مجموعه های اعداد :

ابتدا تعریفی از مجموعه انجام می دهیم :

به دسته ای از اشیاء یا اعداد و یا هر چیز دیگر که دو به دو از هم متمایز باشند ، مجموعه می گوئیم .

مثلاً مجموعه دبیرستان های شهرستان ابهر.

نکته ی قابل به ذکر این است که اعضای مجموعه باید مشخص باشد . به طور مثال مجموعه ی دانشمندان ایران نمی تواند یک مجموعه باشد زیرا اعضای آن مشخص نمی باشند . تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه از رابطه ی زیر بیان می گردد :

$$\text{تعداد زیرمجموعه} = ۲^{n}$$

n: تعداد اعضای مجموعه

مهمترین مجموعه هایی که در ریاضیات بررسی می‌گردد ، مجموعه اعداد می باشد . بنا به تعریف مجموعه داریم :

« به دسته ای از اعداد که دارای خاصیت مشترک و دو به دو از هم متمایز باشند را مجموعه ی اعداد گویند . »

حال به معرفی مجموعه های معروف اعداد در ریاضیات خواهیم پرداخت :

مجموعه اعداد طبیعی :

این مجموعه را با حرف N (بر گرفته از حرف اول کلمه Natural) نمایش می دهند . به تعریف ساده تر اعدادی هستند که برای شمارش به کار می روند . این مجموعه یک مجموعه نامتناهی است زیرا نمی توان اعضای آن را با عدد خاصی (البته در مورد مجموعه های متناهی و نامتناهی به طور مفصل توضیح داده خواهد شد) بیان نمود . این مجموعه را در ریاضی به صورت زیر نمایش خواهند داد :

$$\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,۴, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی :

مجموعه ای است که از اجتماع تک عضو صفر و مجموعه اعداد طبیعی به دست می آید . این مجموعه را با نماد W و یا I نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می گردد :

$$\mathbb{W} = \{۰\} \cup \mathbb{N} = \{۰,۱,۲,۳, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح :

به مجموعه ای که علاوه بر دارا بودن اعضای مجموعه اعداد طبیعی ، قرینه این اعداد به همراه تک عضو صفر را نیز در درون خود دارد . به عبارتی ساده تر مجموعه اعداد علامت دار (مثبت و منفی) و تک عضو صفر را اعداد صحیح گویند . این مجموعه را با نماد Z نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می نمایند :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -۳, -۲, -۱,۰,۱,۲,۳, \dots\}$$

مجموعه اعداد گویا :

به زبان ساده اعداد گویا کسرهایی هستند که صورت و مخرج آنها را اعداد صحیح تشکیل می دهند (البته به شرط اینکه مخرج هیچگاه صفر نباشد) یا به عبارتی دیگر کسرهای متناوب را اعداد گویا گویند . این مجموعه را با نماد Q نمایش داده و در ریاضیات به صورت زیر تعریف می شود :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰\right\}$$

نکته ← قابل به ذکر است که مجموعه اعداد طبیعی ، حسابی و صحیح هر سه زیر مجموعه اعداد گویا هستند .

مجموعه اعداد گنگ (اصم) :

اعدادی که در مجموعه اعداد گویا نباشند قطعاً اصم هستند یا مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد . به زبانی ساده تر کسرهای اعشاری غیر متناوب را اعداد اصم گویند . از معروفترین اعداد اصم می توان به عدد های π و e و یا رادیکال ۲ اشاره نمود . این مجموعه را با نماد Q' نمایش می دهند .

$$Q' = \mathbb{R} - Q$$

مجموعه اعداد حقیقی :

به اجتماع اعداد گنگ و گویا با یکدیگر اعداد حقیقی گویند . به عبارت دیگر به کل اعداد کشف شده اعداد

حقیقی گویند . یا به تعریفی دیگر هر کسر اعشاری مختوم و یا نامختوم را یک عدد حقیقی گویند . این مجموعه را با نماد R نمایش داده و به صورت زیر در ریاضیات تعریف می کنند .

