



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک - علوم تجربی

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

تهیه و تنظیم: پریسا استواری

دانشجو دکتری ریاضی کاربردی

دبیر ناحیه ۲ استان کرمانشاه

فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

درس دوم: دامنه و برد توابع

درس سوم: انواع توابع

بارم نوبت دوم: ۴ نمره

بارم شهریور: ۳/۵ نمره

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

به محیط پیرامون خود توجه کنید. بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما به هم مربوط هستند. به مثال‌های زیر دقت کنید.

الف) نمره‌هایی که به یک دانش آموز در دروس مختلف در کارنامه تعلق می‌گیرد.

ب) غذاهایی که مورد علاقه‌ی افراد است.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

در قسمت (الف) آیا ممکن است که به هر درس دانش آموز دو نمره یا بیشتر تعلق بگیرد؟

در قسمت (ب) آیا ممکن است که شخصی بیشتر از یک غذای مورد علاقه داشته باشد؟

بیا یاد کمی به صورت ریاضی به این دو مثال توجه کنیم.

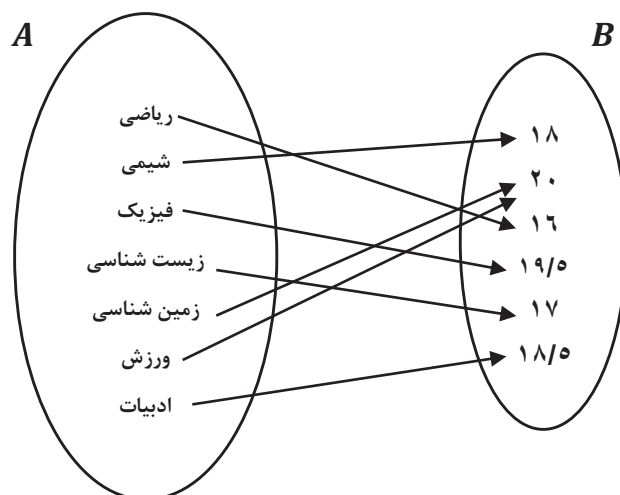
در مثال (الف) مجموعه‌ی

$$A = \{ \text{ادبیات، ورزش، زمین شناسی، زیست شناسی، فیزیک، شیمی، ریاضی} \}$$

و مجموعه‌ی

$$B = \{ ۱۸، ۲۰، ۱۶، ۱۹/۵، ۱۷، ۱۸/۵ \}$$

را تعریف می‌کنیم. اطلاعات مسأله را در یک نمودار پیکانی به صورت زیر رسم می‌کنیم.



هر درس دقیقاً یک نمره دارد. بنابراین از هر عضو مجموعه‌ی A ، دقیقاً یک فلش به یکی از عضوهای مجموعه‌ی B وارد می‌شود. به عبارت دیگر، به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از اعضای B نسبت داده می‌شود.

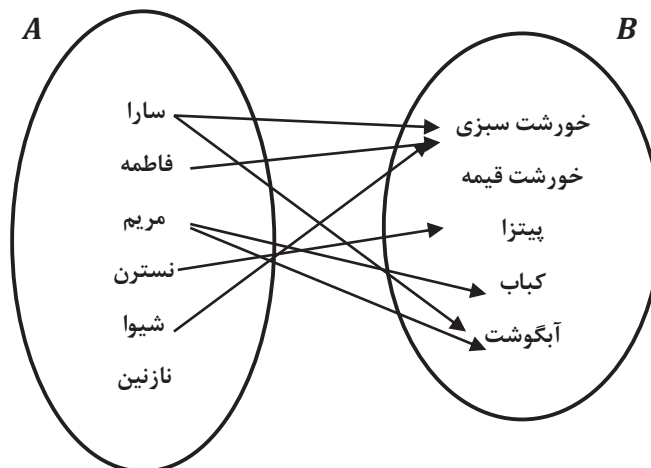
در مثال (ب) مجموعه‌ی

$$A = \{ \text{نازنین، شیوا، نسترن، مریم، فاطمه، سارا} \}$$

و مجموعه‌ی

$$B = \{ \text{آبگوشت، کباب، پیتزا، خورشت قیمه، خورشت سبزی} \}$$

را تعریف می‌کنیم. اطلاعات مسأله را در یک نمودار پیکانی به صورت زیر رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌کنیم که از بعضی عضوهای مجموعه‌ی A دو فلش یا بیشتر خارج شده و از یکی از عضوهای آن نیز فلشی خارج نشده است. این رابطه یک تابع نیست.

تابع:

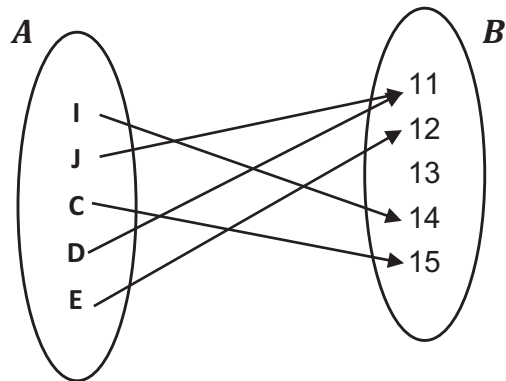
یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، رابطه‌ای بین دو مجموعه‌ی A و B است که به هر عضو از مجموعه‌ی A ، دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی B را نسبت می‌دهد.

نمایش‌های مختلف تابع:

- ❖ نمودار پیکانی
- ❖ زوج مرتب
- ❖ جدول
- ❖ نمودار مختصاتی
- ❖ ضابطه

مثال:

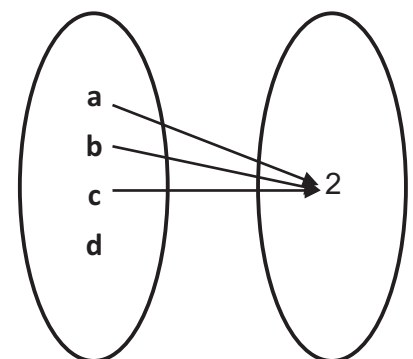
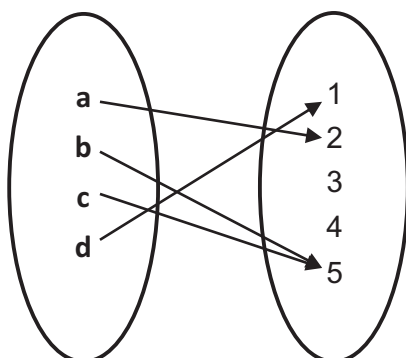
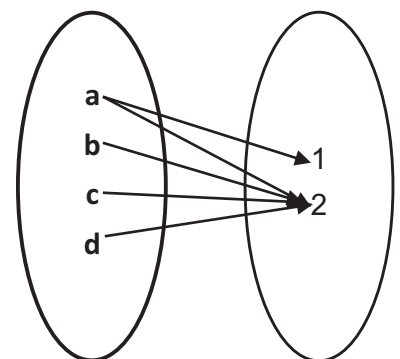
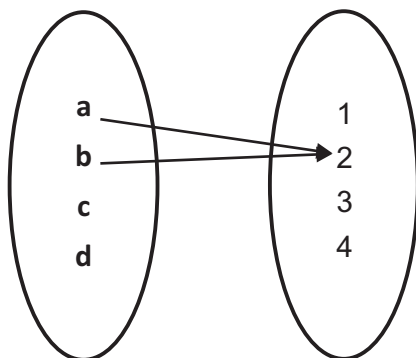
نمودار پیکانی و جدولی زیر بین دو مجموعه‌ی A و B ، یک تابع را نمایش می‌دهد. چون از هر عضو A ، دقیقاً یک فلش خارج شده است.



A	I	J	C	D	E
B	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵

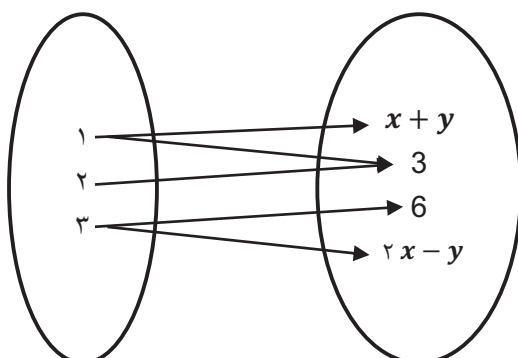
تمرین:

کدامیک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدامیک تابع نیست؟



تمرین

نمودار داده شده، نمایش یک تابع است. مقدار x را به دست آورید.



زوج مرتب

دو عدد ۳ و ۵ را به دو طریق می توان کنار هم نوشت و دو زوج $(۵, ۳)$ و $(۳, ۵)$ را درست کرد. این دو زوج با هم برابر نیستند و دو نقطه‌ی متفاوت در نمودار را نشان می دهند.

توجه می کنیم که ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. بنابراین به هر یک از زوج های بالا یک «زوج مرتب» می گوییم. در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفه اول» و عضو دوم را «مؤلفه دوم» می نامیم.

به طور مثال در زوج مرتب $(۵, ۳)$ ، مؤلفه اول ۳ و مؤلفه دوم ۵ است.

مثال

اگر $(a^2 \cdot 0) = (b \cdot b^2 - b)$. آن گاه a چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

پاسخ

با توجه به تساوی دو زوج مرتب می توان نوشت:

$$\begin{cases} b^2 - b = 0 \\ a^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(b-1) = 0 \\ a^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 & . & b = 1 \\ a = 0 & . & a = \pm 1 \end{cases}$$

بنابراین a می تواند ۳ مقدار مختلف داشته باشد.

تمرین:

اگر دو زوج مرتب $(3.2a + 3b)$ و $(a + 2b.4)$ مساوی باشند، مقدار ab را به دست آورید.

تمرین:

اگر دو زوج مرتب $(x.y + 1)$ و $(x^2.x - 1)$ نمایش یک نقطه باشند، مقدار $x + y$ را به دست آورید.

