گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۱

فصل اول

عددها و نمادها

معرفی مجموعه اعداد

۱) مجموعه اعداد طبیعی یا شمارشی $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,...\}$

۲) مجموعه اعداد حسابی $W = \{۰,۱,۲,۳,...\}$

۳) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

اعداد صحیح شامل اعداد طبیعی و صفر و قرینه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.

۴) مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}\ ,\ b \in \mathbb{N}\right\}$

مثال: چند مستطیل غیریکسان می‌توان رسم نمود که مساحت آن‌ها ۲۴ سانتی‌متر و طول و عرض آن‌ها برحسب سانتی‌متر اعداد طبیعی باشند؟

۱) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$۲۴ = ۲۴ \times ۱ = ۱۲ \times ۲ = ۸ \times ۳ = ۶ \times ۴$

مقایسه دو عدد گویا

برای مقایسه‌ی دو عدد گویا ابتدا با ضرب کردن صورت و مخرج در یک عدد، مخرج‌های دو عدد گویا را یکسان می‌کنیم. سپس بـا مقایســه‌ی صورت‌ها می‌توان تعیین کرد که کدام عدد بزرگ‌تر و یا کدام کوچک‌تر است.

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. به بیان دیگر بین دو عدد گویای متمایز حداقل یک عدد گویا قرار دارد.

مثال: از بین سه عدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۲۴}$ و $\frac{۳}{۷}$ کدام بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) با هم برابرند.

پاسخ: گزینه ۳

اگر آن‌ها را دو به دو مقایسه کنیم و عدد بزرگ‌تر را انتخاب کنیم راحت‌تر می‌باشد.

برای مقایسه باید مخرج‌ها یکسان شوند.

$$\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲۴} \Rightarrow \frac{۸}{۲۴} > \frac{۵}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱}{۳} > \frac{۵}{۲۴}$$

$$\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۷} \Rightarrow \frac{۷}{۲۱} < \frac{۹}{۲۱} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۳}{۷}$$

تعیین عددی گویا بین دو عدد $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$

روش ۱: میانگین دو عدد همواره بین دو عدد قرار خواهد داشت.

$$\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{۲} < \frac{c}{d}$$

این روش به‌دلیل محاسبات زیاد طولانی خواهد بود.

روش ۲: اگر صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کنیم، حاصل عددی می‌شود که بین دو عدد قبلی قرار دارد.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

روش ۳: ابتدا مخرج دو کسر را یکسان می‌کنیم، سپس با توجه به صورت دو کسر عددی بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. در برخی موارد لازم است پس از یکسان‌سازی، صورت و مخرج هر دو کسر را در عدد دیگری نیز ضرب کنیم.

مثال: بین دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ سه عدد گویا بیان کنید.

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶} \overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}} \frac{۱۲}{۲۴} \\ \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}} \frac{۱۶}{۲۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۲}{۲۴}<\frac{۱۳}{۲۴}<\frac{۱۴}{۲۴}<\frac{۱۵}{۲۴}<\frac{۱۶}{۲۴}$$

سه عدد $\frac{۱۳}{۲۴}$ و $\frac{۱۴}{۲۴}$ و $\frac{۱۵}{۲۴}$ بین دو عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ می‌باشند.

نمایش اعشاری

اعداد گویا نمایش دیگری دارند که با انجام عمل تقسیم به‌دست می‌آید که به آن نمایش اعشاری یک عدد گویند.

مثال: اعداد زیر را به فرم اعشاری تبدیل نمایید.

$$\frac{۱}{۲}=۱\div ۲=۰/۵$$

$$\frac{۱}{۱۰}=۱\div ۱۰=۰/۱$$

$$\frac{۲}{۳}=۲\div ۳=۰/۶۶۶۶...=۰/\overline{۶}$$

نمایش اعداد به فرم دهدهی

عدد دو رقمی $\overline{ab}=۱۰a+b$

عدد سه رقمی $\overline{abc}=۱۰۰a+۱۰b+c$

$$ab/c=۱۰a+b+\frac{c}{۱۰}$$

$\vdots$

در جمع و تفریق اعداد اعشاری نماد ممیزها را زیر هم قرار داده و جمع یا تفریق را به‌صورت معمول انجام می‌دهیم.

مثال: یک عدد دورقمی را در نظر بگیرید، اگر جای ارقام آن را عوض کنیم و سپس دو عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر ۱۳۲ می‌شود. مجموع ارقام عدد کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

یک عدد دو رقمی: $\overline{ab}=۱۰a+b$
تعویض جای ارقام: $\overline{ba}=۱۰b+a$

$$\Rightarrow ۱۰a+b+۱۰b+a=۱۳۲ \Rightarrow ۱۱a+۱۱b=۱۳۲$$

$$\Rightarrow ۱۱(a+b)=۱۳۲ \Rightarrow a+b=۱۲$$

مثال: اگر a و b یک رقمی باشند، در ضرب زیر $a+b$ کدام است؟

$$\begin{array}{r} ۲\,a \\ \times\, b\,۳ \\ \hline ۶\,۹ \\ +\,۹\,۲ \\ \hline ۹\,۸\,۹ \end{array}$$

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۷

۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

$$۳\times a=۹ \Rightarrow a=۳$$

b در a ضرب شده و ۲ نوشته شده $\Rightarrow b\times ۳=۱۲ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow a+b=۷$

راه حل دوم:

$$۹۸۹\div ۲۳=۴۳ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow a+b=۷$$

مثال: حاصل تفاضل زیر را بیابید.

$$۲/۳۷۱-۱/۷۹=$$

$$\begin{array}{r} ۲/۳۷۱ \\ -۱/۷۹۰ \\ \hline ۰/۵۸۱ \end{array}$$

در ضرب دو عدد اعشاری، ممیزها را در نظر نگرفته و ضرب را انجام می‌دهیم. سپس بـه تعـداد ارقـام بعـد از ممیـز در هـر دو عـدد بـرای حاصل‌ضرب به‌دست آمده، اعشار در نظر می‌گیریم.

مثال: حاصل‌ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$۲/۷۲\times ۳/۴۲۱=۹/۳۰۵۱۲$$

$$۲۷۲\times ۳۴۲۱=۹۳۰۵۱۲$$

۵= تعداد ارقام بعد از ممیز در هر دو عدد

در تقسیم اعداد اعشاری بهتر است اعداد را به فرم کسری تبدیل کرده و سپس حاصل تقسیم را بیابیم.

$$\frac{۲/۷۲}{۳/۴}=\frac{\frac{۲۷۲}{۱۰۰}}{\frac{۳۴}{۱۰}}=\frac{۲۷۲\cancel{۰}}{۳۴۰\cancel{۰}}=\frac{۲۷۲}{۳۴۰}=۰/۸$$

دقت محاسباتی

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

مثال: حاصل $\frac{۱۱/۴۶-۵/۳۴}{۲/۰۴}$ برابر است با:

۱) ۲/۱۷ ۲) ۳/۰۵ ۳) ۳/۰ ۴) ۲/۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{array}{r} ۱۱/۴۶ \\ -۵/۳۴ \\ \hline ۶/۱۲ \end{array}\Rightarrow\frac{۶/۱۲}{۲/۰۴}=\frac{۶۱۲}{۲۰۴}=۳$$

مثال: در حاصل‌ضرب $۲۳۱/۴۵\times ۱/۰۰۰۱\times ۱/۵۷$، چند رقم معنی‌دار بعد از اعشار وجود دارد؟

۱) ۸ رقم ۲) ۹ رقم ۳) ۱۰ رقم ۴) ۷ رقم

پاسخ: گزینه ۲

کافیست تعداد اعشار اعداد را شمرده و با هم جمع کنیم.

$$۲+۴+۳=۹$$

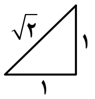
اعداد گنگ

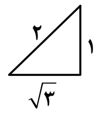
برخی اعداد وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت کسر (اعداد گویا) بیان نمود مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و عدد π و ...، این اعداد را اعداد گنـگ یا اصم نامند.

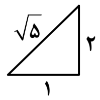
$$\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۳}\ ,\ \sqrt{۵}\ ,\ \sqrt{۶}\ ,\ ...$$

$$\pi\ ,\ ۲\pi\ ,\ \pi^{۲}\ ,\ \pi+۱\ ,\ \pi+\sqrt{۲}\ ,\ ...$$

نمایش پاره‌خط‌هایی به طول اعداد گنگ

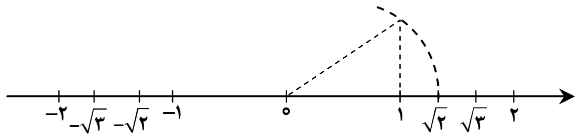
$\sqrt{۲}$: 

$\sqrt{۳}$: 

$\sqrt{۵}$: 

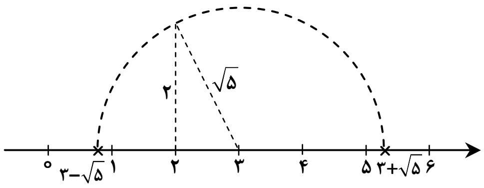
اعداد حقیقی

اعداد گنگ و اعداد گویا را با هم، اعداد حقیقی نامند که تشکیل محور اعداد حقیقی را می‌دهند.

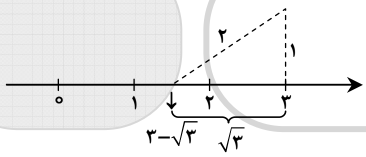


یعنی هر نقطه روی محور اعداد حقیقی متناظر با یک عدد گنگ یا گویاست.

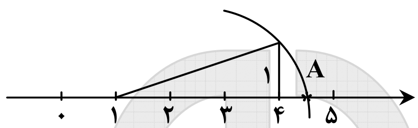
مثال: $\sqrt{۵}-۳$ و $\sqrt{۵}+۳$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.



مثال: $\sqrt{۳}-۳$ را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید.



