فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

۱-۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

دو دسته‌ی مهم از مجموعه‌های اعداد عبارتند از:

۱- مجموعه‌ی اعداد حقیقی R، که شامل زیرمجموعه‌های زیر است.

- مجموعه‌ی اعداد طبیعی $N=\{1,2,3,\cdots\}$
- مجموعه‌ی اعداد حسابی $W=\{0,1,2,3,\cdots\}$
- مجموعه‌ی اعداد صحیح $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$
- مجموعه‌ی اعداد گویا $Q=\left\{\frac{p}{q}\middle|p,q\in Z,q\neq 0\right\}$

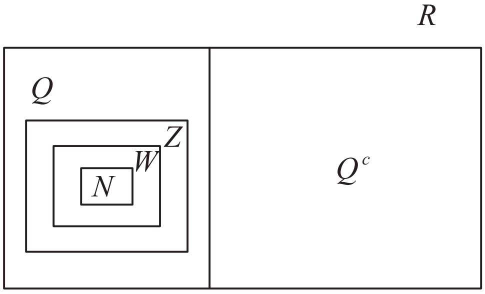
❖ مجموعه‌ی اعداد گویا، شامل مجموعه اعداد طبیعی، حسابی و صحیح است.

❖ مجموعه‌ی اعداد گنگ: هر عددی که گویا نباشد، یک عدد گنگ یا اصم است. مانند $\sqrt{2}$، π و ... .

$$Q^c=\{x|x\notin Q\}$$

❖ به راحتی می‌توان مشاهده نمود که: $Q\cap Q^c=\{\ \}$.

❖ مجموعه اعداد حقیقی $R=Q\cup Q^c=(-\infty,+\infty)$



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$
$Q^c \subset R$

۲- مجموعه اعداد مختلط: با فرض آن‌که معادله‌ی $x^2+1=0$ دارای جواب باشـــد، می‌توان مجموعه اعداد مختلط را به صــــورت $C=\{x+iy \mid x,y \in R, i^2=-1\}$ تعریف نمود. با این مجموعه، به‌طور کامل در دانشگاه آشنا خواهید شد.

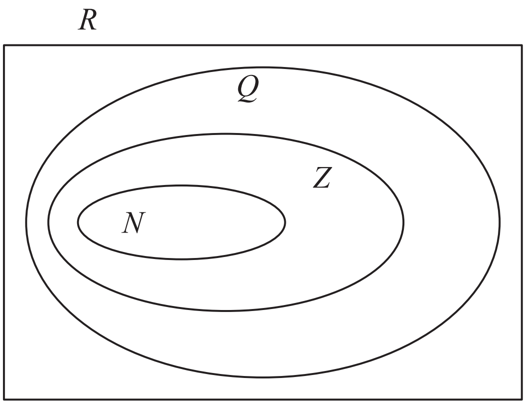
مثال ۱: اگر a و b اعداد گویا و $a(\sqrt{3}-1)+b(\sqrt{3}+2)=6$ باشند، مقدار $2a+3b$ کدام است؟

۱(۱ ۲ (۲ ۳ (۳ ٤ (٤

❖ بین هر نقطه روی محور اعداد حقیقی و مجموعه اعداد حقیقی تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. یعنی هر عضو مجموعه‌ی اعداد حقیقی را می‌توان به یک طریق روی محور اعداد نشان داد. از طرفی هر عدد روی محور اعداد متناظر با یک عضو از مجموعه اعداد حقیقی است.

❖ توجه نمایید که خاصیت فوق، الزاما در هر مجموعه‌ی اعدادی برقرار نمی‌باشـد. مثلاً مجموعه‌ی به نام مجموعه‌ی اعداد قطبی وجود دارد که از خاصیت فوق تبعیت نمی‌کند.

مثال ۲: شکل زیر را در نظر بگیرید. به هریک از سوالات زیر پاسخ مناسب دهید:



الف) مجموعه‌ی $R-Q$ چه نام دارد. ناحیه‌ی مربوط را در شکل فوق ها شور بزنید و دو عضو دلخواه آن‌را بنویسید.

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشد.

پ) اعداد زیر را درنظر بگیریدو تعیین کنید هر یک به کدام مجموعه‌ی اعداد تعلق دارد.

$$\sqrt{17},\ 0,\ 200,\ \frac{\pi}{2},\ 2/6,\ 2\sqrt{5},\ -9$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضایش بنویسید.

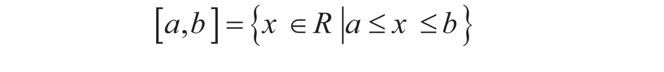
$$Z-W=\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$$

ث) مجموعه $W-N$ چند عضو دارد. اعضایش را در صورت وجود بنویسید.

فاصله یا بازه

برخی زیرمجموعه‌های، مجموعه‌ی اعداد حقیقی را می‌توان به‌صورت بازه نمایش داد. این بازه‌های به‌صورت زیر است. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه بوده و $a<b$ است.

- ❖ بازه بسته $[a,b]$



$$[a,b]=\{x\in R\,|\,a\le x\le b\}$$

❖ بازه باز (a,b)

$$(a,b)=\{x\in R\,|a<x<b\}$$

❖ بازه بسته از چپ $[a,b)$

$$[a,b)=\{x\in R\,|a\leq x<b\}$$

❖ بازه بسته از راست $(a,b]$

$$(a,b]=\{x\in R\,|a<x\leq b\}$$

به همین ترتیب می‌توان فاصله‌هایی مانند $(a,+\infty)$، $[a,+\infty)$، $(-\infty,b]$ و $(-\infty,b)$ را تعریف نمود. توجه نمایید که همواره فاصله در $+\infty$ و $-\infty$ به شکل باز است. عبارت‌های $+\infty$ و $-\infty$ عدد نمی‌باشند و فقط یک نماد هستند. $+\infty$ نشان‌دهنده آن است که از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی نیز بزرگتر است و $-\infty$ نماد آنست که از هر عدد بسیار کوچک منفی نیز کوچکتر است.

$$R=(-\infty,\infty)$$

❖ یک توسیع مجموعه اعداد حقیقی به واسطه افزودن $+\infty$ و $-\infty$ به آن حاصل می‌شود، یعنی $\bar{R}=[-\infty,\infty]$.

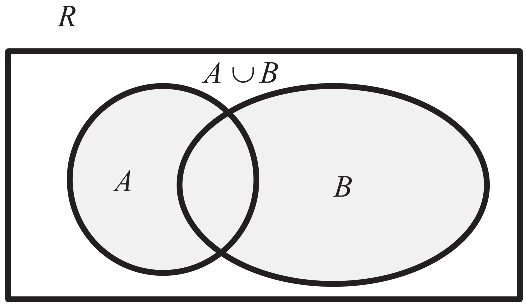
❖ بازه‌ها به دو شکل کراندار و یا بی کران هستند. اگر دست‌کم یک طرف بازه، نماد $+\infty$ یا $-\infty$ وجود داشته باشد، آنرا بی‌کران و در غیر این‌صورت آنرا کراندار می‌گویند.

۱–۱–۱ اعمال روی بازه ها

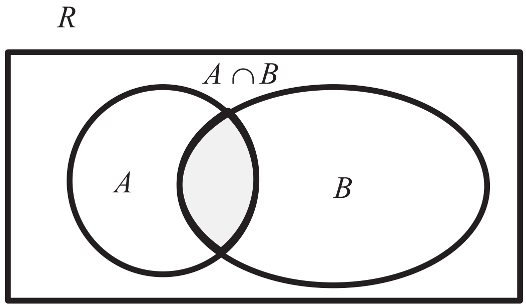
روی بازه‌ها می‌توان اعمال مختلفی از قبیل اجتماع، اشتراک، تفاضل، تفاضل متقارن و متمم‌گیری را انجام داد. در ادامه به توضیح هریک پرداخته خواهد شد.

❖ **اجتماع:** در دو یا چند بازه از اعداد حقیقی، اجتماع آن‌ها شامل تمام اعدادی است که دست‌کم متعلق به یک بازه باشد. پس می‌تواند نوشت: $A\cup B=\{x\in R\,|x\in A\vee x\in B\}$ که در آن $\vee$

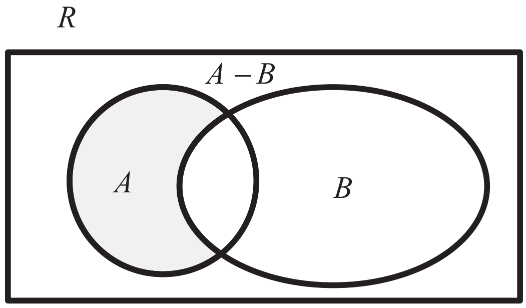
نشان‌دهنده‌ی "یا" است.



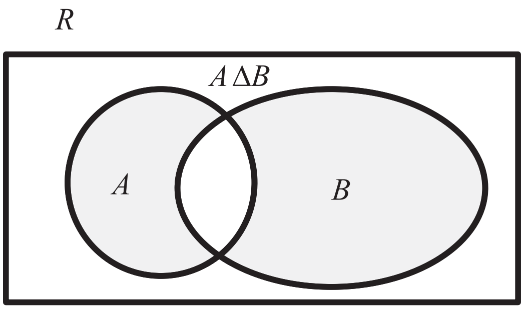
❖ **اشتراک:** در دو یا چند بازه از اعداد حقیقی، اشتراک آن‌ها شامل تمام اعدادی است که همزمان متعلق به همه بازه‌ها باشد. پس می‌تواند نوشت: $A \cap B = \{x \in R | x \in A \wedge x \in B\}$ که در آن $\wedge$ نشان‌دهنده‌ی "و" است.



❖ **تفاضل:** در دو یا چند بازه از اعداد حقیقی، تفاضل $A - B$ شامل تمام اعدادی است که فقط متعلق به A باشد، پس می‌تواند نوشت: $A - B = \{x \in R | x \in A \wedge x \notin B\}$.

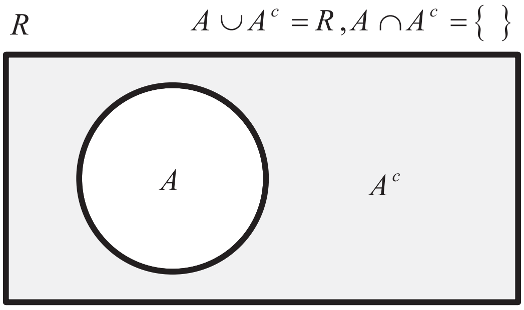


❖ **تفاضل متقارن:** در دو یا چند بازه از اعداد حقیقی، تفاضل متقارن $A \Delta B$ شامل تمام اعدادی است که فقط متعلق به یکی از A و B باشد، پس می‌تواند نوشت: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ یا $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.



❖ **متمم یک بازه:** متمم یک بازه حقیقی شامل تمام اعداد حقیقی ا ست که متعلق به بازه نبا شند، یعنی $A^c = R - A = \{x \in R | x \notin A\}$.

$A \cup A^c = R, A \cap A^c = \{\ \}$



مثال ۳: با توجه به توضیحات داده شده در خصوص بازه‌ها، حاصل هر یک را بیابید.

1. $(-1,3) \cup [2,7] =$
2. $[-3,7) \cup [2,6] =$
3. $[2,5] \cap [5,7] =$
4. $(-\infty,1) \cap [1,+\infty) =$
5. $(-6,2] - (1,7) =$
6. $[1,+\infty) - [-2,4] =$
7. $[-1,5] - [-2,7] =$
8. $[1,7] \Delta (-2,4) =$
9. $[-1,5) \Delta [2,8] =$
10. $(-\infty,4] \Delta (-3,2) =$

❖ همواره در بازه‌ی $[a,b]$ مقدار a نابزرگتر از مقدار b اســـت. بنابراین در اجتماع دو فاصـــله، اگر

کران بالای بازه‌ی اول از کران پایین بازه دوم، کوچکتر نباشـــد آنگاه بازه‌ای که کران پایینش، کوچکترین مقدارکران پایین بازه‌هاو کران بالایش، بزرگترین مقدار کران بالای بازه‌ها ا ست، حا صل اجتماع آن دو بازه می‌باشد.

❖ در اشـتراک دو بازه، همواره کران پایین حاصـل اشـتراک، بزرگترین مقدار کران پایین بازه‌ها و کران بالای حاصـل اشـتراک، کوچکترین کران پایین بازه ها اسـت. اگر بازه به‌دسـت آمده $[a,b]$ شـرط $a \le b$ را دا شته با شد، همان $[a,b]$ حا صل ا شتراک ا ست و در غیر این صورت حا صل ا شتراک مجموعه تهی می‌باشد.

