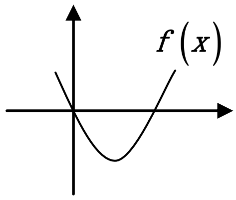
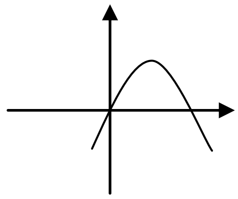
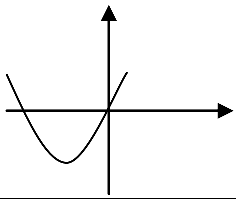
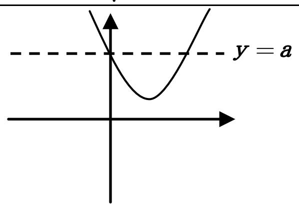
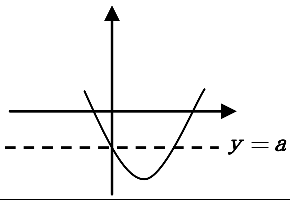
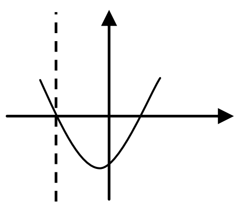
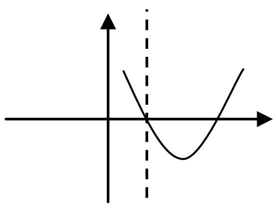
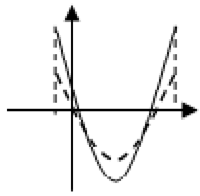
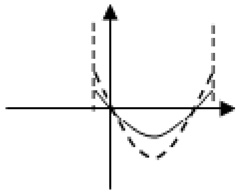
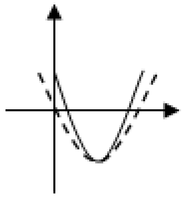
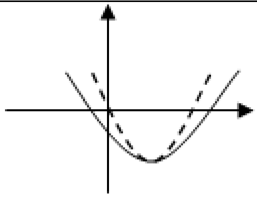
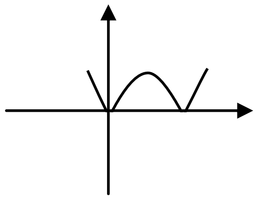
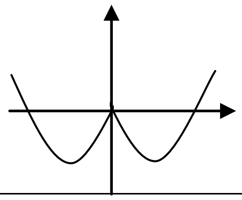
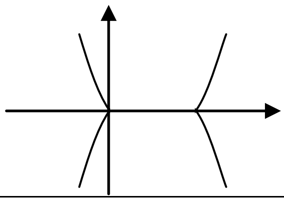
رسم توابع به کمک انتقال :

با فرض اینکه نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد داریم :

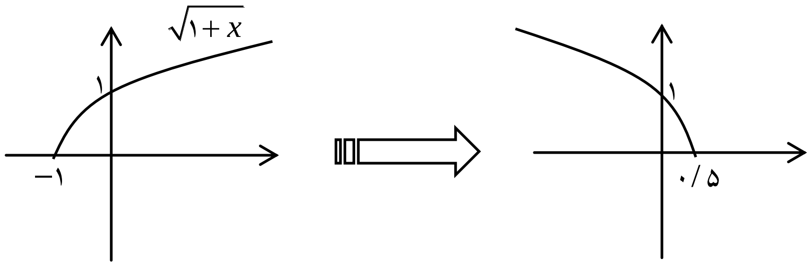


توضیح نحوه رسم کردن	شکل تابع	تابع خواسته شده	
کافیست قرینه منحنی نسبت به محور x ها را رسم کنیم .		$y = -f(x)$	۱
کافیست قرینه منحنی نسبت به محور y ها را رسم کنیم .		$y = f(-x)$	۲
کافیست منحنی تابع را در راستای محور y ها به اندازه a واحد به بالا منتقل کنیم .		$y = f(x) + a$	۳
کافیست منحنی تابع را در راستای محور y ها به اندازه a واحد به پایین منتقل کنیم .		$y = f(x) - a$	۴
کافیست منحنی تابع را در راستای محور x ها به اندازه a واحد به چپ منتقل کنیم .		$y = f(x + a)$	۵
کافیست منحنی تابع را در راستای محور x ها به اندازه a واحد به راست منتقل کنیم .		$y = f(x - a)$	۶