مثال: در نمودار مقابل، نقطه‌ی A نشانگر چه عددی است؟



۱) $۲+\sqrt{۱۰}$

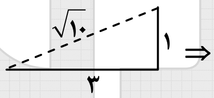
۲) $۱+\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۱۰}$

۴) $۳+\sqrt{۱۰}$

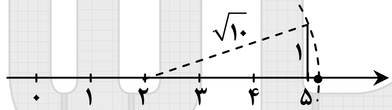
پاسخ: گزینه ۲

نمایش $\sqrt{۱۰}$ =

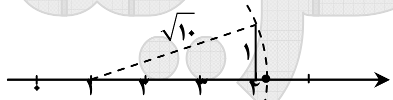


$\Rightarrow$

گزینه‌ی ۱ :

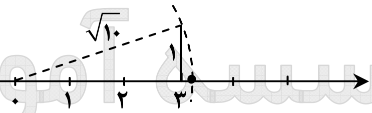


گزینه‌ی ۲ :

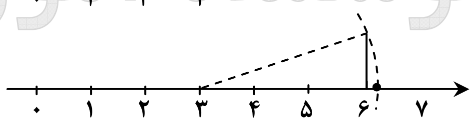


صحیح است

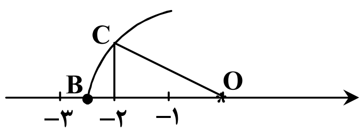
گزینه‌ی ۳ :



گزینه ی ۴ :



مثال: روی محور اعداد نقطه‌ی B چه عددی را نشان می‌دهد؟



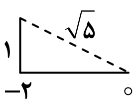
۱) $-\sqrt{۳}$

۲) $۱-\sqrt{۳}$

۳) $-\sqrt{۵}$

۴) $۱-\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۳



$\Rightarrow$ به‌دلیل این‌که از صفر شروع شده و به چپ رفته است $\Rightarrow -\sqrt{۵}$

نماد قدرمطلق

برای بیان فاصله‌ی یک عدد حقیقی تا مبدأ از نماد قدرمطلق «| |» استفاده می‌شود که حاصل آن همواره عددی مثبت است.

برای محاسبه‌ی قدرمطلق به عدد درون آن نگاه می‌کنیم. اگر عدد مثبت باشد، حاصل قدرمطلق همان عدد خواهد بود و اگر عدد منفی باشد، حاصل قدرمطلق قرینه‌ی عدد می‌باشد.

مثال: اگر $a = ۱$ باشد، حاصل عبارت $|۲-a| - |-۳+a| + |۵a+۱|$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$عبارت = |۲-۱| - |-۳+۱| + |۵+۱| = |۱| - \underbrace{|-۲|}_{+۲} + |۶| = ۱-۲+۶ = ۵$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$|۳| = ۳$$
$$\left|\frac{۴}{۳}\right| = \frac{۴}{۳}$$
$$|-۵| = ۵$$
$$|۱-۷| = |-۶| = ۶$$
$$|۱۱-۳| = |۸| = ۸$$
$$|۱-\sqrt{۲}| = \sqrt{۲}-۱$$
$$|۱+\sqrt{۲}| = ۱+\sqrt{۲}$$
$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}| = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$
$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$$

دقت:

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶...$$
$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۰۵۰۸۰$$
$$\sqrt{۵} = ۲/۲۳۶۰۶۷۹۷$$
$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵$$

مثال: حاصل عبارت $|\sqrt{۳}-۱| + |۱-\sqrt{۳}|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $-۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}-۲$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{۳}-۱ \text{ مثبت} \Rightarrow |\sqrt{۳}-۱| = \sqrt{۳}-۱$$
$$۱-\sqrt{۳} \text{ منفی} \Rightarrow |۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$$
$$\Rightarrow عبارت = \sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}-۱ = ۲\sqrt{۳}-۲$$

مثال: خلاصه‌شده‌ی عبارت $|۲-\sqrt{۳}| - \sqrt{۳}|\sqrt{۳}-۱|$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $۵-۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

$$۲-\sqrt{۳} \text{ مثبت} \Rightarrow |۲-\sqrt{۳}| = ۲-\sqrt{۳}$$
$$۱-\sqrt{۳} \text{ منفی} \Rightarrow |۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$$
$$\Rightarrow عبارت = ۲-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow ۲-\cancel{\sqrt{۳}}-۳+\cancel{\sqrt{۳}} = -۱$$

تقریب اعداد به روش قطع کردن

در این روش اعداد اعشاری را فقط تا رقم دلخواه بیان می‌کنیم.

مثال: عدد π تا دو رقم اعشار ۳/۱۴ و تا ۴ رقم اعشار ۳/۱۴۱۵ می‌باشد.

در این روش، عدد تقریبی از عدد واقعی همواره کوچک‌تر خواهد بود.

علامت کوچک‌تر بودن

هرگاه روی محور اعداد حقیقی عدد b سمت راست عدد a قرار گیرد، می‌گوییم عدد b از عدد a بزرگ‌تر است یا عدد a از عدد b کوچک‌تر می‌باشد و آن را با نماد $a < b$ یا $b > a$ نمایش می‌دهیم.

مثال: اگر $A < ۵ - \sqrt{۳} < B$ ، که در آن A و B دو عدد صحیح و متوالی هستند، آن‌گاه $A + B$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳ \Rightarrow ۵-\sqrt{۳} \simeq ۳/۲۷ \Rightarrow \underset{A}{\underset{\uparrow}{۳}} < ۵-\sqrt{۳} < \underset{B}{\underset{\uparrow}{۴}} \Rightarrow A+B=۷$$

مثال: از اعداد زیر کدام‌یک نامنفی است؟

۱) $|-۱|-|-۲|$ ۲) $-|-۳|-۳$ ۳) $-\frac{۵}{|-۵|}$ ۴) $|۳-\pi|$

پاسخ: گزینه ۴

حاصل قدرمطلق همواره یک عدد نامنفی است $\Leftarrow$ $|\pi-۳|$ نامنفی خواهد بود.

مثال: اگر $۰ < a < b < c < d$ ، آن‌گاه کدام عدد زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{a+b}{c+d}$ ۲) $\frac{b+c}{a+d}$ ۳) $\frac{b+d}{a+c}$ ۴) $\frac{c+d}{a+b}$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول: در یک کسر هرچه صورت بزرگ‌تر و مخرج کوچک‌تر باشد، کسر بزرگ‌تر خواهد بود.

روش دوم: می‌توان عددگذاری نیز نمود، سپس گزینه‌ها را با هم مقایسه کرد.

زبان ریاضی

می‌توان جملات ریاضی را برای سهولت به زبان ریاضی بیان نمود.

مثلاً: جمله‌ی خبری «مجموع دو عدد دوازده و هفده برابر بیست و نه است.» را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۱۲+۱۷=۲۹$$

یا «مجموع هر عدد با خودش مساوی با دو برابر آن عدد می‌باشد.»:

$$a+a=۲a$$

در این‌گونه موارد که به عدد خاصی اشاره نشده از نمادهای حروف انگلیسی a و b و c و ... استفاده می‌شود.

مثال: «حاصل‌جمع هر عدد با صفر خودش می‌شود.»:

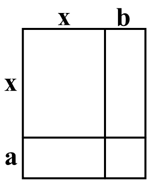
$$x+۰=x$$

مثال: «هر عددی با ۱ جمع شود از خود آن عدد بزرگ‌تر است.»:

$$z+۱>z$$

دقت: ضرب یک عدد در خودش را مجذور یا مربع آن عدد گویند، یعنی $x^۲$ مربع x است.

مثال: شکل مقابل نشانگر کدام‌یک از عبارات زیر است؟



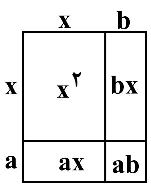
۱) $(x+a)(x+b)=x^۲+abx$

۲) $(x+a)(x+b)=a^۲+x^۲+b^۲$

۳) $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

۴) $(x-a)(x-b)=x^۲-(a+b)x+ab$

پاسخ: گزینه ۳



مجموع مساحت‌های داخل = مساحت کل

$$=(x+a)(x+b)=x^۲+ax+bx+ab$$

$$=x^۲+(a+b)x+ab$$

مثال: نماد ریاضی «معکوس تفاضل دو عدد حقیقی» کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ۲) $\frac{1}{x-y}$ ۳) $x-y$ ۴) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

پاسخ: گزینه ۲

$x-y$: تفاضل دو عدد حقیقی

$\frac{1}{A}$: معکوس عدد حقیقی A

ابتدا تفاضل و سپس معکوس $\Rightarrow \frac{1}{x-y}$

اگر می‌گفت «تفاضل معکوس دو عدد» ابتدا باید معکوس سپس تفاضل را محاسبه می‌کردیم. $(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})$

مثال: نماد ریاضی «فاصله‌ی x تا عدد (۲-) کم‌تر از یک است» کدام است؟

۱) $|x|-2<1$ ۲) $|x-2|<1$ ۳) $|x+2|<1$ ۴) $|x|+2<1$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: فاصله‌ی x از عدد a : $|x-a|$

فاصله‌ی x از عدد (۲-) $=|x-(-2)|=|x+2| \Rightarrow |x+2|<1$

مثال: نماد ریاضی «فاصله‌ی x تا عدد ۲، برابر ۵ است» کدام می‌تواند باشد؟

۱) $|x+2|=5$ ۲) $|x|-2=5$ ۳) $|x-2|=5$ ۴) $|x|+2=5$

پاسخ: گزینه ۳

فاصله‌ی x از عدد ۲ $=|x-2| \Rightarrow |x-2|=5$

مثال: نماد ریاضی «اگر از عدد x، مجذور آن کم شود، حاصل برابر نصف معکوس آن می‌شود» کدام است؟

۱) $x^2-x=\frac{2}{x}$ ۲) $x^2-x=\frac{1}{2x}$ ۳) $x-x^2=\frac{1}{2x}$ ۴) $x-x^2=\frac{2}{x}$

پاسخ: گزینه ۳

x^2 : مجذور

$\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2x}$: نصف معکوس

$\Rightarrow x-x^2=\frac{1}{2x}$

چند خاصیت مهم در اعداد

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

$a(x+y)=ax+ay$ خاصیت پخشی یا توزیع‌پذیری

$ax+ay=a(x+y)$ عکس عمل فوق را فاکتورگیری گویند.