مثال ٤: اگر $B_n = (n-1, n+1)$ **باشد مطلوبست:**

1. $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 =$
2. $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 =$
3. $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k =$
4. $\bigcup_{k=1}^{20} B_k =$

مثال ٥: اگر $A_n = \left[-\frac{1}{n}, n\right]$ **باشد، مطلوبست** $\bigcup_{n=1}^{10} A_n$ و $\bigcap_{n=4}^{8} A_n$.

❖ اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آن‌گاه تعداد زیر مجموعه‌های آن 2^n است.

مثال ٦: تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in N, x^3 - x = 0\}$ را بیابید.

مثال ۷: اگر عدد ۲ به بازه‌ی $(2m-3, 3m+6]$ تعلق داشته باشد، آنگاه m کدام بازه است؟

۱) $m \in \left[-\frac{5}{3}, 2\right]$ ۲) $m \in \left(-\frac{5}{3}, 2\right)$ ۳) $m \in \left(2, \frac{7}{3}\right]$ ٤) $m \in \left[2, \frac{7}{3}\right]$

مثال ۸: اگر $[a,1] \cup [-1,b] = [-1,9]$، آنگاه $2a-3b$ کدام است؟

۱) **−۲۵** ۲) **−۲٦** ۳) **−۲۹** ٤) **−۲۸**

مثال ۹: اگر $A = \{x \mid -4 \le x < 2\}$ و $B = \{x \mid -2 < x \le 6\}$ و $A, B \subset R$، آنگاه $A \cap B$ **کدام است؟**

۱) $(-2,3)$ ۲) $(-3,2]$ ۳) $(-2,2)$ ٤) $(-3,2)$

مثال ۱۰: اگر $A = \{x \mid -2 \le x < 2\}$، $B = \{x \mid x \ge 0\}$ و $C = \{x \mid -3 < x \le 1\}$ و $A, B, C \subset R$، آنگاه $(A-C) \cap B$ کدام است؟

۱) $(1,2]$ ۲) $[1,2)$ ۳) $(1,2)$ ٤) $[1,2]$

مثال ۱۱: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، حاصل $(A-B) \cup (B-A) \cap (A \cup B)'$ برابر است با:

۱) $\varnothing$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A\cap B$ ۴) مجموعه مرجع

مثال ۱۲: حاصل عبارت $\left[(A-B)\cup(B-A)\right]\cup(A\cap B)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

مثال ۱۳: اگر $A_n=[n-1,n+1]$، آن‌گاه مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{4}A_n-\bigcap_{n=1}^{3}A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x\,|1\le x\le 5\}$ ۲) $\{x\,|0\le x\le 5\}$ ۳) $\{x\,|0\le x\le 5,x\neq 2\}$ ۴) $\{x\,|1\le x\le 5,x\neq 2\}$

مثال ۱۴: اگر $A_n=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{n}<x\le\frac{2}{n}\right\},n\in N$، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ کدام است؟

۱) $(0,1]$ ۲) $[0,1)$ ۳) $(0,2]$ ۴) $[0,2)$

مثال ۱۵: در $\{(2x-5),(25-3x)\}=\{a\}$ مقدار a چقدر است؟

۱) $\frac{25}{3}$ ۲) 7 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 6

مثال ۱۶: اگر $A=\{x\,|0<x\le 3,x\in R\}$ و $B=\{x\,|-1<x\le 1,x\in R\}$ با شد، حا صل $(A\cup B)'$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-1]\cup(3,\infty)$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $(-\infty,-1)\cup[3,\infty)$ ٤) $(-1,3)$

مثال ۱۷: اگر $A_k=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{k}\le x\le\frac{2}{k},k\in N,x\in R\right\}$ باشد $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ کدام است؟

۱) $(0,2)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $[0,1)$ ٤) $[0,2]$

مثال ۱۸: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $(A-B)\cup(B-A)=\{1,4\}$ آنگاه مجموعه‌ی B کدام است؟

۱) $\{2,3,4\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{1,4\}$ ٤) $\{1,2,3,4\}$

مثال ۱۹: اگر $A_n=\left(\frac{1}{n},\frac{3n+1}{n}\right)$ و $n\in N$ باشد حاصل $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ کدام است؟

۱) $(0,3)$ ۲) $(1,3)$ ۳) $[1,3)$ ٤) $(1,3]$

۲-۱ مجموعه متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن مشخص باشد و بتوان آن را به‌صورت یک عدد حسابی بیان نمود را مجموعه متناهی می‌گویند. اگر A یک مجموعه باشد، تعداد اعضای آن را با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نشان داده و به آن عدد اصلی یا کاردینال A می‌گویند.

هر مجموعه‌ای که متناهی نباشد، را نامتناهی می‌نامند. در واقع مجموعه نامتناهی را بی‌پایان می‌نامند.

۱-۲-۱ مجموعه‌ی تهی

مجموعه‌ی فاقد عضو را مجموعه تهی می‌نامند و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهند.

❖ توجه شود که مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{\varnothing\}$ تهی نمی‌باشند و هر یک دارای یک عضو هستند.

۱-۲-۲ مجموعه‌ی یکانی

مجموعه‌ای را که فقط دارای یک عضو است را مجموعه‌ی یکانی می‌نامند، مانند $\{0\}$ و $\{\varnothing\}$ که مجموعه‌های یکانی هستند.

❖ **تعداد اعداد صحیح درون یک بازه:**

اگر بازه به شکل (a,b) باشد، تعداد اعداد صحیح درون آن $b-a-1$ است. اگر بازه به‌صورت $[a,b)$ یا $(a,b]$ باشد تعداد اعداد صحیح درون آن $b-a$ **و برای بازه بسته** $[a,b]$ **برابر** $b-a+1$ **است.**

مثال ۲۰: در هر یک از بازه‌های زیر چند عدد صحیح وجود دارد؟

$$[-2,158],\ [2,7),\ (-4,5)$$

مثال ۲۱: اگر $A_n=[2-n,n]$ باشد، حاصل $\bigcup_{n=1}^{10} A_n$ و $\bigcap_{n=2}^{10} A_n$ را به‌دست آورید و بیان کنید که در $\bigcup_{n=1}^{10} A_n - \bigcap_{n=2}^{10} A_n$ چند عدد طبیعی و چند عدد صحیح وجود دارد.

۱-۲-۳ زیرمجموعه

مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی B می‌نامند هرگاه، هر عضو A عضوی از B باشد در این‌صورت می‌نویسیم $A\subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

❖ تعلق دا شتن و زیرمجموعه بودن دو مفهوم جدا از هم ا ست، یعنی اگر $A=\{a,b,c\}$ آنگاه $a \in A$ یا $d \notin A$ اما $\{a,b\} \subset A$ و $\{a,b,c\} \subseteq A$ یا $\{d\} \not\subset A$.

چند خاصیت درباره زیر مجموعه

- هر مجموعه، زیر مجموعه‌ی خودش است یعنی $A \subseteq A$ (خاصیت بازتابی).
- $\varnothing$، زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.
- اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ آنگاه $A=B$ و برعکس(خاصیت پادتقارنی).
- اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ آنگاه $A \subset C$ (خاصیت متعدی).
- همواره $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$.
- در داخل مجموعه ترتیب نوشتن اعضا مهم نیست و اعضای تکراری فقط یکبار نوشته می‌شوند.
- اگر $A \subset B$ و $A \neq B$ باشد آنگاه A را زیر مجموعه محض یا سره‌ی B می‌نامند. بنابراین اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد آنگاه دارای 2^n زیرمجموعه و 2^n-1 زیرمجموعه سره خواهد بود.
- تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی ($r \leq n$) برابر است با: $C(n,r)=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ که در آن $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1$ است.

مثال ۲۲: تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ را بیابید و آنها را بنویسید.

۴-۲-۱ مجموعه‌ی توانی

مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی می‌نامند و با نماد $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۲۳: اگر $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{1,2\}\}$، آنگاه مجموعه توانی A را به‌دست آورید. این مجموعه چندعضو دارد و به‌صورت یک فرمول در حالت کلی بیان کنید.

مثال ۲۴: اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k+1$ عضوی ۸ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $2k+1$ عضوی چگونه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

مثال ۲۵: تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۱۰ عضوی کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۶۰

مثال ۲۶: دو مجموعه‌ی A و B بر روی هم ۱۴ عضو دارند، اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A، ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی B باشد، حاصل‌ضرب اعضای دومجموعه‌ی A و B چگونه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۴ ۳) ۴۲ ۴) ۴۰

مثال ۲۷: مجموعه‌ی $P(P(P(\varnothing)))$ را بنویسید. آیا این مجموعه بیش از مجموعه $P(P(\varnothing))$ عضو دارد؟

مثال ۲۸: اگر ۲ عضـــو از اعضـــای مجموعه A را حذف نماییم، از تعدد زیرمجموعه‌های آن ۳۸٤ واحد کم می‌شود. مجموعه A چند عضو دارد؟

مثال ۲۹: اگر $A=\{3^x \mid x\in N\}$ و $B=\{3^{|x|} \mid x\in Z\}$، تعداد زیرمجموعه‌های $B-A$ **کدام است؟**

❖ اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو با شد، در این صورت تعداد عضوهای $\underbrace{P(P(P(\cdots P}_{k}(A)))\cdots)$ برابر است با $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}$. در واقع به تعداد k بار به توان می‌رسد.

مثال ۳۰: اگر $A=\{a\}$ در این‌صورت تعداد عناصر $P(P(P(A)))$ کدام است؟

۱) ۸ **۲) ۱٦** **۳) ۳۲** **٤) ٦٤**

❖ اگر ترکیب a شی از n شی با ترکیب b شی از n شی ($a\le n, b\le n$) آنگاه یکی از دو حالت زیر برقرار است:

$$a=b \quad \text{یا} \quad a+b=n$$

مثال ۳۱: هرگاه در یک مجموعه‌ی n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی برابر باشد در این‌صورت مقدار n برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

مثال ۳۲: در صورتی‌که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k+1$ عضوی ٤۹ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی $k-1$ عضوی باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ٤ ٤) ۵

مثال ۳۳: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $3k+3$ عضوی ٥٦ زیرمجموعه از یک مجموعه $2k$ عضوی بیشتر است، عدد k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

مثال ۳٤: اگر $P(A)$ دارای ۱۲۸ عضو باشد، مجموعه‌ی A دارای چند زیرمجموعه‌س ۲ عضوی است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ٤) ۲۳

۵-۲-۱ متمم یک مجموعه

فرض کنید A یک مجموعه از مجموعه مرجع U با شد در این صورت متمم مجموعه‌ی A به صورت زیر است:

$$A' = A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- $(A')' = A$
- $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

- ❖ $U'=\varnothing, \varnothing'=U$
- ❖ $A\subset B \Leftrightarrow B'\subset A'$
- ❖ $(A\cup B)'=A'\cap B', (A\cap B)'=A'\cup B'$ (قانون دمرگان)
- ❖ $A\cap A'=\varnothing, A\cup A'=U, A-A'=A, A\Delta A'=A\cup A'=U, U-A=A', U-A'=A$
- ❖ $(A\cup B)\cup(A\cup B)'=U$
- ❖ تعداد اعضای مجموعه $A\cup B$ برابر است با $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.
- ❖ اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند آنگاه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

مثال ۳۵: اگر $A_n=\left[0,\frac{1}{n}\right]$ باشد $\bigcup_{n\in N} A_n$ کدام است؟

۱) $[0,1)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $(0,1]$ ٤) $(0,1)$

مثال ٣٦: در صورتی که A و B دو مجموعه باشند، $A\cap B=\{1,2,3\}$، $n(A)=5$ و $n(B)=7$، آنگاه عدد اصلی مجموعه $A\cup B$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ٤) ۱۱

مثال ۳۷: در یک کلاس ۲۰ نفری، ١٦ نفر فوتبال و ۱۲ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۲ نفر هم از ورزش معاف هستند. معین کنید چند نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

مثال ۳۸: در صورتی که M مرجع، A و B **زیر مجموعه‌هایی از** M و $n(M)=70$، $n(B')=38$، $n(A\cap B)=12$ و $n(A)=42$ **باشند،** $n(A'\cap B')$ **کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ٦ ٤) ۱۲

۶-۲-۱ تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوییم اگر و فقط اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد.

مثال ۳۹: اگر دو مجموعه‌ی $A=\{x+3y,3\}$ و $B=\{x+y,7\}$ مســـاوی باشـــند، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

۷-۲-۱ مجموعه مرجع

مجموعه مرجع به مجموعه‌ای گفته می شود که شامل تمام ع ضوهای مجموعه‌های مورد برر سی با شد. اگر اع ضای یک مجموعه را در نظر بگیریم، می‌توان این مجموعه را زیر مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی کلی‌تر دان ست. این مجموعه‌ی کلی را مجموعه مرجع می‌نامند و با حرف M یا U نشان می‌دهند.