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

نقطه حقیقی :

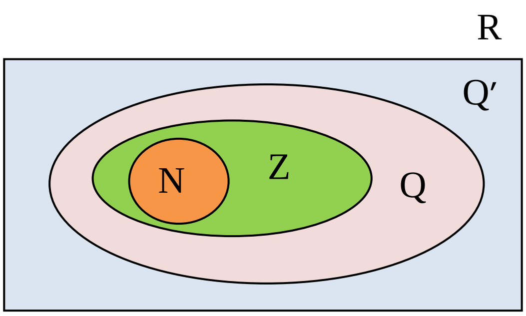
هر عدد حقیقی را که بتوان به عنوان یک نقطه ی معین روی محور اعداد حقیقی نمایش داد را نقطه حقیقی گویند . البته قابل به ذکر است که دو نقطه را به عنوان نقاط غیر حقیقی می توان در نظر گرفت که به صورت زیر تعریف می گردند :

$-\infty$ و $+\infty$

این نقاط به بی نهایت معروفند .

نکته ← رابطه زیر برای مجموعه های اعداد همواره برقرار خواهد بود :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



با شرط $Q \not\subset Q'$

مثال ۱) دو عدد گویا (که عدد صحیح نباشد) و دو عدد گنگ مثال بزنید .

حل :

$\frac{-۳}{۸}$ و $۲/۵$: گویا

$\frac{\pi}{۵}$ و $\sqrt{۳}$: اصم

یادآوری

عضویت یا متعلق بودن :

مجموعه ی A را در نظر بگیرید . اگر این مجموعه عضوی به نام a داشته باشد آنگاه خواهیم گفت a عضوی از A می باشد و به صورت زیر در ریاضی تعریف خواهیم کرد :

$a \in A$

همچنین متعلق نبودن یک شیء به مجموعه ای را نیز با علامت مقابل نمایش می دهند. $\notin$

مجموعه تهی :

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی گویند و آن را با نماد زیر مشخص می کنند :

$\emptyset = \{ \ \ \}$

تساوی دو مجموعه :

اگر اعضای دو مجموعه ی A و B نظیر به نظیر با هم برابر باشند ، می گوئیم $A=B$.

زیر مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه باشند ، به طوری که هر عضو A ، عضوی از B باشد آنگاه می گوئیم A زیر مجموعه B است و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$A \subseteq B$

توجه داشته باشید که هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش می باشد .

نکته ← زیرمجموعه محض یا سره به صورت زیر تعریف می شود :

$A \subset B$ هرگاه $A \subseteq B$ اما $A \neq B$

اجتماع دو مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه باشند ، مجموعه جدیدی را که اعضای آن متشکل از اعضای این دو مجموعه است را اجتماع دو مجموعه A و B گویند و آن را در ریاضیات به صورت زیر نمایش می دهند :

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$

از مهمترین خواص اجتماع مجموعه می توان به موارد زیر اشاره نمود :

۱) $A \subset (A \cup B)$
۲) $B \subset (A \cup B)$

۳) $A \cup \emptyset = A$

۴) $A \cup B = B \cup A$ جا به جایی

۵) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ شرکت پذیری

اشتراک دو مجموعه :

اشتراک دو مجموعه ی A و B مجموعه‌ای است که شامل تمامی اعضایی باشد که هم در A هستند و هم در B هستند . اشتراک دو مجموعه را به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \quad \text{و} \quad x \in B\right\}$$

از مهمترین خواص اشتراک مجموعه‌ها می توان به موارد زیر اشاره نمود :

۱) $(A \cap B) \subset B$

۲) $(A \cap B) \subset A$

۳) $A \cap \emptyset = \emptyset$

۴) $A \cap B = B \cap A$ جا به جایی

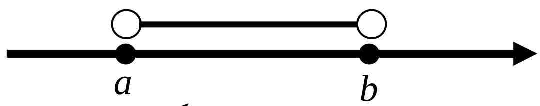
۵) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ شرکت پذیری

بازه ها :

