



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

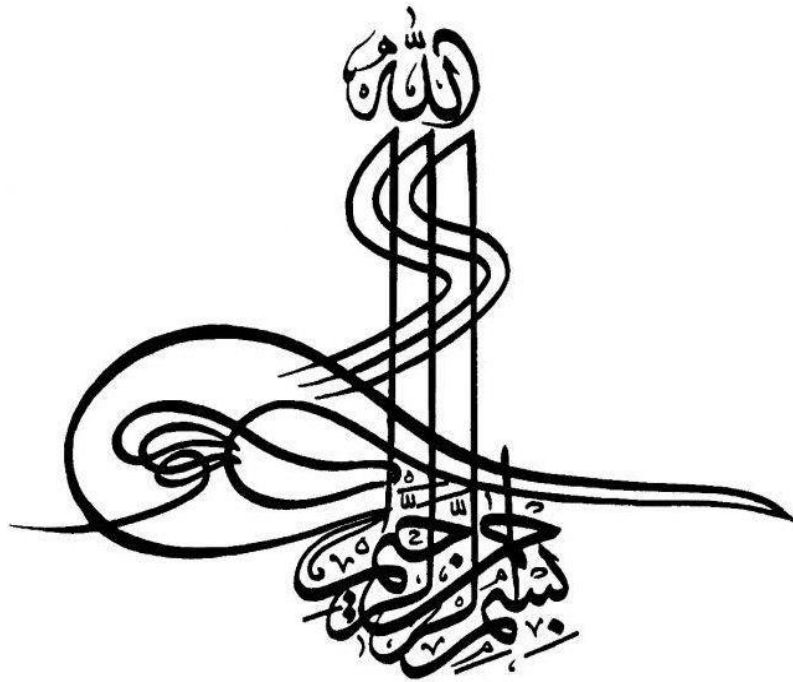
و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)



## مثلثات

(فصل دوم ریاضی پایه دهم رشته های تجربی و ریاضی فیزیک)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی 

حل تمام تمرینهای کتاب درسی 

مؤلف:

حبيب هاشمی

۱۳۹۶

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

جهت تهیه جزوه کامل مثلثات ( فصل دوم ریاضی پایه دهم) تالیف **حبيب هاشمی**  
کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس  
های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۱۱ تهران و مدرس دانشگاه با  
شماره **۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱** تماس حاصل فرمایید..

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی [@eshgheriazikonkour](https://t.me/eshgheriazikonkour)

## مقدمه

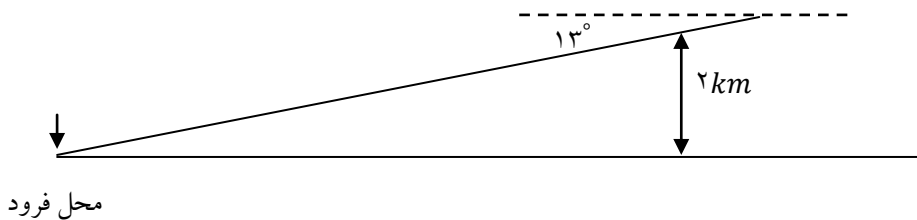
جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «مثلثات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
  - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
  - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
  - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
  - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
  - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
  - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
  - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبيب هاشمی

## درس اول: نسبت های مثلثاتی

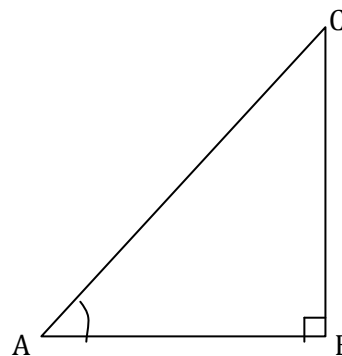
مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، نجوم و غیره کاربرد دارد.



به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق  $13^\circ$  باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.

در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  برای زاویه معین و حاده  $A$ ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه  $A$ ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه  $A$  می نامیم و آن را با  $\tan A$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ، داریم.

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$



عکس تانژانت زاویه  $A$  را کتانژانت می نامیم و آن را با  $\cot A$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در

مثلث قائم الزویه  $ABC$  داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

در هر مثلث قائم الزویه،  $ABC$  نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده  $A$  به طول وتر، همواره مقداری ثابت است

که آن را سینوس زاویه  $A$  می نامیم و با  $\sin A$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده  $A$  به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه  $A$

می نامیم و آن را با  $\cos A$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر

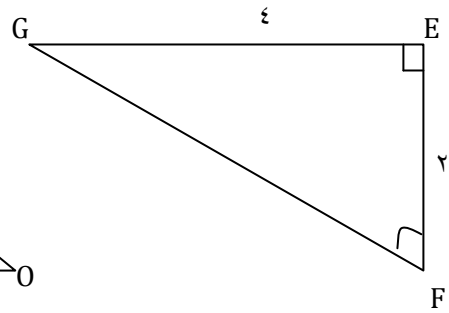
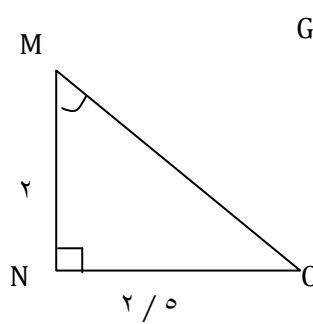
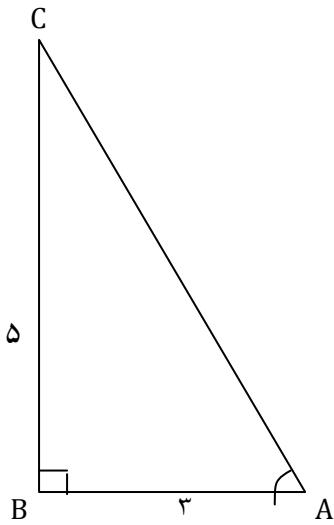
$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

در یک مثلث قائم الزویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم.