۷	$y = kf\left(x\right)$	 	اگر $k > ۱$ باشد منحنی در همان دامنه در جهت قائم کشیده تر می شود. (منبسط) اگر $۰ < k < ۱$ باشد منحنی در همان دامنه در جهت قائم بازتر می شود . (منقبض)
۸	$y = f\left(kx\right)$	 	اگر $k > ۱$ دامنه تابع بسته تر می شود . اگر $۰ < k < ۱$ دامنه تابع بازتر می شود.
۹	$y = \left\|f\left(x\right)\right\|$		کافیست قسمتی از منحنی را که در زیر محور x ها واقع است را نسبت به محور x ها قرینه کنیم .
۱۰	$y = f\left(\left\|x\right\|\right)$		طبق تعریف قدر مطلق : $x \geq ۰ \Rightarrow y = f\left(x\right)$ $x \leq ۰ \Rightarrow y = f\left(-x\right)$
۱۱	$\left\|y\right\| = f\left(x\right)$		طبق تعریف قدر مطلق : $y \geq ۰ \Rightarrow y = f\left(x\right)$ $y \leq ۰ \Rightarrow y = -f\left(x\right)$

نکته مهم : در رسم تابع $y = f\left(ax + b\right)$ می دانیم عبارت های داخل پرانتز وابسته به x هستند و برعکس عمل می کنند ، حتی بین ضرب و جمع ، پس اول جمع انجام می شود بعد ضرب.

مثال : تابع $y = \sqrt{۱ - ۲x}$ را رسم کنید .



نکته :تابع درجه دوم را به صورت مربع کامل $y = a(x - \underbrace{\frac{b}{۲a}}_{x_۰})^۲ + f\left(x_۰\right)$ در آورده سپس رسم می کنیم .

تست : نمودار تابع $y=\left|\log(x+1)\right|$ کدام است ؟

تست : نمودار تابع $|y|=x^2-2x$ به کدام صورت است ؟

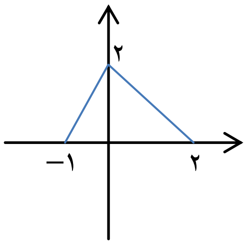
تست : نمودار تابع $|y|=\log|x|$ کدام است ؟

تست : منحنی تابع $y=|x-2|$ را ۳ واحد به چپ انتقال داده و قرینه شکل حاصل را نسبت به محور y ها تعیین و دو برابر منبسط می کنیم سپس انعکاس آن را نسبت به محور x ها پیدا می کنیم . معادله حاصل کدام است ؟

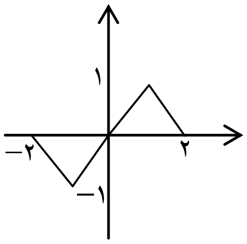
$$y=|x-2|\rightarrow y=|x+1|\rightarrow y=|-x+1|\rightarrow y=2|-x+1|\rightarrow y=-2|-x+1|$$

تست : اگر $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع $y=-f(1-x)$ کدام است ؟

تست: : اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y=-f(-|x|)$ کدام است ؟

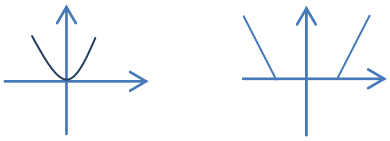


تست : اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد ، برد تابع $y=\frac{1}{2}f(2x-1)-1$ کدام است ؟



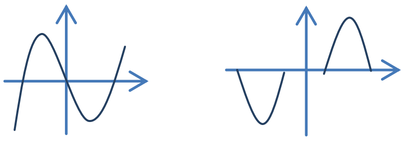
توابع زوج و فرد :

اگر تابع f دارای دامنه متقارن باشد :



۱) تابع زوج است هرگاه $f(-x)=f(x)$

از نظر هندسی یعنی نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است .



۲) تابع فرد است هرگاه $f(-x)=-f(x)$

از نظر هندسی یعنی نمودار آن نسبت به مبدا متقارن است .

نکته ۱ : اگر تابع f فرد باشد و صفر در دامنه آن باشد آنگاه حتما $f(۰)=۰$.

