



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

معادله درجه دوم

حل معادله درجه دوم :

(۱) روش تجزیه :

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{6}{2} = 0 \Rightarrow x = -2, -3$$

$$2x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow 2x^2 \pm x \mp 12 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}, \frac{4}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, 2$$

روش خاص برای x^2 ضریب دار(۲) روش Δ :

$$x^2 - 2x - 11 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \pm \sqrt{12}$$

(۳) روش Δ' : (وقتی b عددی زوج و بزرگ باشد)

$$x^2 + 12x + 30 = 0 \xrightarrow{b' = \frac{b}{2} = 6} \Delta' = b'^2 - ac = 6 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = -6 \pm \sqrt{6}$$

تست : مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است . مجموع دو عدد کدام است ؟

تست : طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $1, 2x + 1, 2x - 1, x$ است . اگر $x > 1$ باشد . طول ضلع متوسط کدام است ؟تست : اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند ، حاصل $\alpha^\beta \cdot \beta^\alpha$ کدام است ؟

حل :

$$x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{2 + \sqrt{3}} (2 + \sqrt{3})^{2 - \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^{2 + \sqrt{3}} (2 - \sqrt{3})^{\sqrt{3} - 2} = (2 - \sqrt{3})^{2\sqrt{3}} = (7 - 4\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$$

تست: اگر $a > b > 0$ و $x_1 > x_2$ ریشه های معادله $x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + 1 = 0$ باشند، حاصل $bx_1 + ax_2$ کدام است؟

حل: دو عددی که ضربشان ۱ و جمعشان $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ شود. $-\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}$ هستند پس ریشه های معادله $x = \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ هستند و

$$\frac{a > b \Rightarrow x_1 = \frac{a}{b} > x_2 = \frac{b}{a}}{\rightarrow b \frac{a}{b} + a \frac{b}{a} = a + b}$$

تست: در معادله درجه دوم $x^2 - \left(\frac{1}{a^2} + a^2\right)x + \frac{1}{a^2} = 0$ حاصل $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ کدام است؟ (توجه بالا)

تست: اگر $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ حاصل $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟

نکته:

اگر $a + b + c = 0$ باشد، آنگاه ریشه ها $x = 1, x = \frac{c}{a}$ هستند.

اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه ریشه ها $x = -1, x = \frac{-c}{a}$ هستند.

تست: جواب های معادله $(\cos^2 \alpha)x^2 + x + \sin^2 \alpha = 0$ کدام است؟

تست: یکی از ریشه های معادله $-ax^2 + (a+b+c)x - (b+c) = 0$ کدام است؟

معادلات دو مجهزوری :

در برخی از معادلات با یک تغییر متغیر می توان معادله را به صورت درجه دوم نوشت.

تست : معادله $(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + x^2 + \sqrt{x} - 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد ؟تست : جواب معادله $2 \times 4^x + 2^x - 6 = 0$ کدام است ؟

روابط بین ریشه ها :

اگر α, β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد ، آنگاه :

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad , \quad D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(۱) در روابط متقارن بین ریشه ها : S, P را از ساده کردن رابطه، تشکیل داده و مقدارشان را قرار می دهیم. و روابط زیر کمک زیادی خواهند کرد.

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \quad \alpha^4 + \beta^4 = (S - 2P)^2 - 2P^2$$

تست : مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است ؟

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow S_1 = -1 \\ x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow S_2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow S = -2$$

تست : اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 10 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{\beta+1}{\alpha+1}$ کدام است ؟

تست : در معادله $-2x^2 - x + 4 = 0$ حاصل $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ کدام است ؟

تست : در معادله $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ مقدار $\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}$ کدام است ؟ (با توان رساندن طرفین حل می شود)

تست : در معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ حاصل $A = |\alpha| + |\beta|$ کدام است ؟ (//)

تست : اگر a, b ریشه های معادله $x^2 - 10x + 0/1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است ؟

تست : در معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ حاصل $|\alpha^2 - \beta^2|$ کدام است ؟

$$|\alpha^2 - \beta^2| = |\alpha - \beta| |\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times |S^2 - P| = 2\sqrt{2} \times 14 = 28\sqrt{2}$$

تست : اگر ریشه های معادله $2x^2 + mx + n = 0$ اعداد طبیعی متوالی باشند Δ کدام است ؟

$$|\alpha - \beta| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 1 \Rightarrow \Delta = 4$$

۲) در روابط نامتقارن بین ریشه ها : S, P را از رابطه نمی توان بیرون کشید ، آنگاه از این نکته بهره می بریم که « ریشه ها ی معادله در خود معادله صدق می کنند » .

تست : در معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ حاصل $\frac{1}{4\alpha^2 - \alpha^3} - \frac{1}{4\beta^2 - \beta^3}$ کدام است ؟

تست : در معادله $x^2 - 7x + 2 = 0$ حاصل $(\alpha^2 - 5\alpha + 3)(\beta^2 - 5\beta + 3)$ کدام است ؟

تست : در معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ حاصل $A = \beta^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha$ چقدر است ؟ ($\beta^2 = 1 - 2\beta$)

تست : در معادله $x^2 + x - 1 = 0$ حاصل $(\frac{\beta^5}{(\alpha+1)^5}) + (\frac{\alpha^5}{(\beta+1)^5})$ کدام است ؟

$$\alpha + \beta = -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = -\beta \\ \beta + 1 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta^5}{-\beta^5} + \frac{\alpha^5}{-\alpha^5} = -2$$

تست : در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ بین ضرایب رابطه $9a + 3b + c = 0$ وجود دارد . یکی از ریشه ها کدام است ؟

$$\frac{3c}{a} \quad (1) \quad -3 \quad (2) \quad -\frac{b+3a}{a} \quad (3) \quad \frac{2c}{3a} \quad (4)$$

حل : یعنی یکی از ریشه ها ۳ است . پس با استفاده از رابطه S یا P داریم :

$$3 + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \beta = \frac{-b - 3a}{a} \quad , \quad 3\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \beta = \frac{c}{3a}$$

۳) وقتی رابطه بین ریشه ها داده شده و یک m مجهول در معادله باشد: ابتدا به کمک S یا P یکی از ریشه ها را یافته و در معادله قرار می دهیم تا m محاسبه شود. و m حاصل در صورتی قابل قبول است که $\Delta > 0$ شود.

تست: به ازای کدام m مجموع مجذورات دو ریشه معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟

تست: در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد. m کدام است؟

تست: در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از ۳ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

تست: در معادله $x^2 - mx + 16 = 0$ رابطه $\alpha = \beta^r$ بین ریشه ها برقرار است. m کدام است. ($m = \pm 10$)

تست: m را چنان بیابید که معادله $mx^2 + (m-3)x + m^2 - 9 = 0$ فقط یک ریشه صفر داشته باشد. ($P = 0, S \neq 0$)

تست: اگر معادله $(a+1)x^2 + (b-2)x + 1-a = 0$ بیشمار جواب داشته باشد، $a^2 + b^2$ کدام است؟

حل: باید سمت چپ نیز صفر باشد تا تساوی همواره برقرار باشد پس: $a+1=0, b-2=0, 1-a=0 \Rightarrow a=-1, b=2$

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن ریشه ها :

با داشتن ریشه های معادله می توان معادله را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت .

⇐ در معادله درجه دوم با ضرایب گویا اگر ریشه ها گنگ باشند حتماً ریشه ها مزدوج هستند . $a - \sqrt{b}, a + \sqrt{b}$

تست : معادله درجه دوم با ضرایب گویا که یکی از ریشه هایش $2 + \sqrt{4+a}$ باشد ، کدام است ؟

نوشتن معادله درجه دوم برپایه از روی معادله درجه دوم قدیم :

ریشه های معادله جدید را بر حسب ریشه های معادله قدیم یعنی α, β نوشته و جمع و ضرب آنها را بر حسب S, P بدست می آوریم و معادله جدید را می نویسیم . در ۳ حالت خاص زیر می توان خیلی سریع به جواب رسید :

- ✓ ریشه ها قرینه ی ریشه های معادله قدیم باشد : کافیست b را قرینه کنیم .
- ✓ ریشه ها معکوس ریشه های معادله قدیم باشد : کافیست جای a, c عوض شود .
- ✓ ریشه ها n برابر ریشه های قدیم باشد : کافیست b را در n و c را در n^2 ضرب کنیم .

تست : معادله درجه دومی که ریشه هایش مکعب ریشه های معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ باشد ، کدام است ؟

حل : اگر ریشه های معادله فوق را α, β بنامیم آنگاه معادله ای می خواهیم با ریشه های α^3, β^3 پس :

$$\left. \begin{aligned} S' = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 64 - 3 \times (-1)(4) = 76 \\ P' = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = P^3 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 76x - 1 = 0$$

تست : اگر α و β ریشه های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند . به ازای کدام k جواب های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به

صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است ؟

تست : معادله درجه دومی که ریشه هایش از دو برابر ریشه های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ یک واحد کمتر باشد ، کدام است ؟

تست : ریشه های کدام معادله معکوس همدند ؟

$$\sqrt{2}x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 2 = 0 \quad (2) \qquad 3x^2 + 2x - 5 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2 + 10x + \sqrt{2} + 1 = 0 \quad (4) \qquad 2x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (3)$$

تست : اگر ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس ریشه های $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد ، a کدام است ؟

حل : معادله ای که ریشه هایش معکوس معادله فوق باشد : $3x^2 - 7x + 4 = 0$

و معادله ای که ریشه هایش دو برابر ریشه های معادله قبل باشد : $3x^2 - 14x + 16 = 0$

تعداد و علامت ریشه های معادله درجه دوم :

(1) اگر $\Delta < 0$ باشد ، معادله ریشه حقیقی ندارد .

(2) اگر $\Delta = 0$ باشد ، معادله ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ دارد.

(3) اگر $\Delta > 0$ باشد ، معادله دو ریشه حقیقی دارد :

$$\left. \begin{array}{l} P < 0 : \text{ریشه ها مختلف علامت هستند.} \\ P > 0 : \text{ریشه ها هم علامت هستند.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S > 0 : \text{هر دو مثبت} \\ S < 0 : \text{هر دو منفی} \end{array}$$

⇐ اگر $P < 0$ باشد معادله حتما دو ریشه دارد و ریشه ها مختلف علامت خواهند بود .

تست : معادله $m(x^2+1)+2x(x+2)=1$ به ازای کدام m دارای دو ریشه حقیقی متمایز است ؟

تست : اگر معادله $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشه متمایز باشد ، مجموعه مقادیر m کدام است ؟

(معادله $t^2-(m+2)t+m+5=0$ باید دو ریشه مثبت داشته باشد تا هر کدام از معادلات $x^2=t_1, x^2=t_2$ دو ریشه بدهند)

تست : حدود m برای آنکه معادله $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشه مختلف العلامه داشته باشد کدام است ؟

تابع درجه دوم

هر تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که می توان آن را به کمک مربع کامل کردن به صورت

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{مقابل نوشت :}$$

$$(1) \quad \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \quad \text{مختصات راس سهمی :}$$

$$(2) \quad x = \frac{-b}{2a} \quad \text{معادله محور تقارن سهمی :}$$

$$(3) \quad \text{مقدار ماکزیمم (وقتی } a < 0 \text{) یا مینیمم (وقتی } a > 0 \text{) تابع برابر است با : } f\left(\frac{-b}{2a}\right) \text{ یا همان } \frac{-\Delta}{4a}$$

تست : نقطه مینیمم تابع $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد ، a کدام است ؟

حل : یعنی راس سهمی روی خط $y = x; x < 0$ است . پس :

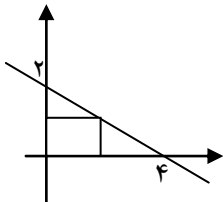
$$\frac{-b}{2a} = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = 2b \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = -2, 4 \Rightarrow a = 4 \quad \text{ق ق}$$

تست : خط $y = \frac{-5}{4}x$ محور تقارن تابع $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$ را روی خود منحنی قطع می کند . a کدام است ؟

تست : اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ صفر باشد ، k کدام است ؟

تست : بیشترین مساحت زمینی که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر است ؟

تست : بیشترین مساحت مستطیل محاط شده بین محور ها و خط داده شده چقدر است ؟



نقطه تقاطع دو تابع :

(۱) تقاطع تابع با محور x ها : ریشه های معادله تابع است.

⇐ اگر در معادله آن $\Delta = 0$ یا ریشه ها برابر باشند ، تابع در آن نقطه بر محور x ها مماس است .

تست : منحنی به معادله $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می کند . مجموعه مقادیر a کدام است ؟

تست : در صورتی که منحنی تابع $y = ax^2 + 2x + 1 - a$ محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند ، حدود a کدام است ؟

تست : نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در $x = -1$ و $x = 3$ و محور y ها را در $y = -1$ قطع می کند ، عرض نقطه مینیمم تابع کدام است ؟

تست : به ازای چند مقدار m نمودار تابع $y = (3 - \frac{x}{m})(mx - 1)$ مماس بر محور x ها است ؟ (ریشه ها را برابر)

تست : نمودار تابع $y = ax^2 + 4x + a - 3$ از بالا بر محور x ها مماس است . طول نقطه تماس کدام است ؟ ($\Delta = 0$)

(۲) **تقاطع دو تابع** : دو تابع را مساوی هم قرار می دهیم و ریشه معادله حاصل ، نقطه برخورد آنها است .

⇐ اگر در معادله آن $\Delta = 0$ یا ریشه ها برابر باشند، دو تابع در آن نقطه مماس بر هم هستند .

تست : منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه اشتراکی ندارد . مجموعه مقادیر m چگونه است ؟

تست : نمودار دو تابع $y = ax^2 - x + 3$ و $y = x^2 + ax$ متقاطع هستند . a چقدر باشد تا حاصل ضرب طول نقاط تقاطع دو منحنی ۱- شود ؟

تست : به ازای کدام مقدار m تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است ؟

(پس از استفاده از $\Delta = 0$ ، m ای قابل قبول است که نقطه تماس $x = \frac{-(m+1)}{4}$ مثبت باشد زیرا در ناحیه اول است)

علامت تابع درجه دوم در اطراف ریشه ها :

علامت تابع درجه دوم در بین دو ریشه هم علامت با ضریب x^2 و در طرفین آن خلاف علامت ضریب x^2 است .

⇐ اگر $\Delta < 0$ باشد تابع در همه جا هم علامت با ضریب x^2 است .

تست : اگر نمودار تابع $y = x^2 - mx - n$ فقط در بازه $(1, 2)$ پایین محور x ها باشد . mn کدام است ؟

حل : در این صورت باید $x = 1, 2$ ریشه های معادله باشد پس : معادله به صورت $x^2 - 3x + 2 = 0$ است که

$$\text{با مقایسه داریم : } m = 3, n = -2 \Rightarrow mn = -6$$

تست : عدد ۲ خارج ریشه های معادله $3x^2 + mx - 4 = 0$ است . حدود m کدام است ؟

حل : با توجه به علامت ضریب x^2 ، علامت مقدار تابع در ۲ مثبت است .

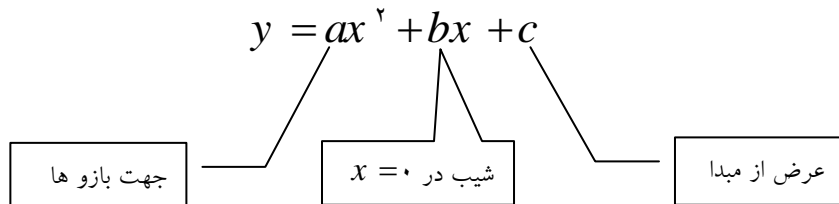
$$\left. \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 48 > 0 \Rightarrow m \in R \\ f(2) > 0 \Rightarrow 12 + 2m - 4 > 0 \Rightarrow m > -4 \end{array} \right\} \rightarrow m > -4$$

تست : در معادله $x^2 - 6x + m = 0$ داریم $x_1 < -1 < x_2$ ، محدوده m کدام است ؟

تست : به ازای کدام مقادیر m تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها است ؟

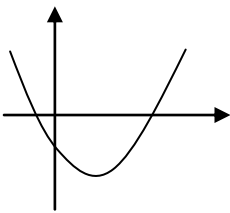
تست : اگر دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + 4}$ ، مجموعه \mathbb{R} باشد . m کدام است ؟

تشخیص علامت ضرایب تابع درجه دوم از روی نمودار :



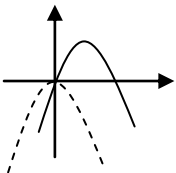
⇐ اگر $P < 0$ باشد چون تابع دو ریشه مختلف علامت دارد از هر چهار ناحیه می گذرد .

تست : در شکل زیر که نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ است . کدام گزینه درست است ؟



- (۱) $b - c > 0$ (۲) $b + c > 0$ (۳) $abc > 0$ (۴) $abc < 0$

تست : به ازای کدام مقادیر a منحنی تابع $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم نمی گذرد ؟



حل : $c = 0$ است پس تابع در مبدا با محور y ها برخورد دارد .

و جهت بازو باید به سمت پایین باشد و شیب هم در مبدا

مثبت (یا صفر) باید باشد لذا :

$$\left. \begin{array}{l} a < 0 \\ b \geq 0 \Rightarrow a + 2 \leq 0 \Rightarrow a \leq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq -2$$

تست : هر گاه نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + x + m - 2$ دارای مینیمم بوده و نمودار آن محور y ها را در پایین محور x ها قطع کند حدود m کدام است ؟

تست : به ازای کدام مقادیر a منحنی $y = (a-4)x^2 + 3x + a - 3$ از هر چهار ناحیه مختصات می گذرد و دارای ماکزیمم است ؟

معادلات با دامنه محدود

بعد از حل هر معادله با دامنه محدود مثل معادله گویا ، رادیکالی و لگاریتمی باید جواب را در معادله امتحان کنیم .

معادلات گویا :

برای حل معادلات گویا باید طرفین معادله را در مخرج مشترک ضرب کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود .

تست : در معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3$ حاصل ضرب ریشه ها کدام است ؟

تست : تعداد جواب های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است ؟

تست : معادله $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + \frac{x^2}{x^2+1} - 6 = 0$ چند ریشه دارد ؟

تست : ۱۱ کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با ۴ کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند . با تبخیر چند کیلوگرم آن ، غلظت محلول به ۵۰ درصد می رسد ؟

حل : وزن پودر رنگ قبلی $۷/۲ = ۰/۴ \times ۱۱ + ۰/۷ \times ۴$ و وزن محلول ۱۵

$$\frac{۷/۲}{۱۵-x} = ۰/۵ \Rightarrow x = ۰/۶$$

وزن پودر رنگ فعلی همان $۷/۲$ و وزن محلول $۱۵-x$ است .

تست : یک هواپیما فاصله دو کشور را که به فاصله ۴۲۰۰ کیلومتری هم هستند طی می کند . اگر سرعت برگشت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت رفت باشد و کل پرواز ۱۳ ساعت طول کشیده باشد . سرعت رفت چقدر بوده است ؟

حل : سرعت رفت x و مسافت رفت ۴۲۰۰ و زمان رفت $\frac{۴۲۰۰}{x}$

$$\frac{۴۲۰۰}{x} + \frac{۴۲۰۰}{x+۱۰۰} = ۱۳ \Rightarrow x = ۶۰۰$$

سرعت برگشت $x+۱۰۰$ و مسافت برگشت ۴۲۰۰ و زمان برگشت $\frac{۴۲۰۰}{x+۱۰۰}$

تست : احمد و رضا فاصله بین دو شهر A, B که ۶۰ کیلومتر است را پیاده طی می کنند . احمد هر ساعت ۴ کیلومتر آهسته تر از رضا حرکت می کند . رضا به شهر B رسیده و باز می گردد و احمد را در فاصله ۱۲ کیلومتری شهر B ملاقات می کند . احمد با چه سرعتی حرکت می کند ؟

حل : سرعت رضا x و مسافت طی شده توسط او ۷۲ و زمان طی شده $\frac{۷۲}{x}$

$$\frac{۷۲}{x} = \frac{۴۸}{x-۴} \Rightarrow x = ۱۲ \Rightarrow ۱۲-۴ = ۸$$

سرعت احمد $x-۴$ و مسافت طی شده توسط او ۴۸ و زمان طی شده $\frac{۴۸}{x-۴}$

تست : یک باشگاه اتوبوسی را ۹۰۰ هزار تومان اجاره کرده است . در لحظه آخر ۵ نفر انصراف داده اند پس از هر نفر ۲ هزار تومان اضافه در یافت می شود . تعداد اولیه مسافران چند نفر بوده است ؟

حل : تعداد دانش آموزان قبلی x و هزینه هر نفر $\frac{۹۰۰}{x}$

$$\frac{۹۰۰}{x-۵} - \frac{۹۰۰}{x} = ۲ \Rightarrow x = ۵۰$$

تعداد دانش آموزان فعلی $x-۵$ و هزینه هر نفر $\frac{۹۰۰}{x-۵}$

تست : قطاری برای طی مسیر ۱۰۰ کیلومتری ، با افزودن ۱۵ کیلومتر در ساعت بر سرعت خود ۲۰ دقیقه ($\frac{1}{3}$ ساعت) دیر کرد خود را جبران می کند . سرعت اولیه قطار چقدر بوده است

$$\text{حل : مسافت } 100 \text{ کیلومتری با سرعت } x \text{ در زمان } \frac{100}{x}$$

$$\text{مسافت } 100 \text{ کیلومتری با سرعت } x+15 \text{ در زمان } \frac{100}{x+15}$$

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x+15} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 60$$

تست : حوضی با یک شیر در عرض ۴ ساعت و با شیر دیگری در عرض ۵ ساعت پر می شود . شیر سوم حوض پر شده را در عرض ۲ ساعت خالی می کند . اگر هر سه شیر با هم باز شوند ، حوض پر از آب در چه مدتی خالی می شود ؟

حل : شیر اول در هر ساعت $\frac{1}{4}$ حوض و شیر دوم $\frac{1}{5}$ حوض را پر می کند و شیر سوم $\frac{1}{4}$ آن را خالی می کند .

پس در هر ساعت $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$ (علامت منفی نشانه خالی شدن است) از حوض پر خالی می شود . پس در ۲۰ ساعت کل حوض خالی می شود .

تست : دو کارگر کاری را با هم در ۶ ساعت انجام می دهند . اگر کارگر اول نصف کار را انجام دهد سپس کارگر دوم نصف دیگر را انجام دهد ، کار $12/5$ ساعت طول می کشد . هر کارگر به تنهایی کار را در چند ساعت تمام می کند ؟

حل : کارگر اول نصف کار را x ساعت انجام دهد دومی نصف دیگر را در $12/5 - x$ ساعت انجام خواهد داد و با هم نصف کار را در ۳ ساعت باید انجام دهند .

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{12/5 - x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 7/5$$

تست : دو تایپیست کاری را با هم در ۶ ساعت انجام می دهند . اگر اولی ۶ ساعت سپس دومی ۴ ساعت کار کند ۸۰٪ تایپ انجام می شود . دومی به تنهایی در چند ساعت کار را انجام می دهد ؟

حل : اگر اولی در x ساعت کار را انجام دهد و دومی در y ساعت . در یک ساعت $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ از طرفی $\frac{6}{x} + \frac{4}{y} = \frac{80}{100}$

لذا با حل دستگاه داریم : $y = 10$.

معادلات رادیکالی :

برای حل معادلات گنگ، رادیکال را از بقیه عبارت جدا می کنیم و با توان رسانی سعی می کنیم آن را از بین ببریم .

تست : معادله $\sqrt{2x+1}+x=7$ چند ریشه دارد ؟

تست : معادله $x(x^2-9)\sqrt{x-2}=0$ چند ریشه دارد ؟

تست : حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است ؟

نکته : در موارد پیچیده مخصوصاً چند رادیکالی ، اغلب با یافتن دامنه جواب مشخص می شود . (توجه : $\sqrt{0}=\Delta \Rightarrow \Delta \geq 0$)

تست : معادله $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-2}$ چند ریشه دارد ؟

تست : معادله $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+x^2-3x+2=0$ چند ریشه دارد ؟

$$(x-1)((x+1)\sqrt{x^2-4}+x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{x^2-4}=\frac{2-x}{x+1} \xrightarrow{D=\{2\}} x=2 \end{cases}$$

تست : معادله $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=3$ چند ریشه دارد ؟

حل : دامنه $1 \leq x \leq 2$ است که در این بازه $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1$ و $0 \leq \sqrt{2-x} \leq 1$ پس حداکثر مقدار عبارت داده شده ۲ است و نمی تواند با ۳ برابر باشد و ریشه ندارد .

تست : معادله $x^4 + x^2 + \sqrt{x^2 - 1} = 2$ چند ریشه دارد ؟

حل : با توجه به دامنه $|x| \geq 1$ داریم $x^4 + x^2 + \sqrt{x^2 - 1} \geq 2$ که تساوی فقط به ازای $x = \pm 1 \Rightarrow |x| = 1$ برقرار است .

تست: معادله $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 2} = 1$ چند ریشه دارد ؟

حل : عبارات زیر رادیکالها مثبتند و دومی بزرگتر است پس سمت چپ تساوی عبارت منفی است و نمی تواند برابر ۱ باشد .

نکته : اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر شود ، تک تک آنها صفر هستند . پس ریشه هایی قابل قبول هستند که هم زمان همه عبارات را صفر کنند .

تست : معادله $\sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{x^2 - 5x^2 - 2x + 24} = 0$ چند جواب دارد ؟

حل : ریشه های عبارت اول ۲- و ۳- هستند و هر دو ریشه های عبارت دوم نیز هست . پس دو ریشه دارد .

تست : معادله $\sqrt{3x^2 - 7x + 2} + \sqrt{2x^2 + 4x - ax - 2a} = 0$ به ازای کدام مقادیر a ریشه حقیقی دارد ؟

معادلات لگاریتمی :

$$1) \log_a^x = b \Rightarrow x = a^b$$

$$2) \log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$$

تست : معادله $\log_x^2 + \log_x^{2x+4} = 2$ چند ریشه دارد ؟

تست : از تساوی $\log_r(x^2 - 1) = 1 + \log_r(x + 3)$ مقدار لگاریتم $(x - 3)$ در مبنای ۴ کدام است ؟

$$\log_r(x^2 - 1) = \log_r^2 + \log_r(x + 3) \Rightarrow \log_r(x^2 - 1) = \log_r^3(x + 3) \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -2, 5 \xrightarrow{x=5} \log_r^{5-2} = \frac{1}{2}$$

تست : از معادله $\log_v(\log_r(\log_r^{x-y})) = 0$ حاصل $\log_r^{(x-2^4)}$ کدام است ؟

تست : از معادلات $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2$ مقدار y کدام است ؟

تست : از معادلات $\log_r^x + \log_r^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ لگاریتم $(x + y)$ در پایه ۴ کدام است ؟

تست : اگر $10^{1+\log x} = 5$ مقدار \log_8^x کدام است ؟

تست : مجموع ریشه های معادله $x^{\log x} = \frac{x^2}{100}$ کدام است ؟

$$\log x^{\log x} = \log \frac{x^2}{100} \Rightarrow (\log x)^2 = 2 \log x - 2 \xrightarrow{\log x = t} t^2 - 2t + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ t = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100 \end{cases}$$

تست : $3^{\log x} + x^{\log 3} = 18\sqrt{3}$ دارای جواب : (جایگذاری گزینه ها)

- $100\sqrt{10}$ (۴) $100\sqrt{1000}$ (۳) 1000 (۲) $10\sqrt{10}$ (۱)

حل هندسی معادلات (تعداد ریشه)

معادله را به صورت $f(x) = g(x)$ نوشته و دو طرف تساوی را رسم می کنیم. نقاط برخورد، ریشه های معادله خواهد بود

تست : معادله $x^2 - \sqrt{x} - 4 = 0$ چند ریشه دارد؟

تست : معادله $(x+1)^3 = -3x + 5$ چند ریشه حقیقی دارد؟

تست : معادله $x^2 + |x-1| = 1$ چند جواب دارد؟

تست : معادله $x \sin x - 1 = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

تست : معادله $x^2 - \log x = 0$ چند ریشه دارد؟

نامعادلات با دامنه محدود

بعد از حل هر نامعادله با دامنه محدود مثل نامعادله گویا، رادیکالی و لگاریتمی باید به دامنه نیز توجه شود.

نامعادلات گویا:

همه عبارت را به یک سمت منتقل کرده و عبارت حاصل را تعیین علامت می کنیم و حق طرفین وسطین کردن نداریم مگر اینکه مطمئن باشیم مخرج همواره مثبت است.

$$\frac{1}{|x|} > 1 \xrightarrow{x \neq 0} |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1) - \{0\} \quad \text{مثال:}$$

تست: جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام مجموعه است؟

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$ شامل چند عدد صحیح نمی شود؟

تست: نمودار تابع $y = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

حل: چون مخرج مثبت است می توان طرفین وسطین کرد.

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \Rightarrow 3x^2 - 2x < 2x^2 + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow -2 < x < 4$$

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x^3 - 1} > 1$ کدام است؟ (مخرج کسر ساده شده همواره مثبت است)

تست : از حل دستگاه نامعادلات $\begin{cases} (5+x)(2-x) > 0 \\ \frac{x-5}{x-2} > 0 \end{cases}$ حدود x کدام است ؟

تست : مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{3x^2 - 4x}{x+1} < 0$ کدام است ؟

حل : نامعادله $a < f(x) < b$ را می توان به صورت $(f(x)-a)(f(x)-b) < 0$ نوشت :

$$\left(\frac{3x^2 - 4x}{x+1} + 1\right)\left(\frac{3x^2 - 4x}{x+1}\right) < 0 \Rightarrow \frac{(3x^2 - 3x + 1)(3x^2 - 4x)}{(x+1)^2} < 0 \xrightarrow{x \neq -1} 3x^2 - 4x < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{4}{3}$$

نامعادلات گنگ :

تست : حدود x از نامعادله $(x^2 - 2)(2 + \sqrt{x}) \leq 2x + x\sqrt{x}$ کدام است ؟

حل : توجه شود که دامنه عبارت بالا $x \geq 0$ است بنابراین :

$$(x^2 - 2)(2 + \sqrt{x}) - x(2 + \sqrt{x}) \leq 0 \Rightarrow \underbrace{(2 + \sqrt{x})}_{>}(x^2 - x - 2) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x \leq 2$$

تست : مجموعه جواب نامعادله $\frac{2\sqrt{x} + 2}{3\sqrt{x} + 1} > 1$ کدام است ؟ (مخرج مثبت و دامنه $x \geq 0$)

تست : مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{\frac{x+2}{1-x}} \geq 1$ برابر است با :

$$D: -2 \leq x < 1, \quad \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{1-x}} \geq 1 \xrightarrow{x \neq 1} \sqrt{x+2} \geq \sqrt{1-x} \Rightarrow x+2 \geq 1-x \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{-1}{2}, 1\right)$$

تست : مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x^2 - 4x + 4)\sqrt{x+1}}{x^2 + x - 2} < 0$ کدام است ؟

تست : مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2$ شامل چند عدد صحیح است ؟

دو حالت خاص :

$$(1) \text{ اگر } \sqrt{p(x)} \leq q(x) \text{ آنگاه :}$$

در نقاطی از دامنه که سمت راست مثبت باشد توان رسانی کرده و محدوده x را می یابیم

$$(2) \text{ اگر } \sqrt{p(x)} \geq q(x) \text{ آنگاه :}$$

در نقاطی از دامنه که سمت راست مثبت باشد توان رسانی کرده و محدوده x را می یابیم

و در نقاطی از دامنه که سمت راست منفی باشد نامساوی همواره برقرار است.

اجتماع دو محدوده بدست آمده جواب است .

تست : مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$ کدام است ؟

$$\text{حل : } x \leq -3 \text{ یا } x \geq 4 : D$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x \leq -3} \text{عبارت سمت راست منفی و نامساوی شدنی نیست} \\ \xrightarrow{x \geq 4} x^2 - x - 12 < x^2 \Rightarrow x > -12 \quad \cap \rightarrow x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$$

تست : مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x^2 - 8x + 12} \geq x - 3$ کدام است ؟

حل : $x \leq 2$ یا $x \geq 6$: D

$$\begin{cases} \xrightarrow{x \leq 2} \text{عبارت سمت راست منفی و نامساوی همواره برقرار است} \\ \xrightarrow{6 \leq x} x^2 - 8x + 12 \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \quad \cap \rightarrow \emptyset \end{cases} \Rightarrow x \leq 2$$

نکته مهم در موارد پیچیده یا وقتی چند عبارت رادیکالی داریم با تخمین حدودی برد ، متوجه می شویم نامعادله جواب ندارد.

تست : مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} \leq 1$ کدام است ؟

حل : با توجه به دامنه $D: x \geq 3$ و به ازای این مقادیر سمت چپ بزرگ تر از ۲ است پس نامعادله جواب ندارد.

تست : مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x^2 - 1} + x^2 + x + 3 \leq 0$ کدام است ؟

حل : عبارت چند جمله ای همواره مثبت است و عبارت رادیکالی نامنفی پس مجموع آنها نمی تواند منفی یا صفر شود .
نامعادله جواب ندارد .

نامعادله لگاریتمی :

تست : کدام گزینه درست است ؟ (بحث اثر تابع صعودی و نزولی بر نامساوی)

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4) \quad \log_3^2 > \log_3^4 \quad (2) \quad \log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^2 \quad (2) \quad \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{1000}} \quad (1)$$

تست : مجموعه جواب نامعادله $\log \frac{x+3}{5} < -1$ کدام است ؟

$$\begin{cases} \log \frac{x+3}{5} < \log 10^{-1} \Rightarrow x+3 < 0.5 \Rightarrow x < -2.5 \\ D: \frac{x+3}{5} > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases} \quad \xrightarrow{\cap} (-3, -2.5)$$

تست : بزرگترین ریشه صحیح نامعادله $\log(x^2 - 4x - 12) < 1 + \log 2$ کدام است ؟

تست : به ازای چه مقادیری از x تساوی $|\log_x^x - 3| = 3 - \log_x^x$ برقرار است ؟