**نکته:** به سادگی میتوان دید در مثلث قائم الزویه  $ABC$ ،  $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$  و از این رو

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ به طور مشابه، می توان دید } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

**مثال:** در هر يك از شكل های زیر، جاهای خالی را كامل كنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan G = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot G = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

**مثال:** در شكل مقابل نسبتهای مثلثاتی زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  را بدست آورید.

$$5^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 25 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

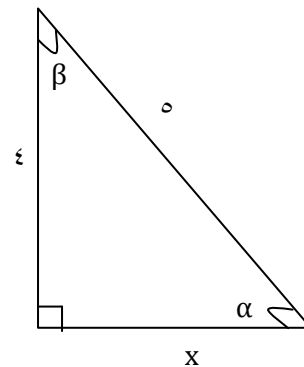
$$\cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot \beta = \frac{4}{3}$$





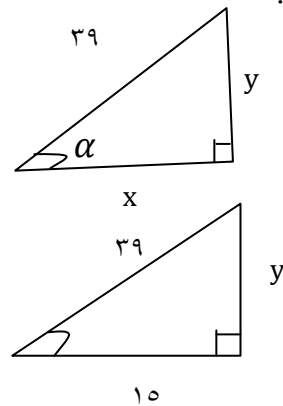
**مثال:** طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۳۹ و کسینوس یکی از زاویه های حاده ی آن  $\frac{5}{13}$  باشد محیط مثلث را

بدست آورید.

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{39} \rightarrow \frac{5}{13} = \frac{x}{39} \rightarrow x = 15$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{39} \rightarrow (39)^2 = 15^2 + y^2 \rightarrow$$



**مثال:** در هر مثلث نسبتهای مثلثاتی زاویه ی  $\theta$  را بدست آورید.

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow x = 10$$

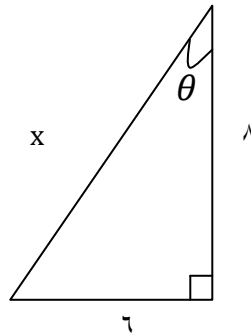
(الف)

$$\sin \theta = \frac{6}{10}$$

$$\cos \theta = \frac{8}{10}$$

$$\tan \theta = \frac{6}{8}$$

$$\cot \theta = \frac{8}{6}$$



$$(4\sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 + a^2$$

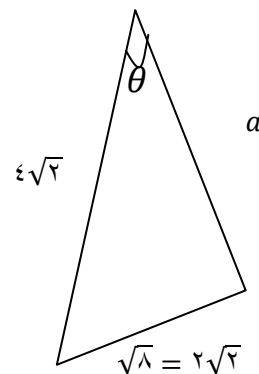
(ب)

$$32 = 8 + a^2 \rightarrow a^2 = 24 \rightarrow a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

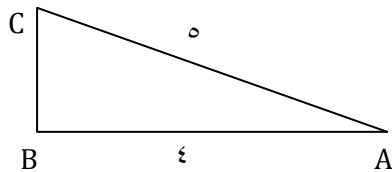


$$\cot\theta = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ )،  $AB = 4$  و  $AC = 5$  می باشند. مقدار  $\tan A$  و  $\cot A$  را

بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول ضلع  $BC$  را بدست می آوریم:



$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow BC = 3$$

$$\Rightarrow \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}, \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

**مثال:** با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲، نسبت های مثلثاتی  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را به دست آورید.

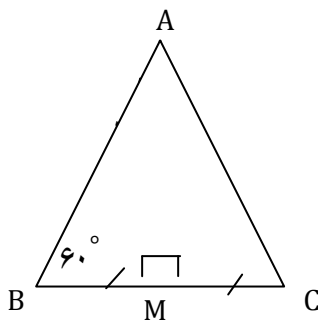
حل) در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$ ، نیمساز زاویه  $A$  را رسم می کنیم. (AM).

$$AM \text{ بر } BC \text{ عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: } BM = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ABM$ ، داریم:

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{3}$$



نسبت های مثلثاتی زاویه  $30^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $ABM$ :

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه  $60^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $ABM$ :

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

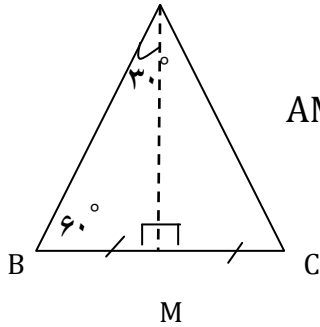
$$\cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**مثال:** با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $2\sqrt{3}$ ، نسبت های مثلثاتی  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$ ، نیمساز زاویه  $A$  را رسم می کنیم  $(AM)$ .

$$AM \text{ بر } BC \text{ عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: } BM = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ABM$  داریم:



$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$\Rightarrow AM = 3$$

نسبت های مثلثاتی زاویه  $30^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $ABM$ :

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه  $60^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $ABM$ :

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

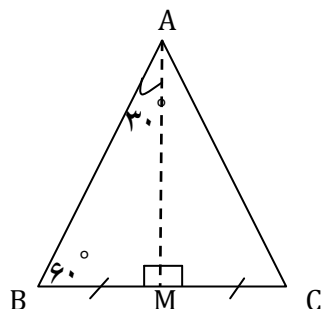
$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**مثال:** با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$ ، نسبت های مثلثاتی  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را به دست آورید

(حل) در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$ ، نیمساز زاویه  $A$  را رسم می کنیم  $(AM)$ .

$AM$  بر  $BC$  عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم:  $BM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$



بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ABM$  داریم:

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه  $30^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $ABM$ :

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه  $60^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $ABM$ :

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

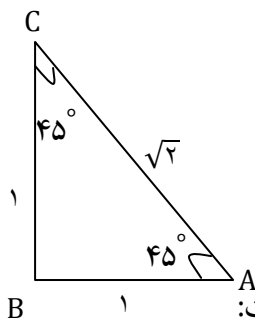
$$\cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**مثال:** با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول ۱، نسبت های مثلثاتی  $45^\circ$  را به دست آورید.