$-(a+b+c)=-a-b-c$

تقدم اعمال ریاضی:

۱) پرانتز (داخلی‌ترین)

۲) توان

۳) ضرب و تقسیم (از چپ به راست)

۴) جمع و تفریق

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$-\left(۳\times-۳+۲-۳\times(۲+۵\div-۱)\right)+۱=?$$

$$-\left(۴\times-۳+۲-۳\times\underbrace{(۲+۵\div-۱)}_{۲-۵=-۳}\right)+۱$$

$$=-(\underbrace{۴\times-۳}_{-۱۲}+۲\underbrace{-۳\times-۳}_{+۹})+۱=-(-۱۲+۲+۹)+۱=-(-۱)+۱=۱+۱=۲$$

مثال: حاصل $-۵+۴\div۲+۱۴\div۲\times۷$ برابر است با:

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ۴

$$-۵+\underbrace{۴\div۲}_{۲}+\underbrace{۱۴\div۲\times۷}_{\underbrace{۷\times۷}_{۴۹}}=-۵+۲+۴۹=۴۶$$

مثال: قیمت کالایی ۱۰٪ تنزل می‌کند. به‌منظور برگرداندن به ارزش قبلی، قیمت جدید چند درصد باید افزایش یابد؟

۱) ۱۰٪ ۲) ۹٪ ۳) ۱۱٪ ۴) $۱۱\frac{۱}{۹}$٪

پاسخ: گزینه ۴

$$\%۱۰=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow \underset{\text{قیمت اولیه}}{\underset{\downarrow}{x}}-\frac{۱}{۱۰}x=\frac{۹}{۱۰}x \ \text{قیمت تنزل‌یافته}$$

حال می‌خواهیم آن را به قیمت اولیه باز گردانیم.

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۰}x+D\times\frac{۹}{۱۰}x=x\Rightarrow\frac{۹}{۱۰}+D\times\frac{۹}{۱۰}=۱\Rightarrow\frac{۹}{۱۰}(۱+D)=۱\Rightarrow ۱+D=\frac{۱۰}{۹}$$

$$\Rightarrow D=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{\text{به درصد بیان کنیم}}D=\frac{۱}{۹}\times۱۰۰=\frac{۱۰۰}{۹}=۱۱\frac{۱}{۹}٪$$

فصل دوم

مجموعه‌ها

مجموعه

هر دسته‌ی مشخص شده از اشیا را یک مجموعه و آن اشیا را اعضای آن مجموعه گویند. برای بیان مجموعه اعضای آن را در یک علامت { } قرار داده و معمولاً از نمایش بزرگ حروف برای نام‌گذاری استفاده می‌شود.

نکته: اعضای یک مجموعه باید مشخص باشند.

مثال: عبارت «انسان‌های کوتاه‌قد» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کنند.زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و نسبی هستند.

عبارات زیر از این گونه‌اند:

«اعداد بزرگ»، «اعداد کوچک»، «لباس‌های زیبا» و ...

عضویت

هر یک از اشیاء مجموعه را یک عضو مجموعه گویند و برای نمایش عضو بودن از علامت $\in$ و برای نمایش عضو نبودن از علامت $\notin$ استفاده می‌شود.

نکته: یک شیء عضوی از مجموعه است هرگاه در داخل مجموعه عیناً موجود باشد.

مثال: مجموعه‌ی $\{\{\},\{\{۲\}\},۲,\{۱\}\} = A$ را در نظر بگیرید.

غلط	$\{۲\} \in A$	صحیح	$\{۱\} \in A$
صحیح	$\{\{۲\}\} \in A$	غلط	$۱ \in A$
صحیح	$\{\} \in A$	صحیح	$۲ \in A$

این مجموعه چند عضو دارد؟ ۴ تا

مجموعه‌ی تهی

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد که به‌صورت { } یا $\varnothing$ نمایش داده می‌شود.

زیرمجموعه

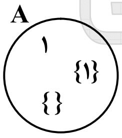
اگر A و B دو مجموعه باشند به‌طوری‌که هر عضو A، عضو B نیز باشد، در این صورت گوییم A زیرمجموعه‌ی B است و آن را به‌صورت $A \subset B$ نمایش می‌دهیم.

برای بیان زیرمجموعه نبودن از علامت $\not\subset$ استفاده می‌شود.

نکته: مجموعه‌ی { } ($\varnothing$) زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست.

نکته: برای مشخص شدن آن‌که آیا A زیرمجموعه‌ی B است یا خیر کافی است اعضای A عیناً در مجموعه‌ی B حضور داشته باشند.

مثال:

A


صحیح	$\{\} \in A$	غلط	$۱ \subset A$
صحیح	$\{\} \subset A$	صحیح	$\{۱\} \subset A$
صحیح	$\{\{۱\}\} \subset A$	صحیح	$\{۱\} \in A$
صحیح	$\{۱,\{۱\}\} \subset A$		

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی ۲^n می‌باشد.

مثال: کدام مجموعه‌ی زیر تهی نیست؟

۱) $\{x \mid x^۲ = ۵, x \in W\}$

۲) $\{x \mid ۳x^۵ = ۳, x \in \mathbb{N}\}$

۳) $\{x \mid x^۲ + ۲x + ۱ = ۰, x \in \mathbb{N}\}$

۴) $\{x \mid x^۲ + ۲ = ۰, x \in \mathbb{R}\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی ۱: $x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \notin W$

گزینه‌ی ۲: $۳x^۵ = ۳ \Rightarrow x^۵ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \in \mathbb{N}$

گزینه‌ی ۳: $(x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \notin \mathbb{N}$

گزینه‌ی ۴: $x^۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۲$ فاقد جواب حقیقی

مثال: زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ کدام است؟

۱) $\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}, \{A\}$ ۲) $A, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$ ۳) $A, \{\{\varnothing\}\}, \varnothing, \{\varnothing\}$ ۴) $\{\varnothing\}, \varnothing, \{\{\varnothing\}\}$

پاسخ: گزینه ۳

$\varnothing$ زیرمجموعه ۰ عضوی

$\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$: زیرمجموعه ۱ عضوی

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = A$: زیرمجموعه ۲ عضوی

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $x+5$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $x+3$ عضوی است؟

۱) ۲ برابر ۲) ۳ برابر ۳) ۴ برابر ۴) $\frac{1}{4}$ برابر

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{2^{x+5}}{2^{x+3}} = 2^{(x+5)-(x+3)} = 2^2 = 4$$

شرط تساوی دو مجموعه

اگر هر عضو مجموعه‌ی A عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B عضوی از مجموعه‌ی A باشد، این دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم $A = B$.

نکته: در مجموعه‌ها اعضایی که تکرار شده‌اند، یک بار در نظر گرفته می‌شوند. یعنی $\{1,1,2,3,3,3\}$ با مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ برابر است.

نکته:

$$\begin{cases} A \subset B \\ \text{و} \\ B \subset A \end{cases} \Leftrightarrow A = B$$

مثال: اگر $\{a, a^2\} = \{1, b, b^2\}$ در این صورت a و b عبارت‌اند از:

۱) $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 1 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$ ۳) $a = b = \pm 1$ ۴) غیرممکن است.

پاسخ: گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} b = a = 1 \\ \text{یا} \\ b = a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = \pm 1$$

در حقیقت جایگذاری گزینه‌ها جواب می‌دهد.

مجموعه‌ی مرجع

مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آن باشد را مجموعه‌ی مرجع نامند که با M یا U نمایش داده می‌شود.

نکته: اگر در مسئله‌ای مجموعه‌ای به‌عنوان مجموعه‌ی مرجع مطرح شده، یعنی در ادامه‌ی مسئله تمام مجموعه‌های مورد بحث باید زیرمجموعه‌ی آن باشند.

مثال: اگر مجموعه‌ی مرجع اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ انتخاب شود، آن‌گاه مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد چند عضو خواهد داشت؟

۱) بی‌شمار ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) هیچ

پاسخ: باید اعداد طبیعی فرد کوچک‌تر از ۲۰ شمارش شوند که به تعداد ۱۰ عددی باشند، بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نحوه‌ی نمایش مجموعه‌ها (مشخص کردن مجموعه‌ها)

۱- توصیفی: مجموعه را با توصیف اعضای آن مشخص می‌کنیم.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰

مجموعه‌ی اعداد گویا که قدرمطلق آن‌ها از ۷ کم‌تر است.

۲- بیان ریاضی (با علائم ریاضی): در این روش با پیدا کردن یک ویژگی مشترک و استفاده از متغیرهای x و y و ... آن ویژگی مشترک را به‌صورت علائم ریاضی بیان می‌کنیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ $= \{x \mid x < ۱۰۰ \,,\, x \in \mathbb{N}\}$

مجموعه اعداد گویا که قدرمطلق آن‌ها از ۷ کم‌تر است. $= \{r \mid |r| < ۷ \,,\, r \in \mathbb{Q}\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid |r| < ۷\}$

اعداد طبیعی زوج $= \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = ۲k \,,\, k \in \mathbb{N}\}$

اعداد طبیعی فرد $= \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = ۲k - ۱ \,,\, k \in \mathbb{N}\}$

اعداد طبیعی مربع کامل $= \{n^۲ \mid n \in \mathbb{N}\}$

مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۴ $= \{۴n \mid n \in \mathbb{N}\}$

اعداد طبیعی زوج بین ۱۰۱ تا ۷۰۱ $= \{x \mid x = ۲k \,,\, k \in \mathbb{N} \,,\, ۱۰۱ < x < ۷۰۱\} = \{x = ۲k \mid k \in \mathbb{N} \,,\, ۱۰۱ < x < ۷۰۱\}$

مثال: اگر n عدد طبیعی باشد و $۲ < n \leq ۳۰$، مجموعه‌ی $A = \{x \mid x = ۳n + ۱, x < ۷۰\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۹۱ ۲) ۸۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

$x < ۷۰ \Rightarrow ۳n + ۱ < ۷۰ \Rightarrow ۳n < ۶۹ \Rightarrow n < ۲۳$

با توجه به فرض $\Rightarrow ۲ < n < ۲۳ \Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ..., ۲۲\} \Rightarrow A = \{۱۰, ۱۳, ۱۶, ..., ۶۷\}$

تعداد اعضای A: $۲۰ = ۱ + ۳ - ۲۲$ می‌باشد.

مثال: کدام تعریف برای مجموعه‌ی $A = \{x \mid x > ۰\}$ صحیح است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد اصم بزرگ‌تر از صفر ۲) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت

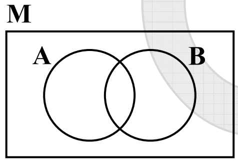
۳) مجموعه‌ی اعداد گویای غیرصفر ۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرمنفی

پاسخ: گزینه ۲

وقتی نوع مجموعه مشخص شده است، در حالت کلی اعداد حقیقی باید در نظر گرفته شود مگر این‌که در مسئله ذکر شود.