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب

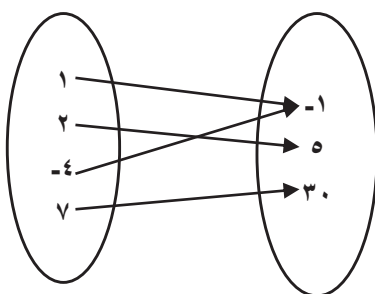
هر رابطه بین مجموعه‌ی A و B را می‌توانیم با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهیم. به این ترتیب، اگر به عضو a از A ، عضو b از B را نسبت داده باشیم، زوج مرتب (a, b) در این مجموعه قرار دارد.

نکته:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه اول برابر نباشند و اگر مؤلفه اول دو زوج برابر بود، حتماً مؤلفه دوم آنها نیز برابر باشد.

مثال:

نمایش زوج مرتبی تابع مقابل را بنویسید.



پاسخ:

$$f = \{(1, -1), (2, 5), (-4, -1), (7, 30)\}$$

توجه

در نمایش تابع را معمولاً با حروف f ، g ، h و نشان می‌دهند.

مثال:

کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

الف) $f = \{(1, 5), (2, 9), (2, 5), (3, 10)\}$

ب) $g = \{(1, 2), (1, \sqrt[3]{8}), (2, \sqrt{2}), (4, \sqrt[3]{8})\}$

پاسخ:

الف) تابع نیست. زیرا دو زوج مرتب $(2, 5)$ و $(2, 9)$ در آن دارای مؤلفه اول برابر و مؤلفه دوم مخالف هستند.

ب) تابع است. توجه داریم که دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, \sqrt[3]{8})$ با هم برابر هستند.

تمرین:

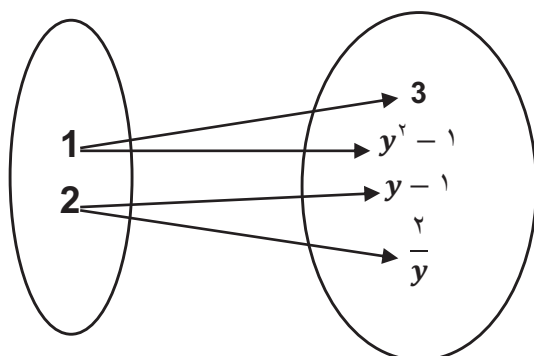
رابطه‌ی $\{(1, a+b), (2, 5), (1, -5), (2, 2a-3b), (5, a)\}$ تابع است. مقدار $b-a$ را به دست آورید.

تمرین:

اگر $\{(3, -1), (2, 3), (3, x^2-2), (1, 6), (x, 4)\}$ تابع باشد، مقدار x را به دست آورید.

تمرین:

اگر نمودار پیکانی مقابل تابع باشد، مقدار y را مشخص کنید.



تمرین:

حداقل چند تا از زوج‌های مرتب رابطه‌ی زیر را حذف کنیم تا g تابع شود؟

$$g = \{(3, -1), (6, 0), (3, 3), (3, 2), (-2, 9), (6, 9), (0, 0)\}$$

تمرین:

به ازای کدام مقدار a ، رابطه‌ی $f = \{(1, 2), (a, 3), (1, 2a)\}$ یک تابع است؟

نمایش تابع به صورت نمودار مختصاتی

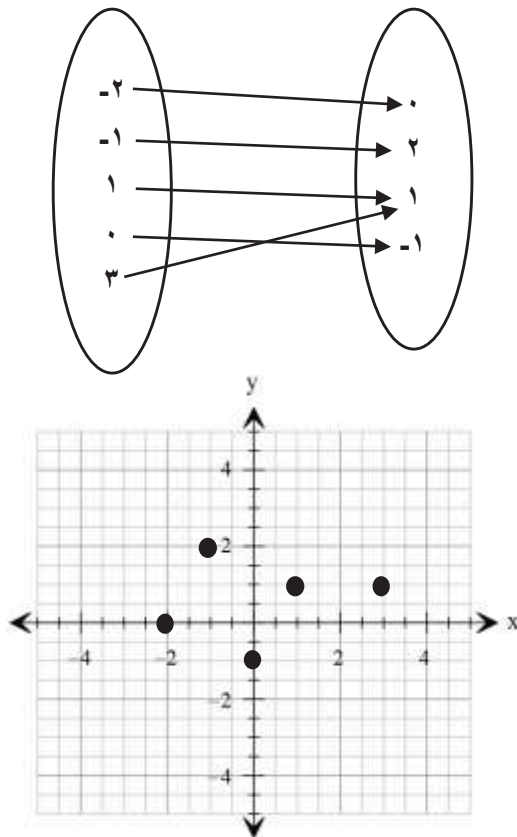
هر زوج مرتب، یک نقطه روی دستگاه محورهای مختصات را مشخص می‌کند. اگر زوج مرتب‌های تابع را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، نموداری به دست می‌آید که به آن نمودار مختصاتی تابع می‌گویند.

نکته:

یک رابطه وقتی تابع است که در نمودار مختصاتی آن، هر خطی موازی محور Y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال:

نمودار مختصاتی تابع زیر را رسم کنید.

پاسخ:

$$f = \{(-2, 0), (-1, 2), (1, 1), (0, -1), (3, 1)\}$$

تمرین:

مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده اند.

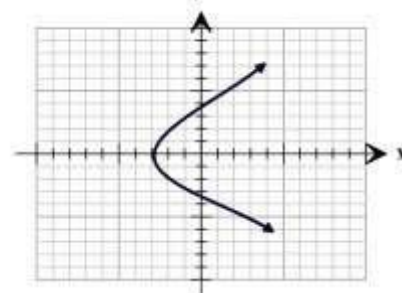
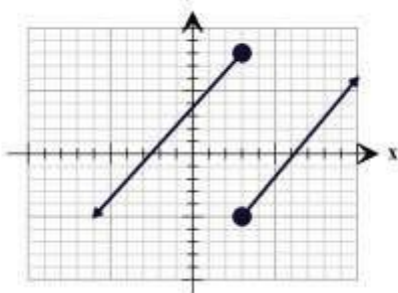
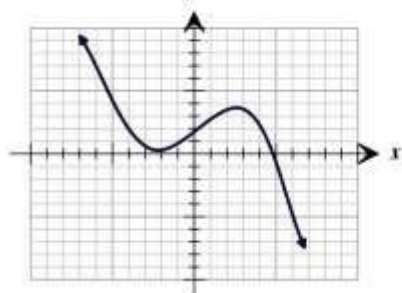
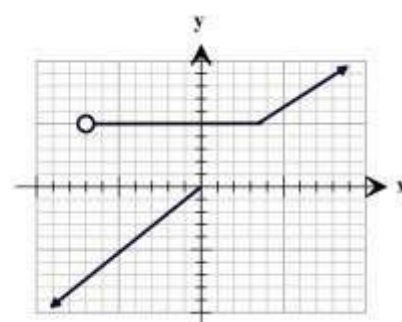
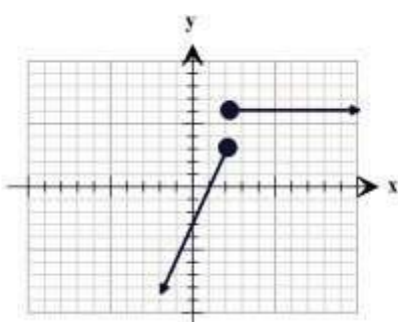
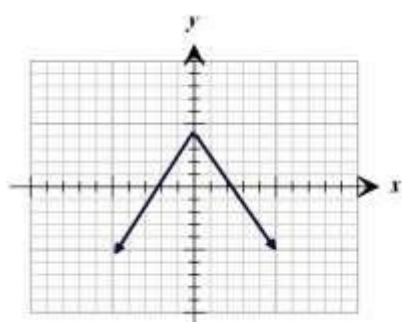
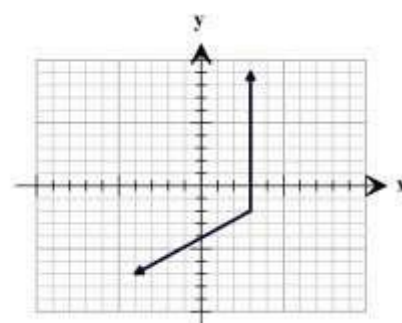
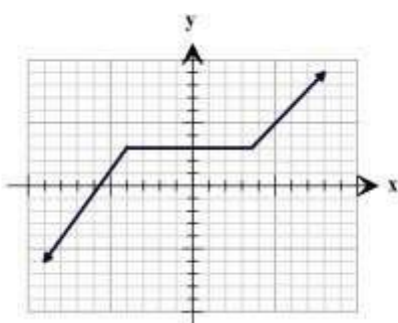
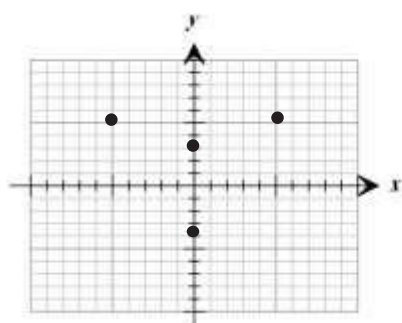
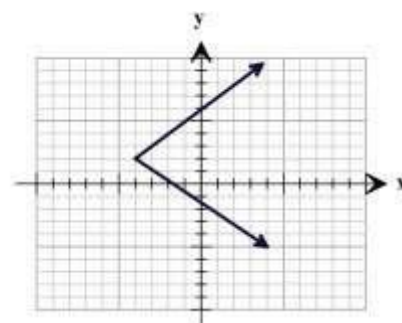
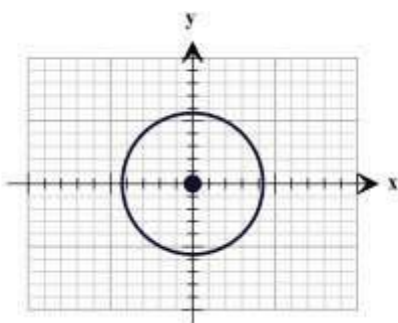
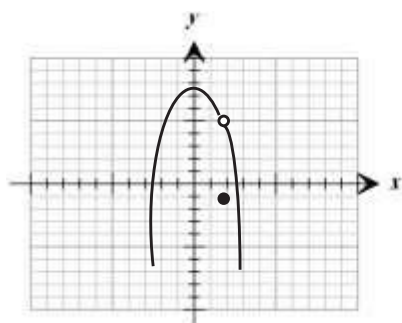
الف) به کمک نمودار پیکانی رابطه‌ای از A به B ارائه دهید که تابع باشند.