حل) بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه A (یا C) در مثلث قائم الزاویه ABC به صورت زیر است:

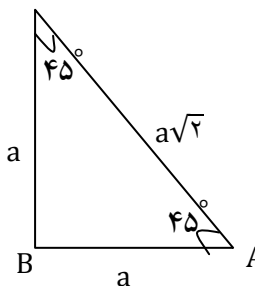
$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1, \cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{1} = 1$$

**مثال:** با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول a، نسبت های مثلثاتی  $45^\circ$

را به دست آورید. حل) بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه A (یا C) در مثلث قائم الزاویه ABC به صورت زیر است:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1, \cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای  $60^\circ$  و  $45^\circ$  و  $30^\circ$

مقدار	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

**مثال:** مقدار عددی عبارت  $3\sin 30^\circ + 4\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ$  را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به این که  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  می باشند، داریم:

$$3\sin 30^\circ + 4\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

**مثال:** مقدار عددی عبارت  $\sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + 3 + 1 = 5 \end{aligned}$$

**مثال:** مقدار عددی عبارت  $4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ \\ &= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 5(1) - 3 \times \frac{1}{2} = 4 - 5 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

**مثال:** مقدار عددی عبارت  $8\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ - \tan 60^\circ)$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & 8\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ + \tan 60^\circ) \\ &= 8 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) = 4 + \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

**مثال:** مقدار عددی عبارت  $-\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 4\cot 30^\circ + 2\tan 45^\circ$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & -\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 4\cot 30^\circ + 2\tan 45^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \sqrt{3} + 2(1) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + 2 = \frac{-\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{-7\sqrt{3}}{2} + 2 \end{aligned}$$



**مثال:** حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. (زوایای داده شده بر حسب درجه هستند).

$$۱) \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$۲) 2\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4+2-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{a \sin^m \theta = a(\sin \theta)^m}$$

$$۳) \tan 30^\circ \cot 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$۴) \sqrt{3} \tan 60^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$۵) 1 - 2\sin^2 30^\circ + \frac{\cos^2 30^\circ}{2} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

**تمرین:** حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$۱) 2\tan 30^\circ \cot 30^\circ - 3\cot 45^\circ \tan 45^\circ$$

$$۲) (\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$$

$$۳) \frac{1 + \tan 60^\circ + \tan^2 60^\circ}{1 + \cot 60^\circ + \tan^2 60^\circ}$$

**مثال:** درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱) 2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$۲) ۱ + \tan^2 60^\circ = \frac{1}{\cos^2 60^\circ} \rightarrow ۱ + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} \rightarrow ۱ + ۳ = \frac{1}{\frac{1}{4}} \rightarrow ۴ = ۴$$

**تمرین:** درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱) \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 30^\circ$$

$$۲) \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = ۱$$

$$۳) \frac{\sin^2 45^\circ}{2} = \sin^2 30^\circ$$

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$ ,  $AB = 4$  و  $BC = 6$  می باشد، حاصل هر یک از عبارت

های زیر را به دست آورید.

(الف)  $(\cos A + \sin C)(\cos A - \sin C)$

(ب)  $\tan A(\tan C + \cot C)$

حل ( مطابق شکل و با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول وتر  $AC$  را به دست می آوریم:

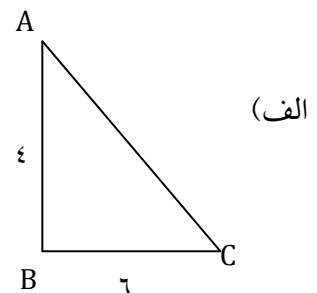
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 36 = 52$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{52}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{\sqrt{52}}, \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{\sqrt{52}}$$

$$(\cos A + \sin C)(\cos A - \sin C) = (\cos A)^2 - (\sin C)^2$$

$$= \frac{16}{52} - \frac{16}{52} = 0$$



(ب)

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\tan A (\tan C + \cot C) = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \times \left( \frac{4+9}{6} \right) = \frac{13}{4}$$

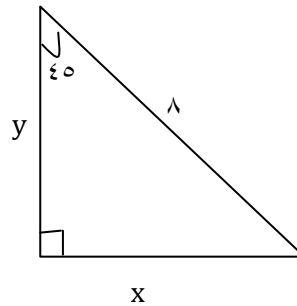
**مثال:** در هر شکل مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف)  $\sin 45^\circ = \frac{x}{\lambda}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\lambda} \rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{y}{\lambda}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{\lambda} \rightarrow y = 4\sqrt{2}$$

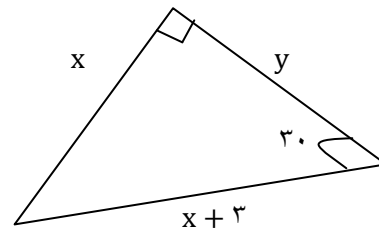


ب)  $\sin 30^\circ = \frac{x}{x+3}$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{x+3} \rightarrow 2x = x+3 \rightarrow x = 3$$

فیثاغورس  $y^2 = 3^2 + 6^2$

$$y^2 = 9 + 36 \rightarrow y^2 = 45 \rightarrow y = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

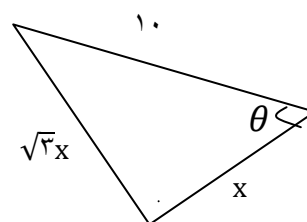


پ)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{x}{10}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{10}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 5$$

ت)  $\sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{t} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{t} \Rightarrow t = 30$

رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه بزرگ  $\Rightarrow t^2 = (15\sqrt{3})^2 + x^2$

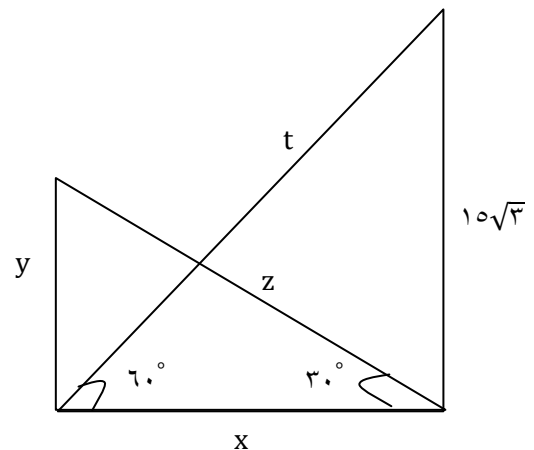
$$\Rightarrow 30^2 = 6\sqrt{5} + x^2$$

$$900 - 6\sqrt{5} = x^2 \Rightarrow 225 = x^2 \Rightarrow 15 = x$$

در مثلث قائم الزاویه کوچک  $\cos 30^\circ = \frac{x}{z}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{z} \rightarrow z = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{z} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10\sqrt{3}} \rightarrow y = 5\sqrt{3}$$