بنابراین اگر U مجموعه‌ی مرجع باشـــد و $A \subset U$، آنگاه $U-A$ را متمم مجموعه‌ی A می‌نامیم و با A' نشان می‌دهیم.

$$A'=\{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

مثال ٤۰: اگر مجموعه اعداد طبیعی مجموعه مرجع و $A=\{2k \mid k \in N\}$، متمم مجموعه A را با اعضـا و با نماد ریاضی نشان دهید.

مثال ٤١: اگر تعداد اعضــای مجموعه B، ۳ عدد کمتر از تعداد اعضــای A و حاصــل ضــرب تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A در تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B، برابر ۳۲ باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ٤ ۳) ۳ ٤) ٥

مثال ٤۲: اگر $A-B=A\cup B$، آنگاه کدام درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $B=A'$ ۳) $A=\varnothing$ ٤) $B=\varnothing$

مثال ٤۳: اگر $B-C=\varnothing$ آنگاه کدام نادرست است؟

۱) $B\cup C=C$ ۲) $C'\subset B'$ ۳) $C\cap B=B$ ٤) $C\subset B$

مثال ٤٤: اگر $B-A=B$ در این صورت حاصل $A-[B-(A-B)]$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ٤) $A\cup B$

مثال ٤٥: اگر $A\subset B$ و $B\subset C$، در این‌صورت حاصل $\left[(C'\cap A')\cap(B'\cap A')\right]$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) C' ۴) B'

مثال ٤٦: متمم مجموعه‌ی $\left[(A-B)-A\right]\cup\left[(A\cap B)-A\right]$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) M ۳) A' ٤) A

مثال ٤٧: مجموعه‌ی $(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap C)\cup(B'\cap C)$ برابر است با:

۱) C ۲) A ۳) B ٤) $\varnothing$

مثال ٤٨: مجموعه‌ی $\left[(A\cup A)-A\right]\cap\left[B\cap(B\cup A)\right]'\cap\left[A\cup(A\cap B)\right]'$ برابر است با:

۱) $\varnothing$ ۲) M ۳) A ٤) B

مثال ٤٩: اگر A **مجموعه اعداد دو رقمی و** $B=\{7k \mid k\in A\}$، آنگاه مجموعه توانی $(B\cap A)$ چند عضو دارد؟

۱) ٦ ۲) ۸ ۳) ۱٦ ٤) ۳۲

مثال ۵۰: مجموعه‌ی $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup C')\cap(A\cup B')$ برابر است با:

۱) A ۲) $A\cup B$ ۳) B ٤) C

مثال ۵۱: در $\{(2x-5),(25-3x)\}=\{a\}$، a چقدر است؟

۱) $\frac{25}{3}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{5}{2}$ ٤) ٦

مثال ۵۲: اگر مجموعه E از مجموعه F یک عضو بیش‌تر داشته باشد و اختلاف زیر مجموعه‌های آن ۳۲ باشد، مجموعه‌ی F چندعضوی است؟

۱) ٦ ۲) ٤ ۳) ۳ ٤) ۵

مثال ۵۳: اگر به‌ازای هر دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم $(A\cup B)\subset(A\cap B')$، آنگاه کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است؟

۱) $A=\varnothing$ ۲) $A'=B$ ۳) $B=\varnothing$ ۴) $A=B'$

مثال ٥٤: اگر $A=\{x\,|0<x\leq 3,x\in R\}$ و $B=\{x\,|-1<x\leq 1,x\in R\}$ با شد، حا صل $(A\cup B)'$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-1]\cup(3,\infty)$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $(-\infty,-1)\cup[3,\infty)$ ٤) $(-1,3)$

مثال ٥٥: مجموعه‌ی $(C-E)\cap(A-B)\cap(A-C)\cap(B-D)$ **برابر است با:**

۱) $\varnothing$ ۲) M ۳) $A\cap B$ ٤) $E\cap D$

مثال ٥٦: در یک کلاس ٤٠ نفری، ٣٢ نفر در درس ریاضـــی و ٢٤ نفر در درس آمار تجدید آورده‌اند و فقط ٤ نفر قبول شده‌اند. چند نفر در هر دو درس تحدید آورده‌اند.

۱) ٢٠ ۲) ١٢ ۳) ٢٤ ٤) ١٨

مثال ٥٧: مجموعه‌ای n عضو دارد و به آن سه عضو دیگر اضافه شد. در این‌صورت تعداد زیر مجموعه‌های آن چند برابر زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی اولیه است؟

۱) ٣ ۲) ٤ ۳) ٦ ٤) ٨

مثال ۵۸: اگر $A=\{x \mid |x-1|\geq 2\}$ و $B=\{x \mid x^2-3x\geq -2\}$ باشد، $(A\cup B)-(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $R-(-1,2)$ ۲) $(-1,1]\cup[2,3)$ ۳) $(-1,3)$ ٤) $[-1,1)\cup[2,3]$

مثال ۵۹: در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان اعلام کردند که د این مدت از هر دو شـــرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دستِ‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

مثال ٦۰: در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ١٤ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوبست:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از دو گروه نیستند.

۳-۱ الگو و دنباله

یک دنباله از اعداد حقیقی، شامل تعدادی از اعداد می‌باشد که به‌طور ترتیبی در کنار یکدیگر مرتب شده‌اند.

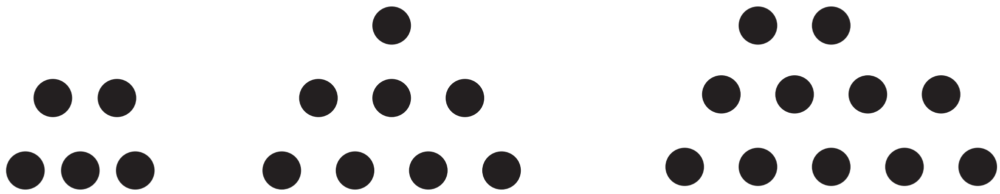
جمله‌ی اول یک دنباله را با نماد a_1، جمله دوم را با نماد a_2 و به همین ترتیب جمله‌ی nام را با نماد a_n نشـــان می‌دهیم. اگر تعداد جملات یک دنباله متناهی باشـــد، دنباله را متناهی و در غیر این‌صـــورت نامتناهی می‌گویند.

به جمله‌ی nام یک دنباله، جمله‌ی عمومی آن می‌گویند که مهمترین جمله‌ی دنباله نیز می‌باشد.

❖ توجه شود که جملات برخی از دنباله‌ها دارای نظم و الگوی مشخصی هستند و در حالیکه سایر دنباله‌ها دارای ویژگی فوق نمی‌باشند. از میان دنباله‌های با الگوی منظم، برخی دارای اسامی خاصی هستند. مانند دنباله حسابی، هندسی، فیبوناچی و ... .

مثال ٦١: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

شکل سوم　　شکل دوم　　شکل اول

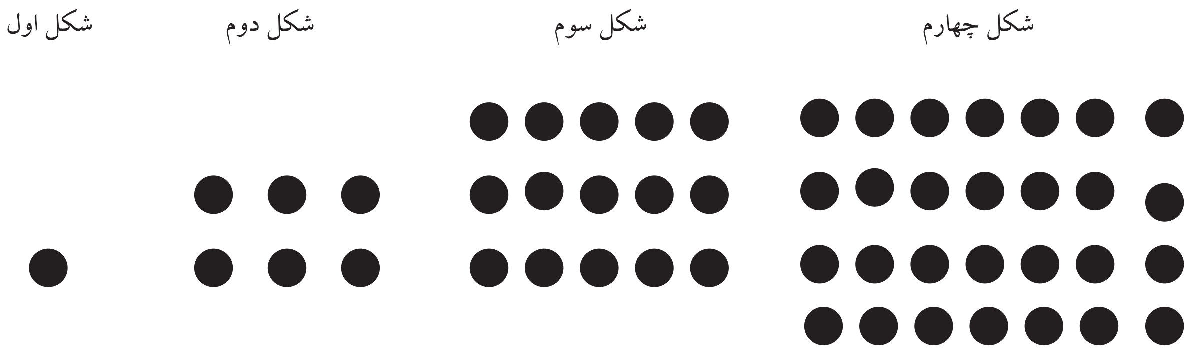


اگر a_n، جمله‌ی nام الگوی فوق باشـد، مقدار a_4 را بیابید. سـپس مقدار a_n را بر حسـب n بیابید. تعداد

گوی‌های شکل بیستم چقدر است؟

با توجه به الگوی به‌دست آمده، چندمین شکل دارای ۷۷ گوی خواهد بود؟

مثال ۶۲: الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) مقادیر دنباله‌ای را با توجه به اشکال فوق بیابید.

ب) جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

پ) جمله‌ی دهم، چه مقدار را می‌دهد؟

مثال ۶۳: دنباله‌ی $3,6,9,\cdots$ را در نظر بگیرید. جمله‌ی عمومی دنباله را یافته و سپس مقدار a_{100} را بیابید.

مثال ۶۴: جمله‌ی دهم دنباله‌ی $a_n = n^2 - 5$ با کدام جمله‌ی دنباله $t_n = 3n - 7$ برابر است؟

مثال ۶۵: جمله‌ی عمومی هر یک از دنباله‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) دنباله‌ی اعداد طبیعی

ب) دنباله‌ی اعداد زوج طبیعی

پ) دنباله مربعات اعداد طبیعی

مثال ٦٦: جمله‌ی عمومی دنباله‌ای $a_n = \frac{n}{n^2 - 48}$ است. کدام جمله برابر $\frac{1}{2}$ است؟

مثال ٦٧: اگر $a_{2n+1} = 3n^2 + n$ باشد، جمله‌ی نهم کدام است؟

❖ دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به سه شکل نوشته می‌شوند:

۱- جملات دنباله: $2, 4, 6, 8, \cdots$

۲- جمله‌ی عمومی دنباله: $a_n = 2n$

۳- رابطه بازگشتی: $a_{n+1} = 3a_n - 7,\ a_1 = 4$.

در رابطه‌ی بازگشتی ارتباط هر جمله با جمله قبلی یا جملات قبلی آن معلوم است. اختلاف بزرگترین اندیس از کوچکترین اندیس را مرتبه‌ی آن رابطه بازگشتی می‌گویند. به تعداد عدد مرتبه‌ی یک رابطه بازگشتی نیاز به جملات معلوم در یک رابطه بازگشتی نیز داریم.

روابط بازگشتی به‌صورت خطی و غیرخطی، و در هر نوع از نوع همگن و ناهمگن نیز می‌باشند.

برای مثال، رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+2} = a_n - 3a_{n+1}$ مرتبه‌ی دوم بوده و همگن می‌باشد. برای تعیین جمله‌ی

عمومی به معین بودن دو جمله از دنباله نیز نیاز داریم.

درباره روابط بازگشتی و نحوه حل آنها، بعداً توضیحات تکمیلی آورده خواهد شد.

❖ اگر اختلاف جملات متوالی در یک دنباله، عددی ثابت با شد آنگاه الگوی آن خطی ا ست و در غیر این صورت غیرخطی می‌با شد. برای یافتن الگوی یک دنباله غیرخطی یکی از روش‌های مهم روش تعیین ضرایب می‌باشد. یکی از مهمترین قالب‌های غیر خطی به‌صورت $a_n = an^2 + bn + c$ می‌باشد که به واسطه یافتن ضرایب مجهول، جمله عمومی دنباله حاصل می‌شود.

مثال ٦٨: جمله‌ی عمومی دنباله $\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{5}{15},\frac{7}{20},\cdots$ **را بیابید.**

❖ با توجه به چهارجمله فوق، جمله عمومی دنباله می‌تواند به‌صورت $a_n = \frac{2n-1}{5n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ است. واضح است که الزامی ندارد که در جملات بعدی نیز دو دنباله، یکسان با شند. بنابراین جمله‌ی عمومی یک دنباله نمی‌تواند منحصربه‌فرد با شد. دنباله می‌تواند جملات عمومی دیگری هم داشته باشد، ولی در این نوع مسائل یافتن ساده‌ترین جمله عمومی مدنظر است.

مثال ٦٩: جمله‌ی عمومی دنباله $\frac{2}{7},\frac{5}{11},\frac{10}{15},\frac{17}{19},\cdots$ **را بیابید.**

۱–۳–۱ تساوی دو دنباله

دو دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ برابر هستند هرگاه برای هر n طبیعی داشته باشیم $x_n = y_n$.