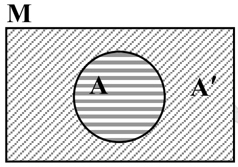
مثال: نمودار وِن: در این حالت معمولاً مجموعه‌ها را به‌صورت یک شکل هندسی بسته در نظر می‌گیرند و اعضای مجموعه درون شکل هندسی قرار دارند.

دقت: اگر در سؤالی مجموعه‌ی مرجع مطرح باشد، آن را به‌صورت مستطیل نمایش داده و تمام اشکال هندسی دیگر درون آن ترسیم می‌شوند.



اعمال بر روی مجموعه‌ها

۱- متمم مجموعه‌ی A، اعضایی از مجموعه‌ی مرجع است که در A نباشند. به بیان دیگر مجموعه اعضای A و مجموعه اعضای متمم A روی هم مجموعه‌ی مرجع را تشکیل می‌دهند و آن را با A' یا $\bar{A}$ نمایش می‌دهند.



۲- اشتراک دو مجموعه‌ی B و A: مجموعه اشیایی را که هم عضو A و هم عضو B باشند اشتراک دو مجموعه‌ی A و B نامند و آن را با $A \cap B$ نشان می‌دهند.

اگر دو مجموعه‌ی A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یعنی $\{A \cap B = \varnothing\}$، دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا گویند.

۳- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B: مجموعه‌ی جدیدی است که متشکل از اعضای دو مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B با هم است که آن را با $A \cup B$ نمایش می‌دهند.

نکته: هر عضو مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی $A \cup B$ حضور دارد.

هر عضو مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی $A \cup B$ حضور دارد.

هر عضو $A \cup B$ یا در مجموعه‌ی A وجود دارد و یا در مجموعه‌ی B و یا در هر دو.

۴- تفاضل دو مجموعه: برای دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه اشیایی را که در A هستند ولی در B نیستند، تفاضل B از A گویند و آن را با $A - B$ نمایش می‌دهند.

یعنی برای به‌دست آوردن تفاضل B از A $(A - B)$ باید اعضای B را در صورت وجود از مجموعه‌ی A حذف کنیم. اعضایی که در A باقی می‌مانند، مجموعه‌ی $A - B$ را تشکیل می‌دهند.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$\{a,b,c\}-\{a\}=\{b,c\}$

$\{a,b,c\}-\{۱\}=\{a,b,c\}$

$\{۱\}-\{a,b,c\}=\{۱\}$

$\{a,b,c\}-\{a,۱,d\}=\{b,c\}$

$\{a\}-\{a,b,c\}=\{\}$

نکته: عمل تفاضل باید بین دو مجموعه صورت گیرد و بین یک مجموعه و یک عضو قابل انجام نیست:

$\{a,b,c\}-a=$ قابل انجام نیست

مثال: اگر $A=\{۰,۱,۲,۳,...,۳۰\}$ و $B=\{x \mid x=۳n+۱,$ عدد طبیعی $n\}$ مجموعه‌ی $A\cap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

$B=\{۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۲۵,۲۸...\} \Rightarrow A\cap B=\{۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۲۵,۲۸\}$ ۹ عضو دارد

روش دوم:

$$۰\le ۳n+۱\le ۳۰ \Rightarrow -۱\le ۳n\le ۲۹ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le n\le \frac{۲۹}{۳}=۹/۳...$$

n عدد طبیعی $\Leftarrow$ $n\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و ۹ عضو دارد.

مثال: اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دلخواه مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ حداقل دارای «چند عضو» است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

به‌دلیل این‌که مجموعه‌ی A، ۴ عضو دارد پس هر زیرمجموعه ۳ عضوی آن دارای ۲ عضو مشترک است به‌عنوان مثال:

$B_۱=\{a,b,c\}$

$B_۲=\{a,b,d\} \Rightarrow$ بین هر دو زیرمجموعه همواره ۲ عضو مشترک وجود دارد

$B_۳=\{a,c,d\}$

مثال: اگر $M=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ مجموعه‌ی مرجع و A مجموعه‌ی اعداد اول و B مجموعه‌ی اعداد فرد باشند، $A\cap B'$ چند عضو دارد؟

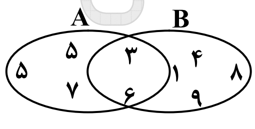
۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

$B'=$ مجموعه اعداد زوج

تنها عدد زوجی که اول نیز باشد $\{۲\}$ است پس: $A\cap B'=\{۲\}$

مثال: با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه‌ی $A-(A-B)$ و $B-(B-A)$ چند عضو دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned}A-(A-B)&=A\cap B=\{۳,۶\}\\ B-(B-A)&=A\cap B=\{۳,۶\}\end{aligned} \Rightarrow$$ اجتماع آن‌ها همان $\{۳,۶\}$ خواهد بود که ۲ عضو دارد.

مثال: اگر $x\notin A\cup B$ کدام‌یک درست است؟

۱) $x\in B, x\notin A$ ۲) $x\in B, x\in A$ ۳) $x\notin B, x\notin A$ ۴) $x\in(A-B)$

پاسخ: گزینه ۳

اگر عضوی در اجتماع نباشد یعنی در هیچ‌کدام از مجموعه‌ها نبوده است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

متناهی: اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آن‌ها سرانجام به پایان برسد (شمارش‌پذیر باشند) آن مجموعه را متناهی گویند. در غیر این صورت نامتناهی است.

مجموعه مورچه‌گان ← متناهی

مجموعه تهی ← متناهی

مجموعه اعداد طبیعی فرد ← نامتناهی

مجموعه اعداد گویای بین ۱ و ۲ ← نامتناهی

نکته: اگر مجموعه‌ی A متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ی آن نیز متناهی است.

اگر مجموعه‌ی A نامتناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ی آن می‌تواند متناهی باشد یا نامتناهی باشد.

اگر مجموعه‌ی B نامتناهی باشد و مجموعه‌ی A به‌گونه‌ای باشد که $B \subset A$ آن‌گاه مجموعه‌ی A نیز نامتناهی خواهد بود.

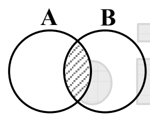
مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

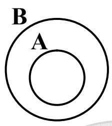
۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر از ۳
۲) مجموعه‌ی دایره‌هایی که مرکز آن‌ها نقطه‌ی $(1,2)$ است.
۳) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳
۴) مجموعه‌ی خط‌هایی که بر یک خط مفروض عمود هستند.

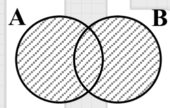
پاسخ: گزینه ۳

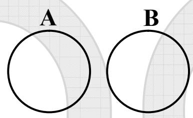
مجموعه‌ای که شمارش‌پذیر باشد را متناهی گویند هرچند زمان زیادی طول بکشد. گزینه‌ی ۳ به‌صورت $\{1,2\}$ می‌باشد که متناهی است.

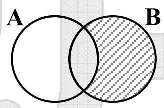
نکته: بیان نمودار وِن برای برخی مجموعه‌ها:

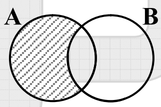
$A \cap B$


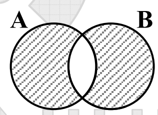
$A \subset B$


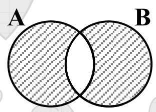
$A \cup B$ در حالت کلی


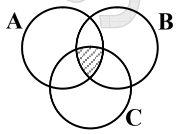
$A \cap B = \varnothing$ (دو مجموعه‌ی مجزا)


$B - A$ در حالت کلی


$A - B$ در حالت کلی


$(A - B) \cup (B - A)$


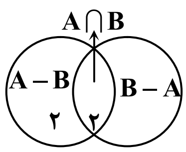
$(A \cup B) - (A \cap B)$


$A \cap B \cap C$ در حالت کلی


مثال: مجموعه‌های $(A \cup B)$ دارای ۵ عضو، $(A \cap B)$ دارای ۲ عضو و $(A - B)$ نیز دارای ۲ عضو می‌باشند. «مجموعه‌ی $(B - A)$» چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

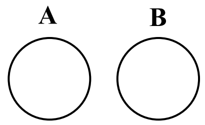


$\Rightarrow$ تعداد اعضای $B - A$ = ۵ − ۲ − ۲ = ۱

مثال: A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند. اگر مجموعه‌ی $A\cup B$ دارای ۲۳ عضو و مجموعه‌ی $A-B$ دارای ۱۲ عضو باشند $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) $\varnothing$ ۲) صفر ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳



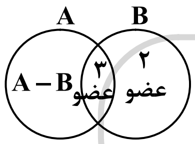
A و B جدا از هم

$$\begin{matrix} A-B=A \\ B-A=B \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد اعضای } B-A = ۲۳-۱۲=۱۱$$

مثال: مجموعه‌ی $A\cup B$ دارای ۷ عضو، $A\cap B$ دارای ۳ عضو و $B-A$ دارای ۲ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $A\cap B$ چه تعداد بیش‌تر از تعداد زیر مجموعه‌های $A-B$ است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

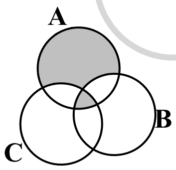
پاسخ: گزینه ۲



$$\text{تعداد اعضای } A-B = ۷-۳-۲=۲$$

$$\left.\begin{matrix} \text{تعداد زیرمجموعه‌ها } = ۲^۲ = ۴ \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A\cap B = ۲^۳ = ۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۸-۴=۴$$

مثال: کدام‌یک از عبارت‌های زیر نشان‌دهنده‌ی قسمت سایه‌زده شده است؟



۱) $A-(B\cup C)$

۲) $(A\cap B\cap C)\cup(A-B)$

۳) $A-[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

۴) $[A-(B\cup C)]\cup(A\cap B\cap C)$

پاسخ: گزینه ۴

مثال: اگر مجموعه‌ی A و B هر یک ۶ عضو داشته باشند و بدانیم $A\cup B$ دارای ۸ عضو است، $A\cap B$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

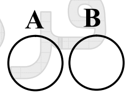
$$\text{تعداد اعضای } A\cup B = \text{تعداد اعضای } A + \text{تعداد اعضای } B - \text{تعداد اعضای اشتراک } A \text{ و } B$$

$$\Rightarrow ۸=۶+۶-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۴ \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه} = ۲^۴ = ۱۶$$

مثال: اگر $A\cap B=\varnothing$ و $B\neq\varnothing$، مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ برابر کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $A\cup B$ ۳) A ۴) B

