



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

فصل اول ریاضی ۱

پایه دهم علوم تجربی و ریاضی

(مجموعه، الگو و دنباله)

کاری از: استاد بهزاد صیامی

(دبیر دبیرستان تیزهوشان زنجان)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مجموعه

+ یادآوری مفاهیم اصلی:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$ اجتماع دو مجموعه:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$ اشتراک دو مجموعه:

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$ تفاضل دو مجموعه:

۱- اگر $A = \{5, -4, 3\}$ و $B = \{3, 7, 0, \sqrt{2}\}$ باشند، آنگاه حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

الف) $A \cup B = \dots\dots\dots$

ب) $A \cap B = \dots\dots\dots$

ج) $A - B = \dots\dots\dots$

د) $B - A = \dots\dots\dots$

✓ نکته:

(۱) اجتماع و اشتراک دو مجموعه خاصیت جابجایی دارند:

$$A \cap B = B \cap A \text{ و } A \cup B = B \cup A$$

(۲) تفاضل دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارد.

$$A - B \neq B - A$$

مجموعه‌های اعداد:

(Natural numbers set) مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

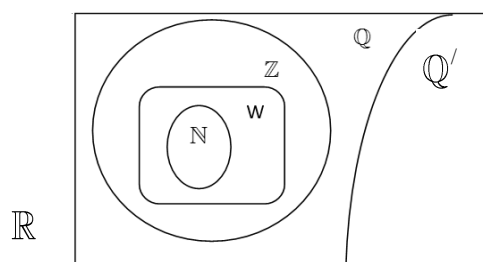
(Whole numbers set) مجموعه اعداد حسابی $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(Zahl numbers set) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, -2, -3, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(Quotient numbers set) مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

اعدادی که نمایش کسری ندارند \mathbb{Q}^c یا \mathbb{Q}' : مجموعه اعداد اصم یا گنگ

(Real numbers set) مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$



✓ نکته: روابط زیر همواره برقرارند:

- ۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$
- ۲) $Q' \subseteq R$
- ۳) $Q' = R - Q$, $Q = R - Q'$
- ۴) $Q \cap Q' = \emptyset$
- ۵) $W - N = \{.\}$

۲- در جاهای خالی مجموعه مناسبی قرار دهید.

الف) $\{x \in \square \mid (x - \sqrt{2})(2x - 3) = 0\} = \{\sqrt{2}\}$

ب) $\{x \in \square \mid -4 < x \leq -1\} = \emptyset$

۳- هر یک از تساویهای زیر را تکمیل کنید.

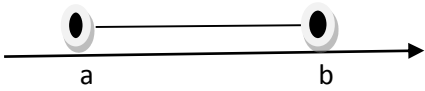
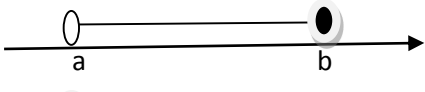
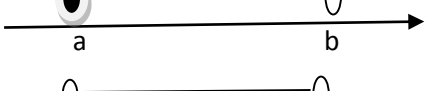
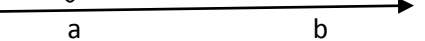
- ۱) $Z \cup W = \dots\dots\dots$
- ۲) $\phi' = \dots\dots\dots$
- ۳) $A - \phi = \dots\dots\dots$
- ۴) $A \cap A = \dots\dots\dots$
- ۵) $Z \cup Q = \dots\dots\dots$
- ۶) $N - W = \dots\dots\dots$
- ۷) $Z \cap N = \dots\dots\dots$
- ۸) $A \cap \phi = \dots\dots\dots$

۴- اگر مجموعه $A = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ باشد، آنگاه چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف) $\{\phi, \{\phi\}\} \subset A$
 - ب) $\{\{\{\phi\}\}\} \subseteq A$
 - ج) $\{\phi, \{\phi\}\} \in A$
 - د) $\{\{\}\} \in A$
 - ی) $\{\{\}\} \subseteq A$
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

بازه‌ها:

تعریف: بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص هستند و به صورت‌های زیر می‌باشند:

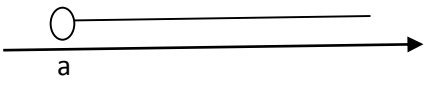
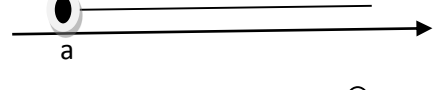
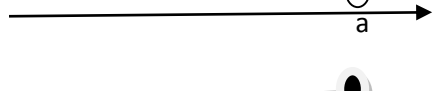
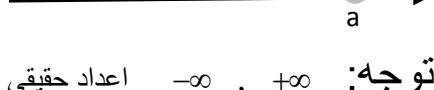
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای
	بازه بسته بین a, b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$
	بازه نیم باز بین a, b : $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$
	بازه نیم باز بین a, b : $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$
	بازه باز بین a, b : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$

✓ نکته: اگر a یک عدد حقیقی دلخواه باشد داریم:

$$[a, a] = \{a\} \quad (۲)$$

$$(a, a) = \emptyset \quad (۱)$$

معرفی نوع دیگری از بازه‌ها:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای
	بازه باز اعداد بیشتر از a : $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} x > a\}$
	بازه باز اعداد بیشتر یا مساوی a : $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$
	بازه باز اعداد کمتر از a : $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} x < a\}$
	بازه باز اعداد کمترین یا مساوی a : $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} x \leq a\}$

توجه: $-\infty$, $+\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

۵- حاصل عبارتهای زیر را به صورت بازه نشان دهید.

الف) $(-2, +\infty) \cap (-3, 1) =$ 

ب) $\mathbb{R} - [1, 4) =$ 

ج) $(, 4] - \{1\} =$ 

د) $(-\infty, 1] - (, 6) =$ 

۶- در بازه $[-3, 3]$ چند عدد صحیح، چند عدد حسابی و چند عدد طبیعی وجود دارد؟ آنها را مشخص کنید.

۷- اشتراک بازه‌های $[-2, a]$ ، $(b, 4]$ برابر $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ است. اجتماع بازه‌های $(b, a]$ ، $[-2a-1, b)$ کدام است؟

$$(1) \quad (-3, 1) \quad (2) \quad \left(-1, \frac{2}{3}\right) \quad (3) \quad (-3, -1) - \left\{-\frac{2}{3}\right\} \quad (4) \quad [-3, -1] - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعریف: هرگاه تعداد عضوهای یک مجموعه عدد حسابی باشد آن مجموعه را متناهی می‌نامیم و اگر مجموعه‌ای فاقد عضو (تعداد اعضای آن صفر تا) باشد آنرا مجموعه تهی می‌نامیم و با ϕ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: هرگاه تعداد عضوهای یک مجموعه از هر عددی بزرگتر باشد آنرا نامتناهی می‌نامیم.

به بیان دیگر هرگاه مجموعه‌ای متناهی نباشد آنرا نامتناهی گویند.

۷- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اجتماع دو مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.

ب) اشتراک دو مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.

ج) مجموعه تهی، متناهی است.

د) اگر $B \subseteq A$ و مجموعه B نامتناهی باشد، A متناهی است.

۸- کدام مجموعه متناهی است؟

(۲) اعداد اول بین ۲۰۰ و ۲۰۰۰۰۰۰

(۱) مجموعه خطوطی که از نقطه $(-3, 1)$ می‌گذرد

(۴) $\mathbb{Z} - W$

(۳) اعداد حقیقی در فاصله ۲ و ۲

۹- اگر مجموعه A متناهی و مجموعه‌های B , C نامتناهی باشند، در مورد هر یک از مجموعه‌های $B - (A \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$ به ترتیب از راست به چپ چه می‌توان گفت؟

(۱) متناهی-متناهی (۲) نامتناهی-نامتناهی (۳) متناهی-نامتناهی (۴) نامتناهی-متناهی

✓ نکته: اشتراک مجموعه‌های متناهی با هر نوع مجموعه‌ای (متناهی یا نامتناهی) متناهی است.