مثال ٧٠: ده جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناچی را بنویسید.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \ge 3$$
$$a_1 = a_2 = 1$$

مثال ۷۱: n نقطه‌ی متمایز در یک صفحه داریم که هیچ سه نقطه آن بر یک ا ستقامت نی ستند. اگر a_n تعداد پاره خط‌های متمایزی با شند که این نقاط را به هم و صل میکند، پنج جمله اول این دنباله را بنویسید و ساده‌ترین جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

❖ اگر n نقطه متمایز داشته باشیم که هیچ سه نقطه‌ی آن بر یک استقامت نباشند یک n ضلعی محدب ت شکیل می شود، می‌خواهیم مجموع تعداد ا ضلاع و تعداد قطرهای آن را بیابیم. n ضلعی محدب دارای n ضلع و $\frac{n(n-3)}{2}$ قطر است، بنابراین:

$$\text{مجموع اضلاع و قطرها} = n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n+n(n-3)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین مجموع تعداد کل اضلاع و قطرها در یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد.

مثال ۷۲: دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = n^2 - n$ مفروض است. عدد ۷۲ و عدد ۱۲۵ نسبت به جملات این دنباله چه وضعی دارند؟

مثال ۷۳: نخستین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{2n}{n^2+3}$ که کوچکتر از $\frac{1}{20}$ باشد، کدام است؟

مثال ۷۴: در روی محیط دایره‌ای، n نقطه‌ی متمایز وجود دارد. دنباله تعداد وترهای متمایز را تشکیل دهید و جمله‌ی عمومی آن‌را بنویسید.

مثال ۷۵: مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد مفروض است. اگر وسط‌های اصلاع را به هم وصل کنیم مثلث جدیدی حاصل می‌شود، اگر وسط‌های اصلاع مثلث جدید را به هم وصل کنیم مثلث سومی حاصل می‌شود و این عمل را بی‌شمار دفعه تکرار می‌کنیم.

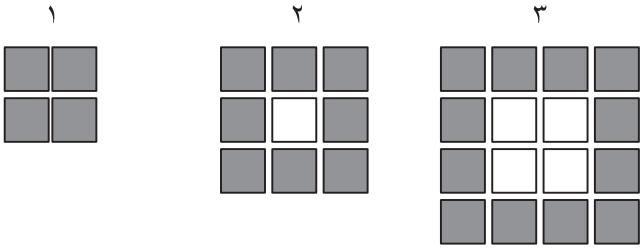
الف) دنباله‌ی محیط‌های مثلث‌ها را بنویسید.

ب) دنباله‌ی ارتفاع‌های مثلث‌ها را بیابید.

ج) دنباله‌ی مساحت‌های مثلث‌ها را بیابید.

د) دنباله‌ی مساحت‌های دایره‌های محیطی مثلث‌ها را بنویسید.

مثال ۷۶: شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



الف) توضیح دهید چرا الگوی فوق خطی است.

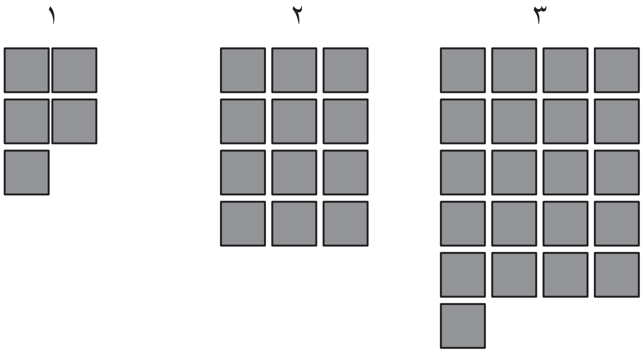
ب) با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه‌ی $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به‌دست آورید.

ج) شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

د) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

برخلاف یک الگوی خطی، یک الگو می‌تواند غیرخطی نیز باشد.

مثال ۷۷: در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



الف) آیا این الگو خطی است؟ چرا؟

ب) یک الگو برای مسأله‌ی فوق پیدا کنید؟

ج) جمله‌ی عمومی مسأله فوق را بنویسید.

۴–۱ تصاعد عددی (حسابی)

یکی از دنباله‌های معروف دنباله‌ای است که اصطلاحاً به آن تصاعد عددی می‌گویند و در آن هر جمله برابر است با جمله قبل به اضافه عددی ثابت. این عدد ثابت را قدرنسبت گویند و با حرف d یا r (r یا d اعداد حقیقی هستند).

دنباله $3,7,11,15,\cdots$ یک تصاعد عددی است که در آن $a_1=3$ و $d=4$ است.

مثال ۷۸: در یک الگوی خطی، جمله چهارم ۱۷ و جمله دهم ۴۱ است. جمله عمومی الگو را بیابید.

در حالت کلی دنباله تصاعد عددی به صورت زیر است.

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & (a_1+d), & (a_1+2d), & \cdots, & (a_1+(n-1)d),\cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & t_2 & t_3 & & t_n \end{array}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی در یک تصاعد عددی به شکل $t_n=a_1+(n-1)d$ است.

۱–۴–۱ نکات مهم

۱- هرگاه x، y و z سه جمله متوالی یک تصاعد عددی باشند آنگاه: $2y=x+z$.

۲- جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی nام در یک تصاعد عددی عبارت است از: $a_n=a_1+(n-1)d$.

۳- در هر تصاعد عددی داریم: $a_m-a_n=(m-n)d$.

مثال ۷۹: در یک تصاعد عددی $a_{10}=24$ و $a_{15}=39$، جمله‌ی چهلم کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۱ ۳) ۱۴۲ ۴) ۱۱۴

۴- در هر تصاعد عددی اگر $a_m = n$ و $a_n = m$ با فرض $m,n \in N, m > n$ باشد آنگاه $d = -1$ و $a_{m+n} = 0$.

مثال ۸۰: اگر $a_{15} = 20$ و $a_{20} = 15$ باشد آنگاه قدر نسبت را به‌دست آورده و a_{35} را تعیین کنید.

۵- قاعده‌ی اول اندیس: در هر تصاعد عددی داریم:

$$2a_n = a_{n+p} + a_{n-p}, \quad p,n \in N, p < n$$

مثال ۸۱: در یک تصاعد عددی، جمله‌ی اول دو برابر جمله‌ی بیستم است. جمله‌ی سی‌ونهم این تصاعد چند است؟

۶- قاعده‌ی دوم اندیس: در هر تصاعد عددی داریم:

با شرط $m + n = p + k$ و $m,n,p,k \in N$: $a_m + a_n = a_p + a_k$.

مثال ۸۲: در یک تصاعد عددی، مجموعه دو جمله نهم و بیست‌ونهم مساوی ۱۱۰۰ است. اگر جمله‌ی پانزدهم ۳۲ باشد، جمله‌ی بیست‌وسوم این تصاعد چند است؟

۷- مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی (S_n):

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$$

مثال ۸۳: در یک تصاعد عددی داریم $a_7 + a_{14} = 100$، مجموع بیست جمله‌ی اول این تصاعد چند است؟

۸- اگر در دستور $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$ قرار دهیم $a_n = a_1 + (n-1)d$ در این‌صورت:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

۹- در هر تصاعد عددی داریم: $a_n = S_n - S_{n-1}$.

مثال ۸۴: در یک تصاعد عددی داریم $S_n = n(4n+1)$، جمله‌ی دهم تصاعد را بیابید.

مثال ۸۵: در یک تصاعد عددی داریم $S_n = n(2n+5)$، حاصل a_n را بیابید.

مثال ۸۶: در یک تصاعد عددی داریم $a_n = 5n - 2$، حاصل S_n را بیابید.

۱۰-در هر تصاعد عددی داریم:

$$S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$$

مثال ۸۷: اگر مجموع شش جمله‌ی اول یک تصاعد عددی با مجموع ٤ جمله‌ی اول آن برابر باشد، مجموع ده جمله‌ی اول این تصاعد چند است؟

۱۱-اگر در یک تصاعد عددی، تعداد جمله‌ها فرد و جمله‌ی وسط (k) باشد، داریم:

$$2k = a_1 + a_n$$

۱۲- اگر در یک تصاعد عددی، تعداد جمله‌ها فرد و جمله‌ی وسط (k) باشد، داریم:

$$S_n = nk$$

❖ مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب $(2n-4)\times 90^\circ$ است.

مثال ۸۸: زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب، تصاعد عددی می‌سازند. جمله‌ی سوم یا زاویه‌ی وسطی چند درجه است؟

۱۳- اگر در یک تصاعد عددی داشته باشیم، $m \neq n$، $\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ آنگاه $d = 2a_1$.

۱۴- مجموع اعداد هر جدول ضرب مساوی مربع مجموع اعداد سطر اول.

مجموع اعداد سطر اول $= 1+2+3+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1)$

مجموع اعداد سطر دوم $= 2+4+6+\cdots+2n = 2(1+2+3+\cdots+n) = n(n+1)$

قدر نسبت $d = n(n+1) - \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n+1)$

بنابراین، جمله‌ی اول $a_1 = \frac{n}{2}(n+1)$، قدرنسبت $d = \frac{n}{2}(n+1)$ و تعداد جملات برابر n است.

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)=\frac{n}{2}\left(n\left(n+1\right)+(n-1)\times\frac{n}{2}\left(n+1\right)\right)$$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow S_n=\left(\frac{n}{2}\left(n+1\right)\right)^2=S_1^2$$

مثال ۸۹: مجموع اعداد یک جدول ضرب 15×15 چقدر است؟

-۱۵ اگر بین دو عدد a و b تعداد n واسطه‌ی عددی درج کنیم در این‌صورت $d=\frac{b-a}{n+1}$.

مثال ۹۰: اگر بین دو عدد ۱۰ و ١٤ تعداد ۳۹۹ واسطه‌ی عددی درج کنیم، جمله‌ی ۲۹۹ام این تصاعد چند است؟

-۱۶ اگر بین دو عدد a و b تعداد n واسطه‌ی عددی درج کنیم آنگاه مجموع واسطه‌ها برابر است با $S=\frac{n}{2}(a+b)$

مثال ۹۱:اگر بین دو عدد ۸ و ۲۲ تعداد ۲۰۰ واسطه عددی درج کنیم، مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

❖ در جمله‌ی عمومی یعنی $a_n=a_1+(n-1)d$، ضریب n برابر d است اما در $S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$، ضریب n^2 برابر $\frac{d}{2}$ است.

مثال ۹۲: در یک تصاعد عددی $S_n=2n\left(3n-1\right)$، آنگاه حاصل $a_{n+5}-a_{n-5}$ چقدر است؟

-۱۷ اگر دو تصاعد عددی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 داشته باشیم، چنانچه بین آنها جمله‌های مشترکی وجود داشته باشد، این جمله‌های مشترک تصاعد عددی جدیدی می سازند که قدرنسبت آن، کوچکترین مضرب مشترک d_1 و d_2 است.

مثال ۹۳: دو تصاعد عددی $3,7,\cdots$ و $3,6,\cdots$ داریم. مجموع ده جمله‌ی مشترک اولیه این دو تصاعد را بیابید.