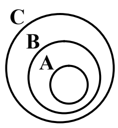
پاسخ: گزینه ۲

$A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ مجزا $A,B \overset{B\neq\varnothing}{\Rightarrow}$  $\Rightarrow \begin{matrix} A-B=A \\ B-A=B \end{matrix} \Rightarrow$ عبارت $=A\cup B$

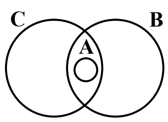
نکات:

۱) $A\subset A \qquad \varnothing\subset A$

۲) $\left\{\begin{matrix} A\subset B \\ B\subset C \end{matrix}\right. \Rightarrow A\subset B\subset C$ یعنی



۳) $\left\{\begin{matrix} A\subset B \\ A\subset C \end{matrix}\right. \Leftrightarrow A\subset B\cap C \Rightarrow A\subset B\cup C$



۴) $A \cap A = A$
$A \cup A = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \varnothing = A$
$A \cup A' = M$
$A \cap A' = \varnothing$
$A - A = \varnothing$
$A - \varnothing = A$
$\varnothing - A = \varnothing$
$A \cap M = A$

۵) $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$

$A \cap B \subset A \quad , \quad A \subset B \cup A$
$A \cap B \subset B \quad \quad B \subset A \cup B$

۶) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$

۷) $(A')' = A$
$\varnothing' = M$

۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال: A و B مجموعه‌ی غیرتهی و $A \cup B \subset B$، آن‌گاه:

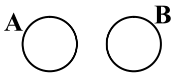
۱) $B \subset A$ ۲) $A \cap B = \varnothing$ ۳) $A \cap B = B$ ۴) $A \cap B = A$

پاسخ: گزینه ۴

$A \cup B \subset B$ فرض مسئله
$B \subset A \cup B$ همواره برقرار است
$\Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

مثال: اگر $A - B = A$ آن‌گاه حاصل $B - [A - (B - A)]$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A - B$ ۴) $\varnothing$

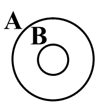
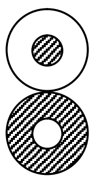
$A - B = A \Rightarrow$ A و B جدا از هم هستند  $\Rightarrow B - A = B$

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $B - (A - \underbrace{(\underbrace{B - A}_{B})}_{A}) = B - A = B$

مثال: اگر $A \subset B$، آن‌گاه حاصل $(A \cap B) - (A - B)$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A - B$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه ۲


$\Rightarrow$ $A \cap B =$ / $A - B =$

$\Rightarrow A \cap B - (A - B) = A \cap B = B$

مثال: اگر $A \cap B = A$، آن‌گاه:

۱) $A \cup B = B$ ۲) $A \cup B = A$ ۳) $A \cup B = A - B$ ۴) $A \cup B = A \cap B$

پاسخ: گزینه ۱

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

۹) اگر $\mathbb{N}$ و $\mathbf{W}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ به‌ترتیب نمایش اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا، اصم و حقیقی باشند داریم:

$$\mathbb{N} \subset \mathbf{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، اعداد حسابی $\mathbf{W}$ و اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ می‌باشند. «نتیجه‌ی نادرست» کدام است؟

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbf{W} \subset \mathbf{W}$ ۲) $\mathbb{N} \cap \mathbf{W} \subset \mathbf{W}$ ۳) $\mathbf{W} \cup \mathbb{Z} \subset \mathbf{W}$ ۴) $\mathbf{W} \cap \mathbb{Z} \subset \mathbf{W}$

پاسخ: گزینه ۳

$\mathbf{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$، زیرا $\mathbb{N} \subset \mathbf{W} \subset \mathbb{Z}$

و $\mathbb{Z} \not\subset \mathbf{W}$

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی، حسابی و صحیح به‌ترتیب $\mathbb{N}$ و $\mathbf{W}$ و $\mathbb{Z}$ بوده، «کدام مجموعه» با پایان است؟

۱) $\mathbb{Z} - \mathbf{W}$ ۲) $\mathbf{W} \cap \mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbf{W}$ ۴) $\mathbf{W} - \mathbb{N}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی ۱: $\mathbb{Z} - \mathbf{W} =$ تمام اعداد صحیح منفی بی‌پایان

گزینه‌ی ۲: $\mathbf{W} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ بی‌پایان

گزینه‌ی ۳: $\mathbb{Z} \cap \mathbf{W} = \mathbf{W}$ بی‌پایان

گزینه‌ی ۴: $\mathbf{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ باپایان

مثال: اگر دو مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هم‌ارز باشند، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) اعضای دو مجموعه در تناظر یک‌به‌یک هستند. ۲) دو مجموعه مساوی هستند.

۳) هر دو مجموعه بی‌پایان هستند. ۴) هر دو مجموعه با پایان هستند.

پاسخ: گزینه ۱

دو مجموعه را هم ارز گویند هرگاه اعضای آن‌ها در تناظر یک‌به‌یک باشند ولی لزوماً نباید برابر باشند.

مثال: اگر دو مجموعه‌ی با پایان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ غیر تهی و مجموعه‌های $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ هم‌ارز باشند، الزاماً کدام نتیجه‌گیری درست است؟ ($\simeq$ نماد هم‌ارزی است)

۱) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}, \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ۲) $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ۳) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}, \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ۴) $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{A} = \mathbf{B}$

پاسخ: گزینه ۴

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ هم‌ارز می‌باشند و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با پایان هستند پس $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ دارای تعداد اعضای برابر هستند که در صورتی امکان دارد که $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ باشد و دو مجموعه مساوی، هم‌ارز نیز هستند.

فصل سوم

توان‌رسانی و ریشه‌گیری

تعریف توان

اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد و هرگاه n بار عدد a را در خودش ضرب کنیم حاصل را می‌توان به‌صورت a^n نمایش داد که a را پایه و n را توان نامند.

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\ \text{بار}}=a^n$$

$$(-۴)^۳=(-۴)\times(-۴)\times(-۴)$$

$$(۳,۴)^۵=(۳,۴)\times(۳,۴)\times(۳,۴)\times(۳,۴)\times(۳,۴)$$

خواص توان

۱) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ یا $a^{m+n}=a^m\times a^n$

مثلاً داریم:

الف) $b^۳\times b^۵=b^{۳+۵}=b^۸$

ب) $b^۷=b^{۶+۱}=b^۶\times b^۱$

$$=b^{۵+۲}=b^۵\times b^۲$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

۲) $a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

مثلاً داریم:

$$a^۷\div a^۲=\frac{a^۷}{a^۲}=a^{۷-۲}=a^۵$$

۳) $(ab)^n=a^n\times b^n$ یا $a^n\times b^n=(ab)^n$

مثلاً داریم:

الف) $(ab)^۳=a^۳\times b^۳$

ب) $(a^۲bc^۳)^۵=(a^۲)^۵\times b^۵\times(c^۳)^۵$

۴) $(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

مثلاً داریم:

الف) $(\dfrac{a}{b})^۳=\dfrac{a^۳}{b^۳}$

ب) $(\dfrac{a}{b\times c})^۴=\dfrac{a^۴}{(bc)^۴}=\dfrac{a^۴}{b^۴\times c^۴}$

۵) $(a^n)^m=a^{n\times m}$

مثلاً داریم:

الف) $(۲^۳)^۵=۲^{۱۵}$

ب) $(۲^۳\times ۳^۲\times ۵)^۴=۲^{۱۲}\times ۳^۸\times ۵^۴$

دقت:

$2^{3^{3}} \ne 2^{8}$

$(2^2)^3 = 2^6$

۶) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ یا $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

مثلاً داریم:

$0/001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

نکته: $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

مثلاً داریم:

الف) $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$

ب) $(0/2)^{-3} = (\frac{2}{10})^{-3} = (\frac{10}{2})^3 = 5^3$

مثال: نصف عدد 4^{10} کدام است؟

۱) 2^{10} ۲) 4^5 ۳) 2^{19} ۴) 2^5

پاسخ: گزینه ۳

$x = \frac{1}{2} \times x \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4^{10} = \frac{1}{2} \times (2^2)^{10} = \frac{1}{2} \times 2^{20} = 2^{19}$ نصف عدد

مثال: اگر $a = 3^{k+2}$ و $b = 3^k$ باشد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟

۱) $a = 2b$ ۲) $a = 9b$ ۳) $b = 9a$ ۴) $a = b^9$

پاسخ: گزینه ۲

$\frac{a}{b} = \frac{3^{k+2}}{3^k} = 3^{(k+2)-k} = 3^2 = 9 \Rightarrow a = 9b$

راه حل دیگر: عددگذاری

مثال: عدد $\left(\frac{1}{64}\right)^{-12}$ را به‌صورت 2^m نوشته‌ایم، m کدام است؟

۱) -18 ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینه ۴

$\left(\frac{1}{64}\right)^{-12} = (2^{-6})^{-12} = 2^{72} \Rightarrow m = 72$

مثال: حاصل $(\frac{2}{7})^6 \times (0/4)^{-6} \times (\frac{49}{25})^3$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$= \left(\frac{7^2}{5^2}\right)^3 \times \left(\frac{2^{-6}}{5^{-6}}\right) \times \frac{2^6}{7^6} = \frac{\cancel{7^6}}{\cancel{5^6}} \times \frac{\cancel{5^6}}{\cancel{2^6}} \times \frac{\cancel{2^6}}{\cancel{7^6}} = 1$ عبارت

مثال: حاصل عبارت $81^3 \left[50 \times \left(\frac{3^{-2}}{5}\right)^2\right]^3$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

$(3^4)^3 \times (5^2 \times 2 \times \frac{3^{-4}}{5^2})^3 = 3^{12} \times 2^3 \times 3^{-12} = 2^3 \times 1 = 8$

مثال: حاصل عبارت $\dfrac{(625)^{-3}\times(0/04)^{3}}{(\frac{1}{5})^{-4}\times(0/008)^{2}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{5^{16}}$ ۲) 5^{16} ۳) 5^{8} ۴) $\dfrac{1}{5^{8}}$

پاسخ: گزینه ۱

$$(0/04)^3=\frac{4^3}{100^3}=\frac{2^6}{10^6}=2^6\times10^{-6}\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{\cancel{2^6}\times\cancel{10^{-6}}\times5^{-12}}{5^4\times\cancel{2^6}\times\cancel{10^{-6}}}=5^{-16}=\frac{1}{5^{16}}$$

$$(625)^{-3}=(5^4)^{-3}=5^{-12}$$

$$(\frac{1}{5})^{-4}=5^4\ ,\ (0/008)^2=(\frac{8}{10^3})^2=2^6\times10^{-6}$$

مثال: حاصل $4^{13}+4^{13}+4^{13}+4^{13}$ با کدام برابر است؟

۱) 2^{28} ۲) 2^{30} ۳) 2^{26} ۴) 2^{52}

پاسخ: گزینه ۱

$$4^{13}+4^{13}+4^{13}+4^{13}=4(4^{13})=4^{14}=(2^2)^{14}=2^{28}$$

مثال: حاصل عبارت $\dfrac{(3^5+3^5)(2^5+2^5+2^5)}{6^3+6^3+6^3}$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۴۸ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{عبارت}=\frac{3\times2^5\times2\times3^5}{3\times6^3}=\frac{2^6\times3^6}{3\times6^3}=\frac{6^6}{3\times6^3}=\frac{6^3}{3}=2\times36=72$$

مثال: مقدار عبارت 2^{2^3} برابر است با:

۱) ۶۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۳

$$2^{2^3}=2^8=256$$

دقت کنید که $(2^2)^3$ برابر 2^6 خواهد بود.