ث)  $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$

$\sin 37^\circ = 4/5, \cos 37^\circ = 3/5$

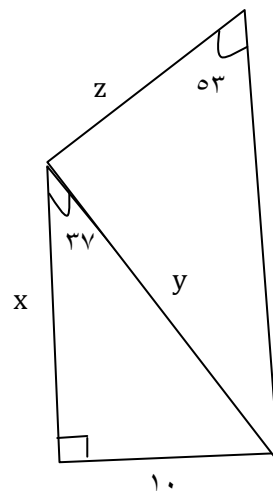
$$\sin 53^\circ = \frac{y}{z} \Rightarrow 4/5 = \frac{10}{z} \rightarrow z = \frac{10}{4/5} = 12.5$$

$$z = \frac{100}{y}$$

$$\sin 37^\circ = \frac{10}{y}$$

$$4/5 = \frac{10}{y} \rightarrow y = \frac{100}{4} = 25$$

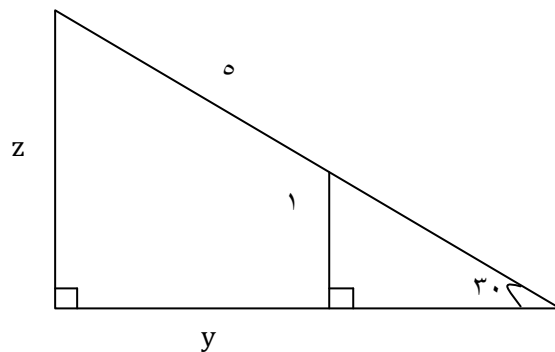
$$\cos 37^\circ = \frac{x}{y}, 3/5 = \frac{x}{25} \rightarrow x = \frac{3 \times 25}{5} = 15$$



ج) در مثلث کوچک  $\tan 30^\circ = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

در مثلث بزرگ  $\sin 30^\circ = \frac{z}{5} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{z}{5} \rightarrow z = \frac{5}{2}$

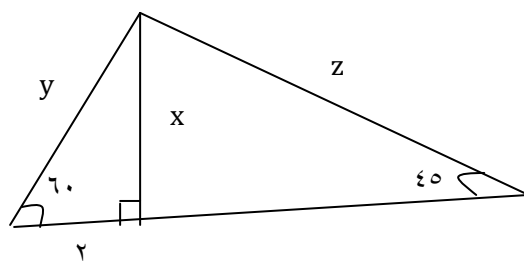
در مثلث بزرگ  $\cos 30^\circ = \frac{x+y}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+y}{5} \rightarrow 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2y \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = y$



$$\text{ج) در مثلث قائم الزاویه کوچک } \cos 60^\circ = \frac{2}{y} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{y} \rightarrow y = 4$$

$$\text{در مثلث قائم الزاویه کوچک } \sin 60^\circ = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$\text{در مثلث بزرگ } \sin 45^\circ = \frac{x}{z} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{z} \rightarrow z = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$



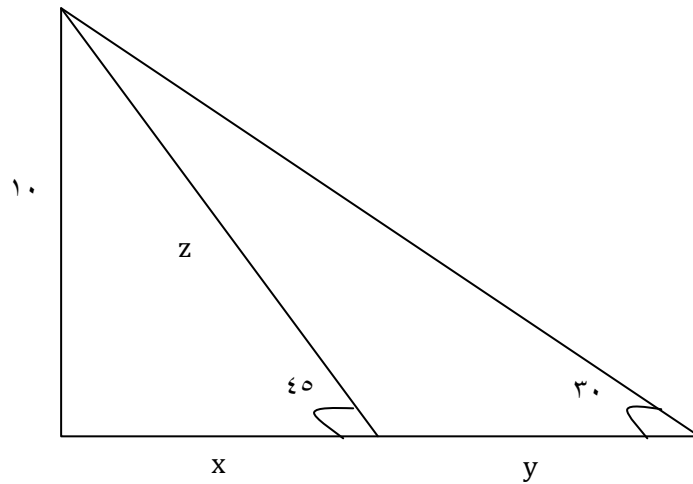
$$\text{ح) در مثلث قائم الزاویه کوچک } \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{10}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{z} \rightarrow z = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

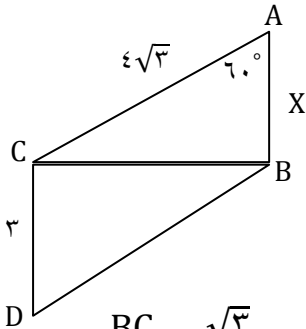
$$\text{در مثلث قائم الزاویه کوچک } \cos 45^\circ = \frac{x}{z} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{10\sqrt{2}} \rightarrow x = 10$$

$$\text{در مثلث قائم الزاویه بزرگ } \tan 30^\circ = \frac{10}{x+y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{10+y}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} + \sqrt{3}y = 30 \rightarrow y = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$



**مثال:** در شکل رو به رو، نسبت های مثلثاتی زاویه D را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویه ABC، داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{4\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

در مثلث قائم الزاویه BCD و با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول وتر BD را به دست می آوریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

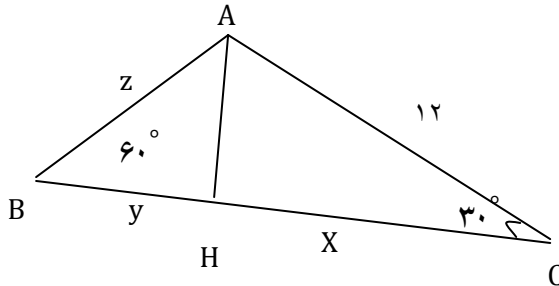
بنابراین:

$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos D = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan D = \frac{BC}{CD} = \frac{6}{3} = 2, \quad \cot D = \frac{CD}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**مثال:** در مثلث روبه رو، مقادیر  $x, y, z$  و  $Z$  را به دست آورید.



حل ( در مثلث قائم الزاویه  $ACH$  داریم:

$$\cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

حال برای به دست آوردن  $AH$  به دو روش می توان عمل کرد:

روش اول: بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 12^2 - (6\sqrt{3})^2$$

$$= 144 - 108 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{12} \Rightarrow AH = \frac{12}{2} = 6$$

در مثلث قائم الزاویه  $ABH$ ، داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{z} \Rightarrow \sqrt{3}z = 12$$

$$\Rightarrow z = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

از دو روش برای به دست آوردن  $y$  استفاده می کنیم:

روش اول:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = (4\sqrt{3})^2 - 6^2 = 48 - 36 = 12$$

$$\Rightarrow y = BH = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

روش دوم:

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{4\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

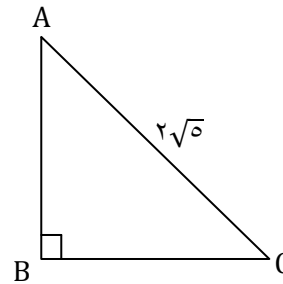
**مثال:** در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ،  $B = 90^\circ$ ؛ طول وتر  $2\sqrt{5}$  و  $\tan C = 2$  می باشد.