مثال ۹۴: در یک تصاعد عددی $a_{20}=60$ و $a_{10}=20$ است. مقدار a_{100} کدام است؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۳۸۰ ۳) ۴۱۰ ۴) ۴۴۰

مثال ۹۵: در یک تصاعد عددی اگر $a_{10}=8$ و $a_8=10$ باشد، مقدار a_{18} کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

مثال ۹۶: در یک تصاعد عددی، $a_{2n+7}=25n-7$ است. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

مثال ۹۷: در یک ت صاعد عددی جمله‌ی اول دو برابر جمله‌ی دهم ا ست. جمله‌ی نوزدهم این ت صاعد چند است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ٤) ۰

مثال ۹۸: در یک تصاعد عددی $a_7+a_{14}=100$، مجموع بیست جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۰۰۱ ۳) ۱۰۰۲ ٤) ۱۰۰۳

مثال ۹۹: در یک تصاعد عددی $S_n=2n(n+4)$، جمله‌ی دهم این تصاعد چند است؟

۱) ٤٤ ۲) ٤٥ ۳) ٤٦ ٤) ٤٧

مثال ۱۰۰: در یک تصاعد عددی $S_n=2n(3n+5)$، مقدار a_n کدام است؟

۱) $12n+4$ ۲) $12n+7$ ۳) $12n+1$ ٤) $12n$

مثال ۱۰۱: در یک تصاعد عددی $a_n=12n+4$ است، مقدار S_n کدام است؟

۱) $6n^2$ ۲) $6n^2+10n$ ۳) n^2+1 ٤) $10n^2+6n$

مثال ۱۰۲: بین دو عدد ۵ و ۱۰، چهارصد و نود و نه واسطه عددی درج کرده‌ایم. جمله‌ی سیصدونودونهم این تصاعد کدام است؟

۱) 8.96 ۲) 8.97 ۳) 8.98 ٤) 8.99

مثال ۱۰۳: اگر دو تصاعد عددی به شکل $5,7,\cdots$ و $4,7,\cdots$ داشته باشیم، مجموع ۱۰ جمله‌ی مشترک آن کدام است؟

۱) ۳۱۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۳۳۰ ٤) ۳٤۰

مثال ۱۰٤: جواب معادله‌ی $(1+x)+(4+x)+(7+x)+\cdots+(28+x)=155$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 3 ۳) 1 ٤) 2

مثال ۱۰۵: اندازه‌های زوایای داخلی یک n ضلعی محدب تصاعد عددی می‌سازد. اگر کوچکترین زاویه ۱۱۰ درجه و بزرگترین زاویه ۱۷۰ درجه باشند، مقدار n کدام است؟

۱) ٦ ۲) ۷ ۳) ۸ ٤) ۹

مثال ۱۰۶: حاصل عبارت $30+\frac{55}{2}+\cdots+\frac{15}{2}+5$ برابر است با:

۱) $\frac{375}{2}$ ۲) $\frac{385}{2}$ ۳) $\frac{395}{2}$ ٤) $\frac{405}{2}$

مثال ۱۰۷: حاصل $S=100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1^2$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۳۰۲۵ ۳) ٤۰٤۰ ٤) ٤۵٤۵

مثال ۱۰۸: مجموع اعداد یک جدول ضرب 10×10 چقدر است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ٤۰٤۵ ۳) ۳۰۲۵ ٤) ۲۰۲۵

مثال ۱۰۹: یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت به تعداد عدد ساعت زنگ می‌زند. در ضمن، این ساعت روی (۱۵ دقیقه) یک زنگ و روی (۳۰ دقیقه) دو زنگ و روی (٤۵ دقیقه) سه زنگ می‌زند. این ساعت در شبانه‌روز چند زنگ می‌زند؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۳۲۰ ٤) ۳٤۰

مثال ۱۱۰: اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی با قدرنسبت (d) می سازند. شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر است با:

۱) d ۲) $2d$ ۳) $\frac{d}{2}$ ۴) $\frac{3d}{2}$

مثال ۱۱۱: اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازند، ضلع وسطی این مثلث کدام است؟ (d قدر نسبت تصاعد است).

۱) $2d$ ۲) $3d$ ۳) $4d$ ۴) $5d$

مثال ۱۱۲:اگر در یک تصاعد عددی $a_{20}=40$ و $a_{30}=80$ باشد آنگاه a_{80} کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۰۰

مثال ۱۱۳: در یک تصاعد عددی $S_n=n(3n+1)$ آنگاه $a_{n+6}-a_{n-4}$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

مثال ۱۱٤: در یک تصاعد عددی $S_6 = S_4$، مقدار S_{10} کدام است؟

۱) صفر ۲) ٦۰ ۳) ٤۰ ٤) ۱۰۰

مثال ۱۱۵: مجموع کلیه اعداد دو رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است چند است؟

۱) ۷۱٤ ۲) ٦٤۲ ۳) ۷۲۸ ٤) ۷٤۲

مثال ۱۱٦: زوایای داخلی یک ۹ ضلعی محدب تصاعد عددی می سازند. زاویه و سطی آن چند درجه است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۳۵ ٤) ۱٤۰

مثال ۱۱۷: در یک تصاعد عددی $S_n = \frac{n}{2}(4n+6)$ است. a_n کدام است؟

۱) $4n-2$ ۲) $4n+2$ ۳) $2n+3$ ٤) $4n+1$

مثال ۱۱۸: در یک تصادع عددی ۵۰ جمله‌ای، مجموع پنج جمله‌ی اول به اضافه‌ی مجموع پنج جمله‌ی آخر، ۵۰ است. مجموع این ۵۰ جمله چند است؟

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۲۲۵ ۳) ۲۵۰ ٤) ۳۰۰

مثال ۱۱۹: در یک تصاعد عددی جمله‌ی اول دو برابر جمله‌ی بیستم است، جمله‌ی سی‌ونهم این تصاعد کدام است؟

۱) صفر ۲) ٤۰ ۳) ۲۰ ٤) ۳۹

مثال ۱۲۰: در یک تصاعد عددی $a_7+a_{14}=20$، مجموع بیست جمله‌ی اول این تصاعد چقدر است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ٤) ٤۰۰

مثال ۱۲۱: در یک تصاعد عددی $a_{4n+1}=5n-1$ است. مجموع دوجمله‌ی نهم و هفدهم چقدر است؟

۱) ۲٦ ۲) ۲۷ ۳) ۲۸ ٤) ۲۹

مثال ۱۲۲: اگر a,b,c سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی باشند، آنگاه $\sin a-\sin c$ برابر است با:

۱) $2\cos b\sin d$ ۲) $-2\cos b\sin d$ ۳) $2\sin b\cos d$ ٤) $-2\sin b\cos d$

۵–۱ تصاعد هندسی

دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن از جمله‌ی اول به بعد برابر است با: جمله‌ی قبل ضربدر عدد ثابت. این عدد ثابت را قدرنسبت گوییم و آن‌را با حرف q نشان می‌دهیم.

مانند: $3,6,12,24,48,\cdots$ که یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q=2$ است.

در حالت کلی دنباله تصاعد هندسی را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots$$

در تصاعد هندسی قدرنسبت برابر است با: $d=\dfrac{a_2}{a_1}$.

۱- هرگاه x, y, z سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشد آن‌گاه $y^2 = x.z$.

۲- در یک تصاعد هندسی همواره داریم: $\dfrac{a_m}{a_n} = q^{m-n},\ m,n \in N$.

مثال ۱۲۳: در یک تصاعد هندسی داریم $a_5 = 4a_1$، قدرنسبت این تصاعد چند است؟

۳- جمله عمومی تصاعد هندسی عبارت است از: $a_n = a_1q^{n-1}$

مثال ۱۲۴: در تصاعد هندسی $-2, \sqrt{2}, \cdots$، جمله‌ی سیزدهم را بیابید.

۴- قاعده اول اندیس: در یک تصاعد هندسی اگر $2n = \alpha + \beta$ آنگاه $a_n^2 = a_\alpha + a_\beta$ که در آن $n, \alpha, \beta \in N$.

مثال ۱۲۵:در یک تصاعد هندسی، حاصل ضرب دو جمله هفتم و هفدهم، $4\sqrt{2}$ است. جمله دوازدهم را بیابید.

۵- قاعده دوم اندیس: در صورتی‌که $m,n,p,k \in N$ و $m+n=p+k$ در تصاعد هندسی داریم $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_k$.

مثال ۱۲۶: حاصل‌ضرب دو جمله پنجم و بیست‌وپنجم در یک تصاعد هندسی $4\sqrt[4]{2}$ است. اگر جمله‌ی هفدهم این تصاعد $\sqrt[8]{2}$ باشد، جمله سیزدهم این تصاعد چقدر است؟

۶- حاصل ضرب n جمله اول یک تصاعد هندسی: در یک تصاعد هندسی همواره $P_n = \left(|a_1 \cdot a_n|\right)^{\frac{n}{2}}$ که در آن P_n نشان دهنده حاصل ضرب n جمله اول یک تصاعد هندسی است. اگر به‌جای a_n قرار دهیم a_1q^{n-1} آنگاه داریم $P_n = \left|a_1^2 q^{n-1}\right|^{\frac{n}{2}}$.

مثال ۱۲۷: در تصاعد هندسی $\sqrt{2}, 2, \cdots$ حاصل‌ضرب هشت جمله اول را بیابید.

❖ اگر $a_1 \cdot a_n$ یا $a_1^2 \cdot q^{n-1}$ مثبت باشد، قدرمطلق لزومی ندارد.

۷- در هر تصاعد هندسی $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$.

مثال ۱۲۸: در یک تصاعد هندسی، حاصل ضرب هشت جمله اول بیست برابر حاصل ضرب هفت جمله اول است. جمله هشتم این تصاعد کدام است؟

۸- اگر در یک تصاعد هندسی تعداد جمله‌های فرد و k جمله وسط باشد، داریم $k^2 = a_1 \cdot a_n$.

۹- اگر در یک تصاعد هندسی تعداد جمله‌ها فرد و جمله وسط k باشد، داریم $P_n = k^n$.

مثال ۱۲۹: در یک تصاعد هندسی جمله چهارم $2\sqrt{2}$ است. حاصل ضرب هفت جمله اول آن چند

است؟

۱۰-اگر بین دو عدد a و b تعداد n واسطه هندسی درج کنیم، یعنی $\underset{n}{a,\cdots,b}$، قدر نسبت برابر است با $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. چنانچه $n+1$ زوج باشد باید $\frac{b}{a}>0$, $q=\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.

مثال ۱۳۰:بین دو عدد ۲ و ۳۲، هفت واسطه هندسی درج کرده‌ایم. قدر نسبت را بیابید.

۱۱-اگر بین a و b تعداد n واسطه هندسی درج کنیم، آنگاه حاصل‌ضرب واسطه ها برابر است با:

$$P=|ab|^{\frac{n}{2}}.$$

مثال ۱۳۱: بین دو عدد $\sqrt[4]{8}$ و $\sqrt[4]{2}$، هشت واسطه هندسی درج کرده‌ایم، حاصل ضرب این واسطه ها چقدر است؟

۱-۵-۱ نکات مهم در مبحث تصاعد هندسی

۱- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی متناهی باشد و اگر a_1 جمله اول و q قدرنسبت تصاعد هندسی باشید داریم:

$$a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1}$$

پس مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد چنین است.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_1q^{i-1}=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1},\ q\neq 1$$

اگر بجای a_1q^{n-1} قرار دهیم a_n در این‌صورت، داریم:

$$S_n = \frac{q \cdot a_n - a_1}{q - 1}$$

- ❖ اگر $q = 0$ باشد در این‌صورت $S_n = a_1$ است.
- ❖ اگر $q = 1$ باشد در این‌صورت $S_n = na_1$ است.

مثال ۱۳۲: در تصاعد هندسی $4, 8, \cdots$ مجموع ۱۰ جمله اول تصاعد چقدر است؟

۲- حد مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی:

تصاعد هندسی نامتناهی $4, 1, \frac{1}{4}, \cdots$ را در نظر بگیرید. در این تصاعد $q = \frac{1}{4}$. می‌خواهیم S_n را وقتی $n \to +\infty$ بیابیم.

می‌نویسیم:

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} = \frac{4\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1}$$

هنگامی‌که $n \to +\infty$ داریم $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$ لذا داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{4(0 - 1)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-4}{-\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$$

بنابراین در حالتی‌که $|q| < 1$ باشد، چون $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$، خواهد بود خواهیم داشت:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

- ❖ اگر $q = \frac{1}{2}$ خواهیم داشت: $\lim_{n \to +\infty} S_n = 2a_1$.

مثال ۱۳۳: حد مجموع تصاعد هندسی $\sqrt{48}, 2\sqrt{3}, \cdots$ را بیابید.

مسائل و تمرین‌های تصاعد عددی و هندسی

۱- a و b را چنان بیابید تا چهار جمله‌ی زیر تصاعد عددی بسازند.

$$2a+b+1,\ 3a-1,\ a+b+5,\ 4a+b$$

جواب: $a=2, b=-1$.

۲- در یک تصاعد عددی $a=0.2$ و $d=0.2$ است. کدام جمله از این تصاعد برابر ۵ است؟

جواب: جمله‌ی بیست و پنجم

۳- بیستمین عدد قابل قسمت بر ۷ چند است و عدد ۲۹٤ چندمین عدد قابل قسمت بر ۷ است؟

جواب: ۱٤۰ و چهل و دوم

٤- کوچکترین زاویه‌ی داخلی یک چهار ضلعی محدب ۳۰ درجه است. اگر زوایای این چهارضلعی تصاعد عددی بسازند، زوایای دیگر کدام است؟

جواب: ۱۵۰ درجه، ۱۱۰ درجه، ۷۰ درجه و ۳۰ درجه.

۵- جمله پنجم یک تصاعد هندس ۸ و جمله پانزدهم آن ۱۰۲٤ است. تصاعد را مشخص کنید.

جواب: $a_1=2$ و $q=r=\sqrt{2}$.

٦- مجموع سه جمله یک تصاعد عددی ٢٤ و حاصل ضرب همین سه جمله ١٣١٢ است. تصاعد را معلوم کنید.

جواب: ۱۳، ۸، ۳.