بـــازه یا فاصله زیر مجموعه ای است از اعداد حقیقی که که تمامی اعداد حقیقی بین دو عدد را مشخص می کند و بر دو نـــوع بـــازه محدود (کـرانداز) و بـازه نـا محدود (بی کران) می باشد . در زیر به شرح انواع بازه ها و نمایش آن روی محور اعداد حقیقی خواهیم پرداخت :

۱– بازه باز : این بازه به صورت زیر تعریف خواهد شد :

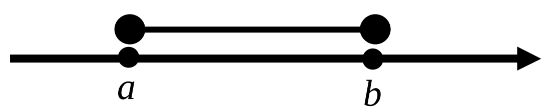
$$A = \{x | x \in R, a < x < b\} = (a, b)$$



این نوع نمایش به این مفهوم است که x تمامی اعداد حقیقی مابین a و b را می تواند اختیار کند اما خود a و b را نمی تواند در اختیار داشته باشد .

۲– بازه ی بسته : این بازه به صورت زیر تعریف خواهد شد :

$$B = \{x | x \in R, a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

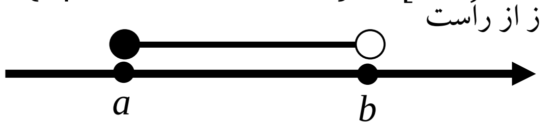


این نوع نمایش بازه به این مفهوم است که x علاوه بر اینکه تمامی اعداد حقیقی مابین a و b را می تواند اختیارکند همچنین می تـواند خود a و b را نیز در اختیــار داشته باشد .

۳ – بازهای نیم باز (نیم بسته) : این بازه ها نیز به صورت زیر تعریف خواهند شد :

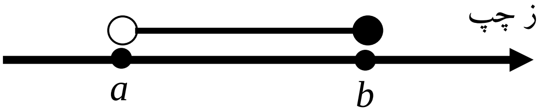
$$C = \{x | x \in R, a \leq x < b\} = [a, b)$$

نیم باز از راست



$$D = \{x | x \in R, a < x \leq b\} = (a, b]$$

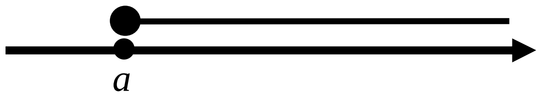
نیم باز از چپ



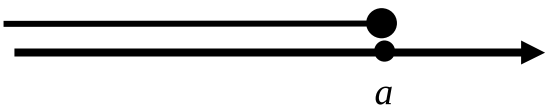
این نوع نمایش بازه به این مفهوم است که x علاوه بر اینکه تمامی اعداد حقیقی مابین a و b را می تواند اختیارکند ، همچنین می تـواند یکی از اعداد a و b را نیز در اختیــار داشته باشد .

توجه : دقت شود که تمامی بازه های فوق الذکر از نوع کرانداز یا محدود بودند . دو نوع بازه دیگر نیز وجود دارد که به آنها بازه های نامحدود یا بی کران گویند(بازه هایی که یک کران آنها به سمت بی نهایت میل کند) که به صورت زیر تعریف می شود :

$$E = \{x | x \in R, x \geq a\} = [a, +\infty)$$



$$F = \{x | x \in R, x < a\} = (-\infty, a)$$



مثال ۲) نوع هر کدام از بازه های زیر را مشخص کنید و صورت دیگر آن را بنویسید و بر روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید .

الف) $A = \{x | x \in R, -۳ \leq x < ۲\}$

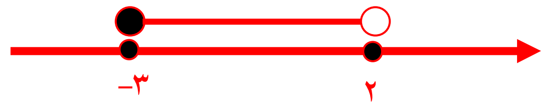
ب) $B = \{x | x \in R, x < ۵\}$

ج) $C = [\cdot, +\infty)$

حل :

مجموعه الف از نوع بازه های نیم باز و محدود است و نمایش بازه ای آن به صورت زیر می باشد :

$A = [-۳,۲)$



مجموعه ب از نوع بازه های باز بی کران محسوب شده و نمایش بازه ای و محوری آن به فرم زیر است :

$B = (-\infty, ۵)$

بازه ج از نوع بازه های نیم باز (نیم بسته) از نوع بی کران (نامحدود) می باشد و فرم مجموعه ای و محوری آن به صورت زیر تعریف می شود :

$C = \{x | x \in R, x \geq \cdot\}$

عملیات جبری روی بازه ها :

منظور از عملیات جبری اجتماع ، اشتراک و تفاضل بازه‌ها می باشد که هر کدام به صورت زیر تعریف می‌شود .