(الف) طول اضلاع قائم مثلث را به دست آورید .

(ب) نسبت های مثلثاتی زاویه  $A$  را به دست آورید .

حل الف) داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = 2 \Rightarrow AB = 2BC \quad (*)$$



بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ABC$  داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \xrightarrow{(*)} (2\sqrt{5})^2 = (2BC)^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow 20 = 4BC^2 + BC^2 \Rightarrow 5BC^2 = 20 \Rightarrow BC^2 = \frac{20}{5} = 4$$



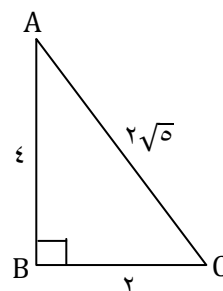
$$\Rightarrow BC = 2 \xrightarrow{(*)} AB = 4$$

(ب)

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{2} = 2$$



**مثال:** در هر يك از قسمت های زیر، مقدار X را به دست آورید

$$x \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} \tan 30^\circ - 4 \sin 30^\circ}{2\sqrt{2} \cos 45^\circ + \tan 45^\circ} \quad (\text{الف})$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم.

سپس با حل معادله، مقدار X را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3} \tan 60^\circ - 4 \sin 30^\circ}{2\sqrt{2} \cos 45^\circ + \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} - 4 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{1 - 2}{2 + 1} = \frac{-1}{3} \\ x \cos 60^\circ = \frac{1}{2} x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} x = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\sin^2 45^\circ = (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$۰^\circ < x < ۹۰^\circ, \quad ۲ \cdot \sin x = \frac{۲ \tan ۳۰^\circ + \cot ۳۰^\circ}{\frac{1}{3}(\cot ۴۵^\circ - \sin^2 ۴۵^\circ)} \quad (\text{ب})$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم.

سپس با حل معادله، مقدار X را به دست می آوریم:

$$\sin^2 ۴۵^\circ = (\sin ۴۵^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{۲ \tan ۳۰^\circ + \cot ۳۰^\circ}{\frac{1}{3}(\cot ۴۵^\circ - \sin^2 ۴۵^\circ)} = \frac{۲ \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{6}} = ۱۰\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow ۲ \cdot \sin x = ۱۰\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad ۰^\circ < x < ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

**مثال:** اگر  $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید:

$$-۲ \sin \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha \quad (\text{الف})$$

حل) چون  $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  است، بنابراین:  $\alpha = ۳۰^\circ$

$$-۲ \sin \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha = -۲ \sin ۳۰^\circ + \sqrt{3} \cot ۳۰^\circ$$

$$= -۲ \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = -1 + 3 = 2$$

$$۴ \cos^2 \alpha + \cot(\alpha + ۱۵^\circ) \quad (\text{ب})$$

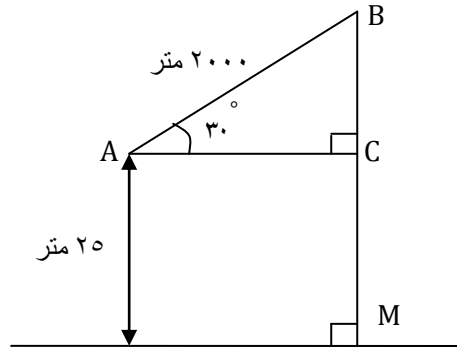
حل)

$$۴ \cos^2 \alpha + \tan(\alpha + ۱۵^\circ) = ۴ \cos^2(۳۰^\circ) + \cot(۳۰^\circ + ۱۵^\circ)$$

$$= 4 \cos 60^\circ + \cot 45^\circ = 4 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 + 1 = 3$$

**مثال:** یک موشک در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $30^\circ$  پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از

طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می توان دید،

ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$BC + MC = BC + 25$$

بنابراین کافی است طول  $BC$  را پیدا کنیم. می دانیم  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ . پس در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = 1000$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = 1000 + 25 = 1025$$

**مثال:** یک موشک از ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویه  $60^\circ$  پرتاب می شود. موشک پس از طی

$600\sqrt{3}$  متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل) شکل هندسی رو به رو را برای حل این مسأله در نظر می گیریم.

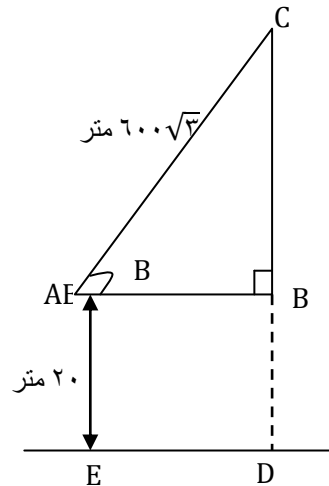
پس از طی  $600\sqrt{3}$  متر، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر  $DB + BC$  است. داریم:

$$\Delta ABC : \hat{B} = 90 \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{600\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 600\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 900$$

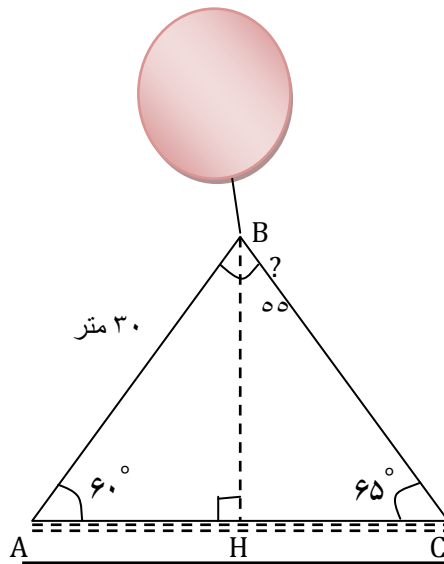
$$DB = AE = 20$$

$$\Rightarrow DC = DB + BC = 20 + 900 = 920$$



**مثال:** در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از

طناب ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را پیدا کنید؟  $\sin 65^\circ = 0.9$



حل) ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می کنیم و آن را BH می نامیم.

سپس طول  $BH$  را با استفاده از سینوس زاویه  $A$  به دست می آوریم.

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 = 15\sqrt{3}$$

اکنون با استفاده از سینوس زاویه  $65^\circ$ ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$\Delta$

$$BHC \rightarrow \sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 65^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{0.9} \cong 28 / 86$$

**مثال:** در یک جاده کوهستانی مشابه شکل زیر، طول جاده سرپائینی ۱۲ m و زاویه جاده ی سربالایی و

سرپائینی با سطح زمین به ترتیب  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  است:

الف) ارتفاع قله را بدست آورید.