ب) به کمک نمودار پیکانی رابطه‌ای ارائه دهید که تابع نباشند.

ج) دو رابطه‌ی به دست آمده در الف و ب را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

تمرین

کدام یک از نمودارهای زیر تابع است؟

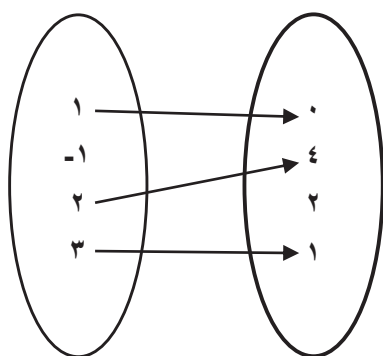


تمرین:

کدام تابع است؟

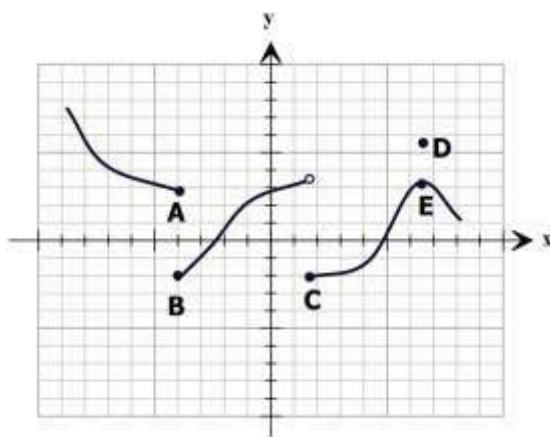
عدد	۱	۲	۲	۳	۳
مقسوم علیه طبیعی	۱	۱	۲	۱	۳

عدد	۱	-۱	۸	۲۷
ریشه‌ی سوم آن	۱	-۱	۲	۳



تمرین:

با حذف کدام نقاط، نمودار روبه‌رو مربوط به یک تابع خواهد بود؟

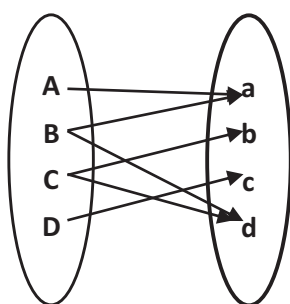


تمرین:

- کدام یک از روابط زیر یک تابع را می‌کند؟ توضیح دهید.
- الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.
- ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.
- ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.
- د) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌ی دوم آن را نسبت می‌دهد.
- و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌ی سوم آن را نسبت می‌دهد.

تست:

چند پیکان از نمودار زیر حذف کنیم تا رابطه تبدیل به تابع شود؟



- ۱) دقیقا دو پیکان
- ۲) حداقل دو پیکان
- ۳) حداکثر دو پیکان
- ۴) رابطه به هیچ وجه تابع نمی‌باشد.

تست:

به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $\{(m, 2), (m-1, m+1), (m^2, m+1)\}$ تابع نیست؟

۴) صفر

۳) ۲

۲) -۱

۱) ۱

درس دوم: دامنه و برد توابع

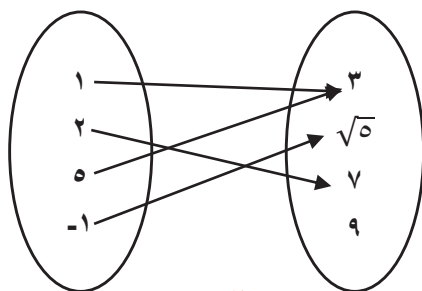
مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع را دامنه‌ی تابع و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع را برد تابع می‌نامیم.

✓ نکته:

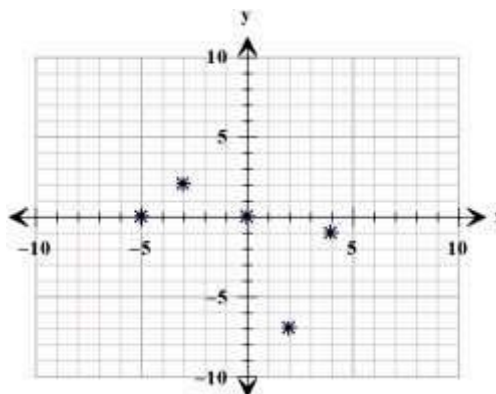
- اگر تابع با **نمودار پیکانی** از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B نمایش داده شده باشد، دامنه‌ی تابع، همان مجموعه‌ی A و برد تابع، عضوهایی از مجموعه B است که به آنها فلش وارد شده است.
- اگر تابع به صورت **نمودار مختصاتی** داده شده باشد، مجموعه‌ی شامل طول نقطه‌ها، دامنه‌ی تابع و مجموعه‌ی شامل عرض نقطه‌ها، برد تابع است.
- در نمایش **جدولی** تابع، دامنه مجموعه‌ی سطر اول جدول و برد مجموعه‌ی سطر دوم جدول است.
- اگر تابع را با f نمایش دهیم، دامنه‌ی آن را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهند.

✍ مثال:

دامنه و برد هر تابع را بنویسید.



الف



ج

A	۲	-۱	۱
B	۷	۳	۴

ب

$$\left\{ \left(\frac{3}{5}, 2 \right), (1, \sqrt{5}), (-2, 9) \right\}$$

د

پاسخ:

(الف)

$$\text{دامنه} = \{-۱.۲.۳.۵\}$$

$$\text{برد} = \{۳.\sqrt{۵}.۷\}$$

(ب)

$$\text{دامنه} = \{-۱.۱.۲\}$$

$$\text{برد} = \{۳.۴.۷\}$$

(ج)

$$\text{دامنه} = \{-۵. -۳.۰.۲.۴\}$$

$$\text{برد} = \{-۷. -۵.۰.۲\}$$

(د)

$$\text{دامنه} = \left\{-۲.\frac{۳}{۵}. ۱\right\}$$

$$\text{برد} = \{۲.\sqrt{۵}.۹\}$$

تمرین:

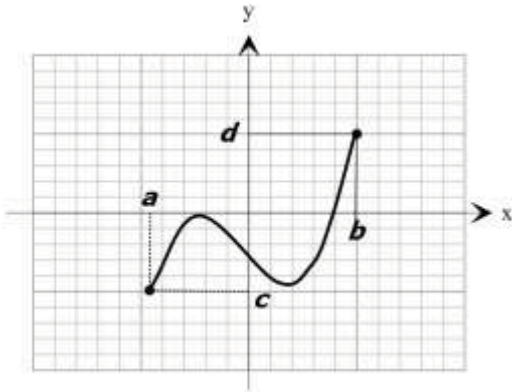
اگر $\{(۱.۲). (۲.۴). (a. ۵). (۱. a^2 - a)\}$ یک تابع باشد، مجموع اعضای دامنه‌ی آن کدام است؟

تمرین:

اگر عدد ۳ در دامنه‌ی تابع $f = \{(۴.m - ۱). (m + ۱.۲ m). (۵.۳ m)\}$ باشد، مجموعه‌ی برد تابع را مشخص کنید.

تمرین

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[۳.۸]$ و برد تابع بازه‌ی $[-۴.۵]$ باشد، مقدار $b + c$ را به‌دست آورید.



مقدار تابع

اگر زوج مرتب (a, b) در نمایش زوج مرتبی تابع f آمده باشد، می‌نویسیم $f(a) = b$ و می‌گوییم مقدار تابع f در نقطه‌ی a برابر b است. مثلاً اگر $(-۲, ۱) \in f$ باشد، $f(-۲) = ۱$ یا اگر $f(۳) = ۵$ آنگاه $(۳, ۵) \in f$.

مثال

در تابع $f = \{(۱, m + ۱), (۲, m - ۵n), (۳, ۳n), (۵, m - ۲)\}$ اگر $f(۱) = ۳$ و $f(۲) = ۶$ ، مقدار $f(۳) - f(۵)$ را به‌دست آورید.

پاسخ داریم

$$۳ f(۱) = ۶$$

در نتیجه

$$f(۱) = ۲ \quad \rightarrow \quad m + ۱ = ۲ \quad \rightarrow \quad m = ۱$$

و

$$f(۲) = ۶ \quad \rightarrow \quad m - ۵n = ۶ \quad \rightarrow \quad ۵n = ۱ - ۶ = -۵ \quad \rightarrow \quad n = -۱$$

بنابراین

$$f(۳) = ۳n = -۳$$

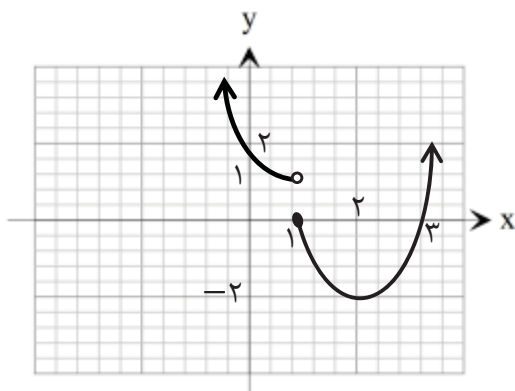
$$f(۵) = m - ۲ = -۱$$

و در نتیجه

$$f(۳) - f(۵) = -۲$$

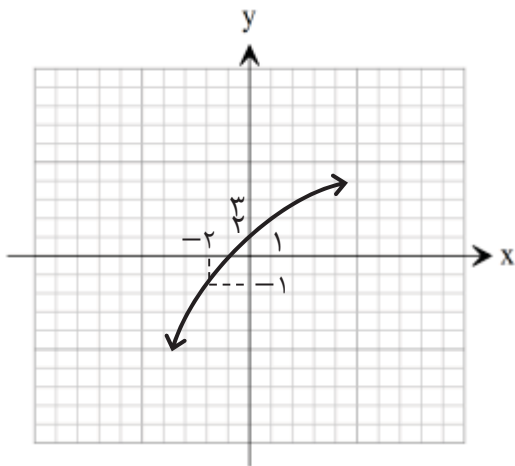
تمرین ۷

نمودار تابع g در شکل زیر رسم شده است. مقدار $g(2) + g(1) + g(0)$ را به دست آورید.



تمرین ۸

نمودار تابع h در شکل زیر رسم شده است. اگر $h(h(a)) = 2$ ، مقدار a کدام است؟



ضابطه تابع

هرگاه هر عضو دامنه f را با x و عضو نظیر آن در برد f را با y نشان دهیم، هر رابطه‌ای که به کمک آن y از روی x معلوم شود ضابطه تابع گفته می‌شود که آن را با $y = f(x)$ نشان می‌دهیم. هر تابع با معلوم بودن دامنه و ضابطه آن کاملاً مشخص می‌شود.

مثال ✎

در تابع $f = \{(x, y) \mid x \leq 4, x \in \mathbb{N}, y = 2x - 1\}$ دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

پاسخ ✎

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\} \quad \rightarrow \quad D_f = \{1, 2, 3, 4\} \quad . \quad R_f = \{1, 3, 5, 7\}$$

تمرین:

اگر ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = 4x - 3$ باشد، معادله‌ی $f(a^2) = 2f(-a)$ چند جواب دارد؟

تمرین:

اگر $2x + 5 = f(3x + 1)$ ، مقدار $f(4)$ را به دست آورید.

تمرین:

اگر $f(n) = 2n + 1$ ، $g(x) = x^2 - 1$ و $h(t) = t^2 - 3t + 1$ باشد، حاصل $f(1)$ ، $g(4)$ و $h(-2)$ را به دست آورید.

تمرین:

طول مستطیلی، دو واحد از عرض مستطیل بزرگتر است. محیط مستطیل را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بنویسید.

تابع خطی

هر تابعی را که ضابطه‌ی آن به شکل $f(x) = ax + b$ است، تابع خطی می‌نامند. a شیب خط و b عرض از مبدأ خط است. برای رسم نمودار تابع‌های خطی، کافی است دو نقطه از آن را به دست آوریم. پس به جای x ، دو عدد مختلف قرار می‌دهیم و y آن‌ها را به دست می‌آوریم. اگر خط یا تابع خطی از نقطه‌ی (a, b) عبور کند، می‌توانیم a را به جای x و b را به جای y یا $y = f(x)$ در معادله‌ی خط جای‌گذاری می‌کنیم.

مثال: 

یک تابع خطی به صورت $f(x) = 2x + b$ از نقطه‌ی $(-1, 2)$ عبور می‌کند. b را به دست آورده و نمودار تابع را رسم کنید.

پاسخ: 

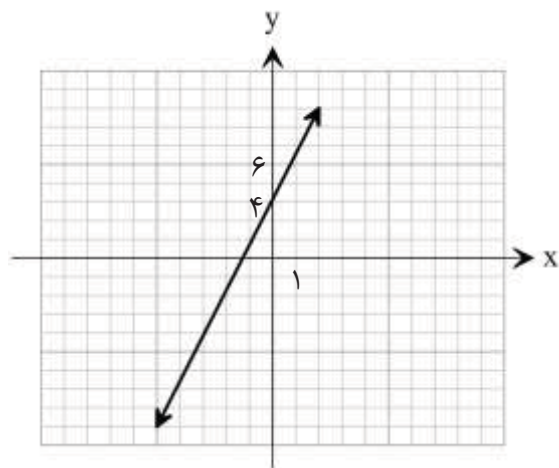
نقطه‌ی $(-1, 2)$ روی تابع قرار دارد، یعنی

$$f(-1) = 2 \quad \rightarrow \quad -2 + b = 2 \quad \rightarrow \quad b = 4 \quad \rightarrow \quad f(x) = 2x + 4$$

برای رسم تابع کفایت دو نقطه از آن را مشخص کنیم. بنابراین به x دو مقدار دلخواه می‌دهیم و y نظیر آن را با توجه به ضابطه تابع محاسبه می‌کنیم.

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = f(0) = 4 \quad \rightarrow \quad A = (0, 4)$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad y = f(1) = 6 \quad \rightarrow \quad B = (1, 6)$$



تمرین: 

در تابع خطی h داریم: $h(2) = 1$ و $h(-1) = -5$. نمایش جبری تابع را بنویسید.

تمرین:

اگر f تابع خطی باشد و $f(2) = 3$ و $f(3) = 5$ مقدار $f(6)$ را به دست آورید.

تمرین:

اگر $f = \{(1, m+1), (2, m), (-1, 2m+2), (n, 2n-1)\}$ تابع خطی باشد، مقدار n را محاسبه کنید.

تمرین:

اگر f تابعی خطی و به ازای هر مقدار x تساوی $f(x) + f(2x) + f(3x) = 24x - 12$ برقرار باشد، حاصل $f(\frac{x}{4})$ کدام است؟

تمرین:

فرض کنید $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{x}{4} - 1$ دو تابع خطی باشند، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $f(0) + g(4)$

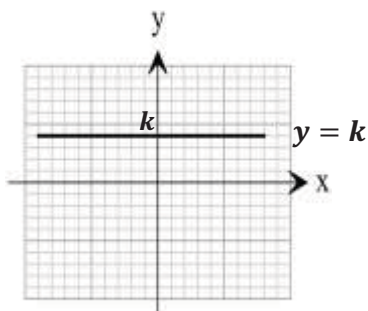
ب) $2f(2) - 3g(8)$

ج) $f(g(-4))$

درس سوم: انواع توابع

تابع ثابت

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم و ضابطه‌ی آن به صورت $f(x) = k$ است که در آن k عددی حقیقی و ثابت است. اگر دامنه‌ی تابع ثابت مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، نمودار آن خطی موازی محور X ها است.



مثال: ✎

اگر $f = \{(1, a^2 + 4), (-2, 5a), (3, b + 1)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار ab حداقل چه قدر است؟

پاسخ: ✎

در تابع ثابت تمام مؤلفه‌های دوم با هم برابرند بنابراین

$$a^2 + 4 = 5a = b + 1$$

از دو معادله‌ی اول، به معادله‌ی $a^2 + 4 - 5a = 0$ می‌رسیم که جواب‌های آن ۱ و ۴ هستند. داریم

$$a = 1 \rightarrow b + 1 = 5 \rightarrow b = 4$$

$$a = 4 \rightarrow b + 1 = 20 \rightarrow b = 19$$

پس حداقل مقدار ab برابر $4 \times 19 = 76$ و حداکثر مقدار آن برابر $1 \times 4 = 4$ است.

تمرین: ?

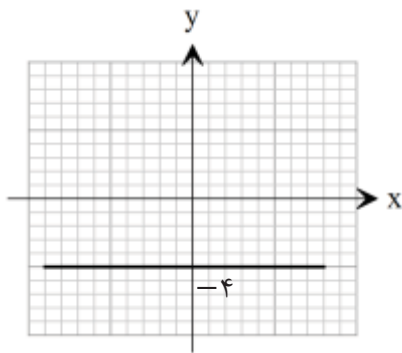
اگر $A = \{2, 4, 5\}$ و $B = \{-1, 3\}$ ، چند تابع ثابت از A به B داریم؟

تمرین

اگر $f = \{(1, a - b), (2, 3a), (3, ab)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار b را محاسبه کنید؟

تمرین

نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = (a + b^2)x + 2x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



تمرین

اگر تابع h با ضابطه $h(x) = (a + 2)x^2 + (b - a)x + a + b$ و دامنه $\mathcal{R}$ تابعی ثابت باشد مقدار $h(\frac{3}{5})$ را به دست آورید.

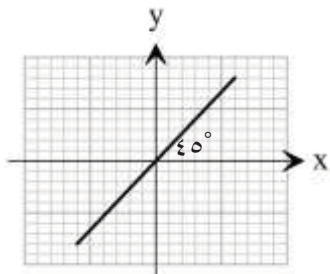
تمرین

اگر تابع $f(x) = (x - 1)^2 - x(x + b)$ ثابت باشد، مقدار آن در $x = b$ کدام است؟

تابع همانی

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه‌ی تابع به همان عضو در برد تابع نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.

اگر دامنه‌ی تابع همانی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، نمودار آن خط $y = x$ است که با معادله‌ی $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.



مثال ✏

اگر f تابعی همانی با دامنه‌ی $\mathcal{R}$ باشد و $f(5 - 3b) = 4b - 9$ ، مقدار b را به دست آورید.

✍ پاسخ: چون تابعی همانی است داریم

$$5 - 3b = 4b - 9 \quad \rightarrow \quad 4b + 3b = 5 + 9 \quad \rightarrow \quad 7b = 14 \quad \rightarrow \quad b = 2$$

تمرین ❖

اگر f تابعی همانی با دامنه‌ی $\mathcal{R}$ باشد و $f(2) = 14 - 2k$ ، مقدار $f(14 - 3k)$ را به دست آورید.

تمرین ❖

اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 3x + (a + b)x + a - 2$ تابعی همانی با دامنه‌ی $\mathcal{R}$ باشد، مقدار $a + f(b)$ را به دست آورید.

تابع چندجمله‌ای

تابعی است که نمایش جبری آن چندجمله‌ای یک متغیره است و دامنه‌اش مجموعه‌ای اعداد حقیقی می‌باشد. اگر ضابطه‌ی تابع f یک چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد، می‌گوییم تابع f یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی n است.

مثال:

درباره‌ی تابع چندجمله‌ای f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ می‌دانیم $f(1) = 2$ و $f(-1) = -4$. مقدار ab را به دست آورید.

پاسخ:

مقادیر $x = 1$ و $x = -1$ را در ضابطه‌ی تابع قرار می‌دهیم:

$$f(1) = 1 + a + b \quad \rightarrow \quad 2 = 1 + a + b \quad \rightarrow \quad a + b = 1$$

$$f(-1) = -1 + a - b \quad \rightarrow \quad -4 = -1 + a - b \quad \rightarrow \quad a - b = -3$$

و با حل دستگاه داریم: $a = -1$ و $b = 2$. بنابراین $ab = -2$.

تمرین:

در تابع چندجمله‌ای f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ اگر $f(-2) = 10$ مقدار $f(2)$ را به دست آورید.

تمرین:

ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم، به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را به دست آورید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کرده و از نقطه‌ی $(-2, 3)$ نیز عبور کند.

تمرین

اگر در تابع $y = x^3 + ax^2 + bx$ زوج‌های مرتب $(2, 3)$ و $(-1, 5)$ را داشته باشیم، مقدار تابع در $x = 1$ کدام است؟

تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای)

تابعی است که بتوان آن را روی زیرمجموعه‌های مختلف دامنه‌اش با ضابطه‌های مختلف نشان داد.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & x \in A_n \end{cases}$$

که در آن $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ برابر دامنه‌ی تابع f است.

مثال

اگر $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x > 2 \\ 2x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$ ، مقدار $f(f(2))$ را به دست آورید.

پاسخ

چون $2 \leq 2$ بنابراین $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$ و چون $5 > 2$ پس $f(f(2)) = f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13$.

تمرین

اگر $f(x) = \begin{cases} kx + 4 & x > 4 \\ \frac{2}{5}x & x \leq 4 \end{cases}$ و $f(2) - f(4) = \frac{2}{5}$ ، مقدار k کدام است؟

تمرین:

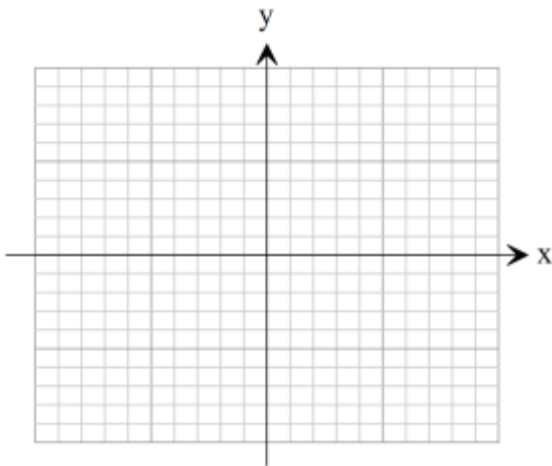
اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Z} \\ -3x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مقدار $f(5)$ چند برابر $f(\frac{1}{3})$ است؟

تمرین:

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & x > -1 \\ x + m & x \leq -1 \end{cases}$ تابع باشد، مقدار m کدام است؟

تمرین:

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \\ 4 - x & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید.



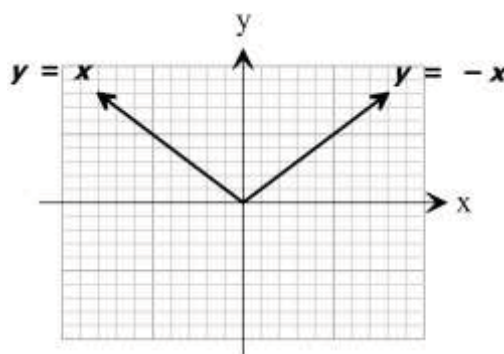
تمرین:

اگر $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \text{ زوج باشد} \\ x + 1 & x \text{ فرد باشد} \end{cases}$ مقدار $A = f(1) + f(2) + \dots + f(20)$ کدام است؟

تابع قدرمطلق

تابعی است که هر عضو از دامنه‌اش را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. نمایش جبری تابع قدرمطلق، $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ است.

اگر دامنه‌ی تابع قدرمطلق مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، ضابطه‌ی آن به صورت تابعی دو ضابطه‌ای و نمودار آن به صورت زیر است.



$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

برخی خواص قدرمطلق

$$|x| = |-x| \quad . \quad |x^2| = |x|^2 \quad . \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad . \quad |xy| = |x||y| \quad . \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

❑ نکته:

به کمک تعریف قدرمطلق می‌توانیم توابعی را که در آنها قدرمطلق وجود دارد به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم. بدین منظور عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و با توجه به علامت عبارت، قدرمطلق را از ضابطه تابع حذف می‌کنیم.

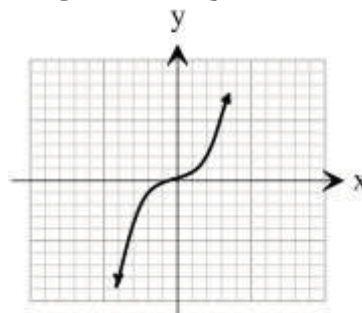
✍ مثال:

نمودار تابع $y = x|x|$ را رسم کنید.

✍ پاسخ:

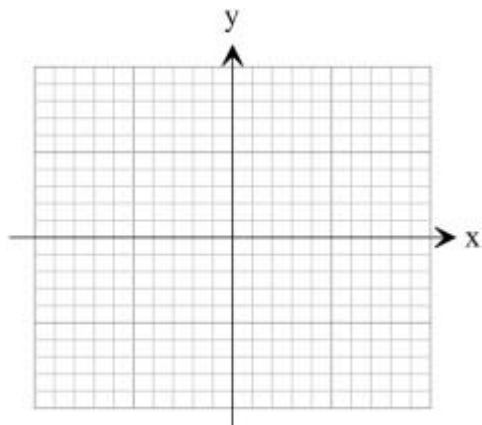
ابتدا ضابطه تابع را به کمک تعریف قدرمطلق، به صورت تابعی دو ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



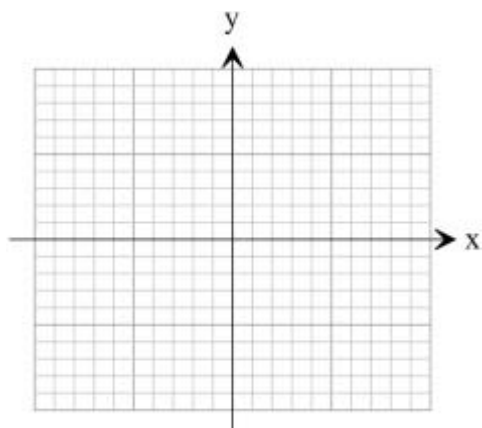
تمرین

نمودار تابع $y = 2x - |x|$ را رسم کنید.



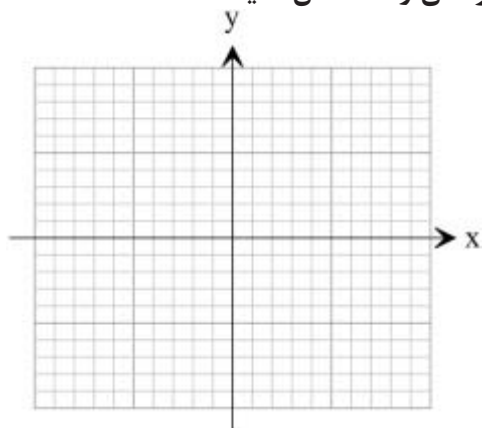
تمرین

مساحت ناحیه‌ی محصور به محورهای مختصات و نمودار تابع $f(x) = x - |x| + 4$ چقدر است؟



تمرین

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 3 - x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.



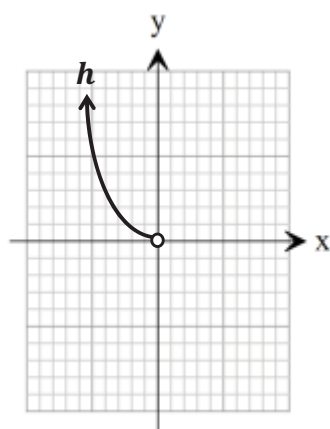
تمرین ۷

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \geq 1 \\ 3x + 2a & x \leq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار a را به دست آورید.

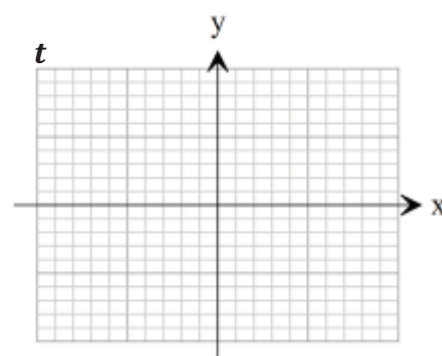
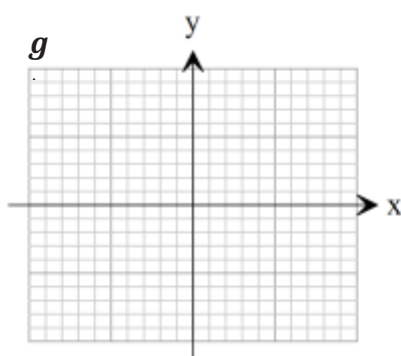
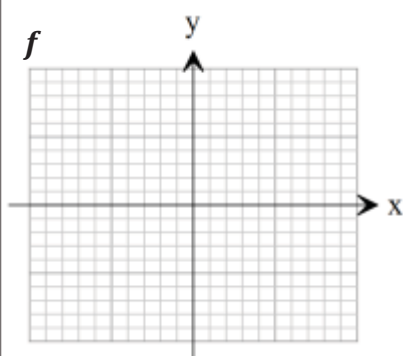
تمرین ۷

نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.

دامنه و برد را نیز روی شکل نشان دهید.



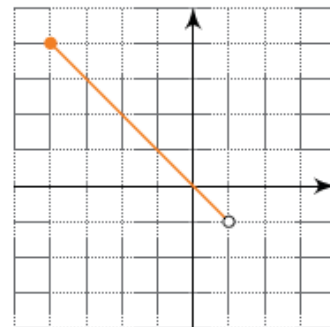
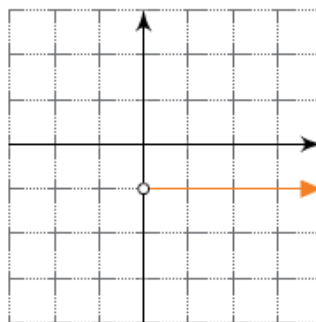
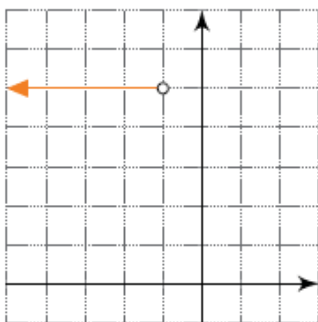
تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد				



تمرین

توابع f ، g ، h و نیز قسمتی از نمودارهای آن‌ها داده شده‌اند. نمودارها را کامل کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر یک را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

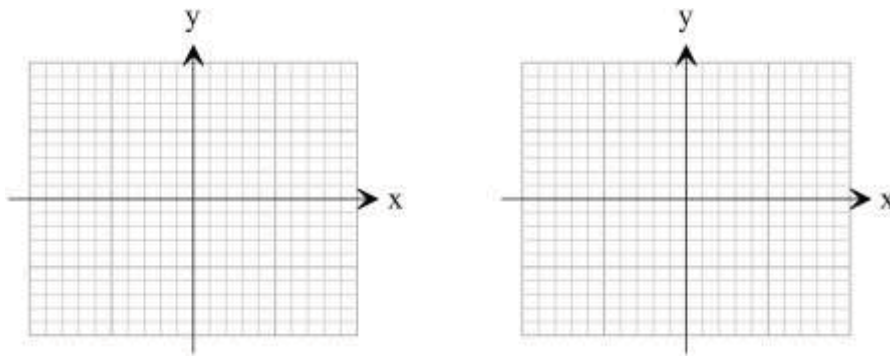


مقادیر $g(0)$ ، $h(\sqrt{5})$ ، $f(-\frac{1}{5})$ ، $g(-2)$ ، $f(3)$ را بیابید.

تمرین

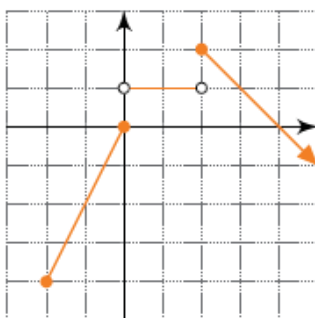
نمودار تابع‌های زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. مقادیر $f(5)$ ، $g(0)$ ، $f(0)$ ، $g(-\frac{1}{5})$ ، $f(-2)$ ، $g(2)$ را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x+1 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$



تمرین:

نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه‌ی آن را به دست آورید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.



رسم نمودار به کمک انتقال

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم، می‌توانیم نمودار تابع‌های $y = f(x) \pm k$ و $y = f(x \pm k)$ را رسم کنیم. نمودار این تابع‌ها، با انتقال دادن نمودار به دست می‌آید.

❖ انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k > 0$.

برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ کافی است نمودار تابع f را k واحد به بالا منتقل کنیم.

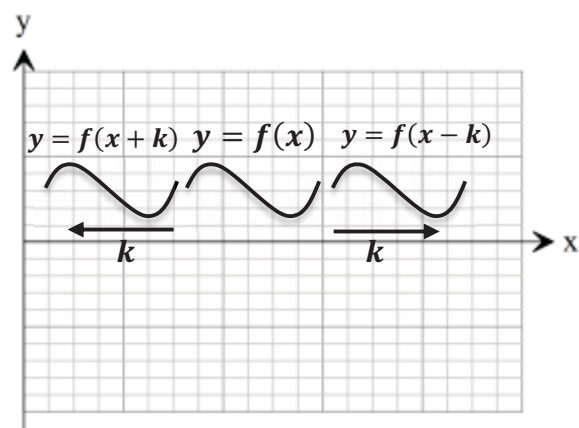
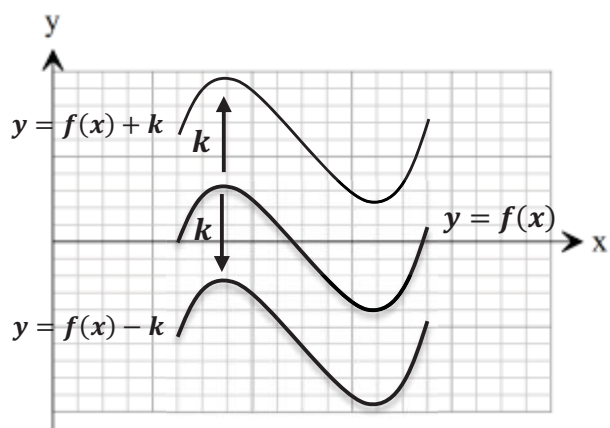
برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ کافی است نمودار تابع f را k واحد به پایین منتقل کنیم.

❖ انتقال افقی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k > 0$.

برای رسم نمودار تابع $y = f(x + k)$ و $y = f(x - k)$ کافی است نمودار تابع f را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

برای رسم نمودار تابع $y = f(x - k)$ و $y = f(x + k)$ کافی است نمودار تابع f را k واحد به سمت راست منتقل کنیم.

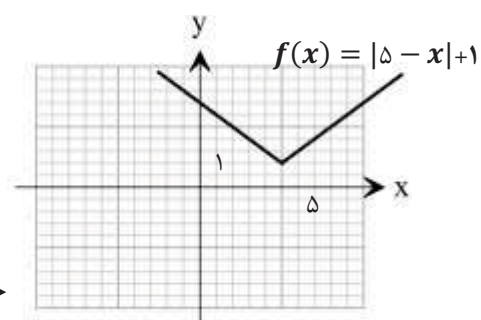
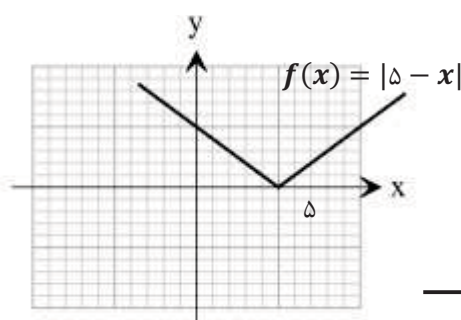
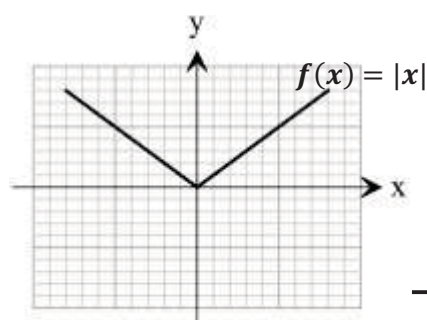


مثال:

نمودار تابع $f(x) = |5 - x| + 1$ را رسم کنید.

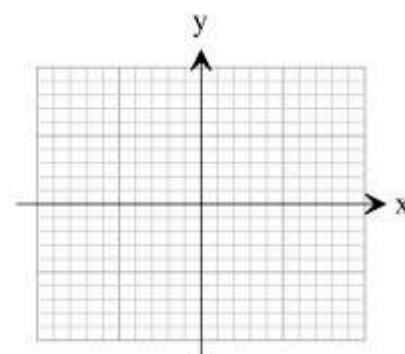
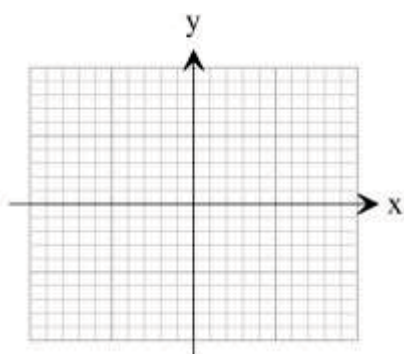
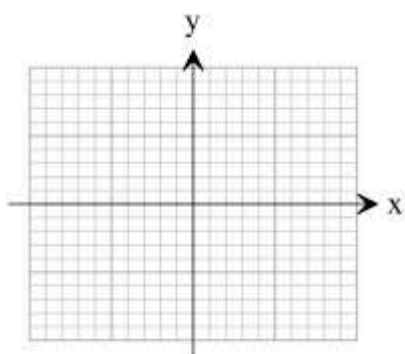
پاسخ:

ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم می‌کنیم.



تمرین:

نمودار تابع $f(x) = |x - 3| - 2$ را رسم کنید.

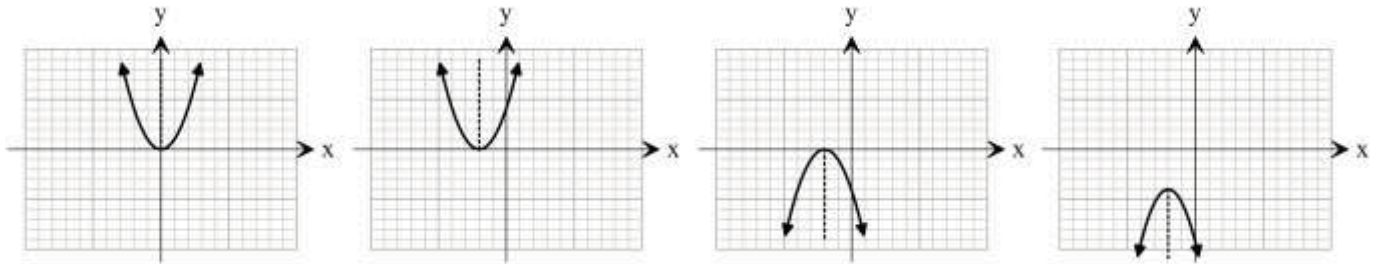


مثال ✏

نمودار تابع $f(x) = -(x+2)^2 - 4$ را رسم کنید.

پاسخ: ✏

ابتدا نمودار $f(x) = x^2$ را رسم می‌کنیم



تمرین: ✎

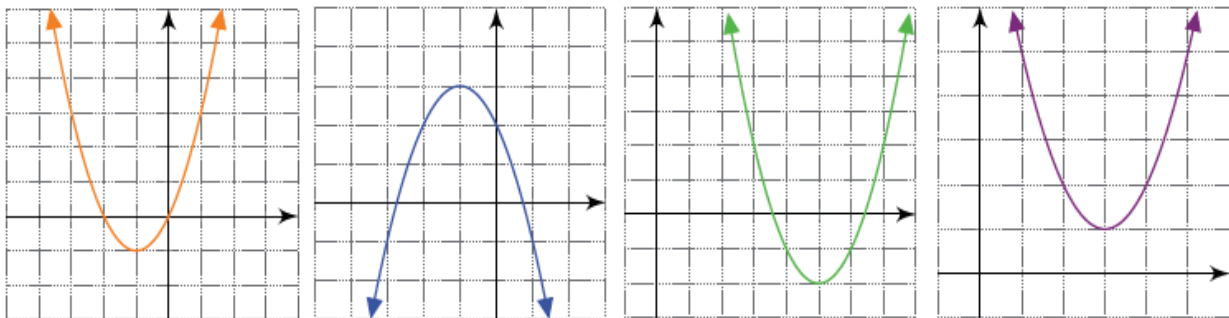
در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه‌ی دوم f ، g ، h و t رسم شده‌اند. هریک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهد؟ دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید.

$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

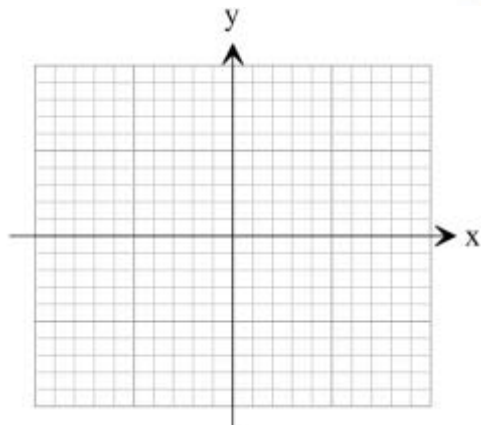
$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

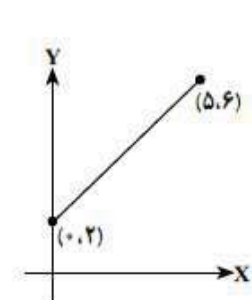


تمرینات کتاب درسی

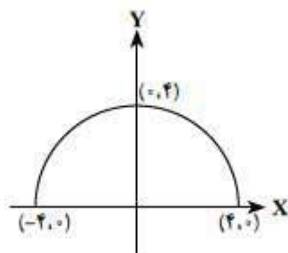
۱ تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{3}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟



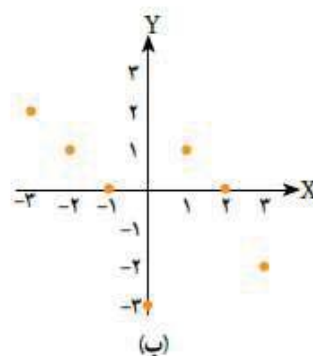
۲ در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



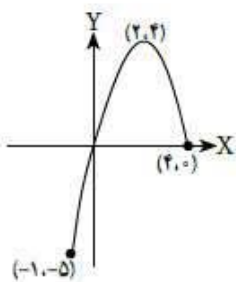
(الف)



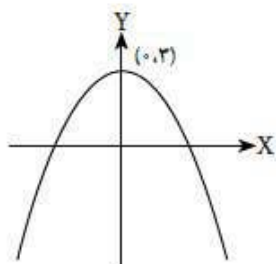
(ب)



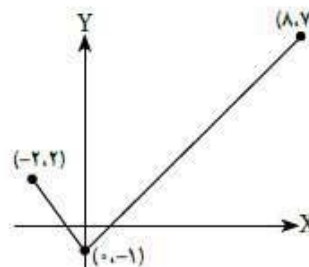
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است.

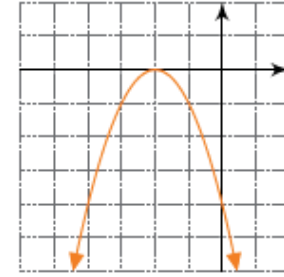
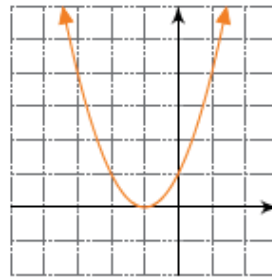
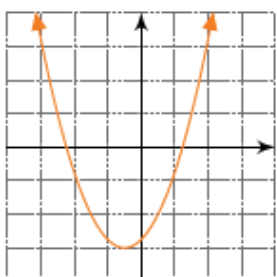
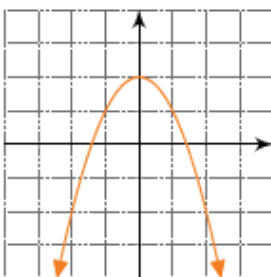
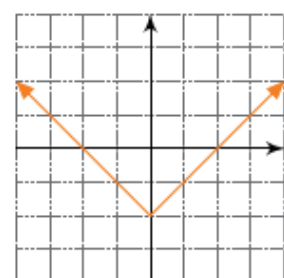
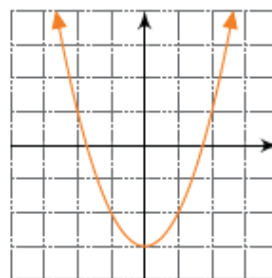
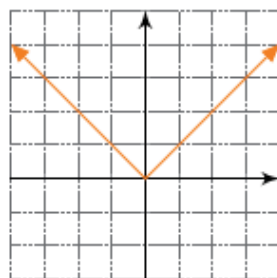
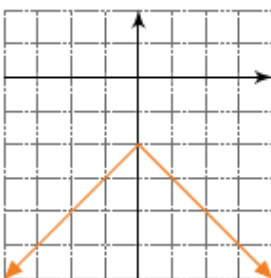
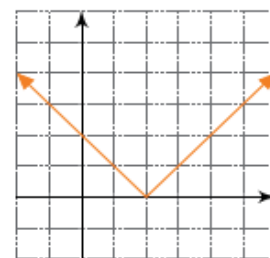
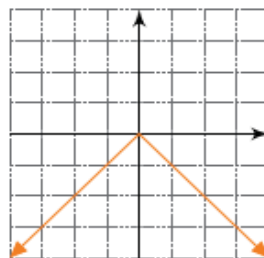
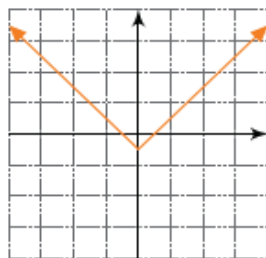
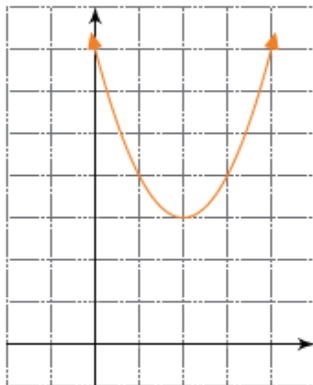
(ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است.

(پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

(ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$.

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ب) $y = -x^2 + 2$

پ) $y = |x|$

ت) $y = -|x|$

ث) $y = (x+1)^2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$

چ) $y = |x-2|$

ح) $y = -(x+2)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

د) $y = (x-2)^2 + 3$

ذ) $y = |x| - 2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

۶ فرض کنیم دامنه هر یک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-2, 3]$ محدود شده باشد. در این صورت

برد هر تابع را پیدا کنید.

از نمودارها کمک بگیرید.

۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$f(\sqrt{5})$

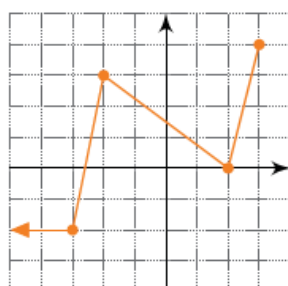
$f(6)$

$f(3)$

$f(\frac{1}{2})$

$f(0)$

$f(-\frac{5}{2})$

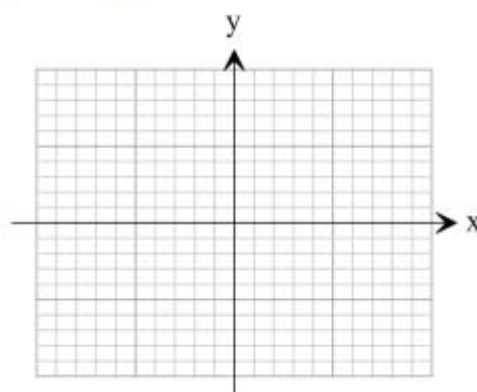
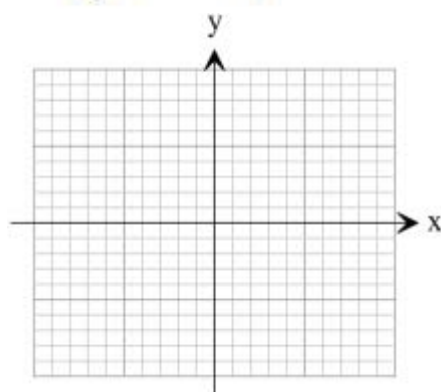


۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 3)$ می‌گذرد. $f(-4)$ و $f(-1)$ را به دست آورید.

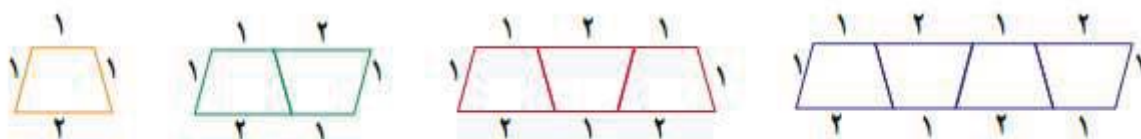
۹ کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$



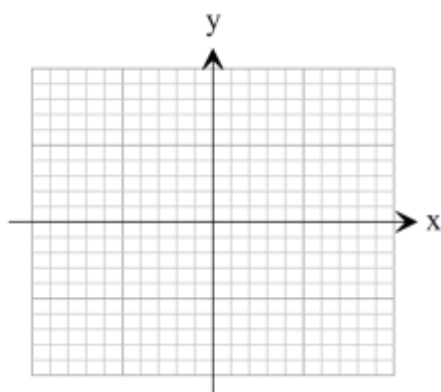
۱۰ الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.