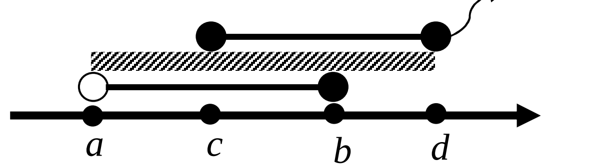
دو بازه A و B به صورت زیر تعریف شده اند :

$A = (a, b]$ و $B = [c, d]$

فرض کنید نمایش اعداد روی محور اعداد حقیقی نیز به شکل زیر است :

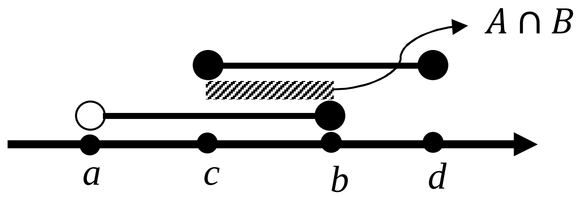
اجتماع دو بازه به صورت زیر تعریف می شود :

$A \cup B = (a, b] \cup [c, d] = (a, d]$



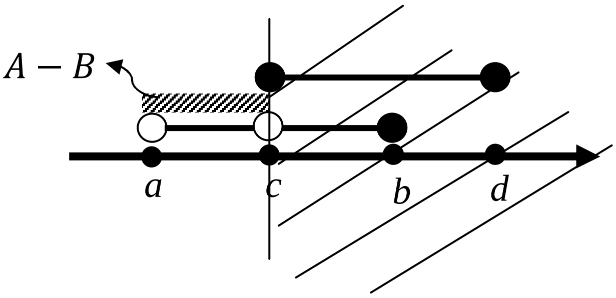
اشتراک دو بازه نیز به صورت زیر تعریف می شود : جاهایی که دو بازه با هم شریک هستند .

$A \cap B = (a, b] \cap [c, d] = [c, b]$



و همچنین تفاضل دو بازه نیز به صورت زیر تعریف خواهد شد :

$A - B = (a, b] - [c, d] = (a, c)$



مثال ۳) اگر مجموعه A و B به صورت زیر تعریف شده باشد مطلوب حاصل عبارات زیر :

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}: -۲ < x \leq ۳\}$

$B = [\cdot,۵)$

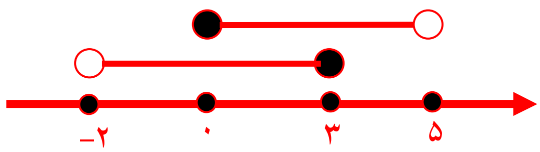
الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

ج) $A - B$

د) $B - A$

حل : ابتدا دو بازه را بر روی محور اعداد حقیقی نمایش می دهیم (دقت گردد که ترتیب ترسیم بازه ها روی محور بسیار مهم است مخصوصاً در تفاضل دو بازه) :



حال داریم :

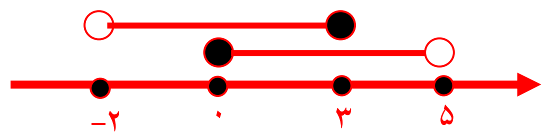
الف) $A \cup B = (-۲,۳] \cup [۰,۵) = (-۲,۵)$

ب) $A \cap B = (-۲,۳] \cap [۰,۵) = [۰,۳]$

ج) $A - B = (-۲,۳] - [۰,۵) = (-۲,۰)$

اما برای قسم « د » مساله باید جاهای نمودار را برعکس کنیم چون مساله از ما B-A را خواسته است .