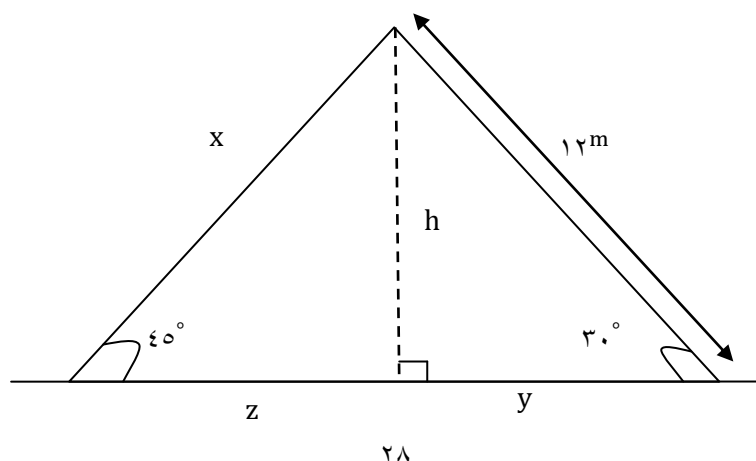
ب) طول جاده سربالایی را بدست آورید.

پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه ی  $A$  و  $B$  چقدر است؟

$$\text{الف) } \sin 30^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{12} \rightarrow h = 6$$

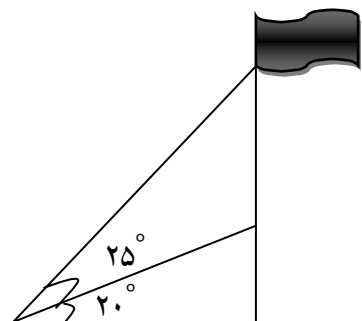
$$\text{ب) } \sin 45^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ گویا}$$

$$\text{ج) } \begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{y}{12} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{12} \rightarrow y = 6\sqrt{3} \\ \cos 45^\circ = \frac{z}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z}{6\sqrt{2}} \rightarrow z = 6 \end{cases} \quad \text{طول تونل} = y + z = 6\sqrt{3} + 6$$

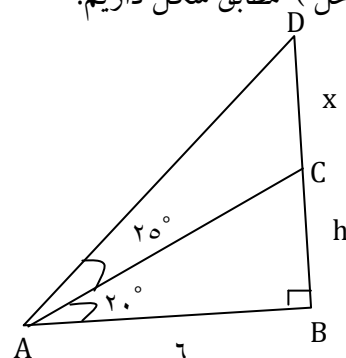


**مثال:** مطابق شکل، شخصی در فاصله ۶ متری ستونی ایستاده که بر بالای آن میله پرچمی نصب شده است.

طول میله را با فرض  $\tan 20^\circ = 0.36$  به دست آورید.



حل (مطابق شکل داریم):



$$\triangle ABC: \tan 25^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow 0.36 = \frac{h}{6}$$

$$\Rightarrow h = 6 \times 0.36 = 2.16 \quad (*)$$

در مثلث قائم الزاویه  $ABD$ ،  $A = 45^\circ$  داریم:

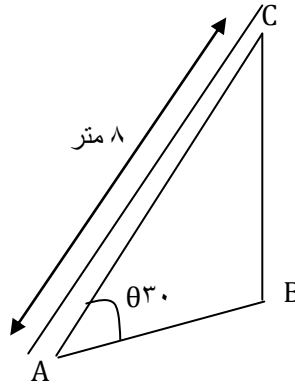
$$\tan A = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{h+x}{6} \Rightarrow 1 = \frac{h+x}{6}$$

$$\xrightarrow{(*)} 2.16 + x = 6 \Rightarrow x = 3.84$$

بنابراین طول میله پرچم  $3.84$  متر است.

**مثال:** مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با

سطح زمین  $\theta = 30^\circ$  باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

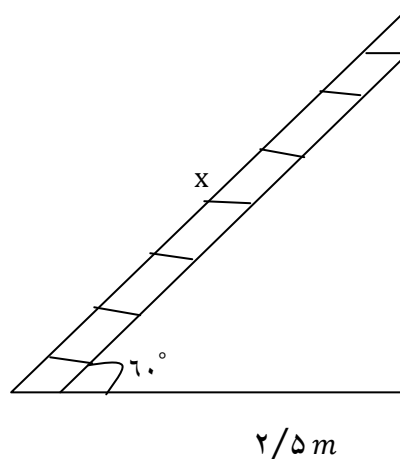
$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

**مثال:** اگر نردبانی را به دیواری تکیه داده باشیم بطوریکه فاصله ی پای نردبان تا دیوار  $2/5 m$  باشد و زاویه

ای که نردبان با سطح افق می سازد،  $60^\circ$  باشد، طول نردبان را محاسبه کنید. انتهای نردبان در چه ارتفاعی از

سطح زمین قرار گرفته است؟

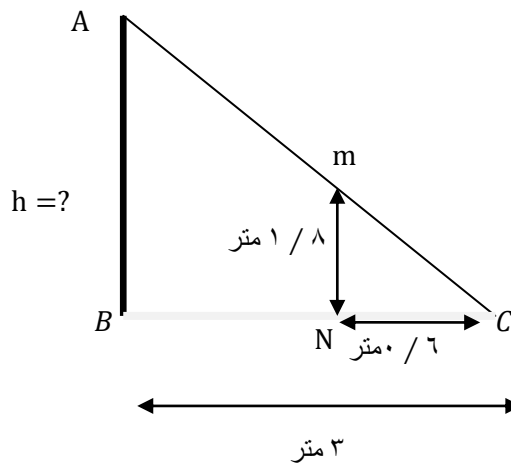
$$\cos 60^\circ = \frac{2/5}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2/5}{x} \rightarrow x = 5$$



**مثال:** کيان می خواهد ارتفاع يك تير برق را كه طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد کيان ۱/۸ متر و سایه او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع تير برق چقدر است؟