۷- مربعی به ضلع a مفروض است. دایره محاطی مربع را رسم می‌کنیم و مربعی در آن محاط می‌کنیم. سپس دایره محاطی مربع جدید را رسم می‌کنیم و این عمل را بی‌شمار دفعه تکرار می‌کنیم. حد مجموع محیط‌ها و حدمجموع مساحت‌های دایره چقدر است؟

جواب: حدمجموع محیط دایره‌ها $=\pi a\left(2+\sqrt{2}\right)$.

حد مجموع مساحت دایره‌ها $=\frac{\pi}{2}a^2$.

۸- در یک تصاعد هندسی جمله چهارم مساوی سه‌برابر جمله دوم است. اگر جمله اول a باشد، جمله یازدهم این تصاعد چند است؟

جواب: $243a$

۹- چه رابطه‌ای بین c، b و a از معادله $ax^4+bx^2+c=0$ برقرار باشد تا ریشه‌های این معادله تصاعد عددی بسازند.

جواب: $9b^2=100ac$

۱۰- اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد هندسی بسازند، قدر نسبت تصاعد را بیابید.

جواب: $r = q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

۱۱- ثابت کنید اگر سه عدد a,b,c تصاعد هندسی بسازند، داریم:

$$\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)=a^2+b^2+c^2$$

به کمک این رابطه سه عدد بیابید که مجموع آنها $\frac{19}{2}$ و مجموع مربعات آنها $\frac{133}{4}$ باشد.

جواب: سه عدد عبارتند از: $2,3,4.5$ و $4.5,3,2$.

فصل دوم

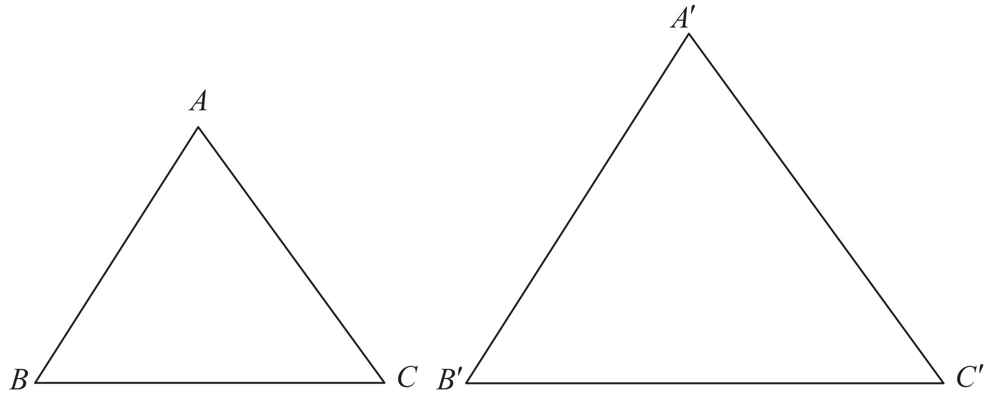
مثلثات

۱–۲ نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از علم ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، قیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

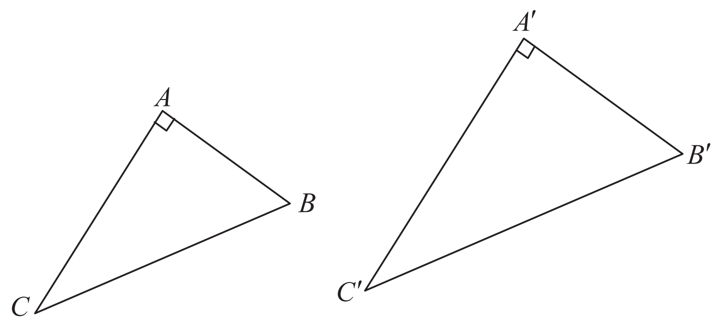
۲–۱–۱ تشابه دو مثلث

دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ را متشابه می‌گوییم، هرگاه زوایای نظیر در آن‌ها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.



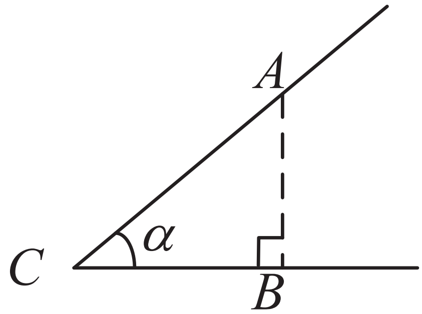
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim A'\overset{\Delta}{B'}C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$$

اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ در شکل زیر قائم‌الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C}'$، آنگاه $\overset{\Delta}{ABC} \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$.



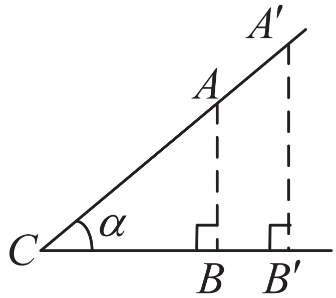
۲–۱–۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده– حل مثلث قائم‌الزاویه

از نقطه اختیاری A واقع بر یکی از ضـلعهای زاویه حاده $\hat{C}=\alpha$ عمودی بر ضـلع دیگر آن فرود می‌آوریم، تا این ضلع را در نقطه B قطع کند.



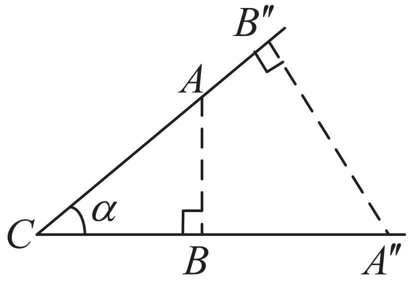
الف) نسبت $\frac{BA}{CA}$ را سینوس زاویه C می‌نامند و می‌نویسند: $\sin\hat{C}=\sin\alpha=\frac{BA}{CA}$.

❖ توجه شود که $\sin\hat{C}$ به جای قرار گیری A بستگی ندارد. زیرا اگر مطابق شکل زیر A به وضع A' در آید، خواهیم داشت.



از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C$ می‌توان نوشت: $\frac{BA}{B'A'}=\frac{CA}{CA'}$ و یا $\frac{BA}{CA}=\frac{B'A'}{CA'}$.

از طرفی اگر نقطه A به وضـع A'' در آید، یعنی بر روی ضـلع دیگر زاویه انتخاب شـود، از تشـابه دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A''B''C$ داریم: $\frac{BA}{B''A''}=\frac{CA}{CA''}$ و یا $\frac{BA}{CA}=\frac{B''A''}{CA''}$.



بنابراین در هر مثلث قائم‌الزاویه، سینوس هر زاویه حاده برابر با نسبت ضلع مقابل آن زاویه به وتر است.

به همین ترتیب، سایر نسبت‌های مثلثاتی عبارتند از:

ب) $\cos\hat{C} = \cos\alpha = \frac{CB}{CA}$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، کسینوس هر زاویه حاده برابر با نسبت ضلع مجاور آن زاویه به وتر است.

ج) $\tan\hat{C} = \tan\alpha = \frac{BA}{CB}$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، تانژانت هر زاویه حاده برابر با نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

د) $\cot\hat{C} = \cot\alpha = \frac{CB}{BA}$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، کوتانژانت هر زاویه حاده برابر با نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل آن زاویه است.

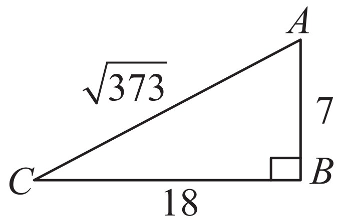
ه) $\sec\hat{C} = \frac{CA}{CB}$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، سکانت هر زاویه حاده برابر با نسبت وتر به ضلع مجاور آن زاویه است.

و) $\csc\hat{C} = \csc\alpha = \frac{CA}{BA}$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، کسکانت هر زاویه حاده برابر با نسبت وتر به ضلع مقابل آن زاویه است.

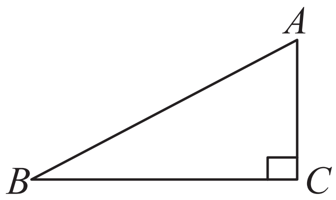
❖ از آنجایی‌که در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر از دو ضلع دیگر بیشتر است لذا همواره برای زاویه حاده α در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\sin\alpha < 1, \cos\alpha < 1, \tan\alpha \in R, \cot\alpha \in R, \sec\alpha > 1, \csc\alpha > 1$$

مثال ۱۳٤: در مثلث قائم‌الزاویه زیر، حاصل عبارت $\dfrac{\sin\hat{A}+\cos\hat{A}}{\tan\hat{C}+\cot\hat{C}}$ را بیابید.

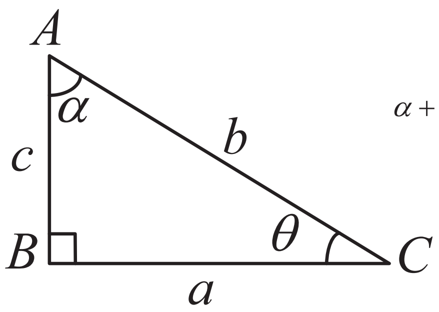


مثال ۱۳۵:در شکل ذیل، $a=5$ و $c=13$ (به‌ترتیب اضلاع مقابل با زوایای C, A) می‌باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه A را بیابید.



مثال ۱۳٦:محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای را بیابید که در آن یک ضلع ۷۲ سانتی‌متر و تانژانت زاویه مقابل این ضلع $\frac{12}{5}$ می‌باشد.

۲-۱-۳ روابط بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویه متمم



$$\alpha+\theta=90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\frac{a}{b},\ \cos\theta=\frac{a}{b}\Rightarrow \sin\alpha=\cos\theta \\ \cos\alpha=\frac{c}{b},\sin\theta=\frac{c}{b}\Rightarrow \cos\alpha=\sin\theta \\ \tan\alpha=\frac{a}{c},\cot\theta=\frac{a}{c}\Rightarrow \tan\alpha=\cot\theta \\ \cot\alpha=\frac{c}{a},\tan\theta=\frac{c}{a}\Rightarrow \cot\alpha=\tan\theta \\ \sec\alpha=\frac{b}{c},\csc\theta=\frac{b}{c}\Rightarrow \sec\alpha=\csc\theta \\ \csc\alpha=\frac{b}{a},\sec\theta=\frac{b}{a}\Rightarrow \csc\alpha=\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha) \\ \cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha) \\ \tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha) \\ \cot\alpha=\tan(90^\circ-\alpha) \\ \sec\alpha=\csc(90^\circ-\alpha) \\ \csc\alpha=\sec(90^\circ-\alpha) \end{cases}$$

۲-۱-۴ رابطه‌ی بین جزءهای یک مثلث قائم‌الزاویه

با توجه به روابط فوق داریم:

$$\begin{array}{ll} 1.\ a=b\sin\alpha & 2.\ a=b\cos\theta \\ 3.\ c=b\cos\alpha & 4.\ c=b\sin\theta \\ 5.\ a=c\tan\alpha & 6.\ a=c\cot\theta \\ 7.\ c=a\cot\alpha & 8.\ c=a\tan\theta \end{array}$$

دو رابطه‌ی $\alpha+\theta=90^\circ$ و $a^2+b^2=c^2$ به همراه ۸ رابطه‌ی فوق، را فرمول‌های حل مثلثات می‌نامند.

برای حل مثلث قائم‌الزاویه ($\hat{B}=90^\circ$) چهار حالت اصلی (حالتهای متعارفی یا کلاسیک حل مثلث قائم‌الزاویه) وجود دارند:

الف) معلوم بودن وتر و یک زاویه حاده

ب) معلوم بودن یک ضلع (ضلع زاویه قائمه) و یک زاویه حاده

ج) معلوم بودن دو ضلع (ضلعهای زاویه قائمه)

د) معلوم بودن وتر و یک ضلع.

هر حالت را با یک مثال بررسی می‌نماییم:

مثال ۱۳۷: در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{C}=90^\circ$) وتر $AB=24$ و زاویه‌ی $\hat{B}=36^\circ$ اســـت. به کمک ماشین‌حساب، مثلث را حل کنید. (فرض کنید $\sin 36^\circ = 0.5878$).

مثال ۱۳۸: در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{C}=90^\circ$) ضـــلع $CA=42$، $\hat{A}=52^\circ$ اســـت. با فرض $\cos 52^\circ = 0.6157$ مثلث را حل کنید.

مثال ۱۳۹: در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{C}=90^\circ$) ضـــلع $AC=7.5$ و $BC=18$ داده شـــده اســـت. به کمک ماشین حساب، مثلث را حل کنید.