۷) اگر $a>1$ باشد:

$$1<a<a^2<a^3<\cdots<a^n<a^{n+1}$$

اگر $0<a<1$ باشد:

$$1>a>a^2>a^3>\cdots>a^n>a^{n+1}>0$$

۸) اگر a و b دو عدد مثبت و $a>b$ آن‌گاه:

$$a^2>b^2\ ,\ a^3>b^3\ ,\ \cdots\ ,\ a^n>b^n$$

۹) $a^{\circ}=1$

$a^1=a$

مثال: اگر $0<a<1$ باشد کدام‌یک از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) a ۲) $\sqrt{a}$ ۳) a^3 ۴) a^8

نکته: اعداد بین ۰ و ۱ هرچه به توان بزرگ‌تری برسند کوچک‌تر می‌شوند.

$\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عدد $=\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

تجزیه‌ی اعداد

بیان اعداد به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول توان‌دار را تجزیه عدد نامند.

$$\begin{array}{r|l} ۱۵۰ & ۲ \\ ۷۵ & ۵ \\ ۱۵ & ۵ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۵۰ = ۲ \times ۵^۲ \times ۳$$

۱۵۰ : روش عملیاتی

نماد علمی

برای نمایش اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک از نمایش نماد علمی استفاده می‌شود و بیش‌تر در علوم نجوم، شیمی و فیزیک کاربرد دارد.

اگر یک عدد اعشاری مثبت را به‌صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر، در توان صحیحی از ۱۰ بنویسیم این نمایش را نماد علمی گویند.

یعنی فرم کلی نماد علمی به‌صورت $a \times ۱۰^n$ است که در آن $۱ \le a < ۱۰$ و n عددی صحیح است.

مثلاً داریم:

الف) $۳۷۲۰۰۰۰۰ = ۳/۷۲ \times ۱۰^۷$

ب) $۰/۰۰۰۰۰۶۸۲۰۳ = ۶/۸۲۰۳ \times ۱۰^{-۶}$

مثال: حاصل‌ضرب روبه‌رو به‌صورت نماد علمی چیست؟ $۰/۰۰۰۰۰۰۹۷ \times ۳۰۰۰$

۱) $۲۹/۱ \times ۱۰^{-۴}$ ۲) $۲/۹۱ \times ۱۰^{-۳}$ ۳) $۲/۹۱ \times ۱۰^{-۵}$ ۴) $۰/۲۹۱ \times ۱۰^{-۵}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{عبارت} = ۹۷ \times ۱۰^{-۸} \times ۳ \times ۱۰^۳ = ۲۹۱ \times ۱۰^{-۵} = ۲/۹۱ \times ۱۰^{-۳}$$

ریشه‌گیری

تعریف: اگر $a^n = b$ باشد a را ریشه‌ی n ام b نامند.

مثلاً: $۳۲ = ۲^۵$ است، پس ۲ ریشه‌ی پنجم ۳۲ می‌باشد یا ریشه‌ی پنجم ۳۲ برابر ۲ است.

$۸۱ = ۳^۴$ است، پس ۳ ریشه‌ی چهارم ۸۱ می‌باشد.

$۸۱ = (-۳)^۴$ است، پس ۳- نیز ریشه‌ی چهارم ۸۱ می‌باشد.

دقت: در ریشه‌های زوج هم خود عدد و هم قرینه‌ی آن جواب می‌باشند.

مثلاً ریشه‌ی دوم ۲۵ برابر ۵- و ۵+ است.

تعریف: اگر n زوج باشد، فرجه‌ی n ام ($\sqrt[n]{\ }$) یک عدد برابر عدد مثبتی است که از ریشه‌ی n ام به‌دست می‌آید. و اگر n فرد باشد، فرجه‌ی n ام ($\sqrt[n]{\ }$) برابر ریشه‌ی n ام است.

مثلاً: ریشه‌ی دوم عدد ۱۶ برابر ۴+ و ۴- است، ولی $\sqrt{۱۶}$ فقط برابر ۴ می‌باشد. $\sqrt{۱۶} = ۴$

مثلاً: ریشه‌ی سوم عدد ۸ برابر ۲ است، پس $\sqrt[۳]{۸} = ۲$.

ریشه‌ی سوم عدد ۶۴- برابر ۴- است، پس $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$

دقت: با توجه به مطالب ذکر شده، اعداد منفی ریشه‌ی زوج ندارند و هرگاه صحبت از $\sqrt{b}$ (یا $\sqrt[n]{b}$ ، n زوج باشد) می‌کنیم، فرض بر آن است که b عددی نامنفی است.

دقت: جواب رادیکال با فرجه‌ی زوج همیشه عددی مثبت است.

مثال: $\sqrt{۳۶}$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۶± ۴) $\pm\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۱

$\sqrt{۳۶} = ۶$

حاصل رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. ولی ریشه‌ی دوم یک عدد هم مثبت و هم منفی خواهد بود مثلاً ریشه‌ی دوم ۳۶ برابر ۶+ و ۶- است.

خواص ریشه‌گیری یا فرجه

۱) $\sqrt{a^2} = |a|$

در حالت کلی $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$

برای هر دو عدد نامنفی a و b:

۲) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ یا $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$

مثلاً داریم:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = 3\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = 2\sqrt{2}$$

۳) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ یا $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

اگر n زوج باشد، عدد نامنفی پشت فرجه را می‌توان به فرجه وارد کرد و اگر n فرد باشد، عدد پشت فرجه را می‌توان به فرجه وارد کرد:

۴) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

۵) در فرجه‌گیری می‌توان عددی را که توان آن در زیر فرجه از فرجه بزرگ‌تر است از فرجه خارج نمود:

مثلاً داریم:

$$\sqrt[3]{5^7\times3^4\times2^2} = \sqrt[3]{5^6\times3^3\times5\times3\times2^2} = 5^2\times3\times\sqrt[3]{5\times3\times4} = 75\sqrt[3]{60}$$

در جمع و تفریق رادیکال‌ها زمانی می‌توان دو یا چند رادیکال را با هم جمع یا تفریق نمود که هم فرجه و هم عدد زیر رادیکال یکسان باشند.

در بیش‌تر موارد لازم است که عبارت رادیکالی ساده شود.

مثلاً داریم:

الف) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3} = -2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ بیش‌تر ساده نمی‌شود.

ب) $\sqrt{18} + 2\sqrt{8} - 3\sqrt{50} = \sqrt{9\times2} + 2\sqrt{4\times2} - 3\sqrt{25\times2} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$

دقت:

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ یا $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ برقرار نیست.

نکته: رابطه‌ی رادیکال با توان:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

مثلاً: $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

مثال: اگر $\left(\left(\left((16)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[x]{2}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۹　　۴) ۲

عبارت سمت راست $= (2^4)^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{24}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

$\sqrt[x]{2} = \sqrt[6]{2} \Rightarrow x = 6$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{72} - \sqrt{8}$ کدام است؟

۱) $14\sqrt{2}$　　۲) $16\sqrt{2}$　　۳) $10\sqrt{2}$　　۴) $22\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{\underbrace{32}_{16\times2}} - 2\sqrt{\underbrace{18}_{9\times2}} + 3\times\sqrt{\underbrace{72}_{36\times2}} - \sqrt{\underbrace{8}_{4\times2}} = 4\sqrt{2} - 2\times3\sqrt{2} + 3\times6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

مثال: خلاصه‌شده عبارت $\left(\sqrt{\frac{۲}{۴}}-\sqrt{\frac{۲}{۹}}\right)\sqrt{\frac{۴}{۵۰}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۲

عبارت $=(\frac{\sqrt۲}{۲}-\frac{\sqrt۲}{۳})\frac{۲}{۵\sqrt۲}=\frac{۳\sqrt۲-۲\sqrt۲}{۶}\times\frac{۲}{۵\sqrt۲}=\frac{\cancel{\sqrt۲}}{۶}\times\frac{۲}{۵\cancel{\sqrt۲}}=\frac{۱}{۱۵}$

دقت: $\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times۲}=۵\sqrt۲$

مثال: حاصل $\sqrt[۳]{۲\sqrt۲}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt۲$ ۲) $\sqrt۲$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt[۶]{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

$\sqrt[۳]{۲\sqrt۲}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲^۲\times۲}}=\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt۲$

گویا کردن مخرج کسرها

۱) $\frac{۱}{\sqrt[n]{a}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$

مثلاً: $\frac{۱}{\sqrt۲}\times\frac{\sqrt۲}{\sqrt۲}=\frac{\sqrt۲}{۲}$

$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{۵}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt a-\sqrt b}\times\frac{\text{مزدوج مخرج}}{\text{مزدوج مخرج}}=\frac{۱}{\sqrt a-\sqrt b}\times\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}=\frac{\sqrt a+\sqrt b}{(\sqrt a)^۲-(\sqrt b)^۲}=\frac{\sqrt a+\sqrt b}{a-b}$

مثلاً: $\frac{۱}{۲\sqrt۲+۱}\times\frac{۲\sqrt۲-۱}{۲\sqrt۲-۱}=\frac{۲\sqrt۲-۱}{(۲\sqrt۲)^۲-۱^۲}=\frac{۲\sqrt۲-۱}{۴\times۲-۱}=\frac{۲\sqrt۲-۱}{۷}$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt۶(\sqrt۲-\sqrt۳)+\sqrt{۵۰}-\frac{۶}{\sqrt۳}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt۳$ ۲) $\sqrt۶$ ۳) $\sqrt۸$ ۴) $\sqrt{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۳

