (۲) ۹۶ (۳) ۱۰۸ (۴)

۳۱- به چند طریق از میان ۵ آقا و ۴ خانم می‌توان شورایی متشکل از ۲ آقا و ۳ خانم انتخاب نمود؟
 (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۳۲- ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف داریم، به چند طریق می‌توانیم آنها را در یک ردیف قرار دهیم به نحوی که کتابهای ریاضی در کنار هم باشند؟

(۱) $2 \times 3! \times 4!$ (۲) $(4!)^2$ (۳) $3! \times 4!$ (۴) $2 \times 4! \times 4!$

۳۳- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد؟
 (۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۳۴- می‌خواهیم از یک کلاس ۱۰ نفری شامل A و B چهار نفر برای شرکت در یک مسابقه ورزشی انتخاب کنیم به طوری که شخص A حتماً انتخاب نشود ولی شخص B حتماً انتخاب شده باشد. این عمل به چند شریک امکان‌پذیر است؟

(۱) ۱۸۶ (۲) ۲۸ (۳) ۵۶ (۴) ۸۴

۳۵- اگر $\binom{n}{K} = A$, $\binom{n+1}{K+1} = B$ حاصل $\binom{n}{K+1}$ برابر است با:

(۱) $A + B$ (۲) $A - B$ (۳) $nA - B$ (۴) $A + nB$

۳۶- اگر یک مجموعه n عضوی دارای ۱۰ زیر مجموعه ۲ عضوی باشد، دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۵ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۳۷- تعداد اعداد ۳ رقمی فرد فاقد رقم ۵ کدام است؟

(۱) ۲۸۸ (۲) ۲۵۶ (۳) ۱۹۲ (۴) ۱۴۴

۳۸- در یک شرکت ۶ نفری به چند طریق می‌توان از بین کارکنان شرکت یک رئیس، یک حسابدار و یک منشی انتخاب کرد هرگاه هر فرد فقط یک شغل بتواند اختیار کند؟

(۱) ۲۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۷۲

۳۹- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت هر گاه بر ۵ بخش‌پذیر بوده و از نیز ۳۰۰۰۰ بزرگتر باشد؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۴۰- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

(۱) ۳۶۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰

۴۱- با فرض آنکه $P(n, 2) = \binom{n}{2}$ عدد طبیعی n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴)

۴۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است. تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن چندتا است؟

- ۲۱ (۱) ۴۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴)

۴۳- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، چند زیرمجموعه‌های ۳ عضوی دارد که شامل ۱ باشد اما ۲ را نداشته باشد؟

- ۱۲ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴)

۴۴- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چه تعداد عدد ۳ رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۶۰ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴)

۴۵- از بین ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سفید می‌خواهیم ۳ مهره را انتخاب کنیم. در چند حالت ۲ مهره از یک رنگ و مهره‌ی دیگر به رنگی متفاوت می‌باشد؟

- ۶۰ (۱) ۷۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴)

۴۶- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ وجود دارد که در آن‌ها رقم ۳ حداقل یک بار ظاهر شود؟

- ۱۷۳۲ (۱) ۸۶۶ (۲) ۲۱۰۱ (۳) ۱۸۰۲ (۴)

۴۷- از میان هفت پرستار مرد و پنج پرستار زن به چند طریق می‌توان ۲ پرستار مرد و ۳ پرستار زن انتخاب نمود؟

- ۱۴۴ (۱) ۱۶۹ (۲) ۱۸۲ (۳) ۲۱۰ (۴)

۴۸- در مجموعه‌ای با افزایش ۳ عضو تعداد زیرمجموعه‌ها ۱۱۲ واحد اضافه می‌شود. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی چند واحد افزایش می‌یابد؟

- ۲۷ (۱) ۴۲ (۲) ۳۵ (۳) ۳۱ (۴)

۴۹- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد ۶ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

- ۷۲۹ (۱) ۱۶۲ (۲) ۴۸۶ (۳) ۳۲۴ (۴)

۵۰- حاصل $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (۲) $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

(۳) $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}$ (۴) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

۵۱- اگر بخواهیم ۴ دانش آموز کلاس اول و ۳ دانش آموز کلاس دوم را در یک ردیف کنار هم بنشانیم، در چند حالت دانش آموزان کلاس دوم کنار هم هستند؟

(۱) ۳!۵! (۲) ۳!۴! (۳) ۴!۴! (۴) ۴!۵!

۵۲- با حروف کلمه‌ی «ایرانیان» چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۶۸۰ (۲) ۳۳۶۰ (۳) ۴۰۳۲۰ (۴) ۶۷۲۰

۵۳- ۱۰ نقطه‌ی متمایز بر روی محیط یک دایره قرار گرفته‌اند. تعداد چهار ضلعی‌هایی که رئوس آن‌ها بر این ده نقطه قرار دارد، چه تعداد از مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها بر این ۱۰ نقطه قرار دارد بیشتر است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۱۰ (۴) ۹۰

۵۴- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{2x}{x+1} = \binom{2x}{3}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۵- به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر دانش‌آموز کلاس اول و ۴ نفر دانش‌آموز کلاس دوم، ۴ نفر که حداقل ۳ نفر در آن‌ها کلاس دومی باشند انتخاب کرد و به آن‌ها ۴ جایزه مختلف اهداء نمود؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۰۴

۵۶- با ده، نقطه‌ی A, B, ..., J, که روی یک دایره قرار دارند، چند مثلث می‌توان ساخت که شامل راس G باشند؟

(۱) ۴۵ (۲) ۳۶ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۱۲

۵۷- اگر داشته باشیم $n! = 2^7 \times 3^2 \times 5$ مقدار $\binom{n}{2}$ کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۳۶ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

۵۸- پنج نفر قرار است در یک سمینار سخنرانی کنند. اگر ترتیب آن‌ها مهم باشد، به چند طریق ممکن است که شخص A پیش از شخص B سخنرانی کند؟

(۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۲۰

۵۹- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که ۲ رقم زوج کنار هم باشند؟

(۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

۶۰- حاصل $\binom{17}{4} + \binom{17}{5}$ کدام است؟

(۱) $\binom{18}{4}$ (۲) $\binom{18}{5}$ (۳) $\binom{17}{6}$ (۴) $\binom{17}{9}$

۶۱- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که شامل رقم ۴ باشد و یکان آن ۶ نباشد؟

۳۱۲ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۱۲ (۳) ۲۸۰ (۴)

۶۲- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

۶۳- با ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان» می‌توان نوشت؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۶۴- از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر آنان دانش‌آموز تجربی باشند؟

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

۶۵- از هریک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱۶۰ (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴)

۶۶- از هریک از ۶ منطقه‌ی کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟

۵۷۶۰۰ (۱) ۶۷۵۰۰ (۲) ۷۵۶۰۰ (۳) ۷۶۵۰۰ (۴)

۶۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که Sها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۶۸- از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود. به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟

۴۲۰۰ (۱) ۵۴۰۰ (۲) ۵۶۰۰ (۳) ۶۳۰۰ (۴)

۶۹- با حروف کلمه‌ی جمهوری چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

۷۰- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز و فرد که بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشد، وجود دارد؟

۲۴ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴)

۷۱- دو سرباز و دو افسر به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند به طوری که دو افسر کنار هم نباشند؟

۶ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

- ۷۲- از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می‌توان ۳ لنگه انتخاب کرد که یک جفت در میان آنها باشد؟
 (۱) ۴۰ (۲) ۵۶ (۳) ۹۶ (۴) ۱۲۸
- ۷۳- چند عدد ۳ رقمی بیش‌تر از ۵۰۰ با ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ وجود دارد؟ (تکرار با ارقام مجاز است).
 (۱) ۳۲ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۲۵۰
- ۷۴- حروف کلمه‌ی PANAMA را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد که هر ۳ حرف A مجاور باشند؟
 (۱) ۳! (۲) ۳! ۳! (۳) ۴! (۴) ۴! ۳!
- ۷۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت به طوری که ارقام فرد یکی در میان باشند؟
 (۱) ۷! (۲) ۳! ۴! (۳) ۴! (۴) ۴! ۳!
- ۷۶- از هر یک از تیم‌های ملی فوتبال، والیبال، بسکتبال و هندبال، ۵ نفر به جلسه‌ای دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر که دو به دو هم تیمی نباشند، انتخاب کرد؟
 (۱) ۳۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۶۰۰
- ۷۷- چند عدد چهار رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد که از ۴۰۰۰ کم‌تر و فرد باشند؟
 (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۲۱۵ (۳) ۱۶۲۰ (۴) ۱۵۰۰
- ۷۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟
 (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸
- ۷۹- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ ... به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟
 (۱) ۶۴۰۰ (۲) ۷۲۰۰ (۳) ۸۴۰۰ (۴) ۹۶۰۰
- ۸۰- با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ ... به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت. به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟
 (۱) ۶۴۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۷۸۰ (۴) ۹۶۰

۵.۶ کلید تست‌های فصل ششم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۷

آمار و احتمال

۱.۷ احتمال و اندازه‌گیری شانس

تاریخچه‌ی دقیقی از شروع احتمال در گذر زمان در دسترس نیست. از دوران یونان باستان آنها درباره‌ی شانس صحبت کرده‌اند و به مسئله کمی بعد متافیزیکی داده‌اند. نخستین مطالعه‌ی جدی در باب احتمال در قرن شانزدهم و ابتدای قرن هفدهم توسط جیرولامو کاردانو (۱۵۷۶-۱۵۰۱) ایتالیایی صورت گرفت. تنها یک مسئله است که آن را ریشه‌ی شاخه‌ی احتمالات می‌دانند و به مسئله امتیازها معروف است. در این مسئله چگونگی تقسیم جایزه‌ی بازی شانسی نیمه تمام بین دو بازیکن فرضی هم‌قدرت، با داشتن امتیازهای دو بازیکن در موقع قطع بازی و تعداد امتیازهای لازم برای بردن بازی خواسته شده است. این مسئله را کاردانو و تارتاگلیا نیز مورد بررسی قرار داده بودند، اما پیشرفت واقعی در سال ۱۹۵۴ رخ داد. یک قمارباز حرفه‌ای زیرک طی نامه‌ای به بلز پاسکال علت عدم تطبیق تجربه شخصی با واقعیت تئوری این مسئله را جویا شده بود. پاسکال به مسئله علاقمند شد و طی نامه‌ای آن را به اطلاع پی‌یر فرما رساند. از اینجا به بعد مکاتبات زیادی بین این دو بزرگ مرد تاریخ ریاضیات شکل گرفت که شالوده‌ی احتمالات را تشکیل دادند. فرما و پاسکال مسئله را جداگانه حل کردند با این تفاوت که پاسکال مسئله را در حالت کلی حل کرد. پدیده‌های پیرامون ما در حالت کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

$$\text{پدیده‌ها} \rightarrow \begin{cases} \text{نتیجه از قبل قابل پیش بینی است} \rightarrow \text{پدیده‌های قطعی} \\ \text{نتیجه از قبل غیرقابل پیش بینی است} \rightarrow \text{پدیده‌های تصادفی} \end{cases}$$

در بحث احتمال پدیده‌های تصادفی بررسی می‌شوند و با پدیده‌های قطعی کاری نخواهیم داشت. منظور از یک آزمایشی تصادفی در تمام این فصل آزمایشی است که نتیجه‌ی آن از قبل قابل پیش بینی نباشد. در هر آزمایش تصادفی مجموعه‌ای وجود دارد که شامل تمام نتایج ممکنه در آن آزمایش تصادفی است. به چنین مجموعه‌ای فضای نمونه گوییم.

تعریف ۱.۷. در هر آزمایش تصادفی به مجموعه‌ای که شامل تمام حالات ممکنه از آن آزمایش تصادفی باشد فضای نمونه گوئیم و آنرا با حرف S نشان می‌دهیم. همچنین به هر زیرمجموعه دلخواه از S یک پیشامد یا رخداد گوئیم. پس A یک پیشامد است هرگاه: $A \subseteq S$ باشد.

مثال ۱.۷. فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی ذکر شده در موارد زیر را معین کنید.

۱. فضای نمونه پرتاب یک سکه.

۲. فضای نمونه پرتاب دوسکه.

۳. فضای نمونه پرتاب سه سکه.

۴. فضای نمونه پرتاب یک تاس.

۵. فضای نمونه پرتاب دو تاس.

۶. فضای نمونه برای جنسیت فرزندان یک خانواده سه فرزندی.

۷. فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس.

۸. فضای نمونه انتخاب ۲ نفر از بین ۵ نفر.

مثال ۲.۷. در یک خانواده با ۴ فرزند پیشامد داشتن ۳ پسر را تعیین کنید. پیشامد داشتن حداقل ۳ پسر چیست؟ پیشامد برابر بودن تعداد دختران و پسران چیست؟

مثال ۳.۷. در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد اینکه این دو مهره‌ی هم‌رنگ باشند را بنویسید.

مثال ۴.۷. دو تاس را با هم پرتاب کرده‌ایم. پیشامدهای زیر را بنویسید.

۱. اعداد رو شده برابر باشند.

۲. مجموع اعداد رو شده ۷ شود.

۳. مجموع اعداد رو شده عددی اول باشد.

عملیات بر پیشامدها

چون پیشامدها زیرمجموعه‌های فضای نمونه هستند، امکان ترکیب کردن آنها و ساختن پیشامدهای جدید وجود دارد.

اشتراک دو پیشامد: اگر $A, B \subseteq S$ دو پیشامد دلخواه باشند $A \cap B$ پیشامد وقوع هر دو A و B بطور همزمان است. مثلاً در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد آمدن عدد زوج و B پیشامد اینکه عدد اول بیاید باشد

آنگاه $A \cap B$ به معنای زوج و اول آمدن است. و لذا:

$$A \cap B = \{2\}$$

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ به معنای وقوع A یا B یا هر دوی آنهاست. مانند حالت قبل داریم:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ به معنای رخ دادن A و رخ ندادن B است. مانند حالت قبل داریم:

$$A - B = \{4, 6\}$$

متمم یک پیشامد: پیشامد A' به معنای رخ ندادن A است. مانند حالت قبل داریم:

$$A' = \{1, 3, 5\}$$

تفاضل متقارن دو پیشامد: می‌دانیم $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. پس پیشامد $A \Delta B$ به معنای رخ دادن A و رخ ندادن B یا رخ دادن B و رخ ندادن A است. بعبارت دیگر فقط یکی از A یا B رخ دهد. مانند حالت قبل:

$$A \Delta B = \{3, 4, 5, 6\}$$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوئیم هرگاه: $A \cap B = \emptyset$

مثال ۵.۷. دو تیم «الف» و «ب» با دو تیم «ج» و «د» در دو زمین جداگانه بازی می‌کنند. اگر A پیشامد برنده شدن تیم «الف» و B پیشامد برنده شدن «ب» باشد پیشامدهای زیر را تشریح کنید.

$$A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A' \cup B', A' \cap B', B \cup A'$$

مثال ۶.۷. دو تاس با رنگ‌های آبی و قرمز را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای خواسته شده را بنویسید.

۱. پیشامد A : هر دو تاس فرد باشند.
۲. پیشامد B : مجموع دو تاس عدد ۶ باشد.
۳. پیشامد C : تاس آبی مضرب ۳ بیاید.
۴. پیشامد اینکه هر دو تاس فرد و مجموع ۶ آمده باشد.
۵. پیشامد اینکه هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ بیاید.
۶. پیشامد $A - C$ چیست؟
۷. پیشامد $C - B$ را توصیف کنید.
۸. آیا پیشامدهای «مجموع دو تاس ۷ بیاید» و «هر دو تاس زوج بیایند» ناسازگارند؟

اندازه‌گیری احتمال

برای اندازه‌گیری شانس در آزمایش تصادفی روش‌های متعددی وجود دارد. یکی از این روش‌ها روش آماری است. به این معنی که آزمایش را به دفعات زیاد انجام می‌دهیم و نتیجه‌های مشاهده شده و مطلوب را بر تعداد کل دفعات آزمایش تقسیم می‌کنیم و عدد حاصل را شانس آن پیشامد در نظر می‌گیریم. یکی دیگر از روشها، روش ذهنی است. کارشناس فوتبال بر اساس تجربیات خود حدس می‌زند که تیم A به احتمال مثلاً ۶۰٪ برنده خواهد شد. روش دیگر استفاده از اصول موضوعه احتمال و استخراج مابقی قوانین آن از همان چند اصل ابتدایی است که برای اولین آشنایی در احتمال چندان مناسب نیست. اما یکی از مفیدترین و ساده‌ترین روش‌ها محاسبه احتمال از طریق شمارش تعداد اعضای پیشامد و فضای نمونه و تقسیم آنها بر یک دیگر است.

تعریف ۲.۷. فرض کنید S یک فضای نمونه و $A \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه باشد. شانس وقوع پیشامد A را که با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد یا مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکنه}}$$

مثال ۷.۷. فرض کنیم که هر یک از اعداد دورقمی که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم را روی کارت‌های مشابه نوشته و در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. شانس بیرون آمدن عدد زوج بیشتر است یا عدد فرد؟

مثال ۸.۷. در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم چقدر احتمال دارد که:

۱. هر سه مهره آبی باشند؟

۲. هر سه مهره هم‌رنگ باشند؟

۳. دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند؟

مثال ۹.۷. اگر حروف کلمه «جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد که:

۱. حرف «ی» آخر باشد؟

۲. دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

۳. با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

مثال ۱۰.۷. در یک خانواده سه فرزند، احتمال داشتن حداقل ۲ پسر را بیابید.

مثال ۱۱.۷. در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع دو تاس عددی اول باشد را بدست آورید.

ممکن است تا اینجا پرسشی مهم ذهن شما را مشغول کرده باشد. احتمال پیشامدهای مرکب را چگونه محاسبه کنیم. مثلاً $P(A - B)$ و یا $P(A \cup B)$ را چگونه می‌توان بر حسب احتمال $P(A)$ و یا عبارات دیگر بیان کرد. در قسمت بعدی با ارائه‌ی اصول کولموگروف به دنبال یافتن پاسخ پرسش‌های بالا هستیم.

در این بخش اشاره‌ای به اصول سه‌گانه کولموگروف^۱ و نتایج آن خواهیم داشت.

اصول کولموگروف

فرض کنید S یک فضای نمونه باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه. اصول سه‌گانه‌ی کولموگروف عبارتند از:

۱. همواره $0 \leq P(A) \leq 1$.

۲. همواره $P(S) = 1$.

۳. اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نتایج اصول کولموگروف

قضیه ۱. اگر C, B, A سه مجموعه دوبدو مجزا باشند یعنی اشتراک هر جفت از آن‌ها تهی باشد، آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیه ۲. اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ آنگاه:

الف. $P(A) \leq P(B)$.

ب. $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

قضیه ۳. در حالت کلی برای هر دو پیشامد دلخواه داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

یکی دیگر از نتایج مهم اصول سه‌گانه فوق رابطه‌ی بین یک پیشامد و متمم آن است. پیشامد A و متمم A' را در نظر بگیرید. چون $A \cup A' = S$ است پس $P(A \cup A') = 1$ خواهد بود و لذا:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال ۱۲.۷. اگر $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A') = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{5}$ باشد مطلوبست محاسبه: $P(A \cup B)$ و $P(A - B)$.

^۱آندره‌ی کولموگروف متولد ۱۹۰۳ در تامبوف روسیه بود. پدرش دانشجوی رشته‌ی کشاورزی بود و در زمان تولد آندره‌ی تبعید شد. مادرش نیز در بدو تولد وی از دنیا رفت و خاله‌ی وی سرپرستی‌اش را به عهده گرفت و آندره‌ی در خانه پدربزرگش بزرگ شد. پس از اتمام دوره‌ی دبیرستان وی مدتی سوزن‌بان شرکت راه‌آهن شد و در اوقات فراغت رساله‌ای بر مکانیک نیوتنی نوشت. وی در سال ۱۹۲۰ به دانشگاه مسکو رفت و در ۱۹۲۹ دوره‌ی دکترای خود را تحت نظر یکی از بزرگترین ریاضیدانان آن دوره یعنی لوزین به اتمام رسانید. وی تا سال ۱۹۳۰ مجموعاً ۱۸ مقاله بین‌المللی نوشت و باعث شد چهره‌ی سرشناسی در دنیا شود. وی در نظریه احتمالات، توپولوژی، آنالیز ریاضی و ... کار کرده است. کولموگروف جوایز متعددی در زمان حیاتش به واسطه‌ی فعالیت هایش دریافت کرد و سرانجام در سال ۱۹۸۷ در مسکو از دنیا رفت.

مثال ۱۳.۷. احتمال اینکه شخصی در ریاضی قبول شود 55% و در شیمی 60% است. احتمال اینکه لااقل در یکی از این دو درس قبول شود 75% است. احتمال اینکه در هر دو درس قبول شود را بیابید.

مثال ۱۴.۷. عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر 4 بخش‌پذیر باشد اما بر 7 بخش‌پذیر نباشد را بیابید.

مثال ۱۵.۷. در یک خانواده سه فرزند احتمال اینکه 2 فرزند پسر یا 3 فرزند دختر باشند را بیابید.

مثال ۱۶.۷. حروف کلمه‌ی *ATAXIA* را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. به چه احتمالی هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{5}(1) \quad \frac{1}{5}(2) \quad \frac{1}{4}(3) \quad \frac{1}{3}(4)$$

مثال ۱۷.۷. اعداد یک تا شش را روی 6 کارت یکسان نوشته و به تصادف دو کارت از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال جمع این دو کارت زوج است؟

$$\frac{1}{2}(1) \quad \frac{4}{9}(2) \quad \frac{2}{5}(3) \quad \frac{5}{9}(4)$$

مثال ۱۸.۷. از هر 4 گروه آزمایشی به ترتیب 3 و 2 و 1 نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف 4 نفر از بین آنها معرفی شوند با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟

$$\frac{1}{8}(1) \quad \frac{1}{7}(2) \quad \frac{3}{14}(3) \quad \frac{2}{21}(4)$$

مثال ۱۹.۷. پنج مهره‌ی سفید با شماره‌های 1 تا 5 و هم‌چنین پنج مهره‌ی سیاه با شماره‌های 1 تا 5 که همگی یکسان هستند را در ظرفی قرار می‌دهیم و سپس به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره 6 باشد با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{2}{5}(1) \quad \frac{4}{9}(2) \quad \frac{5}{9}(3) \quad \frac{3}{5}(4)$$

تمرین ۱۰.۷. در پرتاب سه سکه پیشامدهای زیر را بدست آورید.

۱. هر سه سکه یکسان بیایند.
۲. دقیقاً دو سکه پشت بیاید.
۳. اقلاً دو سکه پشت بیاید.

تمرین ۲۰.۷. در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بیابید.

۱. مجموع شماره‌های رو شده مضرب 5 باشد.
۲. قدرمطلق تفاضل عددهای رو شده مساوی یک باشد.
۳. یکی از دو عدد رو شده دو برابر دیگری باشد.
۴. یکی از دو شماره‌ی رو شده از دو برابر دیگری بیشتر باشد.

تمرین ۳.۷. در کیسه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. اولاً پیشامد اینکه هر دو مهره سیاه باشند را بیابید. ثانیاً پیشامد اینکه دو مهره خارج شده هم‌رنگ باشند.

تمرین ۴.۷. در کیسه‌ای ۲۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۲۰ نوشته شده است. یک کارت را به تصادف خارج کرده‌ایم. پیشامد اینکه کارت مضرب ۲ یا ۳ باشد را بیابید.

تمرین ۵.۷. از مجموعه $\{۱۰۱, ۱۰۲, \dots, ۶۰۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب کرده‌ایم. به چه احتمالی این عدد مضرب ۵ می‌باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نیست یا مضرب ۵ نیست ولی به ۶ بخش پذیر است؟

تمرین ۶.۷. برای دو پیشامد A, B داریم $P(A \Delta B) = \frac{۶}{۱۰}$ ، $P(A) = ۲P(B) = \frac{۸}{۱۰}$ ، است. مطلوبست محاسبه $P(B' \cap A)$.

تمرین ۷.۷. اگر داشته باشیم $P(A') = \frac{۱}{۳}$ ، $P(A \cup B) = ۲P(B)$ ، $P(A' \cup B') = \frac{۱}{۲}$ باشد، مطلوبست محاسبه $P(B)$.

تمرین ۸.۷. ثابت کنید برای هر دو پیشامد دلخواه: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - ۱$.

تمرین ۹.۷. برای دو پیشامد A, B داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ، $P(B) = ۲P(A) = \frac{۱}{۸}$ ، مطلوبست محاسبه $P(A' \cap B')$.

تمرین ۱۰.۷. از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوبست محاسبه:

۱. احتمال اینکه عدد بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد.

۲. احتمال اینکه عدد بر ۳ بخش پذیر نباشد و بر ۵ هم بخش پذیر نباشد.

تمرین ۱۱.۷. در یک خانواده سه فرزند می‌دانیم فرزند اول دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

$$\frac{۱}{۳}(۱) \quad \frac{۱}{۲}(۲) \quad \frac{۵}{۸}(۳) \quad \frac{۳}{۴}(۴)$$

تمرین ۱۲.۷. در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شود که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنها به تصادف خارج شود با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است؟

$$\frac{۱۰}{۲۱}(۱) \quad \frac{۴}{۷}(۲) \quad \frac{۵}{۷}(۳) \quad \frac{۱۶}{۲۱}(۴)$$

تمرین ۱۳.۷. بر روی هر یک از چندکارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{۲, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ را نوشته و به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دورقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟

$$\frac{۲}{۱۰}(۱) \quad \frac{۲۵}{۱۰۰}(۲) \quad \frac{۳}{۱۰}(۳) \quad \frac{۴}{۱۰}(۴)$$

تمرین ۱۴.۷. سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد روشده مضرب ۳ نیستند؟

$$\frac{2}{3} (۴) \quad \frac{19}{27} (۳) \quad \frac{4}{9} (۲) \quad \frac{8}{27} (۱)$$

تمرین ۱۵.۷. هریک از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ را روی شش گوی یکسان نوشته‌ایم. بطور تصادفی و متوالیا گوی‌ها را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

$$\frac{2}{10} (۴) \quad \frac{15}{100} (۳) \quad \frac{12}{100} (۲) \quad \frac{1}{10} (۱)$$

۲.۷ مقدمه‌ای بر آمار، جامعه و نمونه

در زندگی روزمره انسان‌ها به کرات و بدون آنکه متوجه باشند از جملات آماری استفاده می‌کنند. مثلا در محاوره و درباره‌ی این پرسش که در شبانه‌روز چند ساعت می‌خوابید و پاسخ « بنده در هر شبانه روز و بطور میانگین حدود ۸ ساعت می‌خوابم » و یا این جمله‌ی « اگر مدت زمان مطالعه را دو برابر کنی شانس قبولی در امتحان پایانی شما ۵۰ درصد افزایش می‌یابد » همگی جملاتی هستند که مبین مفاهیم آماری و یا روش آماری هستند. بطور کلی می‌توان علم آمار را مبتنی بر ۴ مرحله زیر در نظر گرفت:

۱. طرح و انجام آزمایش برای دستیابی به اطلاعات عددی و یا هر روشی که منجر به گردآوری داده‌ها شود.
۲. جمع بندی و سازماندهی اطلاعات عددی بدست آمده برای درک و فهم بهتر موضوع.
۳. تحلیل و تفسیر و آنالیز دقیق اطلاعات عددی بدست آمده.
۴. نتیجه‌گیری براساس اطلاعات بدست آمده از قسمت‌های فوق و پیش‌بینی آینده‌ی موضوع مورد بحث.

تعریف ۳.۷. تعریف آمار و علم آمار: آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روشهایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی میشود.

منظور از پیش‌بینی آینده، پیشگویی‌هایی به سبک نوستراداموس نیست. در اینجا براساس یک الگوی بدست آمده از اطلاعات عددی بطور تصادفی و نه لزوماً قطعی می‌توان آینده‌ی موضوعی را بررسی کرد. به عنوان مثال نظرسنجی برای تعیین نتیجه‌ی انتخابات در یک کشور، چنانچه بر اساس موازین علمی و درست انجام شود می‌تواند قبل از روز رای‌گیری نتیجه را مشخص کند و در این مورد نمونه‌های بسیار زیادی در دنیا و در کشور خودمان وجود دارد که نتیجه نظرسنجی و رای‌گیری واقعی تقریباً تا ۹۵ درصد و گاهی ۱۰۰ درصد منطبق بوده‌اند.

مثال ۲۰.۷. مدیر یک کارخانه‌ی تولید لامپ برای بهبود کیفیت کار تصمیم گرفت که روشی آماری در پیش بگیرد و در چند روز متوالی تعداد لامپ‌های معیوب را شمارش کرده و در جدول زیر گردآوری کرده است.

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهنده‌ی چه چیزی است؟

ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ادامه خط تولید لامپ‌ها

برای انجام یک کار آماری نیاز به اطلاعات عددی داریم. این اطلاعات عددی چگونه تهیه می‌شوند؟ برای پاسخ به این پرسش نیاز به چند تعریف و اصطلاح داریم، که در زیر به معرفی و بیان آنها می‌پردازیم. اجازه دهید یک کاربرد پزشکی آمار را معرفی کنیم. شاخص توده بدنی یا BMI برای تعیین سلامت وزنی افراد توسط آدولف کوتله بلژیکی در سال ۱۸۵۰ بصورت زیر معرفی شده است:

$$BMI = \frac{W_{kg}}{(h_m)^2} = \frac{\text{وزن به کیلوگرم}}{\text{مربع قد به متر}}$$

نتیجه بدست آمده طبق جدول زیر معین می‌کند که سلامت وزنی شخص چگونه است.

طبقه‌بندی	شاخص توده بدن
کم وزن	کمتر از ۱۸/۵
وزن طبیعی	۱۸/۵ تا ۲۴/۹
اضافه وزن	۲۵ تا ۲۹/۹
چاقی درجه یک	۳۰ تا ۳۴/۹
چاقی درجه دو	۳۵ تا ۳۹/۹
چاقی درجه سه	بیشتر از ۴۰

شما می‌توانید با این دستور جالب می‌توانید شاخص توده بدنی خود و اعضای خانواده را بدست آورید. همچنین می‌توانید در کلاس درس شاخص توده بدنی بچه‌های کلاس را بدست آورید. اما پیدا کردن شاخص توده بدنی کل مدرسه شدنی اما کمی وقت گیرتر است و نهایتاً یافتن شاخص توده بدنی شیرازی‌ها تقریباً غیرممکن است. (چرا؟) پس اگر هدف بررسی میزان سلامت وزنی افراد ساکن شهر شیراز باشد تکلیف چیست؟ در اینجا می‌توان بجای بررسی اطلاعات تمام شیرازی‌ها فقط اطلاعات تعدادی از شیرازی‌ها را بررسی کرد. بر مبنای ضرب المثل مشت نمونه خروار است می‌توان اطلاعات همان تعداد شیرازی محدود را به جای تمام شیرازی‌ها در نظر گرفت. آن تعداد محدود شیرازی را نمونه و ساکنان شیراز را جامعه گوئیم. توجه داشته باشید که انتخاب نمونه خود آداب مفصلی دارد. هر چه نمونه را با دقت بیشتری انتخاب کنیم اطلاعات بهتر و دقیق‌تری عایدمان می‌شود.

مثال ۲۱.۷. در هریک از موارد نمونه مناسب و جامعه را تعیین کنید.

تعریف ۴.۷. **تعریف جامعه یا جمعیت:** مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره‌ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه مینامند.

تعریف ۵.۷. **تعریف اندازه یا حجم جامعه** تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند. به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه میتوانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف ۶.۷. **تعریف نمونه بخشی از جامعه** را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

تعریف ۷.۷. **تعریف اندازه یا حجم نمونه** تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب میشوند.

نمونه باید اولاً تصادفی انتخاب شود به این معنی که هر عضو جامعه شانس حضور در نمونه را داشته باشد و تعداد اعضای نمونه هم باید به درستی انتخاب شود تا بیانگر ویژگی‌های جامعه باشد. مثلاً در یک کلاس ۳۰ نفری می‌توان یک نمونه ۸ نفری انتخاب کرد ولی نمونه ۸ نفری برای یک مدرسه ۵۰۰ نفری نمونه‌ی خوبی به حساب نمی‌آید.

مثال ۲۲.۷. در هر یک از موارد زیر جامعه و نمونه مناسب را تعیین کنید.

۱. تعیین وزن دانش‌آموزان دبیرستان غزال.
۲. تعیین میزان تحصیلات والدین دانش‌آموزان شهر شیراز.
۳. تعیین میزان انتظار بیماران در ملاقات با یک پزشک خاص.
۴. بررسی میزان موالید در ماه‌های مختلف سال در استان فارس.

۵. تعیین میزان درآمد مشاغل آزاد در اصناف حاضر در شهر شیراز.

۳.۷ متغیر و انواع آن

در مثال تعیین قد دانش‌آموزان صفت قد از یک محصل به محصل دیگر تغییر می‌کند و لذا بی‌مورد نیست که آنرا متغیر بنامیم. اعدادی که نشان دهنده‌ی قد هستند را مقادیر متغیر گوئیم.

تعریف ۸.۷. متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر میکند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

برخی متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند مثل قد و وزن و ... و برخی غیرقابل اندازه‌گیری مثل رنگ ماشین، کیفیت یک میوه، گروه خونی و ... بر این اساس باید متغیرها را طبقه بندی کنیم. جدول زیر انواع متغیرها را نشان می‌دهد.

متغیرها →	{	کیفی	{	دارای هیچ ترتیب طبیعی نیست → اسمی
			}	دارای نوعی ترتیب طبیعی است → ترتیبی
		کمی	{	اگر دو مقدار گرفت بین آنها را نمی‌تواند بگیرد → گسسته
			}	اگر دو مقدار گرفت بین آنها را نیز می‌تواند بگیرد → پیوسته

تعریف ۹.۷. تعریف متغیرهای کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

تعریف ۱۰.۷. تعریف متغیرهای کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

تعریف ۱۱.۷. تعریف متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعریف ۱۲.۷. تعریف متغیر گسسته: متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

مثال ۲۳.۷. نوع متغیرهای زیر را بررسی کنید.

۱. مراحل رشد یک انسان (نوزادی-کودکی-نوجوانی...).
۲. نژاد افراد (زردپوست-سفیدپوست-سیاهپوست).
۳. رنگ موی افراد.
۴. میزان محصول برنج کامفیروز.
۵. طول عمر یک ترانزیستور.
۶. تعداد نامه های یک صندوق پستی.
۷. میزان تحصیلات افراد.

مثال ۲۴.۷. جدول زیر را کامل کنید.

نوع متغیر	متغیر
	۱- میزان بارندگی برحسب سانتی متر در یک شهر
	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
	۴- میزان دمای هوا
	۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)
	۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)
	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

تمرین ۱۶.۷. جدول زیر را کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمره ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×				×
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص توده بدن						

۴.۷ تست‌های فصل هفتم

- ۱- به متغیری که هر نوع عدد اعشاری یا صحیح را می‌توان بدان نسبت داد، چه می‌گویند؟
 (۱) متغیر کیفی (۲) متغیر کمی (۳) متغیر گسسته (۴) متغیر پیوسته
- ۲- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی اسمی است؟
 (۱) دمای بدن (۲) گروه خونی (۳) هوش (۴) مقطع تحصیلی
- ۳- یکی از روش‌های نمونه‌گیری که در آن همه افراد جامعه برای انتخاب شدن شانس یکسانی دارند، نام دارد.
 (۱) نمونه‌گیری مرحله‌ای (۲) نمونه‌گیری تصادفی ساده (۳) نمونه‌گیری خوشه‌ای (۴) نمونه‌گیری گروهی
- ۴- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی است؟
 (۱) حجم (۲) گروه خونی (۳) قد (۴) دما
- ۵- کدام یک از متغیرهای زیر یک متغیر گسسته است؟
 (۱) فواصل بین منازل دانش‌آموزان یک کلاس تا مدرسه (۲) معدل دانش‌آموزان یک کلاس (۳) طول عمر مفید یک یخچال (۴) میزان زاد و ولد در یک شهر بزرگ
- ۶- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند می‌باشند به کدام احتمال این خانواده هم فرزند دختر دارد و هم فرزند پسر؟
 (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{31}{32}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{1}{32}$
- ۷- در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع ۵ آید با احتمال آنکه مجموع، کدام عدد آید، برابر است؟
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰
- ۸- پیشامد A زیر مجموعه پیشامد B است بطوری که $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ مقدار $P(B)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$
- ۹- یک عدد دو رقمی که ارقام آن ۲ و ۱ و ۰ و غیر تکراری باشند انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال این عدد بر ۳ بخش‌پذیر است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۱۰- در پرتاب دو تاس سالم مجموع چه عددی باشد تا مقدار احتمال بیشترین مقدار ممکن شود؟
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰
- ۱۱- دو تاس با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال کدام پیشامد بیشترین است؟
 (۱) جمع دو عدد ظاهر شده ۶ باشد. (۲) جمع دو عدد ظاهر شده ۱۰ باشد.
 (۳) جمع دو عدد ظاهر شده ۷ باشد. (۴) جمع دو عدد ظاهر شده ۴ باشد.
- ۱۲- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. به کدام احتمال این خانواده هم دختر دارد و هم پسر؟
 (۱) $\frac{15}{6}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۳- یک عدد طبیعی دو رقمی زوج انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال مضرب ۵ است؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{20}$

۱۴- تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را (بدون تکرار ارقام) روی کارتهای مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و یک کارت به تصادف از بین آنها انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی روی آن کارت عدد ۲ را مشاهده می‌کنیم؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۱۵- سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم به کدام احتمال جمع اعداد ظاهر شده ۵ می‌باشد؟

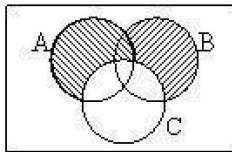
- (۱) $\frac{1}{72}$ (۲) $\frac{1}{108}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{1}{36}$

۱۶- متغیری که فقط اعداد صحیح را بتوان به آن اختصاص داد، چه نام دارد؟

- (۱) گسسته (۲) پیوسته (۳) کمی (۴) کیفی

۱۷- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. به کدام احتمال دو عدد ظاهر شده، دو واحد با هم اختلاف دارند؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$



۱۸- اگر A و B و C سه پیشامد در فضای S باشند، شکل مقابل کدام پیشامد را معلوم می‌کند؟
 (۱) A و B رخ دهند اما C رخ ندهد.
 (۲) A یا B رخ دهند اما C رخ ندهد.
 (۳) C رخ ندهد.
 (۴) A و B رخ دهند.

۱۹- در پرتاب دو تاس با هم به کدام احتمال شماره‌ی ظاهر شده در تاس اول بزرگتر از شماره‌ی ظاهر شده در تاس دوم است؟

- (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۲۰- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی است؟

- (۱) میزان تحصیلات افراد یک شهر (۲) میزان آلودگی هوای یک شهر
 (۳) میزان بارندگی سالانه‌ی یک شهر (۴) میزان درآمد سالانه‌ی افراد یک شهر

۲۱- کدام یک از متغیرهای زیر کمی پیوسته است؟

- (۱) رنگ اتوبوس‌های شرکت واحد در شهر تهران (۲) مقاومت یک ترانزیستور
 (۳) وضعیت تأهل پزشکان یک بیمارستان (۴) سن دانشجویان فارغ‌التحصیل یک دانشکده

۲۲- کدام یک از متغیرهای زیر، یک متغیر گسسته محسوب می‌شود؟

- (۱) تعداد مکالمات تلفنی یک دبیرستان (۲) وزن اوراق امتحانی یک کلاس
 (۳) مدت زمان انتظار یک مسافر در ایستگاه مترو (۴) مقدار گوشت مصرفی ماهانه‌ی یک خانواده

- ۲۳- «گنجایش آب یک تانکر» چه نوع متغیری است؟
 (۱) متغیر کیفی اسمی (۲) متغیر کیفی ترتیبی (۳) متغیر کمی پیوسته (۴) متغیر کمی گسسته
- ۲۴- «گنجایش آب یک تانکر» چه نوع متغیری است؟
 (۱) متغیر کیفی اسمی (۲) متغیر کیفی ترتیبی (۳) متغیر کمی پیوسته (۴) متغیر کمی گسسته
- ۲۵- کدام یک از متغیرهای زیر گسسته است؟
 (۱) هوش دانش آموزان یک کلاس
 (۲) تعداد غیبت‌های دانش آموزان یک کلاس
 (۳) میزان اضطراب دانش آموزان یک کلاس
- ۲۶- کدام یک از متغیرهای زیر، کیفی نیست؟
 (۱) دمای هوا (۲) گروه خونی (۳) مقطع تحصیلی (۴) وضعیت تاهل
- ۲۷- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
 (۱) داده‌های کیفی فقط می‌توانند گسسته باشند.
 (۲) داده‌های کیفی فقط می‌توانند پیوسته باشند.
 (۳) متغیرهای اسمی فقط می‌توانند کیفی باشند.
 (۴) متغیرهای ترتیبی فقط می‌توانند کمی باشند.
- ۲۸- اگر شرکت‌کنندگان در آزمون سراسری، افراد یک جامعه‌ی آماری در نظر گرفته شوند، کدام یک از صفات این جامعه، یک متغیر پیوسته به شمار می‌رود؟
 (۱) تعداد تستهای آزمون
 (۲) تعداد شرکت‌کنندگان
 (۳) شماره کارت شرکت‌کنندگان
 (۴) طول قد شرکت‌کنندگان
- ۲۹- «درجه حرارت» جزء کدام دسته از داده‌های زیر است؟
 (۱) اسمی (۲) ترتیبی (۳) پیوسته (۴) گسسته
- ۳۰- کلاسی ۳۰ نفر دانش‌آموز دارد که ۲۰ نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال و ۱۵ نفر آن‌ها عضو تیم والیبال هستند و ۳ نفر از دانش‌آموزان هم در هیچ تیمی بازی نمی‌کنند. اگر ۲ نفر از دانش‌آموزان این کلاس انتخاب کنیم، احتمال اینکه این دو نفر در هر دو تیم باشند، چقدر است؟
 (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{2}{87}$ (۳) $\frac{28}{435}$ (۴) $\frac{1}{6}$
- ۳۱- سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم پیشامد حداقل دوبار «پشت» آمدن را A و پیشامد آمدن فقط دوبار «رو» را B بنامیم. کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده است، در صورتی که بدانیم هر سه بار سکه «رو» آمده است؟
 (۱) $B - A$ (۲) $B' - A$ (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cap B$
- ۳۲- از کیسه‌هایی که شامل ۴ مهره با شماره‌های ۱ تا ۴ است، دو مهره پی در پی و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مجموع شماره‌های بیرون آمده بزرگ‌تر از ۴ باشد، کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۳- از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{2}{7} \text{ (۱)} \quad \frac{4}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{7} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{14} \text{ (۴)}$$

۳۴- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

$$\frac{2}{9} \text{ (۱)} \quad \frac{5}{18} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{12} \text{ (۴)}$$

۳۵- در خانواده‌ای با ۳ فرزند چقدر احتمال دارد حداقل یک فرزند دختر باشد؟

$$\frac{1}{8} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

۳۶- در یک فضای نمونه‌ای ۷ عضوی، پیشامدهای A و B دارای ۴ و ۵ عضو و $A \cap B$ دارای سه عضو است. مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$\frac{7}{9} \text{ (۱)} \quad \frac{6}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{7} \text{ (۴)}$$

۳۷- نوع آلاینده‌گی هوا چگونه متغیری است؟

$$\text{(۱) کمی گسسته} \quad \text{(۲) کمی پیوسته} \quad \text{(۳) کیفی اسمی} \quad \text{(۴) کیفی ترتیبی}$$

۳۸- میزان تحصیلات افراد یک شهر چه نوع متغیری می‌باشد؟

$$\text{(۱) کیفی اسمی} \quad \text{(۲) کیفی ترتیبی} \quad \text{(۳) کمی پیوسته} \quad \text{(۴) کمی گسسته}$$

۳۹- دو تاس را با هم می‌اندازیم. چه قدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده عددی فرد باشد؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

۴۰- در پرتاب سه تاس با هم، چه قدر احتمال دارد که حداقل در دو تاس عدد بزرگ‌تر از ۴ ظاهر شود؟

$$\frac{7}{27} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{10}{27} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

۴۱- در یک خانواده پنج فرزندی با کدام احتمال خانواده دارای سه دختر متوالی می‌باشد؟

$$\frac{1}{16} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{64} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{32} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{32} \text{ (۴)}$$

۴۲- در پرتاب دو تاس احتمال این‌که تاس اول عدد زوج و مجموع اعداد رو شده حداقل ۷ باشد چه قدر است؟

$$\frac{5}{12} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

۴۳- از بین دانش‌آموزان سال اول و دوم و سوم دبیرستان به ترتیب ۴ و ۶ و ۵ نفر برای شرکت در آزمون المپیاد ریاضی داوطلب می‌باشند. اگر سه نفر به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شوند با کدام احتمال از هر مقطع یک نفر انتخاب شده است؟

$$\frac{24}{91} (1) \quad \frac{30}{91} (2) \quad \frac{20}{91} (3) \quad \frac{3}{13} (4)$$

۴۴- در قفسی ۴ کبوتر سفید و ۵ کبوتر سیاه نگهداری می‌شوند. اگر با باز شدن ناگهانی درب قفس ۴ کبوتر به ترتیب خارج شوند با کدام احتمال کبوتر اولی سفید و چهارمی سیاه است؟

$$\frac{5}{18} (1) \quad \frac{4}{9} (2) \quad \frac{5}{8} (3) \quad \frac{4}{5} (4)$$

۴۵- از مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 10\}$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد دوم ۷ باشد چه قدر است؟

$$\frac{1}{9} (1) \quad \frac{90}{91} (2) \quad \frac{9}{10} (3) \quad \frac{1}{10} (4)$$

۴۶- دانش‌آموزی به ۴ سؤال چهار گزینه‌ای به صورت شانسی پاسخ می‌دهد. احتمال این که به تمام سؤالات پاسخ درست داده باشد چه قدر است؟

$$\frac{1}{4} (1) \quad \frac{1}{56} (2) \quad \frac{1}{256} (3) \quad \frac{1}{64} (4)$$

۴۷- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است که حداکثر ۲ تا از آن‌ها پسر هستند. احتمال این که هر سه فرزند دختر باشند چه قدر است؟

$$\frac{1}{8} (1) \quad \frac{1}{7} (2) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{2}{7} (4)$$

۴۸- نوع کدام متغیر تصادفی با بقیه متفاوت است؟

- (۱) وضع سواد (باسواد، بی‌سواد)
 (۲) گروه خونی
 (۳) مراحل زندگی یک انسان
 (۴) وضعیت تأهل کارمندان یک مؤسسه

۴۹- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{6} (1) \quad \frac{7}{36} (2) \quad \frac{1}{36} (3) \quad \frac{9}{36} (4)$$

۵۰- شش نفر که دو نفر آن‌ها برادر یک دیگرند، در یک ردیف می‌ایستند. چه قدر احتمال دارد دو برادر، اول و آخر صف واقع باشند؟

$$\frac{1}{15} (1) \quad \frac{1}{30} (2) \quad \frac{1}{3} (3) \quad \frac{2}{15} (4)$$

۵۱- در پرتاب ۳ تاس، چه قدر احتمال دارد در هر سه تاس یک عدد رو شود؟

$$\frac{1}{216} (1) \quad \frac{1}{72} (2) \quad \frac{1}{36} (3) \quad \frac{1}{108} (4)$$

- ۵۲- کدام متغیرها به ترتیب کمی پیوسته و کیفی اسمی هستند؟
 (۱) میزان آلودگی هوا - نوع آلاینده‌ی هوا
 (۲) میزان آلودگی هوا - مراحل رشد
 (۳) مراحل تحصیل - گروه خون افراد
 (۴) نوع آلاینده‌ی هوا - رنگ چشم
- ۵۳- به مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که درباره‌ی اعضای آن می‌خواهیم موضوع خاصی را مورد بررسی قرار دهیم، چه می‌گویند؟
 (۱) مدل آماری
 (۲) نمونه‌ی آماری
 (۳) جامعه‌ی آماری
 (۴) مجموعه‌ی آماری
- ۵۴- متغیرهای کیفی به چه انواعی تقسیم می‌شوند؟
 (۱) فاصله‌ای و ترتیبی
 (۲) اسمی و ترتیبی
 (۳) اسمی و نسبی
 (۴) اسمی و فاصله‌ای
- ۵۵- متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نبوده و به صورت غیر عددی نشان داده می‌شوند، چه نام دارند؟
 (۱) کمی
 (۲) کیفی
 (۳) پیوسته
 (۴) گسسته
- ۵۶- مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟
 (۱) کمی گسسته
 (۲) کمی پیوسته
 (۳) کیفی اسمی
 (۴) کیفی ترتیبی
- ۵۷- احتمال این که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{8}$
 (۲) $\frac{4}{33}$
 (۳) $\frac{5}{33}$
 (۴) $\frac{5}{33}$
- ۵۸- گروه خونی افراد، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟
 (۱) کمی پیوسته
 (۲) کیفی اسمی
 (۳) کیفی ترتیبی
 (۴) کمی گسسته
- ۵۹- حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟
 (۱) $\frac{1}{6}$
 (۲) $\frac{1}{5}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{3}$
- ۶۰- گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟
 (۱) کیفی - اسمی
 (۲) کیفی - ترتیبی
 (۳) کمی - پیوسته
 (۴) کمی - گسسته
- ۶۱- اگر اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه باشد، کدام بررسی انجام شده است؟
 (۱) دسته‌بندی
 (۲) سرشماری
 (۳) استفاده از متغیر تصادفی
 (۴) متغیر کیفی
- ۶۲- در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟
 (۱) $\frac{28}{45}$
 (۲) $\frac{29}{45}$
 (۳) $\frac{31}{45}$
 (۴) $\frac{32}{45}$
- ۶۳- با ارقام متمایز ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت. به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟
 (۱) ۶۴۰
 (۲) ۷۲۰
 (۳) ۷۸۰
 (۴) ۹۶۰

۵.۷ کلید تست های فصل هفتم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۶
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

کتابنامه

- [۱] ریحانی ابراهیم و دیگران، ریاضی ۱ دوره متوسطه‌ی دوم، انتشارات آموزش و پرورش تهران ۱۳۹۵
- [۲] شهریاری پرویز، جبر از آغاز تا پایان، انتشارات امیرکبیر، تهران ۱۳۶۳
- [۳] سوالات آزمون های سراسری ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴، انتشارات سازمان سنجش و آموزش کشور، تهران ۱۳۹۴
- [۴] شهریاری پرویز، مسئله‌های دشوار ریاضی، انتشارات انزلی ۱۳۶۷
- [۵] نصیری محمود، ریاضی ۲، انتشارات مبتکران ۱۳۹۴
- [۶] علی‌پور علی‌رضا، آنالیز ترکیبی، انتشارات نشر الگو تهران ۱۳۸۸
- [۷] ایوز هاوارد، تاریخ ریاضیات ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۹۰
- [8] Micheal Corral, Trigonometry, Schoolcraft College, 2009
- [9] Titu Andreescu, Mathematical Olympiad Challenges, 2000
- [10] Titu Andreescu, 102 Combinatorial Problems, 2003
- [11] Razvan Gelca and Titu Andreescu, Putnam and Beyond, 2007