تست : اگر تابع $f=\{(۱,a^۴+۱),(-۲,a^۶),(b^۲+۲,d+۱),(-a^۲,c-۱)\}$ زوج باشد ، مقدار $a^۲+b^۴+d^۲+c$ کدام است ؟

حل : در تابع زوج دامنه متقارن است و چون $۱,-۲\in D$ پس حتما $-۱,۲\in D$ لذا :

$$-a^۲=-۱\Rightarrow a^۲=۱ \quad , \quad b^۲+۲=۲\Rightarrow b^۲=۰$$

از طرفی در تابع زوج $f(-x)=f(x)$ لذا :

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱)=f(۱)\longrightarrow c-۱=a^۲+۱=۲\Rightarrow c=۳ \\ f(-۲)=f(۲)\longrightarrow d+۱=a^۶=۱\Rightarrow d=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow a^۲+b^۴+d^۲+c=۴$$

تست : اگر تابع $f=\{(۰,a^۳-۸),(a,b),(c,a^۲)\}$ فرد باشد ، مقدار abc کدام است ؟

تست : اگر مبدا مختصات مرکز تقارن تابع f باشد و $f(x)=\log(ax+\sqrt{۹x^۲+۱})$ باشد ، a کدام است ؟

$$f(-۱)=-f(۱)\Rightarrow \log(-a+\sqrt{۱۰})=-\log(a+\sqrt{۱۰})\Rightarrow \cancel{\log}(-a+\sqrt{۱۰})=\cancel{\log}(a+\sqrt{۱۰})^{-۱}$$

$$\Rightarrow\left(-a+\sqrt{۱۰}\right)\left(a+\sqrt{۱۰}\right)=۱\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=\pm۳$$

تست : نمودار کدام تابع نسبت به مبدا مختصات متقارن است ؟

۱) $y=\log\frac{1-x}{1+x}$ ‏ ۲) $y=x^4+\sin x$ ‏ ۳) $y=x^3+\cos x$ ‏ ۴) $y=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$

تست : اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2+2x}+4x+1 & x>0\\ \sqrt[3]{ax^2+bx}+cx+d & x<0\end{cases}$ فرد باشد ، $a+b+c-d$ چقدر است ؟

حل : چون تابع فرد است پس $f(-x)=-f(x)$:

$$f(-x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2-2x}-4x+1 & x<0\\ \sqrt[3]{ax^2-bx}-cx+d & x>0\end{cases}$$

$$-f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x^2-2x}-4x-1 & x>0\\ \sqrt[3]{-ax^2-bx}-cx-d & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-1,-b=-2,-c=-4,d=-1\Rightarrow a=-1,b=2,c=4,d=-1$$

تست : تابع حقیقی f با شرط $f(0)=1$ برای هر x,y حقیقی در رابطه $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$ صدق می کند ، تابع f تابعی است : ($x=1,y=-1$)

۱) زوج ‏ ۲) فرد ‏ ۳) نه زوج و نه فرد ‏ ۴) هم زوج و هم فرد

نکته ۲ : توابع چند جمله ای با شرط آنکه فقط جملات توان زوج داشته باشند ، تابع زوج هستند. و با شرط آنکه فقط جملات توان فرد داشته و فاقد جمله ثابت باشند ، تابع فرد هستند .

تست : m,n چه اعدادی باشند تا ، تابع $f(x)=x^3+(m-1)x^2-2nx+n+4$ فرد باشد ؟

نکته ۳ : توابع گلدانی و سرسره ای با شرط آنکه ریشه داخل قدر مطلق ها قرینه هم باشند به ترتیب تابع زوج و فرد هستند .

تست : اگر تابع $y=|x+a|+|x+b|+|x+c+1|$ زوج باشد ، حاصل $a+b+c$ کدام است ؟

تست : اگر تابع $y=|x+a|-|x+2|+b|x+1|$ تابعی فرد باشد ، $a+b$ کدام است ؟

تست : اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & x\geq 4 \\ 2|x+3|+a|x+b| & -4<x<4 \\ cx^2+dx+e & x\leq -4 \end{cases}$ زوج باشد ، $a+b+c+d+e$ کدام است ؟

نکته ۴ : تابع ثابت $y=0$ تنها تابع هم زوج و هم فرد است .

تست : کدام تابع هم زوج و هم فرد است ؟

۱) $y=|x-1|-|x+1|$ ۲) $y=|x-1|+|x+1|$

۳) $y=\sqrt{x^4-x^2}-|x|\sqrt{x^2-1}$ ۴) $y=\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x}\times\sqrt{x^2-1}$

حل : فقط در گزینه های ۳و ۴ تابع $y=0$ است که در گزینه ۴ دامنه متقارن نیست پس گزینه ۳ درست است .