پس داریم :



د) $B - A = [۰,۵) - (-۲,۳] = (۳,۵)$

مثال ۳) اگر $\frac{m+۲}{۳} \in (-۲,۳]$ باشد ، حدود m را تعیین کنید .

حل :

می توان از این موضوع یک نامعادله درجه یک به صورت زیر مطرح کنیم و حدود m رابیابیم .

$$-۲ < \frac{m+۲}{۳} \leq ۳$$

$$-۲ \times ۳ < ۳ \times \frac{m+۲}{۳} \leq ۳ \times ۳$$

$$-۶ < m + ۲ \leq ۹$$

$$-۶ - ۲ < m + ۲ - ۲ \leq ۹ - ۲$$

$$-۸ < m \leq ۷ \quad \rightarrow \quad \text{حدود } m$$

مجموعه های متناهی و نامتناهی :

مجموعه هایی را که بتوان تعداد اعضای انها را با یک عدد حسابی بیان نمود را مجموعه هـای متناهی (باپایان)گویند . اگر نتوان اعضای مجموعه را با عدد حسابی بیان نمود آنگاه مجموعه نامتناهی (بی پایان) خواهد بود .

به طور مثال مجموعه اعداد اول دو رقمی یک مجموعه متناهی است ولی مجموعه اعدا حقیق بین دو عدد ۰ و ۱ یک مجموعه نامتناهی است زیرا نمی توان اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان نمود .

مثال ۵) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید .

الف) مجموعه اعداد طبیعی اول سه رقمی

ب) مجموعه اعداد صحیح

ج) مجموعه اعداد طبیعی زوج

د) مجموعه خیابان های شهرستان ابهر

و) مجموعه مضرب های صحیح عدد ۴

هـ) مجموعه اعداد اصم بین ۲ و ۳

ز) مجموعه تمام دایره ها

حل :

الف) قطعاً یک مجموعه متناهی می باشد ، چون این مجموعه به صورت زیر تعریف می شود :

$\{۱۰۱,۱۰۳,۱۰۷, \ldots ,۹۹۷\}$

ب) خوب همه با این مجموعه آشنا هستیم و می دانیم که نمی توان اعضای این مجموعه را با یک عدد حسابی بیان نمود بنابراین قطعاً این مجموعه نامتناهی است .

ج) این مجموعه نیز به صورت زیر تعریف خواهد شد و این مجموعه نیز نامتناهی است .

$\{۲,۴,۶,۸, \ldots\}$

د) متناهی است ، امکان دارد تعداد خیابان های این شهر زیاد باشد ولی بالاخره می توان تعداد آنها را مشخص نمود .

و) این مجموعه نامتناهی است و به صورت زیر تعریف می شود :

$\{\ldots , -۸, -۴,۴,۸, \ldots\}$

هـ) قطعاً نامتناهی است زیرا بی شمار عدد اصم بین ۲ و ۳ وجود دارد .

ز) نا متناهی ، زیرا می توان بی شمار دایره با قطرهای گوناگون رسم نمود .

نکته ۱ ← گاهی ممکن است تعداد اعضای یک مجموعه متناهی بسیار زیاد باشد ولی می توان با صرف زمان کافی و ابزارهای مناسب تعداد آنها را بدست آورد ، مانند تعداد مولکول های موجود در یک مول آب .

نکته ۲ ← اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه متناهی باشد آنگاه A-B یک مجموعه نامتناهی است .

نکته ۳ ← اگر همه زیرمجموعه های مجموعه A متناهی باشد آنگاه A یک مجموعه متناهی است و اگر A یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد آنگاه خود مجموعه A یک مجموعه نامتناهی است .

