



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

مفهوم تابع

رابطه: یک رابطه از A به B مجموعه ای از زوج های مرتب است که مولفه اول آن از A و مولفه دوم آن از B است

تست: رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$ چند زوج مرتب دارد؟

تابع: رابطه ای از یک مجموعه به مجموعه دیگر که به هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک عضو از مجموعه دوم نظیر شود.

تست: از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c, d\}$ چند تابع می توان نوشت که $(1, a)$ و فاقد $(2, b)$ باشد؟

حل: هر تابع از A به B به صورت $f = \{(1, \square), (2, \square), (3, \square)\}$ است که با توجه به شرایط مساله در مربع اول فقط a قرار می گیرد (حالت ۱) و در مربع دوم فقط b نمی تواند قرار بگیرد (حالت ۳) و در مربع آخر هر چهار حرف می تواند باشد (حالت ۴). پس طبق اصل ضرب داریم: $1 \times 3 \times 4 = 12$ تابع می توان نوشت.

تشخیص تابع

(۱) زوج مرتب: زمانی تابع است که مولفه های اول یکسان نباشند، اگر بودند، مولفه های دوم نیز یکسان باشند.

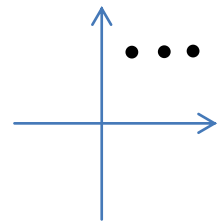
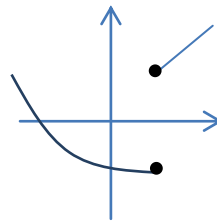
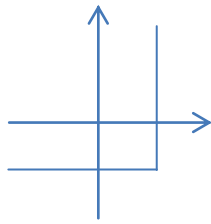
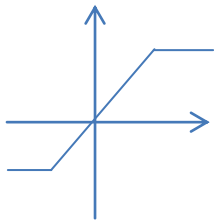
(۲) نمودار ون: زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه اول، فقط یک پیکان خارج شود.

(۳) نمودار مختصاتی: زمانی تابع است که هر خط عمودی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

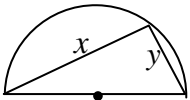
(۴) ضابطه: زمانی تابع است که به ازای هر x دقیقاً یک y تولید کند.

تست: هر گاه $f = \{(3, a^2 - 2a), (5, b^2 - 1), (3, 3), (a + 6, 36), (5, 26)\}$ تابع باشد، $a + b$ کدام است؟

تست : چند تا از نمودار های زیر تابع هستند ؟



تست : در شکل زیر نیم دایره به قطر ۹ است . مساحت مثلث (S) به صورت تابعی از x کدام است ؟



حل : مثلث قائم الزاویه است چون روبرو به کمان ۱۸۰ درجه است .

$$S = \frac{1}{2}xy \xrightarrow{x^2+y^2=9 \Rightarrow y=\sqrt{9-x^2}} S = \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}$$

تست : کدام رابطه یک تابع است ؟

$$y + y^2 = x^2 + 1 \quad (2)$$

$$y^2 - 3y^2 + x = 0 \quad (1)$$

$$xy^2 - x = 1 \quad (4)$$

$$|y - 1| + x = 0 \quad (3)$$

گزینه ۱: $x = 0 \Rightarrow y = 0, y = 3$; گزینه ۳: $x = -1 \Rightarrow y = 0, 2$; گزینه ۴: $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$; گزینه ۲ تابع است

تست : کدام یک از روابط زیر تابع است ؟

$$x = |y - 1| + |y + 1| \quad (2)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \quad (1)$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 2 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

گزینه ۱ تابع است زیرا : $\frac{x^2+y^2}{xy} = 2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow y = x$

تست : در کدام گزینه y تابعی از x است ؟

$$x = y^2 - 4y + 1 \quad (2)$$

$$x + \sqrt{y+2} = y \quad (1)$$

$$x = y^2 + y + |y| \quad (4)$$

$$x = |2y + 1| + y \quad (3)$$

دامنه تابع: به مجموعه مولفه های اول تابع، دامنه تابع گفته می شود و با D_f نمایش داده می شود.

	نوع تابع	دامنه تابع	مثال نمونه
۱	چند جمله ای ها $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$	$D = R$	$y = x^r - 3x^r$
۲	تابع کسری $y = \frac{1}{f(x)}$	$D = R - \{x f(x) = 0\}$	$y = \frac{x^r}{x^r - 1} \Rightarrow D = R - \{\pm 1\}$
۳	تابع رادیکالی فرجه زوج $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$D = \{x f(x) \geq 0\}$	$y = \sqrt{4 - x^r} \Rightarrow 4 - x^r \geq 0$ $x^r \leq 4 \Rightarrow D = [-2, 2]$
۴	تابع رادیکالی فرجه فرد $y = \sqrt[m]{f(x)}$	$D = D_f$	$y = \sqrt{\frac{1}{x+1}} \Rightarrow D = R - \{-1\}$
۵	توابع لگاریتمی $f(x) = \log_b^{g(x)}$	$D = \{g(x) > 0 \cap b > 0 \cap b \neq 1\}$	$y = \log_x^{x-r}$ $\{x - 3 > 0, x > 0, x \neq 1\}$ $D = (3, +\infty)$
۶	توابع مثلثاتی $y = \sin(f(x))$ $y = \cos(f(x))$	$D = D_f$	$y = \sin \sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$
۷	توابع مثلثاتی $y = \tan(f(x))$ $y = \cot(f(x))$	$D = D_f - \left\{x \mid f(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ $D = D_f - \{x f(x) = k\pi\}$	$y = \tan x: D = R - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ $y = \cot x: D = R - \{x x = k\pi\}$
۸	توابع وارون مثلثاتی $y = \sin^{-1}(f(x))$ $y = \cos^{-1}(f(x))$	$D = \{x \mid f(x) \leq 1\}$	$y = \sin^{-1}(x+1) \Rightarrow -1 \leq x+1 \leq 1$ $-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow D = [-2, 0]$
۹	توابع وارون مثلثاتی $y = \tan^{-1}(f(x))$ $y = \cot^{-1}(f(x))$	$D = D_f$	$y = \tan^{-1} \sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$
۸	تابع قدر مطلق $y = f(x) $	$D = D_f$	$y = \sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$
۹	تابع براکتی (جزء صحیح) $y = [f(x)]$	$D = D_f$	$y = [\sqrt{x}] \Rightarrow D = [0, +\infty)$

نکته: اگر چند تابع با هم جمع یا ضرب شده باشند، دامنه عبارت حاصل، برابر با اشتراک دامنه تک تک عبارت ها است.

تست: دامنه تابع $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - 3}$ کدام است؟

حل: در صورت $x \neq 0, 1$ و در مخرج $x \neq 1$ و $x \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$ پس $D = \mathbb{R} - \left\{0, 1, \frac{4}{3}\right\}$

تست: دامنه تابع $y = \sqrt{3 - \sqrt{1 - 4x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

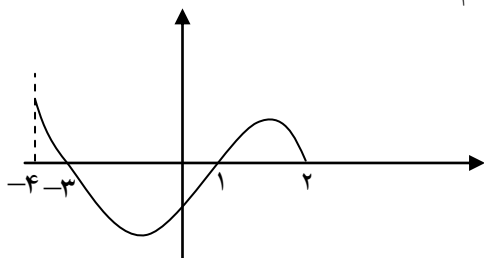
تست: دامنه تابع $y = \sqrt{-x^2(x^2 - 4)^2}$ چند عضو دارد؟

تست: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

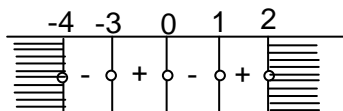
تست: دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{|x| - x}}$ کدام است؟

تست: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - |x|} + \sqrt{x - \sin x}$ کدام است؟

تست : شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است . دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است ؟



حل: ریشه های $\sqrt{xf(x)}$ برابر ۰ و ۳ و ۲ است و باید $xf(x) \geq 0$



$$D = [-3, 0] \cup [1, 2]$$

تست : دامنه تابع $y = \sqrt{|x+1| + |x-3| - 6}$ کدام است ؟ (به روش هندسی)

تست : دامنه تابع $y = \sqrt{||x-1|-3|-2}$ شامل چند عدد صحیح نیست ؟ (به روش هندسی)

تست : دامنه تابع $y = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است ؟

$$\left. \begin{array}{l} \log_1(x-1) \leq 1 \Rightarrow \log_1(x-1) \leq \log_1 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 < x \leq 2$$

تست : دامنه تابع $y = \sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ کدام است ؟

تست : اگر $f(x) = 2^x$ باشد ، دامنه تابع $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$ کدام است ؟

حل : تابع 2^x صعودی است و اگر تاثیر آن برداشته شود جهت تغییر نمی کند $0 < x \leq 1$ $\Rightarrow \frac{1}{x} \geq x \Rightarrow \frac{1-x}{x} \geq 0$

تست : دامنه تابع $y = \sin^{-1}(\sqrt{(x^2-1)}(4x-1)+1)$ شامل چند عدد صحیح است ؟

حل :

$$-1 \leq \sqrt{(x^2-1)}(4x-1)+1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sqrt{(x^2-1)}(4x-1) \leq 0 \Rightarrow \sqrt{(x^2-1)}(4x-1) = 0 \Rightarrow D = \left\{1, -1, \frac{1}{4}\right\}$$

تست : دامنه تابع $y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{14}} - 1 + \frac{1}{2}\right)$ شامل چند عدد صحیح است ؟

تست : دامنه تعریف تابع $y = \cos^{-1}(\log x)$ کدام است ؟

تست : دامنه تابع $y = \tan 2x \cot 2x$ کدام است ؟

حل :

$$\left. \begin{aligned} \left\{x \mid 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} &= \left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right\} \\ \left\{x \mid 2x \neq k\pi\right\} &= \left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2}\right\} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} \left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{4}\right\}$$



تساوی دو تابع :

دو تابع f, g را مساوی می گویند ، هرگاه : الف) ضابطه هر دو برابر باشد ب) دامنه هر دو برابر باشد .

تست : تابع $f(x) = 2x$ با کدام تابع زیر برابر است ؟

(۴) $y = \frac{4x^2}{2x^2}$

(۳) $y = \frac{(x-1)2x}{|x-1|}$

(۲) $y = \frac{2x^2+2x}{x^2+1}$

(۱) $y = |2x|$

تست : در کدام مورد دو تابع مساویند ؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \\ g(x) = \frac{x}{|x|} \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} f(x) = (\sqrt{x})^2 \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۳) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} f(x) = 2 \log x \\ g(x) = \log x^2 \end{cases} \quad (۱)$$

تست : اگر $f(x) = x - 4$ ، $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & x \neq 1 \\ a - 2 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = f(x)$ ، مقدار a کدام است ؟

تست : با کدام ضابطه $f(x)$ همواره $|f(x)| = (-1)^{[x]} f(x)$ برقرار است ؟

$\cos 2\pi x$ (۴) $\sin 2\pi x$ (۳) $\cos \pi x$ (۲) $\sin \pi x$ (۱)

حل :

$$\begin{cases} f(x) > 0 \rightarrow (-1)^{[x]} = 1 \rightarrow [x] = 2k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 0 \leq x < 1 \\ f(x) < 0 \rightarrow (-1)^{[x]} = -1 \rightarrow [x] = 2k + 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

پس به ازای $0 \leq \pi x < \pi$ تابع $f(x)$ باید مثبت و به ازای $\pi \leq \pi x < 2\pi$ باید منفی باشد . و گزینه ۱ درست است .

هپبر و ترکیب توابع :

$$\begin{aligned} ۱) \quad (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) & D &= D_f \cap D_g \\ ۲) \quad (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) & D &= D_f \cap D_g \\ ۳) \quad (f / g)(x) &= f(x) / g(x) & D &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \\ ۴) \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) & D &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \end{aligned}$$

تمرین : اگر $f = \{(1,2), (0,1), (2,-1)\}$ و $g = \{(0,1), (-1,1), (2,2)\}$ توابع زیر را مشخص کنید .

الف) $2f + g =$

ب) $\frac{f^2}{2-g} =$

ج) $fog =$

تست : تابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروضند . اگر $(4,2) \in fog$ و $(4,1) \in gof$ باشند ، دوتایی (a,b) کدام است ؟

$(4,1) \in gof \rightarrow g(f(4)) = 1 \xrightarrow{f(4)=5} g(5) = 1 \Rightarrow b = 5$

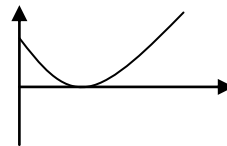
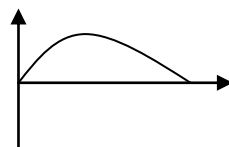
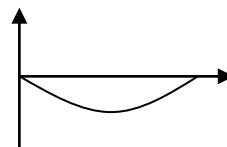
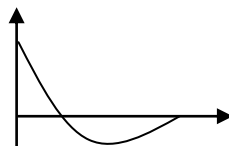
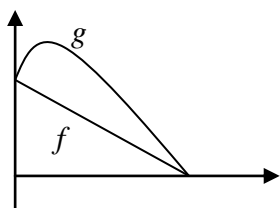
$(4,2) \in fog \rightarrow f(g(4)) = 2 \Rightarrow a = 4$

تست : اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -2 \\ x-1 & x < -2 \end{cases}$ ، حاصل $f+2g$ به ازای $x = f(0)$ کدام است

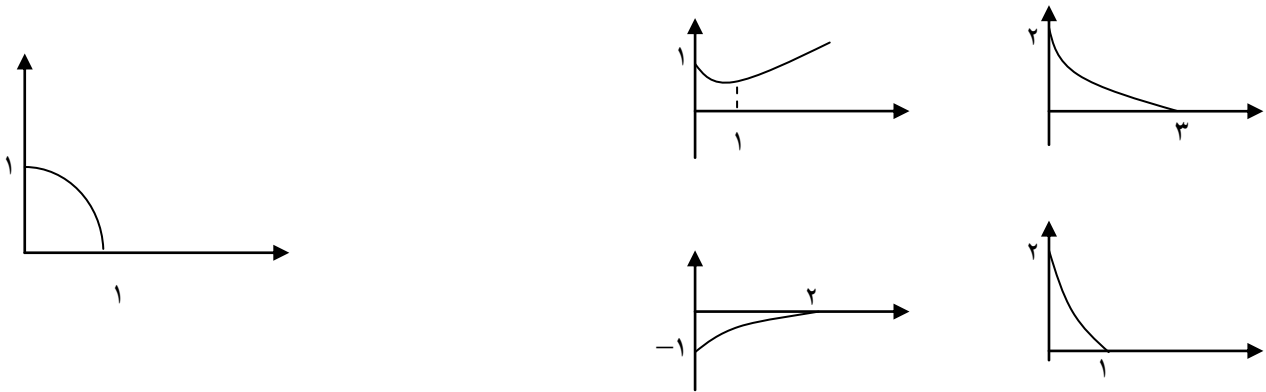
تست : اگر $f(x) = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$ و $g(x) = \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ و $4 \leq x \leq 8$ آنگاه ضابطه تابع $f(x)+g(x)$ کدام است ؟

$f(x)+g(x) = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} = 2-\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}+2 = 4$

تست : اگر نمودار دو تابع f, g به صورت مقابل باشد . نمودار $y = (f-g)(x)$ به کدام صورت است ؟



تست : اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد ، کدام گزینه می تواند نمودار تابع gof باشد ؟



تست : اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ ، دامنه $y = \frac{1+f(x)}{2g(x)}$ کدام است ؟

تست : اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ ، دامنه تابع gof کدام است ؟

تست : اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_7(x^2+2x)$ ، آنگاه دامنه تابع fog کدام است ؟

تست : اگر $f(x) = \text{Arc sin}(2x-1)$ و $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ، دامنه تابع fog کدام است ؟

تست : اگر $D_f = [2, 4]$ و $D_g = [1, 2]$ آنگاه دامنه تابع $g\left(\frac{x}{2}\right) + 2f(2x)$ کدام است؟ (اشتراک دامنه دو تابع)

تست : اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(x) + 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

تست : اگر $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ، $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $0 < a < 1$ ، مقدار $f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$ کدام است؟

تست : اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$ ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ در بازه $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ کدام است؟

تست : اگر $f(x) = 2x + 2a$ و $g(x) = x^2 + bx + c$ و $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x + 1$ ، آنگاه $a + b + c$ کدام است؟

وقتی $f(g(x))$ معلوم و f یا g مجهول باشد : ابتدا $g(x) = t$ قرار داده و ادامه می دهیم .

تست : اگر خروجی از ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد ، مقدار ورودی کدام است؟

$$\text{خروجی} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \text{ورودی}$$

$$f(x) = 2x - 2 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \underbrace{g(f(x))}_t = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = 2x - 2 \\ g(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

تست: اگر f, g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow 2x$ باشند، و $g(x) = 3x + 4$ آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

$$g(f(x)) = 2x \Rightarrow g(\underbrace{f(5)}_t) = 10 \Rightarrow \begin{cases} t = f(5) \\ g(t) = 10 \Rightarrow 3t + 4 = 10 \Rightarrow t = 2 \end{cases} \Rightarrow f(5) = 2$$

تست: تابع $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در $\frac{-1}{4}$ و 6 قطع کند. نمودار $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

$$f(\underbrace{g(x)}_t) = 0 \xrightarrow{f(6)=0, f(\frac{-1}{4})=0} \begin{cases} t = 6 \Rightarrow x = 9 \\ t = \frac{-1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

تست: اگر $f\left(\frac{2x+3}{x}\right) = x^2 - 3$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

نکته: اگر در توابع مرکب تابع بیرونی مجهول باشد و امکان قرار دادن مقدار وجود نداشته باشد سعی می کنیم عبارتی مانند تابع درونی بسازیم.

تست: اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ضابطه $f(1-x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} f(t) = (x-2)^2 + 1 \\ t = x-3 \end{cases} \Rightarrow f(t) = (t+1)^2 + 1 \Rightarrow f(1-x) = (2-x)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

تست: اگر $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x} + 2$ آنگاه $f(\sqrt{x})$ کدام است؟

تست: اگر $(f \circ g)(x) = 4x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$ ، $f(\sqrt{x})$ کدام است؟

تست: اگر $f(x^2+x) = x^4 + 2x^2 + x^2$ باشد، حاصل $f(\sqrt{3})$ چقدر است؟

تست: اگر $f(x+1) = x^2 + 3x^2 + 3x$ آنگاه حاصل $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

تست: اگر $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 7}$ باشد، $f(\sqrt{3}-2)$ کدام است؟

تست: اگر $f(x) = 6f(x-2) + f(x-1)$ و $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ باشد، آنگاه $f(4)$ کدام است؟

حل:

$$f(3) = 6f(1) + f(2) = 8 \Rightarrow f(4) = 6f(2) + f(3) = 20$$

تست: اگر f تابع ثابت صفر نباشد و برای هر دو عدد حقیقی x, y ، $f(x+y) = f(x)f(y)$ آنگاه $f(-x)$ کدام است؟

$$(1) f(x) \quad (2) -f(x) \quad (3) f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (4) \frac{1}{f(x)}$$

حل: با فرض $f(x) = 2^x$ که در شرایط مساله صدق می کند داریم: $f(-x) = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{f(x)}$