تست : تابع $f(x)=\frac{\sqrt{[x]-x}}{x}$ از نظر زوج یا فرد بودن چگونه است ؟

نکته ۵ : در **اعمال جبری** بین توابع با فرض منفی برای تابع فرد و مثبت به جای تابع زوج می توان به راحتی زوج یا فرد بودن تابع حاصل را مشخص کرد . و در **ترکیب توابع** اگر حداقل یک تابع زوج حضور داشته باشد تابع مرکب زوج است.

تست : اگر تابع حقیقی f فرد باشد تابع $(f \times f)of$ چگونه است ؟

تست : تابع $y = \cos(\sin x) + \sin(\cos x)$ از نظر زوج یا فرد بودن چگونه است ؟

نکته ۶ : هر تابع با دامنه متقارن را می توان به صورت حاصل جمع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت .

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{۱}{۲}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

$\Leftarrow$ با شرط($a > ۱$) تابع $y = \frac{a^{۲x}+۱}{a^x}$ زوج و تابع $y = \frac{a^{۲x}-۱}{a^x}$ فرد است . (در واقع $y = a^x \pm a^{-x}$)

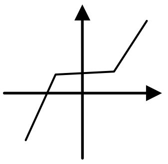
تست : اگر f تابعی فرد و g تابعی زوج باشد که $f(x) + g(x) = ۳^x$ ، ضابطه f کدام است ؟

تست : تابع $f(x) = \frac{۲^{۲x}+۱}{۲^x}$ را به صورت مجموع تابع زوج $g(x)$ و تابع فرد $h(x)$ نوشته ایم .مقدار $h(۱۳۹۴)$ کدام است ؟

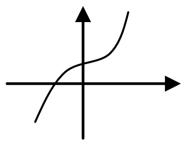
تست : اگر $f(x) = \frac{۴^x - ۱}{۲^x}$ مقدار $f(\log ۲) + f\left(\log \frac{۱}{۲}\right)$ کدام است ؟

تابع یکنوا :

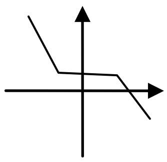
۱) تابع f را صعودی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)\le f(b)$



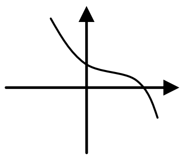
۲) تابع f را اکیداً صعودی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)<f(b)$



۳) تابع f را نزولی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)\ge f(b)$



۴) تابع f را اکیداً نزولی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)>f(b)$



$\Leftarrow$ فقط توابع ثابت هم نزولی و هم صعودی هستند .

$\Leftarrow$ اگر تابع صعودی بر نامساوی اثر کند یا اثر آن برداشته شود ، جهت را تغییر نمی دهد ولی نزولی جهت را تغییر می دهد البته باید به دامنه تابع نیز توجه کرد :

$$\log x<\log 2 \xrightarrow{x>0} x<2 \Rightarrow 0<x<2 \qquad , \qquad \cot^{-1}x<\cot^{-1}2 \Rightarrow x>2$$

تست : کدام تابع در دامنه اش اکیداً صعودی است ؟

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x|x|$ ۳) $f(x)=\frac{1}{x}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

تست : تابع $f(x)=(m^2-2)x^2+2mx+1$ در بازه $(1,+\infty)$ نزولی و در بازه $(-\infty,1)$ صعودی است . مقدار m کدام است ؟

حل : تابع درجه دوم در راس، تغییر نوع یکنوایی می دهد پس : $\frac{-b}{2a}=1 \Rightarrow m=1,-2$ از طرفی باید $a<0$ باشد تا تابع در سمت چپ راس صعودی و در سمت راست آن نزولی باشد .پس فقط $m=1$ قابل قبول است.

تست : تابع $y=\sqrt{x-۱}+\sqrt{۱-x}+\sqrt{۲}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

تست : اگر f اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد ، دامنه تابع $y=\sqrt{f\left(|x-۲|\right)-f\left(|۲x-۱|\right)}$ کدام است ؟

حل:

$$f\left(|x-۲|\right)-f\left(|۲x-۱|\right)\geq ۰\Rightarrow f\left(|x-۲|\right)\geq f\left(|۲x-۱|\right)\Rightarrow |x-۲|<|۲x-۱|\Rightarrow x^۲-۴x+۴<۴x^۲-۴x+۱\Rightarrow x>۱, x<-۱$$

تشخیص یکنوایی توابع به کمک مشتق :

تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم در هر بازه :

- ✓ اگر $f'(x)>۰$ باشد تابع اکیداً صعودی است .
- ✓ اگر $f'(x)<۰$ باشد تابع اکیداً نزولی است .
- ✓ اگر $f'(x)=۰$ باشد تابع ثابت است .