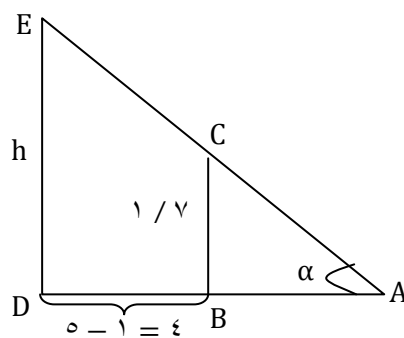
$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{MN}{AB} \rightarrow \frac{0/6}{3} = \frac{1/8}{h} \rightarrow h = \frac{0/4}{0/6} = 9m$$



**مثال:** کميل می خواهد ارتفاع يك ميله را كه طول سایه آن ۵ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۷ متر و طول سایه او در همان لحظه ۱ متر است. ارتفاع ميله چه قدر است؟

حل ( فرض کنیم  $ED$  ميله مورد نظر باشد. حال کميل بايد در نقطه ای قرار بگيرد كه انتهای سایه های ميله و خودش بر هم منطبق شوند. فرض کنیم  $\alpha$  زاویه پرتو تابش خورشيد با سطح افق باشد. در این صورت:





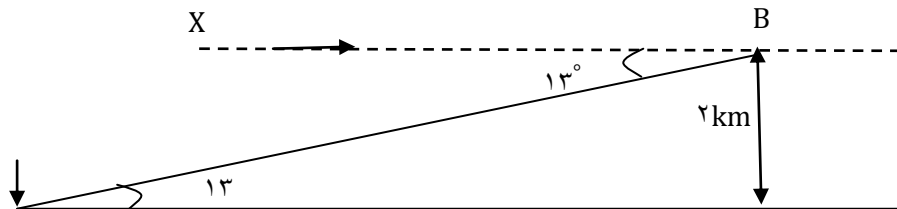
$$ABC: \tan \alpha = \frac{BC}{AB} \quad (۱), \quad ADE: \tan \alpha = \frac{DE}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{۱/۷}{۱} = \frac{h}{۵} \Rightarrow h = ۵ \times ۱/۷ = ۸/۵$$

**مثال:** یک هواپیما در ارتفاع  $۲\text{ km}$  از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود  $۱۳^\circ$  باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطه  $A$  فرود می آید.

$$\tan ۱۳^\circ \cong ۰/۲۳ \quad BX \parallel AC \xrightarrow{\text{مورب } CB} \hat{B}_1 = \hat{C} = ۱۳^\circ$$

$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \rightarrow AC \cong ۸/۶۹ \text{ km}$$

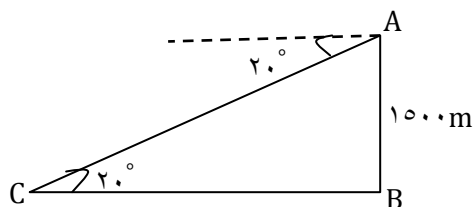


**مثال:** یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق محل فرود

$۲۰^\circ$  باشد، هواپیما تقریباً چه مسافتی را طی می کند تا روی زمین بنشیند؟ ( $\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴$ )

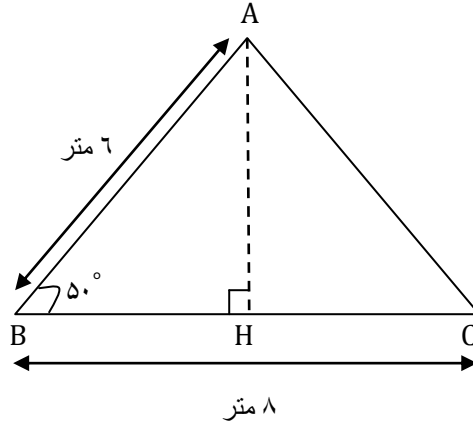
حل ( مطابق شکل، اگر هواپیما در نقطه  $A$  باشد، آن گاه بنابر قضیه موازی و مورب، اندازه زاویه  $C$  برابر  $۲۰^\circ$  است و داریم ( $C$  محل فرود هواپیما است):

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \sin ۲۰^\circ = \frac{۱۵۰۰}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴} \cong ۴۴۱۲$$



## محاسبه مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین آن ها

می خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می دانیم:



$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده}$$

الف) با توجه به اینکه  $\sin 50^\circ = 0.76$ ، داریم:

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH = 0.76 \times 6 = 4.56$$

ب) با توجه به قسمت الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 4.56 \times 8 \approx 18.24$$

**قضیه:** در مثلث دلخواه ABC، داریم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$

به زبان ساده، مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس

زاویه بین آنها

اثبات ( در مثلث  $ABD$ ، ارتفاع  $BH$  را رسم می کنیم. داریم:

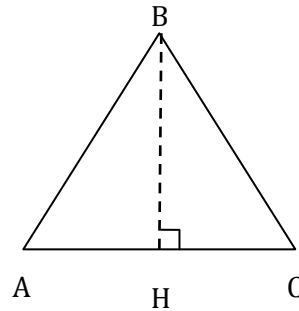
$$s = \frac{1}{2} \times BH \times AC \quad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه  $ABH$ ، داریم:

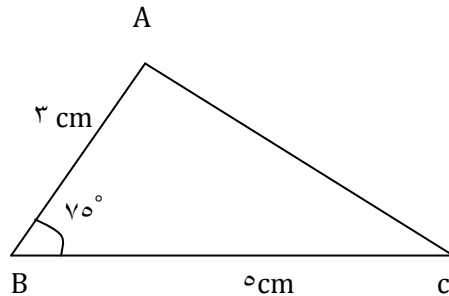
$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \sin A \quad (۲)$$

$$(۱)(۲) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times (AB \times \sin A) \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$



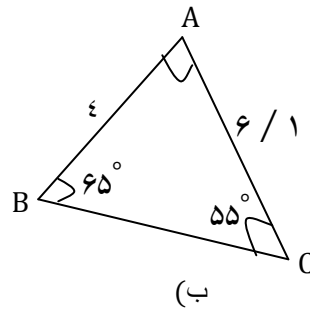
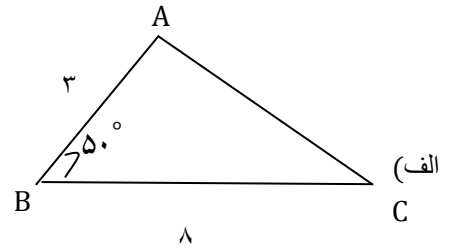
**مثال:** فرض کنید  $\sin 75^\circ = 0.96$ . مساحت مثلث  $ABC$  در شکل زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 75^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 0.96 = 7.2$$

**مثال:** در هر يك از شكل های زیر، مساحت مثلث ها را به دست آورید: ( $\sin 50^\circ = 0.76$ )



حل) مساحت مثلث ABC برابر است با:

(الف)

$$S = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin 50^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times 0.76 = 9.12$$

(ب) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر 180° است. پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 65^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6/1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{4} \sqrt{3}$$

**مثال:** در هر يك از قسمت های زیر، مساحت شكل را به دست آورید.

(الف) طول دو ضلع مثلث  $3\sqrt{2}$  و 6 و زاویه بین آن ها 45° است.