عبارت $=\sqrt{\underbrace{۱۲}_{۴\times۳}}-\sqrt{\underbrace{۱۸}_{۹\times۲}}+\sqrt{\underbrace{۵۰}_{۲۵\times۲}}-\frac{۶}{\sqrt۳}=۲\sqrt۳-۳\sqrt۲+۵\sqrt۲-\frac{۶\sqrt۳}{۳}=۲\sqrt۳+۲\sqrt۲-۲\sqrt۳=۲\sqrt۲=\sqrt۸$

مثال: اندازه‌ی طول یک مستطیل $\sqrt۳-\sqrt۲$ واحد و مساحت آن ۱ واحد مربع بوده؛ محیط آن، برابر است با:

۱) $۲\sqrt۲$ ۲) $۴\sqrt۳$ ۳) $۲\sqrt۳$ ۴) $۴\sqrt۲$

پاسخ: گزینه ۲

طول × عرض = ۱ $\Rightarrow$ عرض $=\frac{۱}{\sqrt۳-\sqrt۲}\times\frac{\sqrt۳+\sqrt۲}{\sqrt۳+\sqrt۲}=\frac{\sqrt۳+\sqrt۲}{۱}=\sqrt۳+\sqrt۲$

محیط $=۲(\sqrt۳-\sqrt۲+\sqrt۳+\sqrt۲)=۲\times۲\sqrt۳=۴\sqrt۳$

مثال: حاصل $\frac{\sqrt۵}{۲-\sqrt۵}+(۱+۴\sqrt۵)(\sqrt{۲۰}-۱)$ کدام است؟

۱) ۴۵- ۲) ۴۴- ۳) ۳۶- ۴) ۳۴-

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}\times\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}+۵}{۴-۵}=-۲\sqrt{۵}-۵$$

$\Rightarrow$ عبارت $=-۲\sqrt{۵}-۵+۲\sqrt{۵}-۳۹=-۴۴$

$$(۱+۴\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۲۰})=۱-\sqrt{\underbrace{۲۰}_{۴\times۵}}+۴\sqrt{۵}-۴\sqrt{۱۰۰}=۱-۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}-۴۰=۲\sqrt{۵}-۳۹$$

مثال: حاصل $\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۸}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۸\sqrt[۳]{۲}}{۲}=۴\sqrt[۳]{۲}$$

مثال: جذر عدد $۵+۲\sqrt{۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}+\sqrt{۶}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

$$۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳})^۲+۲\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲\Rightarrow\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲}=\left|\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right|=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

مثال: ساده‌ترین عبارت جبری که در $\sqrt[۳]{۴a^۲}$ ضرب شود تا حاصل مربع کامل گردد کدام است؟

۱) $(۲a)^{\frac{۲}{۳}}$ ۲) $(۲a)^{\frac{۴}{۳}}$ ۳) $a(۲a)^{\frac{۱}{۳}}$ ۴) $۲(۲a)^{\frac{۱}{۳}}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt[۳]{۴a^۲}=\sqrt[۳]{(۲a)^۲}=(۲a)^{\frac{۲}{۳}}\times\underbrace{(۲a)^{\frac{۴}{۳}}}_{\text{گزینه ۲}}=(۲a)^۲\rightarrow \text{مربع کامل است}$$

فصل چهارم

چندجمله‌ای‌ها و اتحادها

متغیر

نمادهایی‌که اعداد دلخواهی را نمایش می‌دهند، متغیر می‌نامند، زیرا به‌جای آن‌ها هر عددی می‌تواند قرار گیرد.

عبارت جبری

هر عبارت شامل تعدادی متغیر، اعمال جبری (ضرب- تقسیم- جمع- تفریق)، ریشه‌گیری و کسری و ... را یک عبارت جبری گویند. یک عدد هم یک عبارت جبری محسوب می‌شود.

دقت: مقدار عبارت جبری: هرگاه به جای متغیرهای عبارت جبری، اعداد را جایگزین کنیم عدد به‌دست آمده مقدار عبارت جبری خواهد بود.

مثال: حاصل عبارت جبری $\frac{x^2-2xz}{y}+1$ را به‌ازای $x=5$ و $y=1$ و $z=3$ بیابید.

مثلاً:

$$\frac{5^2-2\times5\times3}{1}+1=\frac{25-30}{1}+1=-5+1=-4$$

این عبارت سه متغیر z, y, x دارد.

یک‌جمله‌ای‌ها

به‌صورت ضرب یک عدد در توان‌های صحیح نامنفی (حسابی) از یک یا چند متغیر می‌باشد که ساده‌ترین نوع عبارت جبری است. مثلاً:

$3bc^2y^3z$ و $-\sqrt{2}xz, \frac{-6}{7}ab^2, -5$

عددی که در متغیرها ضرب می‌شود را ضریب عددی گویند.

عبارت‌های جبری زیر یک‌جمله‌ای نیستند.

$$\sqrt{x}y^3, 2x^2+y, 3x^2y^{-1}, \sqrt{x^2+1}, \frac{x^2y^3}{z^5}$$

درجه یک‌جمله‌ای نسبت به یک متغیر

توان متغیر در یک‌جمله‌ای را درجه یک‌جمله‌ای نسبت به آن متغیر گویند.

مثلاً داریم:

$5x^2y^3$:
- نسبت به x از درجه ۲ است
- نسبت به y از درجه ۳ است
- نسبت به z و بقیه متغیرها از درجه ۰ است

دقت: اگر فقط یک متغیر داشتیم برای درجه نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

$5x^3 \rightarrow$ یک‌جمله‌ای از درجه ۳ است

یک‌جمله‌ای‌های متشابه

اگر در چند یک‌جمله‌ای نمادهای حرفی و توان‌های متناظر آن‌ها یکسان باشند آن‌ها را متشابه گویند.

مثلاً: $5ax^2, -7ax^2$

$3xy^3, -\frac{2}{3}y^3x$

متشابه نیستند: $\begin{cases} x^2y^3, x^3y^2 \\ ax, axy \end{cases}$

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

فقط یک‌جمله‌ای‌هایی‌که متشابه باشند را می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود بدین‌صورت که کافی است ضرائب عددی آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم.

$5x + 7x = 12x$

$5x + 7x \neq 12x^2$

$3x + 5y \neq 8xy$

ضرب یک‌جمله‌ای‌ها

ضرایب عددی در هم و نمادهای حرفی نیز در هم ضرب می‌شوند.

مثلاً داریم:

الف) $5x^2 \times -3xy^3 = -15x^3y^3$

ب) $\sqrt{2}xy \times -5x^2y \times \frac{3}{5}y^2 = -3\sqrt{2}x^3y^4$

چندجمله‌ای‌ها

حاصل‌جمع چند تک‌جمله‌ای

$3x^2y + 5xy^2 + \sqrt{2}$

درجه یک چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر

بیش‌ترین توان متغیر در کل چندجمله‌ای

$3x^3y + 5x + 4y^7 \begin{cases} \text{درجه نسبت به } x: 3 \\ \text{درجه نسبت به } y: 7 \end{cases}$

دقت: اگر تنها یک متغیر داشتیم ذکر نام آن در تعیین درجه لازم نیست.

مثلاً:

$5x^3 + 2x + 1$: چندجمله‌ای‌ها درجه ۳ است.

بیان استاندارد چندجمله‌ای یک متغیره

جمله‌های چندجمله‌ای را از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان به‌ترتیب می‌نویسیم.

جمع چندجمله‌ای‌ها

جملات متشابه جمع می‌شوند.

مثلاً داریم:

$(5x^3 + 4x^2 + 1) - (x^3 + 2x - 3) = 5x^3 + 4x^2 + 1 - x^3 - 2x + 3 = 4x^3 + 4x^2 - 2x + 4$

ضرب دو چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای را به‌صورت دو پرانتز پشت سر هم نوشته و هر کدام از تک‌جمله‌ای‌های پرانتز اول را در تمام جملات پرانتز دوم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $(x^2 + 1)(x^3 - 2x + 2) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 + x^3 - 2x + 2 = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

۲) $(x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$

۳) $(xy + 1)(x + y - 1) = x^2y + xy^2 - xy + x + y - 1$

مثال: اگر $A = x(x+2)$ و $B = (x-2)(x+4)$ باشد، حاصل $A - B$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

$A - B = x^2 + 2x - (x^2 + 2x - 8) = x^2 + 2x - x^2 - 2x + 8 = 8$

مثال: از مستطیلی به ابعاد $x+5, x+3$ یک مستطیل دیگر به ابعاد $x+4, x-1$ را حذف کرده‌ایم، مساحت باقی‌مانده کدام است؟

۱) $4x+17$ ۲) $5x+17$ ۳) $4x+19$ ۴) $5x+19$

پاسخ: گزینه ۴

مساحت مستطیل اول: $(x+5)(x+3)=x^2+8x+15$

مساحت مستطیل دوم: $(x+4)(x-1)=x^2+3x-4$

تفاضل مساحت‌ها: $x^2+8x+15-(x^2+3x-4)=x^2+8x+15-x^2-3x+4=5x+19$

اتحاد

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به‌ازای هر مقدار برای متغیرهایشان مقدارهای یکسانی داشته باشند. آن دو عبارت را متحد یکدیگر گویند و عبارت حاصل از تساوی آن‌ها را اتحاد نامند.

در حقیقت برای انجام سریع محاسبات جبری، اتحادها، کمک می‌کنند و با حفظ برخی از اتحادهای مهم می‌توانیم در زمان انجام محاسبات صرفه‌جویی نماییم:

اتحادهای مهم

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \rightarrow$ اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای

۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \rightarrow$ اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای

۳) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ اتحاد مزدوج

۴) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ اتحاد یک جمله‌ی مشترک

۵) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

۶) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

۷) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۸) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

دقت شود که به‌جای a و b هر عدد یا عبارتی می‌تواند قرار گیرد.

چند اتحاد فرعی (اتحاد ناقص)

۱) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ یا $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۲) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

بنابراین اگر $x+y=S$ و $xy=P$ باشند داریم:

$$x^2+y^2=S^2-2P$$
$$x^3+y^3=S^3-3PS$$

تجزیه

تبدیل یک عبارت جبری به‌صورت حاصل ضرب چند عبارت جبری را تجزیه گویند.