نکته : در توابع کسری ، اگر مخرج دارای ریشه باشد تابع یکنوا نیست . و آزمون فوق فقط نوع یکنوایی در اطراف ریشه مخرج را مشخص خواهد کرد .

مثال : صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید .

۱) $f(x)=x^۳+x-۱ \xrightarrow{D_f=\mathbb{R}} f'(x)=۳x^۲+۱>۰ \Rightarrow$ تابع در R اکیداً صعودی است .

۲) $f(x)=x-\sin x \Rightarrow f'(x)=۱-\cos x \xrightarrow{-۱\leq \cos x\leq ۱} f'(x)\geq ۰$

در این مثال چون مشتق در نقاط قابل شمارش صفر است پس تابع در جایی ثابت نیست و تابع اکیداً صعودی است .

۳) $y=\tan x \Rightarrow y'=۱+\tan^۲ x>۰$

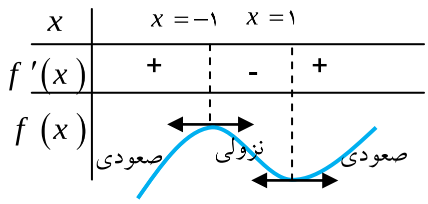
تابع کسری است و در اطراف ریشه های $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ اکیداً صعودی است .

۴) $y=\frac{x^{۲}-x}{x^{۲}-۲x+۱} \Rightarrow y=\frac{x}{x-۱} \Rightarrow y'=\frac{-۱}{(x-۱)^{۲}}<۰$

تابع کسری است و در اطراف ریشه $x=۱$ اکیداً نزولی است .

مثال : مشخص کنید توابع زیر در چه نواحی صعودی و در چه نواحی نزولی هستند .

$f(x)=x^{۳}-۳x+۱ \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$



تست : کدام تابع صعودی اکید است ؟

۱) $y=x+\tan x$ ۲) $y=x-\cot x$ ۳) $y=\frac{x}{x+۱}$ ۴) $y=x-\sin x$

حل : توابع سه گزینه اول دارای ریشه مخرج هستند و نمی توانند یکنوا باشند . گزینه آخر جواب است .

تست : تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+x$ همواره صعودی است . تغییرات a کدام است ؟

تست : تابع $y=x+۱+\frac{۴}{x^{۲}}$ در کدام بازه نزولی است ؟ (توجه : در نا معادله طرفین وسطین نداریم)

تست : عدد a را در کدام بازه در نظر بگیریم که تابع $x<۱$, $f(x)=\dfrac{ax-۲}{x+a-۳}$ اکیداً صعودی باشد ؟

حل : ریشه مخرج باید در دامنه داده شده نباشد پس $x=۳-a\leq ۱ \Rightarrow a\geq ۲$ از طرفی :

$$y=\frac{a^۲-۳a+۲}{(x+a-۳)^۲}>۰ \Rightarrow a^۲-۳a+۲>۰ \Rightarrow a>۲ \text{ یا } a<۱$$

از اشتراک محدوده بدست آمده در بالا و پایین داریم : $a>۲$ (در ضمن توجه شود به ازای $a=۲$ تابع ثابت است)

تست : اگر f صعودی و g نزولی باشد هر یک از توابع $f+g$ و $f-g$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

$(f+g)'=\underbrace{f'}_{\geq ۰}+\underbrace{g'}_{\leq ۰} \longrightarrow$ نامعلوم $(f-g)'=\underbrace{f'}_{\geq ۰}-\underbrace{g'}_{\leq ۰}\geq ۰ \longrightarrow$ صعودی

تست : اگر f تابعی اکیداً نزولی و مثبت باشد . کدام تابع زیر الزاماً صعودی اکید است ؟ (گزینه ۲)

۱) $\sqrt[۳]{f}$ ۲) $\dfrac{۱}{f}$ ۳) $f^۳$ ۴) $\sqrt{f}$

تست : اگر f صعودی و g نزولی باشد ،تابع $gofog$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