مجموعه مرجع (مجموعه جهانی مطلق) :

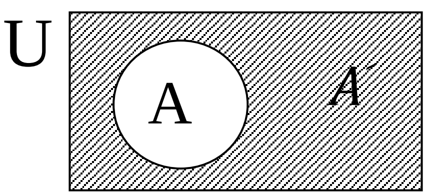
در هر بحث ریاضی مجموعه ای را که تمامی مجموعه های مورد بحث ، زیرمجموعه ی آن باشد را مجموعه مرجع می نامیم و آن را با حرف U یا M نمایش می دهیم .

متمم یک مجموعه :

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و A زیرمجموعه مجموعه مرجع باشد آنگاه عبارت U-A را متمم مجموعه A گویند و آن را با نماد زیر نمایش خواهند داد :

$$A' = U - A$$

به معنای دیگر مجموعه فوق (متمم مجموعه) شامل عضو یا عضوهایی است که از U می باشند ولی عضو A نباشند .



حال برای درک این دو مفهوم چند مثال گوناگون حل می کنیم :

مثال ۶) فرض کنید که مجموعه های U (مرجع) و A و B به صورت زیر تعریف شده باشند .

$$U = \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$
$$A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$$
$$B = \{۰,۵,۶,۷,۸\}$$

مطلوب است حاصل عبارات زیر :

الف) A' و B'

ب) $\left(A'\right)'$

ج) $A' \cup B'$, $(A \cap B)'$

د) $A \cap A'$, $B \cup B'$

و) $A - (A \cap B)$

حل :

الف) $A' = U - A$

$$= \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} - \{۱,۲,۳,۴,۵\} = \{۰,۶,۷,۸,۹\}$$

$B' = U - B$

$$= \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} - \{۰,۵,۶,۷,۸\} = \{۱,۲,۳,۴,۹\}$$

ب) $\left(A'\right)' = U - A'$

$$= \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} - \{۰,۶,۷,۸,۹\} = \{۱,۲,۳,۴,۵\} = A$$

ج) $A' \cup B' = \{۰,۶,۷,۸,۹\} \cup \{۱,۲,۳,۴,۹\}$

$$= \{۰,۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸,۹\}$$

$$(A \cap B)' = (\{۱,۲,۳,۴,۵\} \cap \{۰,۵,۶,۷,۸\})'$$

$$= (\{۵\})' = \{۰,۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸,۹\}$$

$$\Longrightarrow A' \cup B' = (A \cap B)'$$

د) $A \cap A' = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \cap \{۰,۶,۷,۸,۹\} = \emptyset$

$$B \cup B' = \{۰,۵,۶,۷,۸\} \cup \{۱,۲,۳,۴,۹\}$$
$$= \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} = U$$

و) $A - (A \cap B) = \{۱,۲,۳,۴,۵\} - (\{۵\})$
$$= \{۱,۲,۳,۴\} = A - B$$

از مثال فوق می توان نتایج فوق العاده مهمی را گرفت که به صورت زیر آنها را مطرح می کنیم :

اگر A و B دو مجموعه از مجموعه U باشند ، آنگاه داریم :

۱) $(A')' = A$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup A' = U$

۴) $\emptyset' = U$

۵) $U' = \emptyset$

۶) $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

قوانین دمورگان* :

این قوانین به صورت زیر تعریف می شود و در بحث مجموعه ها بسیار کاربردی و مهم است :

۱) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال ۷) مجموعه R را به عنوان مجموعه مرجع درنظر بگیرید ، آنگاه متمم هر یک از مجموعه های زیر را بیابید .

$a)\ A = [-۲, +\infty)$
$b)\ B = (۰,۳]$
$c\ )\ C = \mathbb{Z}$
$d\ )\ D = \mathbb{N}$
$e\ )\ F = [-۱,۵]$

حل : همانطور که می دانیم مجموعه R به عنوان مجموعه مرجع به شکل زیر تعریف می شود :

$R = (-\infty, +\infty)$

بنابراین با این تعریف داریم :