مثال: حاصل عبارت $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-x^{-1}(x^2+1)$ برابر است با: $(x>0)$

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{عبارت}=x+\frac{1}{x}+2\times\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}-x-x^{-1}=x+\frac{1}{x}+2-x-\frac{1}{x}=2$$

مثال: اگر $x^2+y^2=2xy$ باشد، حاصل $\frac{x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ چه‌قدر است؟ $(x,y\neq 0)$

۱) 2 ۲) 3 ۳) 1 ۴) 4

پاسخ: گزینه ۳

$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=0 \Rightarrow (x-y)^2=0 \Rightarrow x=y$$
$$\text{عبارت}=\frac{x^2+x^2}{3x^2-x^2}=\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

مثال: اگر $x+\frac{1}{x}=2$ باشد، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول) $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=2^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=4 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2$

راه حل دوم) $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=1$ فقط زمانی برقرار است که $\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{1}=2$

مثال: اگر $x+y=7$ و $xy=5$ باشد، حاصل x^3+y^3 کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۳۸ ۳) ۲۴۴ ۴) ۲۶۴

پاسخ: گزینه ۲

$S=x+y=7$

$P=xy=5$

$x^3+y^3=s^3-3ps=7^3-3\times5\times7=238$

مثال: حاصل عبارت $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ به‌ازای $x=\sqrt[3]{-3}$ چه‌قدر است؟

۱) $-\sqrt[3]{-3}$ ۲) -3 ۳) $3\sqrt[3]{-3}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} E = (2x)^3+3^3=8x^3+27 \text{ (اتحاد چاق و لاغر)} \\ x=\sqrt[3]{-3} \end{array}\right\} \Rightarrow E = 8\times(-3)+27=-24+27=3$$

مثال: اگر $a-b=1$ و $a^2+b^2=5$، مقدار a^3-b^3 چه عددی است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

روش اول) $a^2+b^2=5 \Rightarrow (a-b)^2+2ab=5 \Rightarrow 1+2ab=5 \Rightarrow 2ab=4 \Rightarrow ab=2$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)=1\times(5+2)=7$

روش دوم) عددگذاری: $\begin{cases} a-b=1 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=1 \Rightarrow a^3-b^3=8-1=7$

مثال: حاصل $(9998)^2-4$ کدام است؟

۱) $9/996\times10^7$ ۲) $9/998\times10^7$ ۳) $9/996\times10^3$ ۴) $9/996\times10^5$

پاسخ: گزینه ۱

$E = 9998^2-2^2 \underset{\text{مزدوج}}{=} (9998-2)(9998+2)=9996\times10000=9/996\times10^7$

روش‌های تجزیه

۱ – فاکتورگیری:

یک نماد حرفی مشترک در کل عبارات را از کل عبارت فاکتور می‌گیریم: مثلاً داریم:

۱) $x^2y+xy^2=xy(x+y)$

۲) $3x^2-4x=x(3x-4)$

۲ – دسته‌بندی:

گاهی نمی‌توان یک نماد مشترک را از کل عبارت فاکتور گرفت ولی اگر عبارت را به چند دسته‌ی کوچک تقسیم‌بندی کنیم و از هر کدام آن‌ها عبارتی فاکتور بگیریم در نهایت می‌توان یک عبارت را از کل فاکتور گرفت. مثلاً داریم:

الف) $\underline{x^3+2x^2}+\underline{x+2}=x^2(x+2)+(x+2)=(x+2)(x^2+1)$

ب) $\underline{x^2y+xy^2}+\underline{y^3x+y^4}=xy(x+y)+y^3(x+y)=(x+y)(xy+y^3)=y(x+y)(x+y^2)$

۳- استفاده از اتحادها:

۱) $a^۲+۲ab+b^۲=(a+b)^۲$

۲) $a^۲-۲ab+b^۲=(a-b)^۲$

مثلاً: $x^۲+۸x+۱۶=(x+۴)^۲$

مثال: با افزودن کدام عدد به عبارت $۴x^۲-۶x+\frac{۱}{۴}$، مربع یک دو جمله‌ای حاصل می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

راه حل اول:

$۴x^۲-۶x=(۲x)^۲\underset{\downarrow}{-۶x}+\cdots=(۲x)^۲-۶x+\frac{۹}{۴}=(۲x-\frac{۳}{۲})^۲$

۲ برابر اولی در دومی $\Rightarrow$ دومی $=\frac{-۳}{۲}$ $\Rightarrow$ $\frac{۹}{۴}$ است عددی که در جای خالی باید قرار گیرد $\Rightarrow \frac{۱}{۴}+a=\frac{۹}{۴}\Rightarrow a=\frac{۹}{۴}-\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=\frac{۸}{۴}=۲$

راه حل دوم:

عبارت: $۴x^۲-۶x+\frac{۱}{۴}+a$ $\Leftarrow$ دلتای هر عبارت مربع کامل برابر صفر است

$\Delta=۰\Rightarrow ۳۶-۴\times۴(\frac{۱}{۴}+a)=۰\Rightarrow ۳۶-۴-۱۶a=۰\Rightarrow -۱۶a=-۳۲\Rightarrow a=۲$

مثال: به‌ازای کدام مقدار m، عبارت $۴x^۲+mx+۹$ به‌صورت مربع مجموع دو جمله است؟

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول) $۴x^۲+mx+۹=(۲x)^۲+\underset{\downarrow}{mx}+۳^۲$

دو برابر اولی و دومی $۲\times۲x\times۳=۱۲x\Rightarrow m=۱۲$

راه حل دوم) $\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۴\times۴\times۹=۰\Rightarrow m^۲=۱۴۴\Rightarrow m=\pm۱۲\Rightarrow m=+۱۲$

قابل قبول نیست

۳) $a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$

مثلاً داریم:

الف) $x^۴-y^۲=(x^۲)^۲-y^۲=(x^۲-y)(x^۲+y)$

ب) $x^۲+۴x+۴-y^۲=(x+۲)^۲-y^۲=(x+۲-y)(x+۲+y)$

۴) $x^۲+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

روش پرکاربرد در تجزیه عبارات درجه دوم

تجزیه عبارت $ax^۲+bx+c$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$ax^۲+bx+c=\frac{۱}{a}(ax+m)(ax+n)$$

که در آن m و n به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}m+n=b\\ m\times n=ac\end{cases}$$

مثلاً داریم:

$$۲x^۲+۷x-۹=\frac{۱}{۲}(۲x+m)(۲x+n)$$

$$\left.\begin{matrix}m+n=۷\\ mn=-۱۸\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}m=۹\\ n=-۲\end{cases}$$

تجزیه $=\frac{۱}{۲}(۲x+۹)(۲x-۲)=(۲x+۹)(x-۱)$

مثال: عبارت $۳x^۲ - ۱۱x + ۱۰$ به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه شده است. یکی از عوامل تجزیه کدام است؟

۱) $۳x + ۵$ ۲) $۳x - ۵$ ۳) $۳x + ۲$ ۴) $۳x - ۲$

پاسخ: گزینه ۲

$$۳x^۲ - ۱۱x + ۱۰ = \frac{۱}{۳}(۳x + m)(۳x + n) \Rightarrow \text{تجزیه} = \frac{۱}{۳}(۳x - ۶)(۳x - ۵) = (x - ۲)(۳x - ۵)$$

$$\begin{cases} m + n = -۱۱ \\ mn = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = -۶ \\ n = -۵ \end{matrix}$$

نکته: اگر جمع ضرائب در یک چندجمله‌ای صفر باشد عبارت عامل $x - ۱$ دارد و اگر مجموع جملات درجه فرد با مجموع جملات درجه زوج برابر باشد عامل $x + ۱$ خواهد داشت. مثلاً داریم:

$$۲x^۲ + ۹x + ۷ = \frac{۱}{۲}(۲x + m)(۲x + n)$$

$$m + n = ۹ \Rightarrow m = ۷$$

$$m \times n = ۱۴ \Rightarrow n = ۲$$

$$\text{تجزیه} = \frac{۱}{۲}(۲x + ۷)(۲x + ۲) = (۲x + ۷)(x + ۱)$$

۵) $a^۳ - b^۳ = (a - b)(a^۲ + ab + b^۲)$

۶) $a^۳ + b^۳ = (a + b)(a^۲ - ab + b^۲)$

مثلاً داریم:

$$x^۶ - ۱ = (x^۳)^۲ - ۱$$

$$= \underbrace{(x^۳ - ۱)}_{=(x-۱)(x^۲+x+۱)} \times \underbrace{(x^۳ + ۱)}_{(x+۱)(x^۲-x+۱)}$$

۷) $a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ = (a + b)^۳$

مثلاً داریم:

$$x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ = (x + ۱)^۳$$

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = (x - ۱)^۳$$

مثال: تجزیه‌شده‌ی عبارت $x^۲ + ۴x + ۴ - y^۲$ کدام است؟

۱) $(x + ۴ + y)(x + ۴ - y)$ ۲) $(x + y)(x + ۲)$ ۳) $(x + y + ۲)(x - y + ۲)$ ۴) $(x + ۲)(x + ۲)$

پاسخ: گزینه ۳

$$x^۲ + ۴x + ۴ - y^۲ = (x + ۲)^۲ - y^۲ \underset{\text{مزدوج}}{=} (x + ۲ - y)(x + ۲ + y)$$

مثال: در تجزیه عبارت $۴a^۲ - ۴a - b^۲ - ۴b - ۳$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $۲a + b + ۳$ ۲) $۲a - b + ۱$ ۳) $۲a + b - ۳$ ۴) $۲a + b + ۱$

پاسخ: گزینه ۴

$$۴a^۲ - ۴a - b^۲ - ۴b - ۳ = ۴a^۲ - ۴a + ۱ - b^۲ - ۴b - ۴ = (۲a - ۱)^۲ - (b^۲ + ۴b + ۴) = (۲a - ۱)^۲ - (b + ۲)^۲$$
$$= (۲a - b - ۳)(۲a + b + ۱)$$

مثال: یکی از عوامل عبارت $a^۲ + b^۲ - c^۲ + a + b + c + ۲ab$ برابر است با:

۱) $a + b + c + ۱$ ۲) $a + b - c$ ۳) $a + b - c - ۱$ ۴) $a + b - c + ۱$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{عبارت} = a^۲ + b^۲ + ۲ab - c^۲ + a + b + c = (a + b)^۲ - c^۲ + a + b + c$$
$$= (a + b - c)(a + b + c) + (a + b + c) = (a + b + c)(a + b - c + ۱)$$