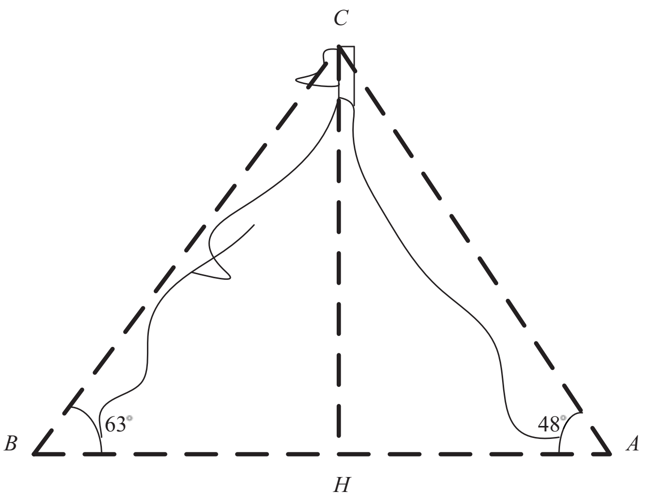
مثال ۱٤۰: در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{C}=90^\circ$) وتر $AB=c=50$ و $BC=a=28$ داده شده است. مثلث را حل کنید.

❖ اگر A بالای سطح افقی باشد، زاویه‌ی حاده‌ی بالای خط افقی را زاویه فراز و اگر A پایین خطی افقی باشد، زاویه حاده‌ی پایین خط افقی را زاویه نشیب می‌نامند.

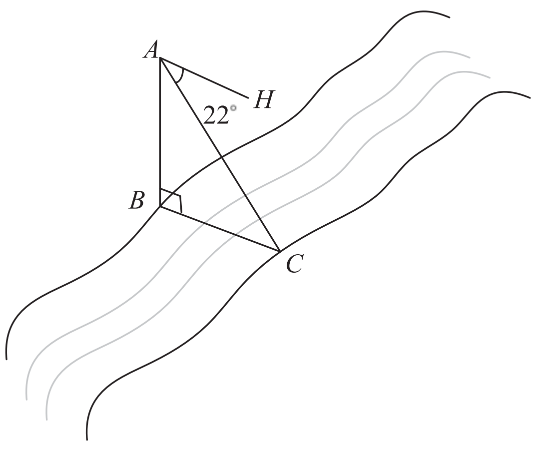
مثال ۱٤۱: زاویه فراز رأس برجی از نقطه‌ی O که روی زمین است ۲۷ درجه می‌باشد، در صورتی‌که فاصله‌ی نقطه‌ی O از پای برج 16.7 متر باشد، بلندی برج چند متر است؟

مثال ۱۴۲ : از دو نقطه A و B که با میله پایه پرچمی که در بالای تپه‌ای قرار دارد و با دو نقطه A و B در یک امتداد می‌باشد، زاویه فراز رأس پرچم به ترتیب ۴۸ درجه و ۶۳ درجه می‌باشد، فاصله دو نقطه A و B که دو طرف تپه و روی زمین واقع‌اند ۷۴/۵ متر است. ارتفاع پرچم چندمتر است؟

$(\cot 48^\circ = 0.9004, \cot 63^\circ = 0.95096)$

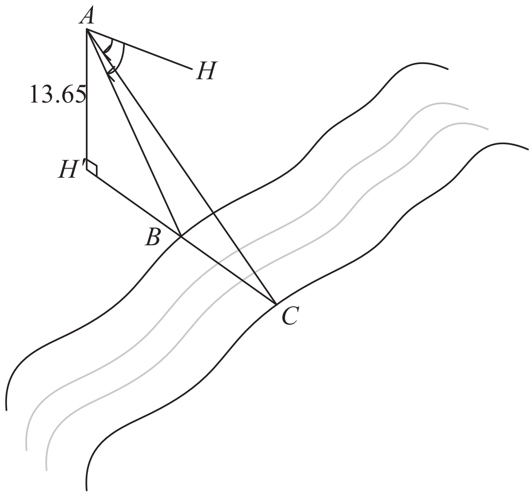


مثال ۱۴۳: ناظری در کنار رودخانه ایستاده است. ارتفاع چشم ناظر از ساحل رود ۱/۶۷ متر است. زاویه نشیب ساحل طرف دیگر رود ۲۲ درجه می‌باشد، عرض رودخانه چقدر است؟ $(\tan 68^\circ = 2.4751)$.



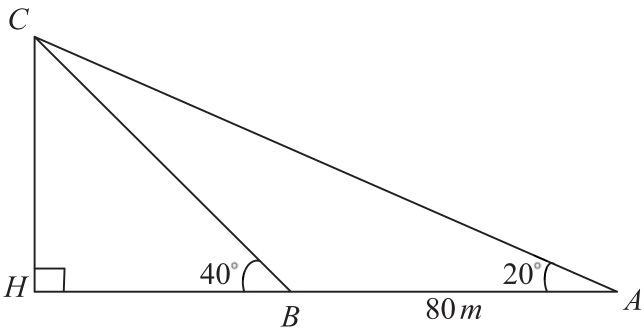
مثال ۱۴۴: از نقطه A که روی تپه‌ای به ارتفاع ۱۳/۶۵ متر از سطح زمین می‌با شد، زاویه نشیب ساحل دو طرف رودخانه ۵۷ درجه و ۲۰ دقیقه و ۳۴ درجه و ۴۰ دقیقه است. عرض رودخانه چقدر است؟

$(\tan 55^\circ, 20' = 1.446, \tan 32^\circ, 40' = 0.6412)$



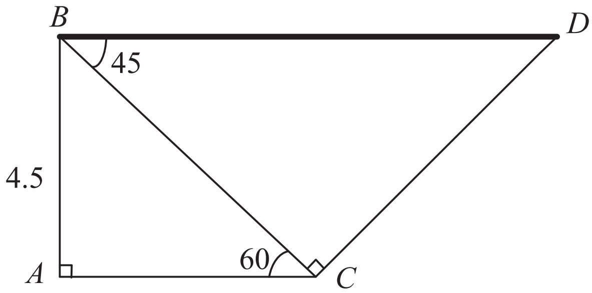
مثال ۱٤٥: رأس برجی از نقطه A با زاویه فراز 20° دیده می‌شود. با حرکت افقی 80 متر به طرف برج زاویه فراز 40° مشاهده می‌شود. ارتفاع برج کدام است؟

۱) $160\sin 20^\circ$ ۲) $80\sin 20^\circ$ ۳) $40\sin 40^\circ$ ٤) $80\sin 40^\circ$

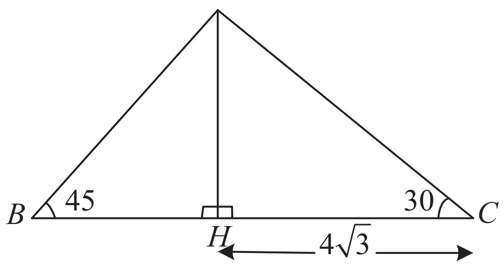


مثال ۱٤٦: نردبانی به‌طول ۲۰ متر به دیوای تکیه دارد. زاویه نردبان با سطح زمین ٦۰ درجه است. فاصله نوک نردبان تا زمین چقدر است؟

مثال ۱۴۷: در شکل زیر اندزه BD چقدر است؟



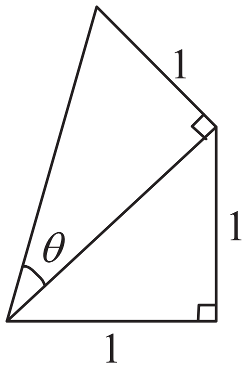
مثال ۱۴۸: در شکل زیر مقدار BH چقدر است؟



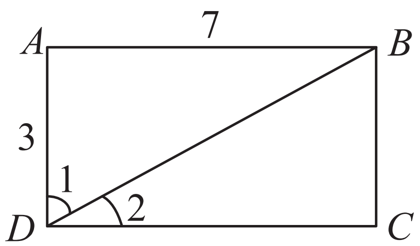
مثال ۱۴۹: مردی با قد ۱/۷۷ متر در کنار یک تیرچراغ برق ایستاده است. اگر طول سایه آن مرد ۶۰ سانتی متر و طول سایه‌ی تیر چراغ برق ۳ متر باشد، ارتفاع تیرچراغ برق چقدر است؟

مثال ۱۵۰: علی و اکبر به فا صله‌ی ۴۰ متر از یکدیگر و در یک طرف برجی ای ستاده‌اند. بالاترین نقطه‌ی این برج با هریک از آنها زاویه ۴۵ و ۳۰ درجه می‌سازد. ارتفاع برج چقدر است؟

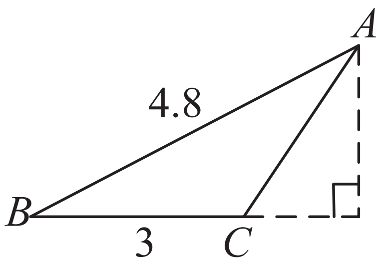
مثال ۱۵۱: در شکل زیر، تانژانت زاویه θ را بیابید.



مثال ۱۵۲: در مستطیل $ABCD$، قطر BD را رسم کرده‌ایم. $\sin \hat{D}_1$ چند برابر $\sin \hat{D}_2$ است؟

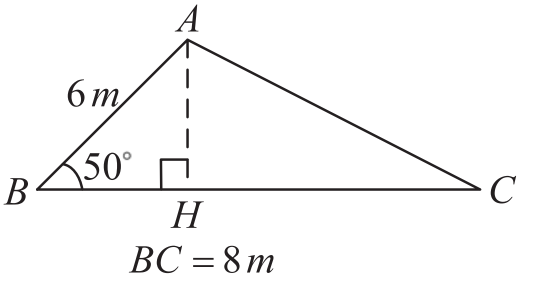


مثال ۱۵۳: در شکل زیر فاصله‌ی نقطه A از امتداد ضلع BC چند برابر طول AC است؟

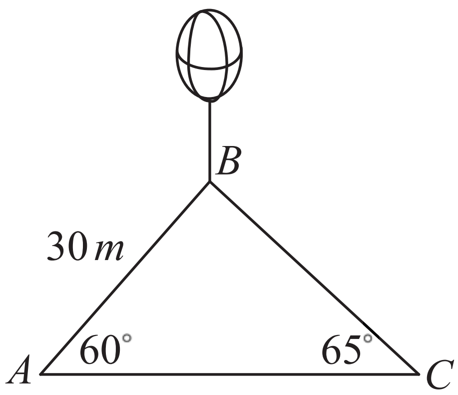


مثال ۱۵۴: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی ۳۰ درجه پرتاب می شود. پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

مثال ۱۵۵: با توجه به شکل داده شده، مساحت مثلث ABC را با فرض $\sin 50^\circ = 0.76$ به‌دست آورید.



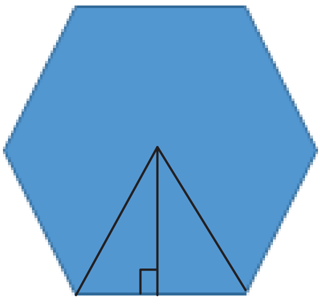
مثال ۱۵۶: در راهپیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن تبلیغانی تو سط دو طناب به زمین بسته شده‌اند. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را به‌دست آورید.



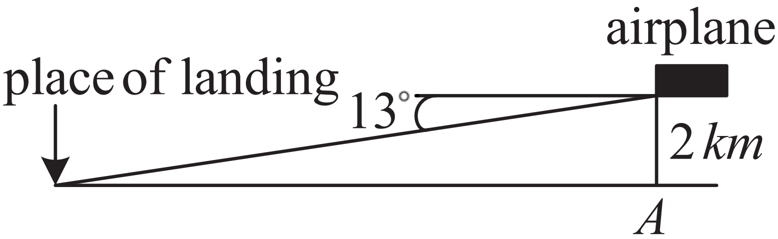
مثال ۱۵۷: نردبانی به طول ۸ متر به دیوار ساختمانی تکیه داده است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین ۳۰ درجه باشد. ارتفاع نردبان از زمین و فاصله پای نردبان را در محل تکیه به دیوار بیابید.

مثال ۱۵۸: نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر چراغ برق را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیرچراغ برق چقدر است؟

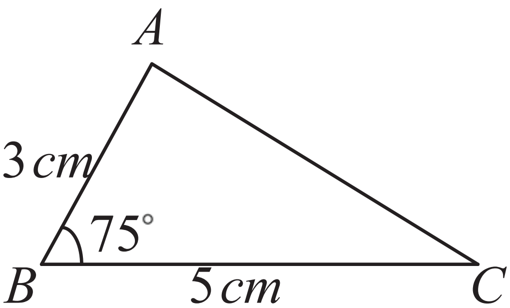
مثال ۱۵۹: مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.