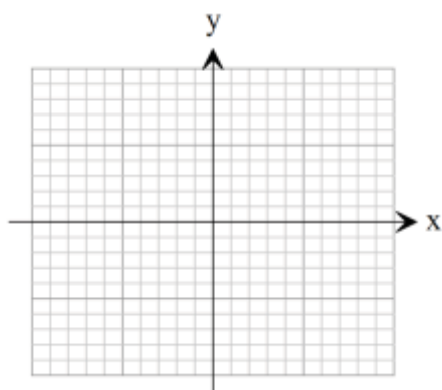
الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد ذوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

ب) چرا رابطه بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

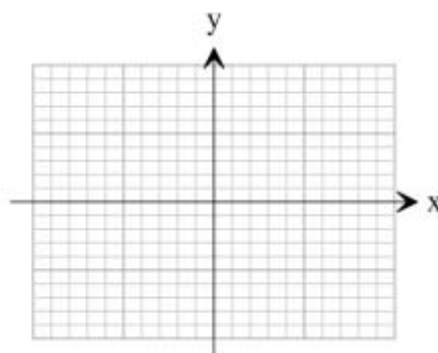
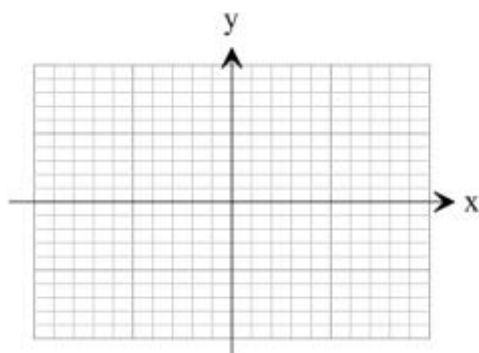


- ۱۱ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

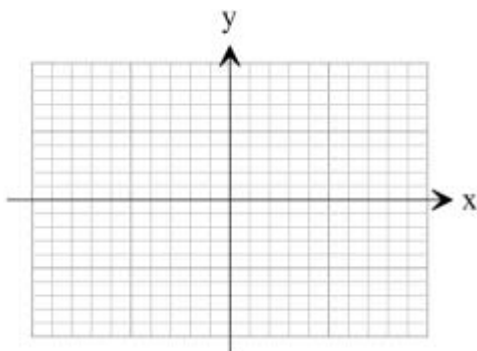


- ۱۲ آیا خط $x = 2$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چگونه؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

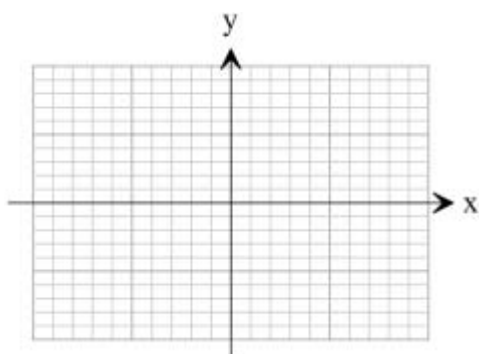
- ۱۳ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.
 ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.
 پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.



۱۴ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.



۱۵ اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم: $g(0) = 2$, $g(1) = 5$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(4) = 3$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

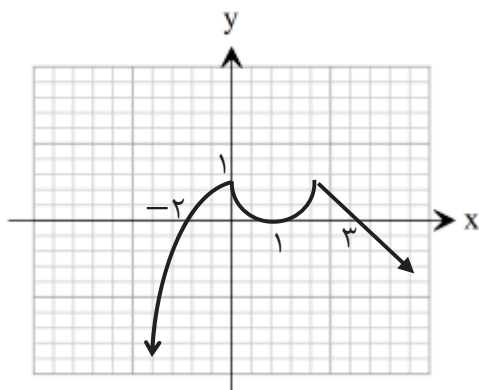


۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

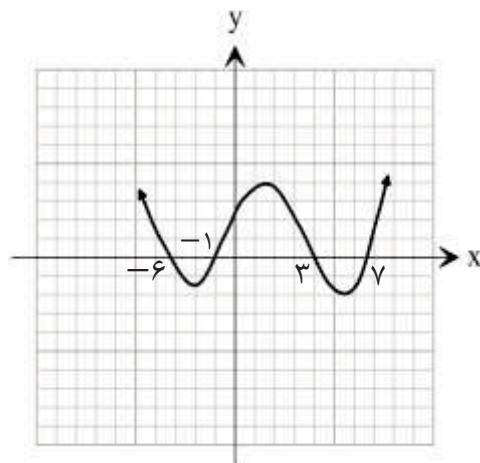
۱۷ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

تمرینات تکمیلی فصل ۵

۱- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تساوی $f(2a-1) + f(0) = 1$ درست باشد، حاصل ضرب مقدارهای ممکن a کدام است؟

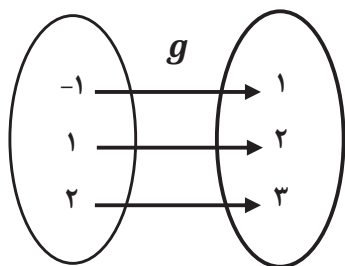


۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مجموع عددهای صحیحی مانند a که $f(a) < 0$ ، چه قدر است؟



۳- توابع f و g را در نظر بگیرید. حاصل $\frac{f(1)-g(-1)}{g(2)+f(0)}$ را به دست آورید.

$$f = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 4), (3, 5)\}$$



۴- در تابع $f = \{(-۱.۲). (۰.۱). (۱.۴). (۳.۵)\}$ اگر بنویسیم $f(۱) = a$ و $f(b) = ۲$ ، مقدار $f(a + b)$ کدام است؟

۵- اگر تابع با نمایش جبری $g(x) = x + \frac{1}{x}$ داده شود و دامنه‌ی آن $A = \{\frac{2}{3}, -۲, -۱.۱\}$ باشد، برد آن کدام است؟

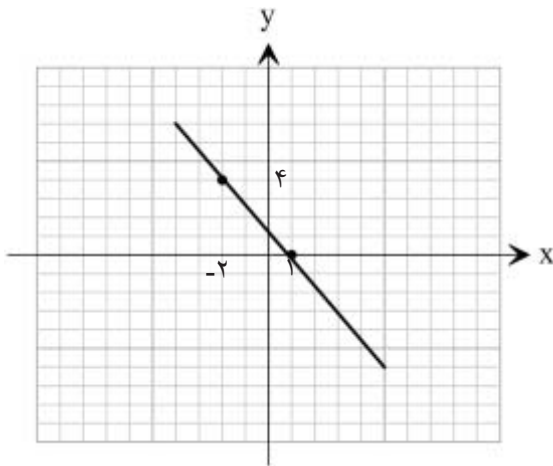
۶- در تابع $t(x) = \sqrt{x-۱}$ حاصل $\frac{t(\frac{5}{4})t(۱۰)}{t(\frac{۱۰}{9})t(۲)}$ را به دست آورید.

۷- تابع $g(x) = x + ۳$ را با دامنه‌ی $\{-۲, -۱.۰.۱.۲.۳\}$ در نظر بگیرید.
الف) مقدار a را از تساوی $g(a) = g(-۱) + g(۰)$ به دست آورید.

ب) مقدار m را از تساوی $g(۲m) + g(m) = ۹$ به دست آورید.

۸- نمایش جبری تابع خطی f را به صورتی به دست آورید که $f(۱) = ۵$ و $f(-۱) = ۳$.

۹- ضابطه‌ی تابع خطی مقابل را به دست آورید.



۱۰- تابع خطی $f(x) = -2x + 1$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

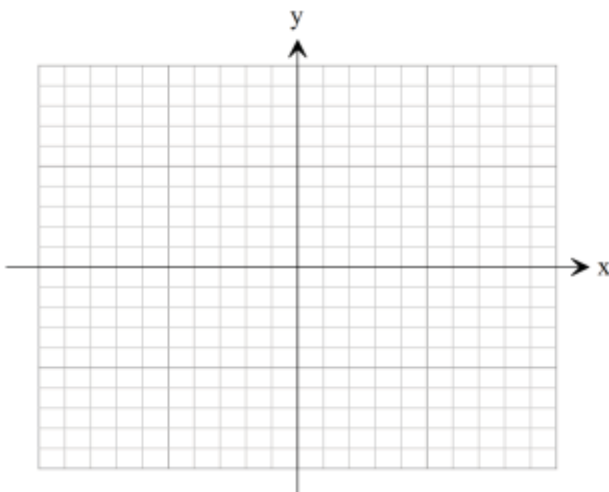
الف) $\mathcal{R}$

ب) اعداد حقیقی مثبت

ج) $(-\infty, 0]$

چ) $\{-1, -1.1, -1.2\}$

د) $[-1, 2]$



۱۱- اگر $f(ax - b) = ax + b$ ، مقدار $f(0)$ را به دست آورید. ($a \neq 0$)

۱۲- اگر $f(x) = 2x + 1 - f(x + 1)$ و $f(4) = 2$ ، مقدار $f(2)$ را به دست آورید.

۱۳- اگر $f(2^n + 5) = 4^n - 2^n - 34$ مقدار $f(13)$ را به دست آورید.

۱۴- اگر $h(x) = 2x + 1$ و برد تابع بازه $[-11.7]$ باشد، مجموع عددهای صحیح در دامنه h چه قدر است؟

۱۵- اگر $f(x) + f(1) = x^2 + 2x$ مقدار $f(2)$ را به دست آورید.

۱۶- اگر توابع خطی $f(x) = ax + 4$ و $g(x) = 2x + b$ در نقطه $(1, -1)$ یکدیگر را قطع کنند، a و b را به دست آورید.

۱۷- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد و بدانیم که $f(g(2)) = 4$ ، حاصل $g(3) + 2f(1)$ کدام است؟

۱۸- اگر تابع $f = \{(1, m^2 - 4), (2, -3m), (3, n)\}$ یک تابع ثابت باشد، حاصل mn را به دست آورید.

۱۹- اگر $f(x) = (a - 1)x + b$ یک تابع همانی باشد، در تابع $g(x) = 2ax + b$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۲۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ حاصل $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

۲۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(f(-81)))$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

(۱) $\frac{-1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{-1}{9}$

۲۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف X های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور X غیر منفی باشد؟ (کنکور سراسری)

(۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۵

۲۳- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

(۱) ۲ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$

با آرزوی موفقیت

پریسا استواری

۱۳۹۸