$(gofog)'=\underbrace{g'(\ )}_{\leq ۰}\times\underbrace{f'(\ )}_{\geq ۰}\times\underbrace{g'(\ )}_{\leq ۰}\geq ۰$ صعودی

تست : تابع $y=\tan^{-۱}\left(x^۳+\sqrt{x^۳+۱}\right)$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

حل : توابع $x^۳,\sqrt{x}$ صعودی اکید است پس $x^۳+\sqrt{x^۳+۱}$ صعودی اکید است و چون $\tan^{-۱}x$ نیز صعودی اکید است پس ترکیب آنها نیز صعودی اکید است . (با توجه به تست قبل $+=+\times+$)

تست : تابع $a>۱$ $y=\log_a\dfrac{۱-x}{۱+x}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

حل : دامنه تابع $(-1,1)$ است که تابع درونی در این بازه شامل ریشه مخرج نیست و نزولی است و چون لگاریتم با مبنای بزرگتر از ۱ صعودی است پس تابع مرکب نزولی می باشد . ($- \times + = -$)

تابع یک به یک

۱) تابع زوج مرتبی : اگر دارای مولفه های دوم یکسان نباشد مگر آنکه مولفه های اول نیز یکسان باشند.

تست : چند تابع ۱-۱ از مجموعه $A=\{1,2,3\}$ به مجموعه $B=\{1,2,3,4,5\}$ می توان نوشت ؟

تست : اگر $\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ یک به یک باشد ، (a,b) کدام است ؟

۲) تابع نموداری : اگر هر خط افقی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

تست : کدام تابع یک به یک است ؟ گزینه ۱

۱) $y=|x+2|+4x$ ۲) $y=|x+2|+|4x|$ ۳) $y=x+|x+2|$ ۴) $y=|x+2|+|x|$

تست : کدام تابع زیر یک به یک است ؟

۱) $y=\dfrac{|x-1|}{x^2+3}$ ۲) $y=\dfrac{x^2-x}{(x-1)^2}$ ۳) $y=\dfrac{2x}{(x-1)^2}$ ۴) $y=\tan x$

حل : گزینه۲ : $y=\dfrac{x}{x-1}$ یک به یک است. توجه شود گزینه های ۱و۳ دارای ریشه های زوج هستند که باعث غیر یکنوا شدن شکل تابع می شوند .

۳) تابع ضابطه ای : اگر به ازای هر y یک x بدهد .

نکته۱ : توابع اکیداً یکنوا یک به یک هستند .

نکته۲ : تابع $y = ax \pm |bx|$ با شرط $|a| > |b|$ یک به یک است .

نکته۳ : اگر دو تابع یک به یک باشند ، ترکیب آنها نیز حتماً یک به یک است .

تست : کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y = x^{۵} - x + ۱$ ۲) $y = |x| + \sqrt[۳]{x}$ ۳) $y = |x - ۲| + \sqrt{x}$ ۴) $y = |x + ۲| + \sqrt{x - ۱}$

گزینه ۴ صحیح است .دامنه تابع $[۱, +\infty)$است لذا $y = x + ۲ + \sqrt{x - ۱}$ که توابع $x + ۲ , \sqrt{x - ۱}$ اکیداً صعودی هستند پس مجموعشان نیز صعودی است .

تست : کدام تابع یک به یک است ؟

۱) $y = x - \left[\frac{x}{۳}\right]$ ۲) $y = x + \left[\frac{-x}{۳}\right]$ ۳) $y = x - \left[\frac{-x}{۳}\right]$ ۴) $y = x - \sqrt{x}$

تست : به ازای چه مقادیر ی از m تابع $y = x^{۳} + mx + ۷$ یک به یک است ؟

حل : تابع چند جمله ای پیوسته است پس ۱-۱ است اگر و تنها اگر یکنوا باشد .پس باید مشتق همواره مثبت یا منفی باشد پس : $y' = ۳x^{۲} + m > ۰ \Rightarrow m \geq ۰$

تست : محدوده a برای آنکه تابع $y = ax + |x|$ یک به یک باشد ، کدام است ؟

تست : کدام گزینه تابع یک به یک است ؟ (گزینه ۴)

۱) $y=۳|x|+x+۱$ ۲) $y=|x|-x+۱$ ۳) $y=|x|-x+۱$ ۴) $y=|x|-۳x+۱$

تابع معکوس :

اگر تابع یک به یک باشد وارون آن نیز تابع خواهد بود و می گوییم تابع وارون پذیر است .