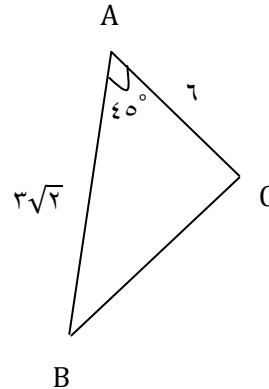
(ب) طول اضلاع متوازی اضلاع 7 و 16 و اندازه يك زاویه آن 60° است.

پ) طول ضلع لوزی ۸ و یک زاویه آن  $30^\circ$  است.

حل الف)

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 45^\circ$$

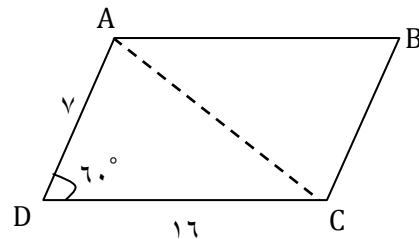
$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$$



ب) اگر قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، متوازی الاضلاع به دو مثلث هم نهشت تقسیم می شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \times DA \times DC \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}$$



مساحت متوازی الاضلاع ABCD، دو برابر مساحت مثلث ADC است. پس:

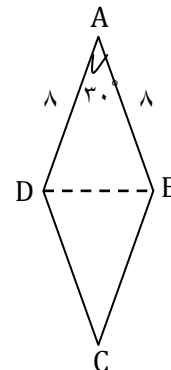
$$S_{ABCD} = 2 \times 28\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$$

پ) اگر قطر لوزی را رسم کنیم، لوزی به دو مثلث یکسان تقسیم می شود:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 2 \times 16 = 32$$



**مثال:** مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع، طول هر سه ضلع برابر  $a$  و هر زاویه آن  $60^\circ$  می باشد، بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

**مثال:** مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع  $a$  را به دست آورید.

حل اگر مرکز شش ضلعی منتظم را به رأس های آن وصل کنیم، ۶ مثلث مساوی ایجاد می شود مثلث  $OAB$

متساوی الاضلاع است. زیرا:

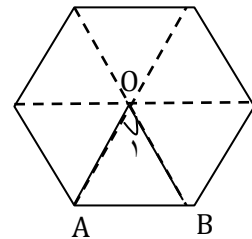
$$O_1 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, OA = OB$$

مثلث  $OAB$  متساوی الاضلاع است.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OA = OB = AB = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



بنابراین:

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = 6S_{\Delta OAB} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

**مثال:** مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع  $3$  را به دست آورید.

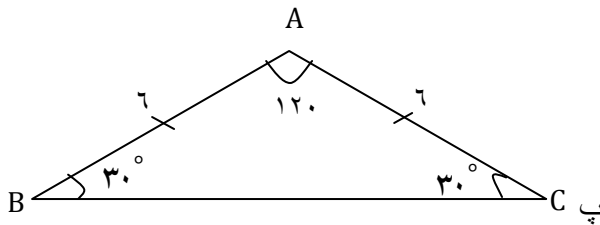
$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} 3^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

**مثال:** در مثلث  $ABC$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 6$  و  $\hat{C} = 25^\circ$  می باشد، با فرض  $\sin 25^\circ = 0/42$ ، مساحت مثلث

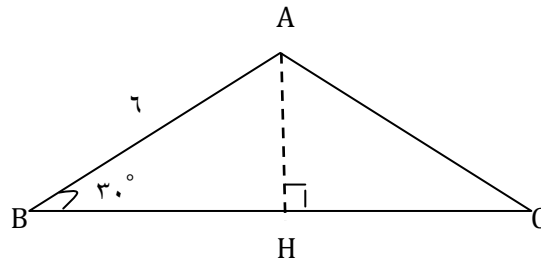
$ABC$  را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 25^\circ = 12 \times 0/42 = 5/04$$

**مثال:** مساحت مثلث  $ABC$  را پیدا کنید.



حل) مثلث  $ABC$  متساوی الساقین است، بنابراین:



$$\hat{C} = \hat{B} = 30^\circ, AC = AB = 6$$

ارتفاع  $AH$  را رسم می کنیم. داریم:

$$\Delta$$

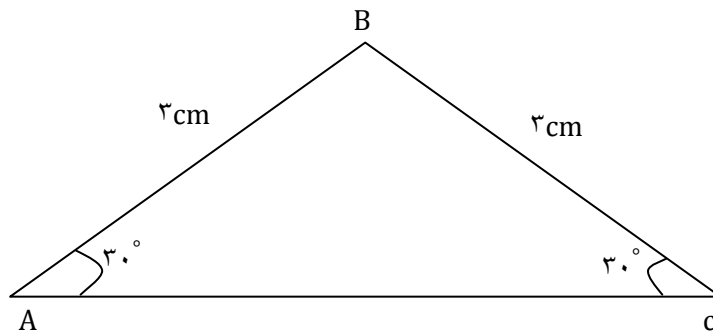
$$ABH = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 36 - 9 = 27$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2BH = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3 \times 6\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

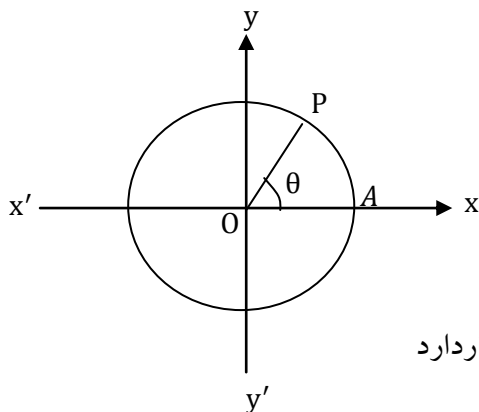
**تمرین:** مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.





## درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره ی زیر که دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوئیم.



۱- مرکز دایره در مبدأ مختصات قرار دارد

۲- شعاع دایره ۱ است

۳- نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

**قرار داد:** گر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و

اگر حرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.

جهت تهیه ادامه ی این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour