



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

## تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

رابطه تقسیم:

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه} \\ A(x) \mid B(x) \\ \dots \quad \mid \quad \text{خارج قسمت} \\ \hline R(x) \text{ باقی مانده} \end{array}$$

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad ; \quad \deg R < \deg B$$

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + R \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{-b}{a}\right) = R \quad \text{رابطه تقسیم بر عبارت درجه اول:}$$

تست: در تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x + 1$  خارج قسمت  $x^2 + x - 2$  و باقیمانده  $3x + 1$  است.  $P(-2)$  کدام است؟

تست: اگر باقیمانده  $P(x)$  بر  $x^2 - 9$  برابر  $2x + 3$  باشد، باقیمانده  $P(x+2) + P(x-4)$  بر  $x-1$  کدام است؟

تست: اگر  $f$  یک چند جمله ای باشد که  $f(-x) + 2f(x) = x^3$ ، باقیمانده تقسیم  $f$  بر  $x-1$  کدام است؟

تست: اگر خارج قسمت تقسیم  $(5x^3 - 14x + 3): x - 2$  یک چند جمله ای باشد، مقدار آن به ازای  $x = -2$  کدام است؟

حل: باقیمانده تقسیم ۱۵ است پس:

$$(5x^3 - 14x + 3) = (x - 2)Q(x) + 15 \xrightarrow{x=-2} -9 = -4Q(-2) + 15 \Rightarrow Q(-2) = 6$$

تست: در تقسیم  $x^{10} + x^3 + 2x - 11$  بر  $x + 1$ ، مجموع ضرایب خارج قسمت کدام است؟ ( $Q(1)$  را می خواهد)

تست: ضریب جمله فاقد  $x$  در خارج قسمت تقسیم  $3x^3 - 10x^2$  بر  $3x - 1$  کدام است؟ ( $Q(0)$  را می خواهد)

تست : چند جمله ای  $P(x) = (x-3)^m + (x-2)^m - 1$  بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است ؟

- (۱) فقط  $x-3$       (۲) فقط  $x-2$       (۳) بر  $(x-2)(x-3)$       (۴) هیچ کدام

تست : اگر باقیمانده تقسیم کوچکترین چند جمله ای بر عبارت های  $x+1, x+2, x-2$  برابر ۵ باشد . و این چند جمله ای بر  $x$  بخش پذیر باشد ، ضریب جمله با بیشترین درجه کدام است ؟

حل : باید خارج قسمت یک عدد ثابت باشد تا کوچک ترین چند جمله ای ایجاد شود :

$$P(x) = a(x-2)(x+2)(x+1) + 5 \xrightarrow{P(0)=0} a = \frac{5}{4}$$

نگته : اگر  $x = \frac{b}{a}$  ریشه  $P(x)$  باشد آنگاه  $P(x)$  بر  $ax-b$  بخش پذیر است .

تست : اگر  $x=1$  یک ریشه  $x^2 - x^2 + ax + 4 = 0$  باشد ، مجموع دو ریشه دیگر کدام است ؟

$$x=1 \Rightarrow 1-1+a+4=0 \Rightarrow a=-4 \rightarrow x^2 - x^2 + -4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) - x(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x=1, -1$$

تست : اگر  $\frac{-2}{3}, 3$  ریشه های  $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 49x^2 + 11x + 30$  باشد ، ریشه های دیگر  $p$  کدام است ؟

( راهنمایی : با تقسیم عبارت بر  $-6 - 7x - 3x^2 = (3x+2)(x-3)$  عامل دیگر و ریشه هایش را می یابیم )

نتیجه ۲ : رابطه تقسیم بر عبارت درجه دوم :  $P(x) = (عبارت درجه دوم)Q(x) + ax + b$

تست : باقیمانده تقسیم  $x^{100}$  بر  $x^2 - 3x + 2$  کدام است ؟

حل :

$$x^{100} = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=1} a+b=1 \\ \xrightarrow{x=2} 2a+b=2^{100} \end{cases} \Rightarrow a=2^{100}-1, b=2-2^{100} \Rightarrow R(x) = (2^{100}-1)x + 2-2^{100}$$

تست : اگر باقیمانده  $P(x)$  بر  $x-1$  و  $x-2$  به ترتیب ۵ و ۳ باشد. باقیمانده  $xP(x)$  بر  $x^2-3x+2$  کدام است ؟

حل :

$$xP(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{P(1)=5} 1 \times 5 = a+b \\ \xrightarrow{P(2)=3} 2 \times 3 = 2a+b \end{cases} \Rightarrow a=1, b=4 \Rightarrow R(x) = x + 4$$

تست : اگر باقیمانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x-3$  و  $x-2$  به ترتیب ۱ و ۲ باشد، باقیمانده تقسیم آن بر  $x^2-2x-3$  کدام است ؟

نتیجه ۳ و رابطه تقسیم بر عبارت درجه سوم :  $P(x) = (عبارت درجه سوم)Q(x) + ax^2 + bx + c$

تست : اگر باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x(x-2)(x+2)$  برابر  $x^2+3x+1$  باشد و باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2-4$  برابر  $ax+b$  باشد.  $a+b$  کدام است ؟

حل :  $f(x) = x(x-2)(x+2)Q(x) + x^2 + 3x + 1$

$$f(x) = (x^2 - 4)Q'(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{f(2)=11} 11 = 2a+b \\ \xrightarrow{f(-2)=-1} -1 = -2a+b \end{cases} \Rightarrow a=3, b=5 \Rightarrow a+b=8$$

تست : اگر  $P(0)=0, P(1)=1, P(2)=2$  ، باقیمانده  $P(x)$  بر  $x^2-3x^2+2x$  کدام است ؟

یافتن باقیمانده تقسیم چند جمله ای  $P(x)$  بر  $x^n - a^m$ :

ابتدا این عبارت را هم ارز صفر قرار می دهیم  $x^n - a^m \equiv 0$  و داریم  $x^n \equiv a^m$  ، و به جای هر  $x^n$  در  $P(x)$  هم ارز آن را قرار می دهیم . و این کار را تا جایی تکرار می کنیم که درجه عبارت حاصل از درجه مقسوم علیه (یعنی  $n$ ) کمتر شود .

← اگر باقیمانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^r \pm x + 1$  خواسته شده باشد معادل  $x^r \equiv \pm 1$  خواهد بود زیرا :

$$x^r \pm x + 1 \equiv 0 \xrightarrow{\times(x \mp 1)} x^r \mp 1 \equiv 0 \Rightarrow x^r \equiv \pm 1$$

تست : کدام عبارت را از  $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$  کم کنیم تا حاصل بر  $x^2 + 1$  بخش پذیر باشد ؟ ( یعنی باقیمانده چقدر؟ )

تست : باقیمانده تقسیم  $P(x) = (x+1)^2(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1$  بر  $x^2 - 1$  کدام است ؟

حل :

$$P(x) = (x+1)(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1 \xrightarrow{x^2 \equiv 1} = -1$$

تست : عبارت  $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$  به ازای هر  $n$  طبیعی بر  $x + 2$  بخش پذیر است . باقیمانده این عبارت بر

$x^2 - 1$  کدام است ؟

حل :  $P(-2) = 0 \Rightarrow k = -8$

$$x(x^2)^n + 2(x^2)^n + x(x^2)^n - 5x(x^2) - 8 \xrightarrow{x^2 \equiv 1} x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

تست :  $R(x)$  باقیمانده تقسیم  $x^8 + x^4 + x^2 - x^3 + x$  بر  $x^3 - x$  باشد،  $R(1)$  چقدر است ؟

تست : باقیمانده تقسیم  $x^2 + x + 1$  بر  $x^2 + x^2 + x^2 + 1$  کدام است ؟

تست : باقیمانده تقسیم  $x^4 - x^2 + 1$  بر  $x^{20}$  کدام است ؟ ( $x^6 \equiv -1$ )

تست : عبارت  $x^{24} + 1$  بر کدام عبارت بخش پذیر است ؟

$$(1) x^{12} + 1 \quad (2) x^3 + 1 \quad (3) x^6 + 1 \quad (4) x^4 + 1$$

تست : عبارت  $a^3 + 2a^2 - 3a$  بر کدام عبارت بخش پذیر است ؟

$$(1) a^2 - 3a \quad (2) a^2 - a \quad (3) a^2 - 1 \quad (4) a^2 + a$$

تست : چند جمله ای  $x^4 + x^3 + x - 1$  بر کدام عبارت بخش پذیر است ؟

$$(1) x^2 + x \quad (2) x^2 + x - 1 \quad (3) x^2 + x + 1 \quad (4) x^2 - 1$$

حل : در هر ۳ گزینه عبارت  $x^2 + x$  وجود دارد پس چند جمله ای داده شده را به صورت  $x^2(x^2 + x) + x - 1$  می نویسیم .

گزینه ۲ جواب است زیرا: اگر  $x^2 + x \equiv 1$  باشد داریم  $x^2 + x - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0$

تست : باقیمانده تقسیم  $(x^3 + 8) + (x^2 + 3x + 1)$  بر  $x^2 - 2x + 4$  کدام است ؟

حل : قسمت اول بر این عبارت بخش پذیر است زیرا:  $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$  پس کافیت باقی مانده قسمت دوم را بیابیم :

$$x^2 - 2x + 4 \equiv 0 \Rightarrow x^2 \equiv 2x - 4 \longrightarrow x^2 + 3x + 1 \equiv (2x - 4) + 3x + 1 \equiv 5x - 3$$

## بسط دو جمله ای غیاث الدین

$$(a+b)^1 = 1a^1 + 2ab + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2a^1b + 1ab^1 + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3a^1b^2 + 1ab^3 + 1b^3$$

⋮

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

جمله  $k+1$  ام بسط برابر است با:  $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

نکته:

(۱) بسط دو جمله ای  $n+1$  جمله دارد.

(۲) جملات  $p$  ام و  $q$  ام هم ضریب هستند، هرگاه:  $p+q=n+2$

(۳) شماره جمله مستقل از  $x$  در بسط  $(x^p+x^q)^n$  برابر است با:  $\frac{np}{p-q}+1$

(در حالت کلی در بسط فوق شماره جمله شامل  $x^m$  برابر است با:  $\frac{np-m}{p-q}+1$ )

(۴) برای یافتن مجموع ضرایب بسط کافیهست به جای تمام متغیرها عدد ۱ را قرار دهیم.

تست: بسط  $(x+1)^5 + (x+1)^6$  چند جمله دارد؟

حل: بسط اول ۶ و بسط دوم ۱۱ جمله دارد که همه درجات بسط اول را دارد و با آنها جمع می شود پس جمعاً ۱۱ جمله دارد

تست: بسط  $(x+1)^6 + (x-1)^6 - 2$  چند جمله دارد؟

حل: هر دو بسط ۱۱ جمله دارند که جملات توان فردشان قرینه هستند لذا ۶ جمله باقی می ماند و جملات ثابت آنها با ۲- حذف می شوند و ۵ جمله باقی می ماند.

تست : در بسط  $(x+y)^2$  ضریب جمله ۵ ام با ضریب کدام جمله برابر است ؟

$$\text{حل : } p+5=20+2 \Rightarrow p=17$$

تست : بزرگترین ضریب در بسط  $(x+y)^6$  کدام است ؟

حل : این بسط ۲۱ جمله دارد و جمله وسط جمله ۱۱ ام است لذا ضریب آن  $\binom{20}{10}$  است .

تست : ضریب جمله مستقل از  $x$  در بسط  $(x^2 + \frac{2}{x})^6$  کدام است ؟

حل : شماره جمله مستقل برابر است با :  $5 = \frac{6 \times 2}{2 - (-1)} + 1$  پس ضریب جمله ۵ ام را حساب می کنیم :

$$\binom{6}{4} (x^2)^2 \left(\frac{2}{x}\right)^4 = 15 \times 2^4 = 240$$

تست : در بسط  $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{15}$  ضریب جمله مستقل از  $x$  کدام است ؟

تست : در بسط  $(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}})^9$  ضریب جمله شامل  $\sqrt[3]{x^4}$  کدام است ؟

حل : شماره جمله ای که شامل  $x^{\frac{4}{3}}$  است برابر است با :  $5 = \frac{9 \times \frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{\frac{2}{3} - (-\frac{1}{2})} + 1$

$$\binom{9}{4} (\sqrt[3]{x^2})^5 \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)^4 = 126 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^4 \times x^{\frac{4}{3}} = \frac{63}{8} \sqrt[3]{x^4} \quad \text{ضریب} = \frac{63}{8}$$

نکته : مواردی که فقط یک عبارت  $x$  وجود دارد جمله شامل  $x^m$  را با نوشتن شکل کامل هر جمله بسط ، می یابیم.



تست : در بسط  $(1 - \frac{x}{2})^8$  ضریب جمله شامل  $x^3$  کدام است ؟

$$\binom{8}{3} (1)^{8-3} \left(-\frac{x}{2}\right)^3 = 56 \times \frac{-x^3}{8} = -7x^3 \Rightarrow a = -7$$

تست : جمله مستقل از  $x$  در عبارت  $\frac{(1+2x)^7}{x^3}$  برابر است با : ( در واقع جمله شامل  $x^3$  بسط بالا را باید بیایم )

تست : ضریب جمله  $x^5$  در  $(\sqrt{x} + x)^4 (\sqrt{x} + 1)^5$  کدام است ؟ ( راهنمایی :  $(\sqrt{x}(1+\sqrt{x}))^4 (\sqrt{x}+1)^5 = x^2(1+\sqrt{x})^8$  )

تست : در بسط  $(\frac{x}{2} + 2y^2)^{15}$  ضریب جمله شامل  $y^8$  کدام است ؟

تست : مجموع ضرایب جملات بسط  $(2x^2 - x)^{20} + (3x - 1)^4$  کدام است ؟

تست : در بسط  $(x + y)^n$  اگر مجموع ضرایب جملات اول و دوم و سوم ۱۶ باشد ،  $n$  کدام است ؟

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 16 \Rightarrow n = 5$$

تست : در بسط  $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^{24}$  تعداد جملات گویا کدام است ؟ (تست خاص)

حل : هر جمله شامل عبارت  $(\sqrt{x})^{24-k} (\sqrt[3]{y})^k$  است . که برای گویا بودن جمله باید  $k$  مضرب ۳ و  $24-k$  مضرب ۲ باشد پس مضاربی از ۳ قابل قبول هستند که  $24-k$  مضرب ۲ شود :  $k = 0, 6, 12, 18, 24$  . ۵ جمله گویا خواهیم داشت .