۱) در تابع زوج مرتبی : وارون تابع از عوض کردن جای مولفه های اول با مولفه های دوم بدست می آید . $D_{f^{-۱}}=R_f$

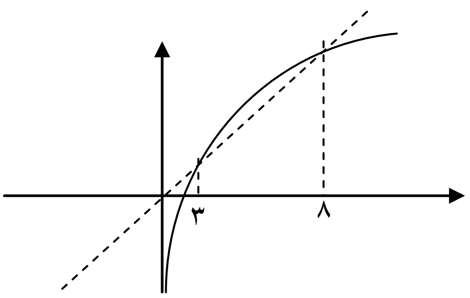
نکته : $f^{-۱}(a)=x \Leftrightarrow f(x)=a$ در نتیجه حتی بسیاری از تست ها را می توان با جایگذاری یک عدد حل کرد.

تست : دو تابع $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$ مفروضند . اگر $(f^{-۱}og)(a)=۶$ باشد ، مقدار a کدام است ؟

تست : اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ ، آنگاه حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است ؟

۲) در تابع نموداری : برای رسم وارون تابع کافیست قرینه تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم .

تست : شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است . دامنه تابع $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است ؟



۳) در تابع ضابطه ای : برای نوشتن ضابطه تابع وارون ابتدا x را بر حسب y می یابیم و سپس جای x و y را عوض می کنیم و برد تابع اصلی دامنه آن خواهد بود .

روش تستی : با قرار دادن نقطه می توان ضابطه درست را یافت .

تست : تابع وارون $x>۰$; $f(x)=\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{x})$ کدام است ؟

تشریحی : تابع اکیداً صعودی است (چون x و $-\frac{۱}{x}$ صعودی هستند)پس : $۰<x<+\infty \Rightarrow f(۰)<y<f(+\infty) \Rightarrow y\in R$

$$۲y=x-\frac{۱}{x}\rightarrow ۲yx=x^۲-۱\rightarrow x^۲-۲yx-۱=۰\rightarrow (x-y)^۲-y^۲-۱=۰$$
$$\Rightarrow x-y=\sqrt{y^۲+۱}\Rightarrow x=y+\sqrt{y^۲+۱} \quad \Rightarrow \quad y=x+\sqrt{x^۲+۱} \quad ;x\in R$$

تست : ضابطه وارون تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ کدام است ؟

۱) $y=x^۲-۴x+۵:x\le ۲$ ۲) $y=-x^۲+۴x-۵:x\le ۲$

۳) $y=x^۲-۴x+۵:x\ge ۱$ ۴) $y=-x^۲+۴x-۵:x\ge ۱$

روش تستی : داریم $(۵,۰)\in f$ پس $(۰,۵)\in f^{-۱}$ لذا ۱) باید ۰ در دامنه تابع وارون باشد ۲) مقدار تابع وارون ۵ شود.
گزینه ۱

تست : نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است . ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است ؟

۱) $-x+۶:x<-۴$ ۲) $-x+۵:x>۲$ ۳) $\frac{-۱}{۲}x+۱:-۴<x<۳$ ۴) $\frac{-۱}{۲}x+۱:-۴<x<۱۰$

$$y=\begin{cases}۲x-۱۰ & x\ge ۳\\ -۲x+۲ & -۴\le x\le ۳\\ ۱۰ & x\le -۴\end{cases}\Rightarrow y=-۲x+۲ \quad \Rightarrow (-۴,۱۰)\in f\Rightarrow (۱۰,-۴)\in f^{-۱}\rightarrow \text{گزینه ۴}$$

تست : در تابع با ضابطه $x^۲\ne ۱$, $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}$ و $f(۰)=۰$ ضابطه تابع وارون برابر است با :

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $xf(x)$ ۴) $-xf(x)$

حل : $(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})\in f$ پس $(\frac{۴}{۵},\frac{۳}{۵})\in f^{-۱}$ که در گزینه ۱ صادق است.

نکته : در توابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر جای a,d را عوض و قرینه کنیم ، تابع وارون بدست می آید .

نکته : نقاط برخورد $f^{-۱}$ با $y=x$ همان نقاط برخورد f با $y=x$ است .

نکته : تمام نقاط برخورد تابع صعودی و وارونش را می توان از معادله $f(x)=x$ بدست آورد . ولی اگر تابع صعودی نباشد باید معادله $f^{-۱}=f$ را حل کرد .