$a)\ A' = R - A$
$$= (-\infty, +\infty) - [-۲, +\infty)$$
$$= (-\infty, -۲)$$
$b)\ B' = R - B = (-\infty, +\infty) - (۰,۳]$
$$= (-\infty, ۰] \cup (۳, +\infty)$$
$c\ )\ C' = R - \mathbb{Z}$
$= \cdots \cup (-۲,-۱) \cup (-۱,۰) \cup (۰,۱) \cup \ldots$
$d\ )\ D' = R - N$
$= (-\infty, ۱) \cup (۱,۲) \cup (۲,۳) \cup (۳,۴) \cup \ldots$
$e\ )\ F' = R - F = (-\infty, +\infty) - [-۱,۵]$
$$= (-\infty, -۱) \cup (۵, +\infty)$$

مثال ۸) اگر مجموعه R^+ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم متمم مجموعه زیر را بیابید .

$A = (۳,۵]$

حل : همانطور که می دانیم R^+ به صورت زیر تعریف می شود :

$R^+ = (۰, +\infty)\ ,\quad R^- = (-\infty, ۰)$
$A' = U - A = R^+ - A$
$= (۰, +\infty) - (۳,۵] = (۰,۳] \cup (۵, +\infty)$

مثال ۹) فرض کنید که U مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه دلخواه باشند که زیرمجموعه U هستند ، آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید .

الف) $(A \cap A') \cup B$

ب) $\left(\left(\left(A \cup A'\right) \cap A\right) \cup \left(A' \cap U\right)\right) \cap B$

ج) $\left(\left(B \cup B'\right)' \cap \left(\left(A \cap A'\right) \cup B\right)\right) \cup \left(\left(U - A\right)' \cap U\right)$

حل :

الف) $\underbrace{\left(A \cap A'\right)}_{\emptyset} \cup B = B$

ب) $\Big(\big(\underbrace{(A\cup A')}_{U}\cap A\big)\cup\underbrace{(A'\cap U)}_{A'}\Big)\cap B$

$$=\big((U\cap A)\cup A'\big)\cap B$$
$$=(A\cup A')\cap B=U\cap B=B$$

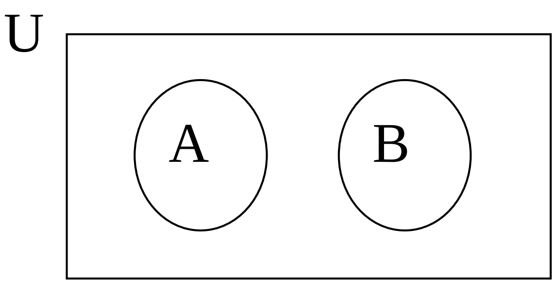
ج) $\Big(\underbrace{(B\cup B')}_{U}{}'\cap\big(\underbrace{(A\cap A')}_{\emptyset}\cup B\big)\Big)\cup\big(\underbrace{(U-A)'}_{A}\cap U\big)$

$$=(\emptyset\cap(\emptyset\cup B))\cup(A\cap U)$$
$$=(\emptyset\cap B)\cup A=\emptyset\cup A=A$$

دو مجموعه جدا از هم :

به هر دو مجموعه ای مـانند A و B که فاقد هر گونه عضو مشترکـی هستند ، دو مجموعه جدا از هم گویند .

برای مثال دو مجموعه اعداد طبیعی زوج و اعداد طبیعی فرد را در نظر بگیرید . این دو مجموعه با هم هیچ وجه اشتراکی ندارند پس می توان گفت که دو مجموعه جدا از هم می باشند .



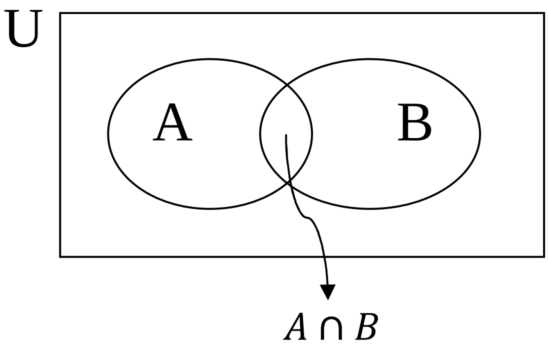
$$\Longrightarrow A\cap B=\emptyset$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه :

قرارداد : اگر A یک مجموعه متناهی باشد آنگاه تعداد اعضای این مجموعه را با n(A) نمایش می‌دهند .

در تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه نکات زیر قابل ذکر می‌شود :

۱) اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند ، آن‌گاه تعداد عضوهای اجتماع این دو مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود :

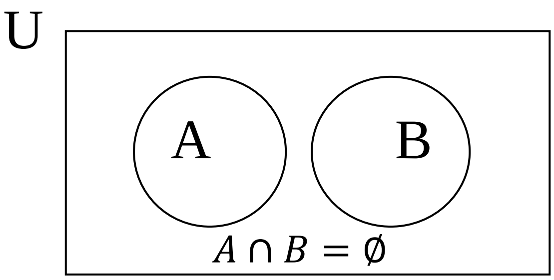


$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

حال از این رابطه می‌توان نتیجه زیر را گرفت :

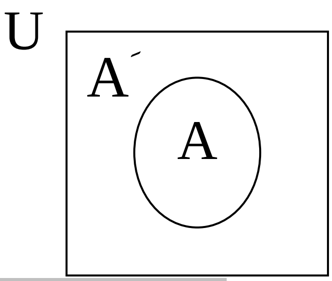
$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=n(A)+n(B)$$
$$\rightarrow n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

حالا اگر مجموعه‌های A و B ، دو مجموعه جدا از هم باشند آنگاه داریم :



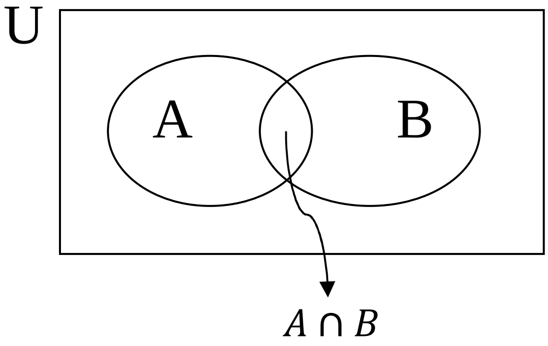
$$n(A\cap B)=\emptyset$$
$$\Longrightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)+\emptyset$$
$$\Longrightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

۲) اگر U یک مجموعه متناهی باشد ، آنگاه همواره داریم :



$$n(A')=n(U)-n(A)$$

۳) اگر A و B دو مجموعه متناهی و U مجموعه مرجع باشد ، آنگاه داریم :

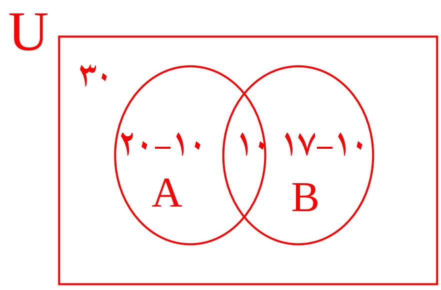


$a)\ n\left(A \cap B'\right)$
$= n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$B)\ n\left(A' \cap B'\right)$
$= n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

مثال ۱۰) در یک کلاس ۳۰ نفری ، ۲۰ نفر به زبان انگلیسی ، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان صحبت می کنند . در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی کنند ؟

حل :



کل کلاس $\rightarrow n(U) = ۳۰$

انگلیسی $\rightarrow n(A) = ۲۰$

فرانسه $\rightarrow n(B) = ۱۷$

هردو زبان $\rightarrow n(A \cap B) = ۱۰$

در حل این مساله باید تعداد افرادی که یا انگلیسی یا فرانسوی صحبت می کنند را پیدا کنیم ، سپس افرادی که به هیچ کدام از این دو زبان صحبت می‌کنند را پیدا کنیم .

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = ۲۰ + ۱۷ - ۱۰ = ۲۷$

$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

$n(A \cup B)' = ۳۰ - ۲۷ = ۳$

بنابراین در این کلاس ۳ نفر نه به زبان انگلیسی و نه به زبان فرانسوی صحبت می کنند .

مثال ۱۰)