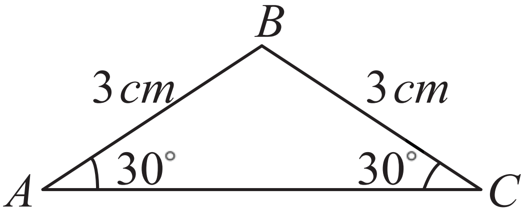
مثال ۱۶۰: یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود ۱۳ درجه باشد، هواپیما در چه فاصله‌ی از نقطه‌ی A فرود می‌آید؟ $\tan 13^\circ = 0.23$



مثال ۱۶۱: فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.



مثال ۱۶۲: مساحت مثلث ABC را بیابید.



مثال ۱۶۳: حاصل عبارات زیر را بیابید.

1. $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ =$

2. $2\sin^2 30^\circ - 1 + \cos 60^\circ =$

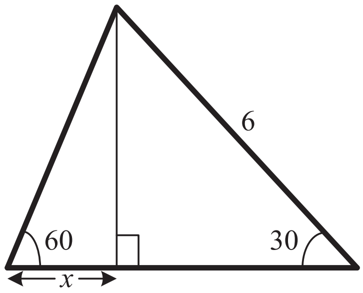
3. $\dfrac{1+\cot 30^\circ \cdot \cot 60^\circ}{\cot 30^\circ - \cot 60^\circ} =$

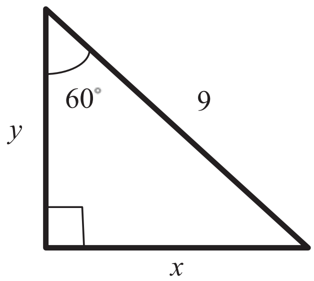
مثال ۱۶٤: درستی رابطه‌ی $\dfrac{\sin^2 45^\circ}{1-\sin 45^\circ}+\dfrac{\sin^2 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=2\tan^2 45^\circ$ را بررسی کنید.

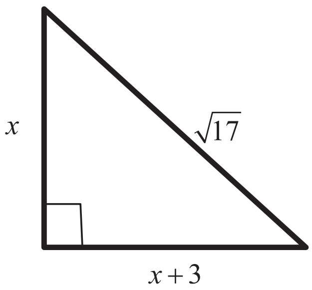
مثال ۱۶٥: معادله‌ی خی را بنویسید که با جهت مثبت محور افقی زاویه 60° بسازد و از نقطه‌ی $\left(\sqrt{3},2\right)$ بگذرد.

مثال ۱۶٦: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به‌طول ۲ روی محور افقی بگذرد و با محور عمودی زاویه ٦۰ درجه بسازد.

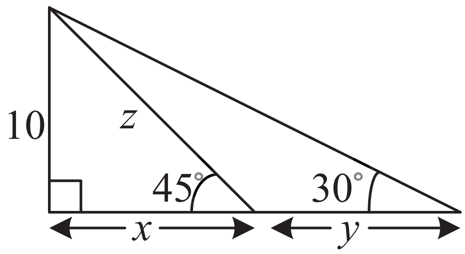
مثال ۱٦۷: در شکل‌های زیر مقدار x را بیابید.







مثال ۱۶۸: اگر $\sin 37^\circ \approx 0.6$ و $\tan 52^\circ \approx 1.28$ باشد، مقادیر x, y, z را در شکل زیر بیابید.



مثال ۱۶۹: مثلثی به‌طول ا ضلاع ٤، ٦ و b و زاویه‌ی بین دو ضلع به‌طول ٤ و ٦ برابر ۷۵ درجه مفروض است.مساحت این مثلث را بیابید. ($\sin 75^\circ \approx 0.96$)

تکالیف در منزل

۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{A} = 90^\circ$) زاویه $B = 30^\circ$ می‌باشـــد. نســـبت‌های مثلثاتی زاویه B را بیابید.

۲- در تمرین قبل، نسبت‌های مثلثاتی زاویه C را به دست آورید.

۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{A} = 90^\circ$) و زاویه $B = 45^\circ$ می‌با شد. ن سبت‌های مثلثاتی زاویه B را

تعیین کنید.

۴- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{A}=90^\circ$)، $AB=5$ و $AC=12$ است. اولاً طول وتر را حساب کنید. ثانیاً نسبت‌های مثلثاتی زاویه B را به‌دست آورید. ثالثاً تحقیق کنید، $\left(\sin\hat{B}\right)^2+\left(\cos\hat{B}\right)^2=1$، $\tan\hat{B}=\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$، $\cot\hat{B}=\dfrac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}}$ است. رابعاً بررسی کنید که $\sin\hat{B}=\cos\hat{C}$، $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}$، $\tan\hat{B}=\cot\hat{C}$ و $\cot\hat{B}=\tan\hat{C}$ است.

۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($\hat{A}=90^\circ$)

۱) اگر $\cos\hat{B}=\dfrac{3}{5}$ و $a=25$ متر باشد، اندازه ضلع c را حساب کنید.

۲) اگر $\sin\hat{C}=\dfrac{2}{7}$ و $a=28$ متر باشد، اندازه ضلع c را حساب کنید.

۳) اگر $\tan\hat{C}=\dfrac{5}{12}$ و $a=13$ متر باشد، اندازه ضلع b را حساب کنید.

۴) اگر $\sin\hat{B}=\dfrac{2}{3}$ و $b=12$ متر باشد، a و c را حساب کنید.

۵) اگر $\cos\hat{C}=\dfrac{3}{8}$ و $a=20$ متر باشد، b و c را حساب کنید.

۶) اگر $\csc\hat{B}=5$ و $c=25$ متر باشد، a و b را حساب کنید.

۷) اگر $\csc\hat{B}=2.6$ باشد، زاویه B را با ترسیم نشان دهید. سایر نسبت‌های مثلثاتی B را از روی شکل و از راه محاسبه به‌دست آورید.

۶- ارتفاع ساختمانی 24 متر است. از چه نقطه به فاصله 1.45 متر از سطح زمین زاویه فراز رأس ساختمان 23° می‌باشد. ($\cot 23^\circ=2.3559$)

۷- ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AH=15$ متر و زاویه $\hat{A}=100^\circ$ می‌باشد. ضلع‌های مثلث را به‌دست آورید. ($\sin 40^\circ=0.6428$)

۸- هلی‌کوپتری در ارتفاع 117.8 متر در پرواز است. در یک لحظه زاویه شیب دو کشتی کوچک در دو طرف هلی‌کوپتر قرار دارند و با آن در یک صفحه‌ی قائم نسبت به سطح افق واقع‌اند، 43° و 36° است. فاصله دو کشتی از هم چند متر است؟ ($\cot 36^\circ=1.3764, \cot 43^\circ=1.0724$)

۹- پنج ضلعی منتظمی در دایره به شعاع ۴۸ سانتی‌متر محاط شده است. مساحت آن‌را تعیین کنید. ($\sin 36^\circ = 0.5878$)

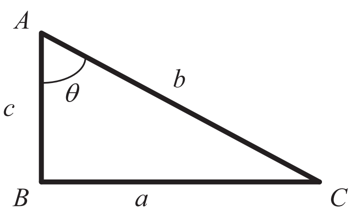
۱۰-از بالای ساختمانی به ارتفاع ٦٨ متر زاویه نشیب بالای ساختمان مقابل آن ۳۰ درجه است. در صورتی که فاصله‌ی دو ساختمان ٤٨ متر باشد، ارتفاع ساختمان دیگر را حساب کنید.

۲-۲ دایره مثلثاتی

۲-۳ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید که در آن $\hat{B} = 90^\circ$ است.

۲-۳-۱ رابطه‌های بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده



$$a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}, \boxed{\tan\theta \times \cot\theta = 1}, \boxed{\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}}, \boxed{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$$

به همین ترتیب $\sec\theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\cos\theta}$ و $\csc\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\sin\theta}$.

مثال ۱۷۰: نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳۰ درجه را به‌دست آورید.

مثال ۱۷۱: نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

مثال ۱۷۲: نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

مثال ۱۷۳: نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵ درجه را به‌دست آورید.

❖ تبدیل رادیکال مرکب به رادیکالهای ساده

رادیکال مرکب به صورت $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ است که در آن a,b اعداد گویا و مثبت هستند و b مجذور کامل نیست.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\Rightarrow a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}\Rightarrow (a-x-y)+\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$$
$$\Rightarrow (a-x-y)^2+b+2(a-x-y)\sqrt{b}=4xy$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a-x-y=0 \\ b=4xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=x+y=a \\ P=xy=\dfrac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow X^2-aX+\frac{b}{4}=0$$

ریشه‌های معادله درجه دوم عبارت است از: $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$ و $y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$. برای آن‌که x,y اعداد گویا و مثبت باشـــند، باید a^2-b مجذور کامل باشـــد، یعنی $a^2-b=c^2$. چون $x+y=a$ ، $a>0$ در نتیجه x,y دو عدد گویا و مثبت هستند و دو شرط بالا لازم و مافی می‌باشند. داریم:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

به همین ترتیب:

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

مثال ۱۷٤: رادیکال مرکب $\sqrt{8+\sqrt{15}}$ را به رادیکالهای ساده تبدیل کنید.

مثال ۱۷۵: رادیکال مرکب $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ را به رادیکال ساده تبدیل کنید.

مثال ۱۷٦: رادیکال مرکب $\sqrt{7-3\sqrt{3}}$ را به رادیکال ساده تبدیل کنید.

مثال ۱۷۷: جدول نســبت‌های مثلثاتی $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را برای $\theta=30^\circ,45^\circ,60^\circ$ رســم نموده و آن‌را به خاطر بسپارید.

۲-۳-۲ رابطه‌های فرعی بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده:

اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ باشد، پنج رابطه‌ی اطلی عبارتند از:

$$1.\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad 2.\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad 3.\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$4.\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad 5.\ \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

روابط فرعی ذیل به سادگی از روابط اصلی فوق حاصل می‌گردد:

$$\boxed{1)}\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{\cos\alpha\neq 0} \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+1=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha}$$

$$\boxed{2)}\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{\sin\alpha\neq 0} 1+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 \Rightarrow \boxed{1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha}$$

$$\boxed{3)}\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\boxed{4)}\quad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\boxed{5)}\quad \boxed{\tan\alpha\times\cot\alpha=1},\ \boxed{\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}},\ \boxed{\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}}$$

مثال ۱۷۸: در صورتی‌که $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ باشد، $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ را به‌دست آورید.

مثال ۱۷۹: اگر $\cot x=\frac{2}{3}$ باشد، $\sec x$ و $\sin x$ را به‌دست آورید. $(0^\circ<x<90^\circ)$

مثال ۱۸۰: در صورتی‌که $\cos\theta=\frac{1-m^2}{1+m^2}$ باشد، $\cot\theta$ را به‌دست آورید. $(0^\circ<\theta<90^\circ)$

۳-۳-۲ ساده کردن عبارتهای مثلثاتی

مثال ۱۸۱: عبارت $S=\sin^2 x+\tan^2 x\cdot\sin^2 x$ را ساده کنید.

مثال ۱۸۲: عبارت $S=\sin x\cdot\tan^2 x\cdot\cot^3 x$ را ساده کنید.

مثال ۱۸۳: عبارت $S=\cos^2 x+\frac{\cos^4 x}{1-\cos^2 x}$ را ساده کنید.

مثال ۱۸٤: درســـتی اتحاد $\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos x}+\tan x\right)\left(\frac{1}{\cos x}-\tan x\right)+2\tan^2 x\cdot\cos^2 x=1+\sin^2 x$ را بررسی کنید.

مثال ۱۸۵: درستی اتحاد $\frac{(1-\sin x\cos x)(1+\sin x\cos x)-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}=1$ را بررسی کنید.

مثال ۱۸۶: درستی اتحاد $\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\tan^4 x}=1+\frac{2\cot^2 x}{\sin^2 x}$ را بررسی کنید.

مثال ۱۸۷: درستی اتحاد $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)}=\frac{2\tan x}{\tan x-1}$ را بررسی کنید.

مثال ۱۸۸: درستی اتحاد $\sin x\cos x\left(1+\tan x\right)\left(1+\cot x\right)=\left(\sin x+\cos x\right)^2$ را بررسی کنید.

مثال ۱۸۹: درستی اتحاد $\left(\frac{\cos x}{\tan x}+\frac{\sin x}{\cot x}\right)\sin x\cos x=\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)$ را بررسی کنید.

مثال ۱۹۰: درستی اتحاد $\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=2\tan x$ که $0^\circ \le x<90^\circ$ است، بررسی کنید.

مثال ۱۹۱: درستی اتحاد $\frac{2\left(1-\sin^3 x-\cos^3 x\right)}{\sin x+\cos x-2}=\left(1-\sin x-\cos x\right)^2$ را بررسی کنید.