تست : اگر تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳-۳x$ وارون پذیر باشد ، نمودار تابع وارون آن خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می کند ؟

تست : اگر $f(x)=x+\sin(\frac{\pi x}{۴})$ دو تابع $f,f^{-۱}$ در $[-۱,۹]$ چند نقطه مشترک دارند ؟

حل :تابع اکیداً صعودی است : $y'=۱+\frac{\pi}{۴}\cos(\frac{\pi}{۴}x)\xrightarrow{\cos x\geq -۱} y'\geq ۱-\frac{\pi}{۴}>۰$

$$x+\sin(\frac{\pi x}{۴})=x\Rightarrow \sin(\frac{\pi x}{۴})=۰\Rightarrow x=۴k\Rightarrow x=۰,۴,۸$$

تست : معکوس تابع $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}-۱$ خود تابع را در چند نقطه قطع می کند ؟ (تابع صعودی نیست)

حل : با مخرج مشترک گیری تابع $y=\frac{x+۲}{x-۱}$ خواهد بود که خود معکوس است و تابع و وارونش بر هم منطبقند و در بی نهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند .

تست : منحنی معکوس تابع $y=-(x+۲)^۳-۲$ تابع را در چند نقطه قطع می کند ؟

حل : چون تابع صعودی نیست پس :

$$y+۲=-(x+۲)^۳ \Rightarrow x=-\sqrt[۳]{y+۲}-۲ \Rightarrow y=-\sqrt[۳]{x+۲}-۲ \xrightarrow{f=f^{-۱}} -(x+۲)^۳-۲=-\sqrt[۳]{x+۲}-۲$$
$$\Rightarrow (x+۲)^۹=x+۲ \Rightarrow x+۲=۰,-۱,۱ \Rightarrow x=-۲,-۱,-۳$$

نکته : اگر f تابع فرد باشد ، وارون آن نیز فرد است . (توجه شود که تابع زوج اصلاً وارون پذیر نیست)

نکته : اگر تابع f پیوسته و در بین a,b نزولی (صعودی) باشد ، وارون آن در بین $f(a),f(b)$ نزولی (صعودی) است.

تست : تابع وارون تابع $a>۱$ $y=\log_a \frac{۱+x}{۱-x}$ چگونه است ؟

۱) فرد ۲) زوج ۳) نه فرد و نه زوج ۴) نزولی

حل : تابع فوق فرد است پس وارون آن نیز فرد است .

تست : وارون کدام تابع صعودی است ؟

۱) $y=-x+۱$ ۲) $y=\frac{x+۱}{x-۱}:x>۱$ ۳) $y=x+\sqrt{x}$ ۴) $y=x^۲-۲x+۳:x<۱$

تست : وارون تابع $f(x)=x^۳-۳x+۱$ در کدام بازه نزولی است ؟

حل : مشتق را تعیین علامت می کنیم و تابع فوق در بازه $[-۱,۱]$ نزولی است.پس وارون آن در بازه $[-۱,۳]$ نزولی است.

ترکیب توابع $f, f^{-۱}$:

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(x)=x & ;x\in D_f\\ (fof^{-1})(x)=x & ;x\in R_f\end{cases}$$

نکته : توابع $fof^{-1},f^{-1}of$ زمانی با هم برابر هستند که دامنه و برد تابع f مساوی باشند .

نکته : وارون توابع مرکب به صورت مقابل بدست می آید : $(\text{fog})^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$

تست : در کدام مورد زیر تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ برابرند ؟

۱) $y=x^{2}-x-1$ ۲) $y=\sqrt{x-1}+1$ ۳) $y=2^{x}+2^{-x}$ ۴) $y=\sqrt[4]{x}+17$

تست : اگر $f(x)=1+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{2}$ و $x>0$ ، آنگاه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است ؟

تست : اگر $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x}$ و $g^{-1}(x)=x^{2}$ و $x\geq 0$ آنگاه ضابطه $(fog)(x)$ کدام است ؟

حل : $(fog)^{-1}$ را حساب می کنیم ، سپس وارون آن را می یابیم :

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}=\left(1+\sqrt{x}\right)^{2}\Rightarrow y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{2}\Rightarrow\sqrt{y}-1=\sqrt{x}\Rightarrow x=\left(\sqrt{y}-1\right)^{2}\Rightarrow(fog)(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}$$