مجموعه مرجع یا جهانی

تعریف: مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و با U (Universal set) نمایش می‌دهیم.

متمم یک مجموعه

تعریف: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم و داریم:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

✓ نکته: به طور کلی روابط زیر در مجموعه‌ها برقرار است:

$$۱) \phi' = U \quad ۲) U' = \phi \quad ۳) (A')' = A \quad ۴) A \cap A' = \phi$$

$$۵) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad ۶) (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{قوانین دمورگان})$$

(۷) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$ است.

(۸) اگر مجموعه مرجع (U) متناهی باشد تمام زیر مجموعه‌ها و متمم‌های آنها نیز متناهی‌اند.

(۹) اگر مجموعه مرجع (U) نامتناهی باشد خواهیم داشت:

(الف) A' نامتناهی است $\Rightarrow A$ متناهی است

(ب) در مورد A' نمی‌توان نظری داد $\Rightarrow A$ نامتناهی است (چرا؟)

۱۰- اگر \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد و $A = (-3, 3]$ باشد A' را به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

۱۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ باشند، آنگاه $B - A$ ، $(A \cap B)'$ ، $A \cup B$ را به صورت بازه بنویسید.

۱۲- اگر $U = \{-2, -1, 0, 2, 4, 7\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{-2, 1, 7\}$ و $B = \{-1, 1, 2, 4, 7\}$ و $C = \{-2, 1, 4\}$ باشند
مطلوب است:

الف) $(A \cup B)' \cap C = \dots$

ب) $(C - A)' \cap B = \dots$

۱۳- با توجه به مجموعه مرجع داده شده متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$A = \{1, 3, 5, \dots\}$ $U = \mathbb{N}$

$B = \mathbb{N}$ $U = \mathbb{Z}$

$E = [-\infty, -2)$ $U = \mathbb{R}$

۱۴- اگر \mathbb{N} به عنوان مجموعه مرجع باشد متمم مجموعه $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 100\}$ کدام است؟

(۱) $[100, +\infty)$ (۲) $\{11, 12, 13, \dots\}$ (۳) $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 11\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

اگر A یک مجموعه متناهی باشد تعداد اعضای آنرا با $n(A)$ نمایش می‌دهیم، به عنوان مثال اگر $A = \{2, 5, -8, 12\}$ باشد در این صورت داریم: $n(A) = 4$.

توجه: اگر ϕ نشان دهنده مجموعه تهی باشد. $n(\phi) = 0$.

حال اگر A, B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعریف: دو مجموعه که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند ($A \cap B = \phi$) را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم.

در نتیجه فرمول فوق به صورت مقابل می‌باشد:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

✓ **نکته:** اگر مجموعه مرجع U متناهی باشد و $A, B \subseteq U$ در این صورت داریم:

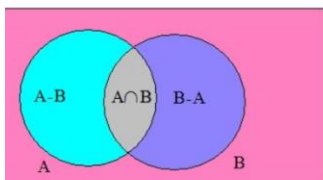
$$n(A') = n(U) - n(A) \quad \text{و یا} \quad n(A) + n(A') = n(U) \quad (1)$$

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) \quad (2)$$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (3)$$

تعداد اعضای A که در B نیست.

✓ **نکته:** با توجه به شکل مقابل رابطه زیر همواره برقرار است:



$$n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = n(A \cup B)$$

✓ **نکته:** برای سه مجموعه نیز داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

۱۵- در یک کلاس ۳۱ نفری تعداد ۱۴ دانش آموز عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر آنها عضو هر دو گروه باشند مطلوبست:

الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرود هستند.

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از آن دو گروه نیستند.

۱۶- در یک کلاس ۴۵ نفری همه دانش‌آموزان کفش مشکی یا کت قهوه ای پوشیده‌اند. اگر ۳۰ نفر کفش مشکی و ۲۵ نفر کت قهوه‌ای پوشیده باشند، معین کنید چند نفر هم کفش مشکی و هم کت قهوه‌ای پوشیده‌اند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۵ (۴) ۱۳

۱۷- اگر $n(A) = 20$ ، $n(A \cap B) = 10$ ، $n(B) = 10$ باشد، حاصل $n(A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴) ۳۰

۱۸- اگر $n(A - B) = 2$ ، $n(B - A) = 8$ ، و $n(B) = 3n(A)$ باشد، $n(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

تست‌های تکمیلی بحث مجموعه‌ها

۱۹- اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ باشد، مجموعه $A - \{B\}$ چند زیر مجموعه غیر تهی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۳۱ (۴) ۱۵

(کنکور تجربی ۸۹)

۲۰- مجموعه A دارای ۱۴، مجموعه B دارای ۱۷ و مجموعه $A \cap B$ دارای ۵ عضو است. چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

(کنکور تجربی ۸۱)

۲۱- تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $3k - 1$ عضوی $4^{\frac{k}{2}}$ برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $k + 3$ عضوی است. تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $2k$ عضوی، کدام است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۰۲۴ (۳) ۵۱۲ (۴) ۲۵۶

۲۲- متمم مجموعه $(B - A)' - A$ ، نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟

(۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) A (۴) B

۲۳- کدام مجموعه تهی نیست؟

(۱) $W - Z$ (۲) $N \cap Q'$ (۳) $\{x \in N | -2 \leq x \leq 2\}$ (۴) $\{x \in Z | 2 < x < 3\}$

۲۴- اگر $n \in N$ و $A_n = \{m \in Z | m \geq -n, 2^m \leq n\}$ باشد، آنگاه مجموعه $A_4 \cap A_3$ چند زیر مجموعه دارد؟

(۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۲۵- اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کم تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در Z متناهی است؟

(۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۲۶- اگر $n(A' \cup B') = 21$ ، $n(A) = 8$ ، $n(B) = 10$ ، $n(A \cup B) = 15$ باشد، $n(A')$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۷- از میان ۵۰ دانش آموز دارای معدل ۱۹ به بالا، ۲۵ نفر در کلاس المپیاد ریاضی و ۲۰ نفر در کلاس المپیاد فیزیک ثبت نام کرده‌اند و ۱۵ دانش آموز در هیچ کلاسی ثبت نام نکرده‌اند. چند نفر از دانش‌آموزان در هر دو کلاس المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۳

۲۸- جواب نامعادله $0 \leq 1 - 2x \leq 1$ ، کدام بازه زیر است؟

- (۱) $[-4, 4]$ (۲) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $[-1, 1]$ (ریاضی ۸۶)

۲۹- اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $\left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ باشد، مجموعه $(A_p \cup A_q) - A_r$ برابر کدام بازه است؟

- (۱) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (۲) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (۳) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (۴) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

۳۰- اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}, n \in \mathbb{N}$ باشد، مجموعه $(A_8 - A_7) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (ریاضی ۹۶)

الگو و دنباله

تعریف: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. بعضی وقت‌ها جملات دنباله دارای یک الگو هستند و گاهی نیز فاقد الگو می‌باشند. اگر بتوانیم برای جملات دنباله الگو بنویسیم آن را جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

مثال: دنباله ... و ۲۵ و ۱۶ و ۹ و ۴ را در نظر بگیرید:

$$n = 1 \Rightarrow \text{جمله اول} = a_1 = (1+1)^2 = 4$$

$$n = 2 \Rightarrow \text{جمله دوم} = a_2 = (2+1)^2 = 9$$

$$n = 3 \Rightarrow \text{جمله سوم} = a_3 = (3+1)^2 = 16$$

در نتیجه می‌توان گفت که الگوی $a_n = (n+1)^2$ برای دنباله فوق مناسب است.

۳۱- پنج جمله اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

$$a_n = (-1)^n \cdot 2^n \quad \dots\dots\dots$$

$$b_n = n^n \quad \dots\dots\dots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \dots\dots\dots$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \dots\dots\dots$$

دنباله فیبوناتچی:

دنباله‌ای که جمله اول و دوم آن برابر یک و جملات بعدی از مجموع دو جمله ماقبل بدست می‌آید و به زبان ریاضی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

۳۲- با توجه به دنباله فیبوناتچی تعریف شده در بالا به سوالات زیر پاسخ دهید:

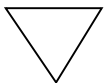
الف) جمله هشتم آن چند است؟

ب) اولین جمله سه رقمی آن چیست؟

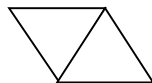
ج) مجموع جملات دوم تا نهم آن چند است؟

۳۳- با توجه به شکل زیر الگویی برای تعداد پاره خط‌های شکل n -ام پیشنهاد کنید. شکل سی‌ام چند پاره خط دارد؟

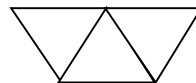
شکل (۱)



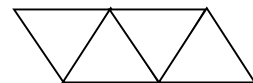
شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)



n	
a_n	

الگوی خطی

تعریف: الگوهایی که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه می‌باشند.

✓ **نکته:** در الگوهای خطی اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابتی است و برابر a می‌باشد.

مثال: الگوی مقابل را در نظر بگیرید: $2/1, 2/7, 3/3, 3/9, \dots$

در این الگو اختلاف هر جمله با قبلی برابر $0/6$ است ($a = 0/6$). پس الگو خطی و به صورت $t_n = 0/6n + b$ است و داریم:

$$t_1 = 0/6(1) + b = 2/1 \Rightarrow b = 1/5$$

$$t_n = 0/6n + 1/5$$

اما دنباله $1, 5, 6, 3, \dots$ به دلیل اینکه اختلاف دو جمله متوالی مقدار ثابتی نیست خطی نمی‌باشد.

۳۴- در یک الگوی خطی با جمله عمومی A_n ، اگر جمله سوم ۵ و جمله هشتم ۱۰ باشد، جمله بیستم دنباله چند است؟

$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$22 \quad (2)$$

$$17 \quad (1)$$

✓ **نکته:** در الگوهای خطی اگر $a > 0$ باشد هر جمله نسبت به جمله قبلی خودش a واحد افزایش می‌یابد (دنباله افزایشی است).

و اگر $a < 0$ باشد هر جمله نسبت به جمله قبلی خودش a واحد کاهش می‌یابد (دنباله کاهشی است).

۳۵- اگر جمله عمومی یک الگوی خطی و $c_1 = 41$ ، $c_4 = 17$ باشد، کدام است؟

$$c_n = 5n - 9 \quad (4)$$

$$c_n = 4n \quad (3)$$

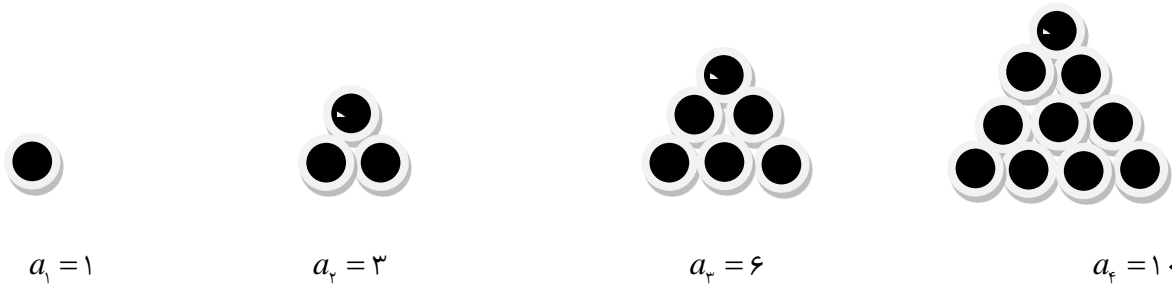
$$c_n = 4n + 1 \quad (2)$$

$$c_n = 5n - 3 \quad (1)$$

الگوی درجه دوم

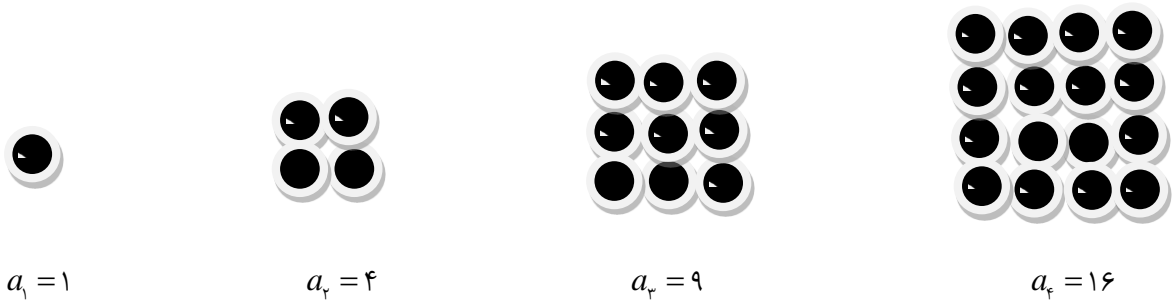
تعریف: اگر جمله عمومی یک الگو به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ (درجه دوم) که در آن a و b و c اعداد حقیقی دلخواه می‌باشند. آن را الگوی درجه دوم می‌نامند.

مثال: دنباله زیر یک الگوی درجه دوم است که به دنباله مثلثی معروف می‌باشد.



جمله عمومی این دنباله $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد.

مثال: دنباله زیر نیز یک الگوی درجه دوم است که به دنباله مربعی معروف و جمله عمومی این دنباله $a_n = n^2$ است.



۳۶- در الگوی زیر ابتدا شکل بعدی را رسم کنید و سپس جدول را کامل کنید.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شماره : n	۱	۲	۳	۴	۵	N
شکل							
تعداد نقطه ها : t_n	۷	۱۲	۱۹				
رابطه n و t_n	$t_1 = 7$	$t_2 = 12$	$t_3 = 19$				$t_n = n^2 + 2(n+2)$

۳۷- جمله اول یک دنباله برابر ۵ است و برای جملات دوم به بعد رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ برقرار است. پنج جمله اول این دنباله را بنویسید.

.....

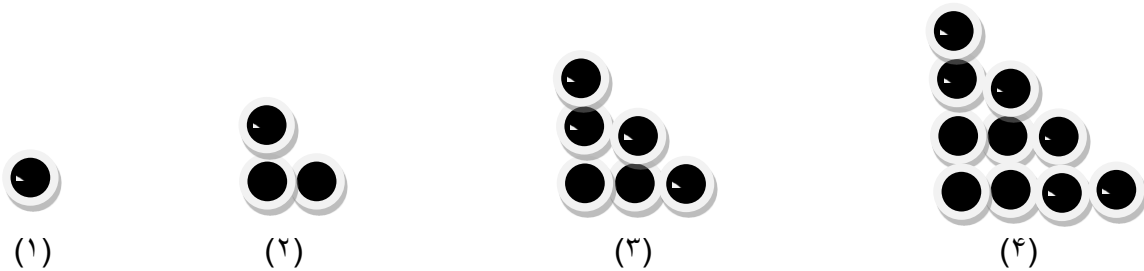
۳۸- برای دنباله درجه دوم مقابل جمله عمومی پیدا کنید. $6, 9, 14, 21, 30, \dots$

حل: $t_n = an^2 + bn + c$

.....

.....

۳۹- در الگوی زیر، تعداد چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟



(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

(۴) ۱۰۱ امین

(۳) ۱۰۰ امین

(۲) ۱۵۱ امین

(۱) ۵۰ امین

.....

تست‌های تکمیلی بحث الگو

۴۰- اگر $S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ باشد، آنگاه جمله صدم دنباله با جمله عمومی S_n چند است؟

۰/۵(۴)

۰/۵۰۵(۳)

۰/۰۵(۲)

۰/۰۰۲(۱)

.....

$$1^2 - 2^2 + 3^2$$

۴۱- بر طبق الگوی مقابل، حاصل سطر چهارم کدام است؟ (کنکور تجربی ۸۴)

$$2^2 - 3^2 + 4^2$$

=

۳۰(۴)

۲۹(۳)

۲۸(۲)

۲۷(۱)

.....

۴۲- مجموع تمام جملات اول تا نود و نهم دنباله $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ کدام است؟

۷ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

دنباله حسابی

تعریف: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به غیر از جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید را یک دنباله حسابی می‌گویند و به آن عدد ثابت، قدر نسبت (d) می‌گویند.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

اگر دنباله مقابل جملات یک دنباله حسابی باشند:

در این صورت داریم:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_{n+1} - a_n$$

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

یعنی جملات دنباله به صورت:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

پس در حالت کلی جمله عمومی (nام) یک دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ نوشته می‌شود.

✓ **نکته:** جمله عمومی در دنباله حسابی، یک عبارت خطی است (توان n برابر ۱) و ضریب n برابر d است.

به عنوان مثال دنباله‌های $c_n = \frac{5n-4}{3}$, $b_n = \frac{3}{5}n + 8$, $a_n = 3n - 1$ حسابی هستند.

اما دنباله‌های $c_n = \frac{5}{n}$, $b_n = \sqrt{n}$, $a_n = 3n^2 - 1$ حسابی نیستند.

✓ نکته:

(۱) در دنباله حسابی اگر $d > 0$ دنباله صعودی و اگر $d < 0$ دنباله نزولی است.

(۲) اگر a_n , a_m دو جمله متمایز از یک دنباله حسابی باشند آنگاه:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

(۳) اگر a , b , c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2} \quad (\text{قانون وسطه حسابی})$$

(۴) اگر جمع شماره‌های دو گروه با هم برابر باشند، جمع جمله‌ها نیز برابر است. (قانون اندیس‌ها)

$$m+n = r+s \Rightarrow a_m + a_n = a_r + a_s$$

به عنوان مثال: $a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = a_5 + a_5$ و یا $a_3 + a_{13} + a_{17} = 3a_{13}$

(۵) اختلاف دو جمله از دنباله حسابی برابر اختلاف شماره‌ها ضربدر قدر نسبت یعنی:

$$a_m - a_n = \delta d \quad \text{مثلا: } a_7 - a_3 = 4d$$

۴۳- مقدار x را طوری بدست آورید تا $1, 4x + 1, 2x - 5, 3x$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.

.....

۴۴- در یک دنباله حسابی داریم: $t_7 - t_6 = 6, t_8 - t_7 = 6$ این دنباله را مشخص کنید و جمله عمومی آن را بنویسید.

.....

.....

۴۵- تعداد جمله‌های دنباله حسابی زیر چند تا است؟

$-6, -1, 4, 9, \dots, 94$

.....

درج m واسطه حسابی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد a, b تعداد m واسطه را طوری قرار دهیم که اعداد حاصل تشکیل یک دنباله حسابی بدهند داریم:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

۴۶- بین دو عدد ۸ و ۳۲ سه عدد چنان درج کنید که این پنج عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند.

.....

۴۷- جمله هفتم یک دنباله حسابی ۱۶ و جمله یازدهم آن ۲۸ است. جمله عمومی دنباله را پیدا کنید.

.....

.....

۴۸- مقدار x چقدر باشد تا عدد $3 \times 4^{x-1}$ واسطه حسابی بین دو عدد $2^{x+2}, 2^{x+1}$ باشد؟

.....

۴۹- در یک مثلث اضلاع تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، اگر محیط این مثلث ۲۴ باشد اندازه اضلاع مثلث را بدست آورید.

۵۰- بین دو عدد ۲ و ۱۲ سه عدد قرار داده ایم که با این دو عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند، اگر جمله اول برابر ۲ باشد، جمله هفتم دنباله حسابی حاصل کدام است؟

۱۶ (۱) ۱۷ (۲) ۱۴/۵ (۳) ۱۵/۵ (۴)

۵۱- اعداد $5p-1$, $2p+4$, $2p+3$ سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱ (۴) (ریاضی ۸۴)

۵۲- در یک دنباله حسابی اگر $a_1 = 5$, $a_p = 9$ آنگاه $a_p + a_{p-1} + a_{p-2}$ چه قدر است؟

۱۹ (۱) ۳۸ (۲) ۵۷ (۳) ۷۵ (۴) (تجربی خارج ۸۶)

۵۳- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می باشد، جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۷/۵ (۱) ۸ (۲) ۸/۵ (۳) ۹ (۴) (تجربی خارج ۸۵)

۵۴- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم $(a_5 + a_6)$ برابر ۱۱ است. جمله چهارم چقدر است؟

۷ (۱) ۲۱ (۲) ۱۴ (۳) ۲۸ (۴) (آزاد پزشکی ۸۹)

۵۵- در یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

۵ (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) (تجربی خارج ۹۱)

دنباله هندسی

تعریف: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به غیر از جمله اول) با ضرب کردن عددی ثابت در جمله قبل از خودش به دست می‌آید را یک دنباله هندسی می‌گویند و به آن عدد ثابت، قدر نسبت (q) می‌گویند.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

اگر دنباله مقابل جملات یک دنباله هندسی باشند:

در این صورت داریم:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 q = a_1 q^2, \quad a_4 = a_3 q = a_1 q^3$$

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \dots, a_1 q^{n-1}, \dots$$

و جملات دنباله به صورت :

پس در حالت کلی جمله عمومی (n -ام) یک دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ نوشته می‌شود.

✓ نکته:

(۱) در دنباله هندسی اگر $q > 0$ دنباله صعودی و اگر $q < 0$ دنباله نزولی است.

(۲) اگر a_m, a_n دو جمله متمایز از یک دنباله هندسی باشند آنگاه:

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$$

(۳) اگر a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند آنگاه:

$$b^2 = ac$$

(۴) اگر جمع شماره‌های دو گروه با هم برابر باشند، ضرب جمله‌ها نیز برابر است. (قانون اندیس‌ها)

الف) $m + n = r + s \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s$

ب) $m - n = r - s \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_r}{a_s}$

(۵) اگر a, b, c, d چهار جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند داریم:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

درباره m واسطه هندسی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد a, b تعداد m واسطه را طوری قرار دهیم که اعداد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی را بدهند، در این صورت داریم:

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

۵۵- بین ۳ و ۱۹۲ پنج جمله چنان قرار دهید که دنباله حاصل یک دنباله هندسی باشد.

۵۶- بین دو عدد ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید.

۵۷- اگر جمله دوم یک دنباله هندسی ۱۲ و جمله پنجم آن ۷۶۸ باشد:

الف) قدر نسبت این دنباله را بیابید.

ب) جمله چهارم چند است؟

۵۸- در یک دنباله هندسی داریم: $\frac{t_5 t_3}{t_4^2} = 16$ قدر نسبت را بدست آورید.

۵۹- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. نسبت جمله اول به جمله چهارم را بدست آورید.

۶۰- جمله چندم دنباله هندسی زیر $\frac{512}{729}$ است؟

۱۸, -۱۲, ۸, ...

۶۱- در الگوی زیر، شکل n-ام از چند مربع درست شده است؟ شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است.



۶۲- در دنباله هندسی $z, \dots, 4, y, x, 5$ حاصل $z - (x + y)$ را بدست آورید.

۶۳- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصلضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (تجربی ۹۰)

۶۴- جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$ (تجربی ۹۲)

۶۵- در یک دنباله حسابی و غیر ثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱ (تجربی ۸۸)

۶۶- اعداد 3^a ، $4\sqrt{2}$ ، 3^b سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند، واسطه عددی بین b, a کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\sqrt{2}$ (تجربی ۸۷)

۶۷- در یک دنباله حسابی، جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی صعودی اند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(تجربی ۸۷ خارج)

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{6}{5} \quad (۱)$$

یادداشت:

