



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

قدر مطلق

تعریف قدر مطلق :

تعریف قدر مطلق به صورت $|x-a| = \begin{cases} x-a & x \geq a \\ -x+a & x < a \end{cases}$ است. و این یعنی هرگاه بخواهیم عبارتی را بدون قدر مطلق

بنویسیم، ابتدا ریشه درون آن را می یابیم و در اطراف ریشه علامت عبارت را مشخص می کنیم. اگر عبارت مثبت بود قدر مطلق را حذف می کنیم و اگر منفی بود قدر مطلق را حذف و عبارت را قرینه می کنیم.

تست : اگر $x^2 + x < 0$ ، آنگاه حاصل $|x+1| - |x+2|$ کدام است؟ (روش تستی : انتخاب یک عدد با شرایط داده شده)

تست : اگر $-1 < b < 0$ ، $0 < a < 1$ ، آنگاه حاصل عبارت $|b-a| + |b-\frac{1}{b}| + |a-\frac{1}{a}|$ کدام است؟ (//)

تساوی های مهم :

$$1) |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

تست : معادله $|x^3-1| + |x^2-1| + |x-1| = 0$ چند جواب دارد؟

$$2) |-x| = |x|$$

تست : نمودار تابع $y = ||3x| - |x||$ بر نمودار کدام تابع منطبق است؟ (روش تستی : جایگذاری عدد)

$$\begin{cases} \xrightarrow{x \geq} y = |3x - x| \Rightarrow y = |2x| \\ \xrightarrow{x <} y = |-3x + x| \Rightarrow y = |-2x| \Rightarrow y = |2x| \end{cases}$$

$$۳) \sqrt{x^2} = |x|$$

تست: اگر $1 < x < 2$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{1-4x+4x^2} + |2-x|$ کدام است؟

تست: اگر $x^2 < x$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2+x-2x\sqrt{x}} + \sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$ کدام است؟

$$۴) |x^2| = |x|^2 = x^2$$

تست: مجموع ریشه های معادله $(x-1)^2 + 5|x-1| + 4 = 0$ کدام است؟

$$۶) |x| = |y| \rightarrow x = \pm y$$

تست: معادله $||x-5|-10|=4$ چند ریشه دارد؟

تست: معادله $|x^2-2x-1| = |x^2-2x+3|$ چند ریشه دارد؟

$$۵) |x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$$

تست: معادله $||x-2|-17| = -2$ چند ریشه دارد؟

تست : معادله $|2x - 3| = 5x - 3$ چند ریشه دارد ؟

حل : معادله را حل می کنیم و فقط جوابی قابل قبول است که سمت راست معادله را مثبت کند .

$$\begin{cases} 2x - 3 = 5x - 3 \Rightarrow x = 0 & \text{غیر قابل قبول} \\ 2x - 3 = -5x + 3 \Rightarrow x = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$6) |xy| = |x||y| , \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

تست: مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$ کدام است ؟ (جلوتر با حل نامعادلات قدر مطلق آشنا می شویم)

حل : در نامساوی طرفین وسطین وجود ندارد مگر اینکه مخرج مثبت باشد . و در این سوال با فرض $x \neq -\frac{1}{2}$ ، مخرج مثبت است و داریم :

$$\frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \Rightarrow |x-2| > |2x+1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{1}{3} \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{2}} (-3, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{-1}{2}, \frac{1}{3})$$

نامساوی های مهم :

$$1) |x| < a \xrightarrow{a>} -a < x < a$$

$$2) |x| > a \xrightarrow{a>} x > a \quad \text{یا} \quad x < -a$$

$$3) a < |x| < b \xrightarrow{a,b>} a < x < b \quad \text{یا} \quad -b < x < -a$$

$$4) |u| < |v| \Rightarrow u^2 < v^2$$

تست : اگر $|x-1| < 1$ و $A < 2x - 3 < B$ معادل باشند ، $A+B$ کدام است ؟

تست : مجموعه جواب نامعادله $||2-3x|-1|>2$ کدام است ؟

تست: مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x^2-4|x|+4}\leq 1$ کدام است ؟

تست : مجموعه جواب نامعادله $|1-x^2|>|2x^2-5|$ شامل چند عدد صحیح است ؟

$$5) |x|+|y|\geq|x+y| \xrightarrow{xy\geq 0} |x|+|y|=|x+y|$$

تست : مجموعه جواب نامعادله $|2x-1|+|x-2|>3|x-1|$ کدام است ؟

تست : مجموعه جواب معادله $|3x-7|+|6x+11|=|9x+4|$ کدام است ؟

$$6) \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \xrightarrow{xy \geq 0} \|x\| - \|y\| = \|x - y\|$$

تست : کدام رابطه همواره درست نیست ؟

$$1) |a+b| \leq |a|+|b| \quad 2) |a|-|b| \geq |a-b| \quad 3) |a|-|b| \leq |a-b| \quad 4) |a-b| \leq |a|+|b|$$

رسم نمودار توابع قدر مطلق :

الف) $y = |f(x)|$: ابتدا $f(x)$ را رسم کرده سپس نمودار زیر محور x ها را حذف و به بالای آن قرینه می کنیم .

تست : منحنی نمایش $y = ||x| - 2|$ کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد در تابع)

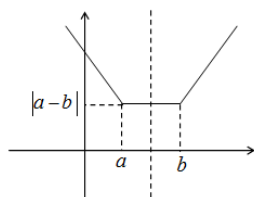
تست : کمترین مقدار تابع $y = |-x^2 - 2| + 3$ کدام است ؟

ب) $y = f(|x|)$: ابتدا $f(x)$ را رسم کرده سپس سمت چپ محور y ها را حذف و قرینه سمت راست را نسبت محور y ها می کشیم .

تست : نمودار تابع $y = \sqrt{|x|+1}$ به کدام صورت است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد در تابع)

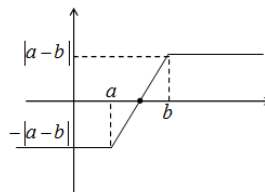
تست : نمودار تابع $y = x^2 - 4|x| + 1$ به کدام صورت است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد در تابع)

ج) ... $y = |ax+b| \pm |cx+d| \pm |ex+f|$: ریشه ها و دو نقطه کمکی در اطراف ریشه ها در نظر می گیریم و مقدار تابع را در این نقاط می یابیم و با وصل کردن مختصات این نقاط و امتداد دادن بازو ها نمودار مورد نظر حاصل می شود.



تابع گلدانی

$$y = |x-a| + |x-b|$$



تابع سرسره ای

$$y = |x-a| - |x-b|$$

تست : سطح بین منحنی $y = |x-2| + |x-1|$ و خط $y = x$ برابر است با :

تست : طول خط شکسته نمودار تابع $y = |x| - |x-1|$ در بازه $[-3, 3]$ کدام است ؟

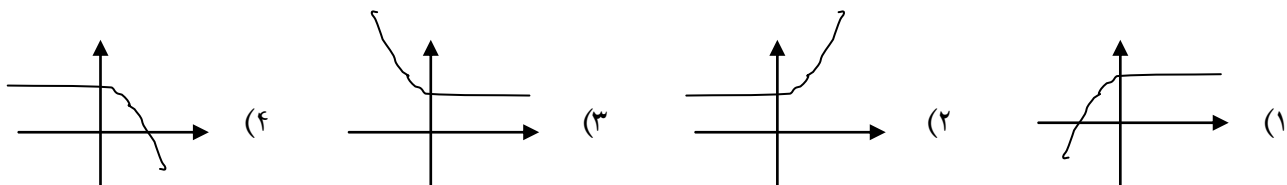
تست : خط $x = -2$ محور تقارن $y = |2x+1| + |2x+k|$ مقدار k کدام است ؟

تست : برای چند مقدار ، معادله $||x+2|-1| = k$ سه ریشه دارد ؟

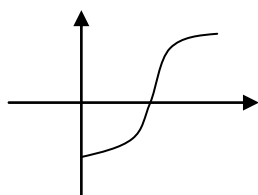
تست : معادله $|x| = \sqrt{2-x}$ چند ریشه دارد ؟

د) اگر تابع قدر مطلق نامتعارف باشد برای رسم آن از تعیین علامت عبارات داخل قدر مطلق استفاده می کنیم .

تست : نمایش هندسی تابع $y = x|x| - x^2 + 1$ شبیه کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد در تابع)



تست : اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد ، نمودار تابع $y = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ کدام است ؟



تست : نمودار $|x + y| = 1$ به کدام صورت است ؟ (دو خط موازی)

تست : مساحت و محیط شکل $|y| + |x| = 1$ به ترتیب برابر است با :

نکته : معادلات و نامعادلات غیر متعارف قدر مطلق را با تعیین علامت حل می کنیم .

تست : مجموعه جواب معادله $|x| - |x - 1| = 1$ کدام است ؟

تست : مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 2x < |x - 2|$ به صورت کدام بازه است ؟

تست : مجموعه جواب نامعادله $|x - 1| + |x - 2| > x$ کدام است ؟

جزء صحیح

تعریف جزء صحیح :

$$[x] = n \Rightarrow n \leq x < n+1$$

مثال :

$$\left[\frac{x^2+1}{x^2+2}\right] = \left[1 - \frac{1}{x^2+2}\right] = [1^-] = 0 \quad \text{و} \quad [\log_2^5] = [\log_2^{2^+}] = [2^+] \quad \text{و} \quad [\sin 90^+] = [1^-] = 0$$

تست : اگر $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f\left(\frac{-1}{4}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است ؟

تست : اگر $(1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6 = 198$. جزء صحیح عدد $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است ؟

تست : اگر جزء صحیح (x^2+x) برابر ۱- باشد ، آنگاه $[x^2]$ کدام است ؟ (با انتخاب $x = \frac{-1}{4}$)

تست : برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}] - 2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است ؟

حل : چون برای هر عدد خواسته شده پس کفایت یک عدد را به نمایندگی انتخاب و جایگزین کنیم مثلاً $n = 3$ و داریم :

$$[\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = [5^+] - 2[1^+] = 5 - 2 = 3$$

تست : حاصل $[\log 0/12] + [\log 12]$ کدام است ؟

حل : $\log 0/1 = -1$ پس $\log 0/12 = (-1)^+$ و به همین صورت $\log 12 = 2^+$ پس جواب تست ۱ است .

تست : حاصل $\left[\log_{\sqrt{f}}^{\sqrt{5}} \right]$ کدام است ؟

حل : نمی توان حدودی بدست آورد زیرا ضریب دارد و ممکن است حاصل ضرب صحیح شود . باید ضریب را از بین برد :

$$\log_{\sqrt{f}}^{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2} \log_2^5}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \log_2^5 = \frac{3 \log 5}{2 \log 2} = \frac{\log 125}{\log 4} = \log_4^{125} \xrightarrow{4^3 < 125 < 4^4} \left[\log_4^{125} \right] = 3$$

نکته : معادلات جزء صحیح به فرم $[x] = n$ به راحتی قابل حل هستند ولی در بقیه موارد معمولاً روش ثابتی وجود ندارد و معمولاً از ویژگی های جزء صحیح و اندکی ابتکار استفاده می شود. (کنار معادلات علامت * گذاشته شده است)

*تست : مجموعه جواب معادله $[x]^2 - [x] = 0$ کدام است ؟

*تست : مجموعه جواب معادله $[2x][3x] = 1$ کدام است ؟

*تست : معادله $|x| + [3x] = 8$ چند ریشه دارد ؟

حل : $|x| = 8 - [3x]$ چون سمت راست صحیح است پس سمت چپ یعنی x صحیح است بنابراین $3x$ صحیح است و داریم :

$$\begin{cases} \xrightarrow{x \geq 0} x + 3x = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ ق} \\ \xrightarrow{x < 0} -x + 3x = 8 \Rightarrow x = 4 \text{ خ} \end{cases}$$

*تست : معادله $\left[\frac{x}{3} \right] = \frac{x}{2}$ چند جواب دارد ؟

$$\left[\frac{x}{3} \right] = \frac{x}{2} = k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x=2k} \frac{x}{2} \leq \frac{x}{3} < \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow 3x \leq 2x < 3x + 6 \Rightarrow -6 < x \leq 0 \xrightarrow{x=2k} x = -4, -2, 0$$

تساوی های مهم:

$$1) [x+n]=[x]+n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\leftarrow \text{در نتیجه می توان نوشت } [x+[x]]= [x]+[x]=2[x]$$

$$* \text{ تست: مجموعه جواب معادله } \left[\frac{3x+1}{x} \right] = 5 \text{ کدام است؟}$$

$$* \text{ تست: مجموعه جواب معادله } \left[x + \frac{1}{4} \right] + \left[x - \frac{3}{4} \right] = 1 \text{ کدام است؟}$$

$$* \text{ تست: معادله } \frac{x}{2} + \left[\frac{x-4}{2} \right] = 3 \text{ چند ریشه دارد؟}$$

حل: ریشه ندارد زیرا:

$$\frac{x}{2} + \left[\frac{x}{2} - 2 \right] = 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 5 - \left[\frac{x}{2} \right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{2} = 5 - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$* \text{ تست: مجموعه جواب معادله } [2x+5] + [x-3] = x+7 \text{ کدام است؟}$$

حل: ریشه ندارد زیرا:

$$[2x] + [x] = x+5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x+x = x+5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$2) [x] \leq x < [x]+1 \Rightarrow 0 \leq x-[x] < 1$$

* تست : معادله $[2x + [2x]]^2 + [x - [x]]^2 = -8$ چند جواب صحیح دارد ؟

تست : برد تابع $y = \sqrt{x - 5[\frac{x}{5}] + 1}$ کدام است ؟

* تست : معادله $x + \sqrt{x} = [x] - 2$ چند جواب دارد ؟

$$۳) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

* تست : مجموعه جواب معادله $۳[x] + [-x - 5] = 0$ کدام است ؟

تست : مجموعه جواب $[x] < 1 - [2 - x]$ کدام است ؟

* تست : معادله $۳x - [3x] = [2x] + [-2x]$ در بازه $(0, 10)$ چند جواب دارد ؟

حل : دو طرف تساوی فقط موقعی که برابر صفر شوند مساوی هستند . چنین اتفاقی زمانی می افتد که در سمت راست $2x \in \mathbb{Z}$ و در سمت چپ $3x \in \mathbb{Z}$ و چون $x = 3x - 2x$ پس x هم صحیح است و در این بازه ۹ عدد صحیح داریم .

تست : اگر $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ حاصل $f(\frac{-1}{p} f(x))$ کدام است ؟

حل : چون مقدار خاصی برای جایگذاری مشخص نیست ، معلوم می شود نیاز به دانستن محدوده x داریم :

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x = 1 \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow f(\frac{-1}{p} f(x)) = -1$$

$$۴) [nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}]$$

← در نتیجه اگر $[x] + [2x] + \dots + [nx] = 0$ آنگاه $0 \leq x < \frac{1}{n}$

* تست : مجموعه جواب معادله $[x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = 5$ کدام است ؟

* تست : مجموعه جواب معادله $[\frac{x}{2}] + [\frac{x+1}{2}] = 12$ کدام است ؟

* تست : مجموعه جواب معادله $[2x] = [x] + 3$ کدام است ؟

* تست : مجموعه جواب معادله $[x] + [2x] + [3x] = 0$ کدام است ؟

نامساوی های مهم :

$$۱) [x] \geq n \Rightarrow x \geq n$$

$$۲) [x] \leq n \Rightarrow x < n + 1$$

اگر حالت دیگری بود به این دو حالت تبدیل می کنیم . به طور مثال :

$$[x] > 2 \Rightarrow [x] \geq 3$$

$$[2x] \leq \frac{-1}{2} \Rightarrow [2x] \leq -1$$

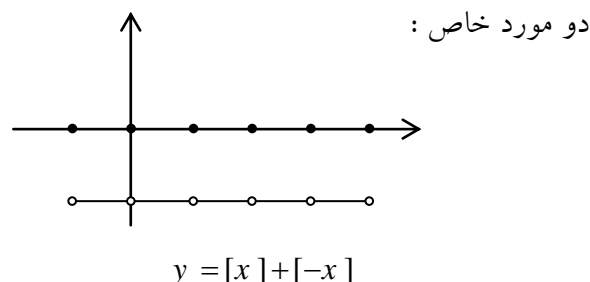
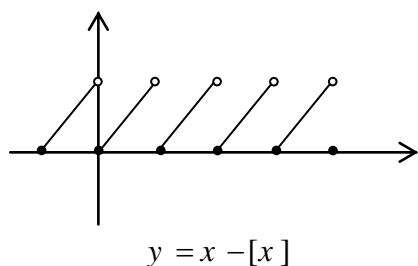
تست : مجموعه جواب $[3x+1] \leq \frac{5}{2}$ کدام است ؟

تست : دامنه $y = \sqrt{([x] - \sqrt{2})(3 - [x])}$ کدام است ؟

تست : دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{1 - 2[x]}{[x] + [-x]}}$ کدام است ؟

رسم نمودار توابع جزء صحیح :

الف ($y = [f(x)]$) و خطوط $y = k \in \mathbb{Z}$ را رسم می کنیم . نقاط برخورد را پررنگ کرده و نمودار بین هر دو نقطه را به خط زیرین خود ریزش می دهیم .



دو مورد خاص :

نکته : در تابع $y = [ax]$ طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ است .

تست : نمایش هندسی $y = [\sin 2x]$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد)

تست : نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{4}\right] + 1$ در بازه $(-2, 6)$ از چند پاره خط تشکیل شده است ؟

حل : طول هر پله آن 2 است که این بازه را به چهار پله تقسیم می کند .

تست : معادله $x^2 + [x] - x = 0$ چند جواب دارد ؟

تست : دامنه تابع $f(x) = \sqrt{|x| - [x]}$ کدام است ؟ (کل اعداد حقیقی)

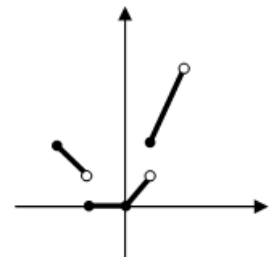
ب) $y = f([x]) : f(x)$ و خطوط $x = k \in \mathbb{Z}$ را رسم می کنیم . نقاط برخورد را پررنگ کرده و پاره خط های افقی به طول یک از این نقاط به سمت راستشان رسم می کنیم .

تست : نمایش هندسی تابع $y = \sqrt{1 - [x]}$ کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد)

ج) برای رسم توابع براکتی نامتعارف ، با تقسیم کردن بازه ها به زیر بازه های مناسب مقدار براکت را یافته و پس از قرار دادن اعداد به جای براکت ، هر قسمت را در بازه مربوط به آن رسم می کنیم .

تست : نمودار تابع $y = x[2x + 1]$ در فاصله $(-1, 1)$ کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری عدد)

$$[2x + 1] = n \Rightarrow n \leq 2x + 1 < n + 1 \Rightarrow \frac{n-1}{2} \leq x < \frac{n}{2} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=-1} -1 \leq x < -\frac{1}{2} & \Rightarrow y = -x \\ \xrightarrow{n=0} -\frac{1}{2} \leq x < 0 & \Rightarrow y = 0 \\ \xrightarrow{n=1} 0 \leq x < \frac{1}{2} & \Rightarrow y = x \\ \xrightarrow{n=2} \frac{1}{2} \leq x < 1 & \Rightarrow y = 2x \end{cases}$$



تست : سطح محصور به نمودار تابع $f(x) = [x] - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ با محور x ها در بازه $(0, 3)$ کدام است ؟

حل : در این بازه براکت دوم صفر است و مساحت زیر تابع $f(x) = [x]$ در این بازه ۳ است .

تست : نمودار $y = \frac{x}{[x+1]}$ روی $(-1, 1)$ متشکل از چند پاره خط است ؟

حل : طول هر پله آن ۱ است که این بازه را به ۲ پله تقسیم می کند ولی در یک پله تابع تعریف نمی شود چون مخرج صفر می شود . به تشریح آن دقت کنید .

$$[x+1]=n \Rightarrow n \leq x+1 < n+1 \Rightarrow n-1 \leq x < n \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=0} -1 \leq x < 0 \\ \xrightarrow{n=1} 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

نکته : معادلات و نامعادلات نامتعارف براکتی را با محدوده بندی x حل می کنیم :

تست : جواب معادله $[x] + [3x] = 2$ کدام است ؟

$$0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow 0+0 \neq 2, \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow 0+1 \neq 2, \quad \boxed{\frac{2}{3} \leq x < 1} \Rightarrow 0+2=2$$

تست : مجموعه جواب $[x] \geq [x^2]$ کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری عددی از گزینه ها)

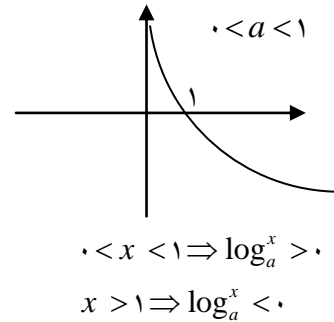
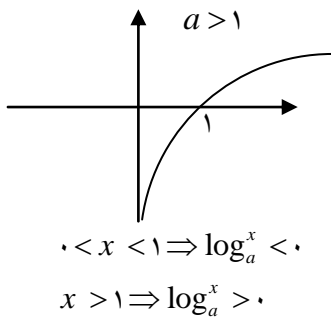
حل : $[x^2] \geq 0$ در نتیجه طبق صورت سوال $[x] \geq 0$ و در نتیجه $x \geq 0$:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \geq 0, \quad 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \geq 1, \quad \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow 1 \neq 2 \Rightarrow [0, \sqrt{2})$$

تابع لگاریتمی

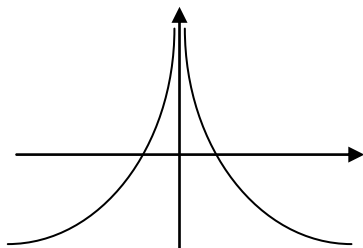
وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامند : $\log_a^x = y \Leftrightarrow x = a^y$

که به دو شکل کلی زیر است :



نکته: \log_e^x را لگاریتم طبیعی می نامند و با نماد $\ln x$ نمایش می دهند .

تست : ضابطه تابع مقابل کدام است ؟



$y = -\ln|x|$ (۱) $y = \ln x$ (۲)

$y = \ln|x|$ (۳) $y = -\ln x$ (۴)

تست : تابع $f(x) = \log_2(ax + b)$ فقط برای $x \in (\frac{-1}{2}, +\infty)$ با معنی است . اگر $f(4) = 2$ باشد ، آنگاه $f(\frac{-4}{9})$ کدام است ؟ (سراسری ۹۴ ریاضی داخل)

تست : نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ محور x ها را در نقطه ای به طول -1 و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه ای به عرض -1 قطع کرده است . b کدام است ؟ (سراسری ۹۴ ریاضی خارج)

تست : وارون تابع $y = 2\log_3^{(x-1)} + 1$ کدام است ؟

$$y = 1 + (\sqrt{3})^{x-1} \quad (۴) \quad y = \frac{2 + (\sqrt{3})^{x-1}}{3} \quad (۳) \quad y = 1 + (\sqrt{3})^{x-2} \quad (۲) \quad y = \frac{1 + 3^{x-1}}{4} \quad (۱)$$

قواعد لگاریتم :

$$۱) \log_a^1 = 0, \log_a^a = 1 \longrightarrow \log^1 = 0, \log^1 = 1$$

$$۲) \log_{a^m}^{x^n} = \frac{n}{m} \log_a^x \longrightarrow \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \log_{r^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

تست : حاصل $\log_{\frac{a}{b}}^a$ کدام است ؟

$$\log_{\frac{a}{b}}^{\frac{1}{b}} \quad (۱) \quad -\log_b^{\frac{1}{a}} \quad (۲) \quad \log_b^a \quad (۳) \quad (\log_b^a)^{-1} \quad (۴)$$

تست : حاصل $\log_{\sqrt{x}\sqrt{x}}^{\sqrt{x}\sqrt{x}}$ کدام است ؟

تست : فرض کنید $\log_{\sqrt{5}}^{(x+2)} = 6$ و $\log_{\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}} = 15$ ، حاصل $\log_{y+16}^{(x-2)}$ کدام است ؟

تست : اگر لگاریتم عدد $2\sqrt{0}/25$ در مبنای ۸ برابر A باشد . آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A}-1)$ در مبنای ۴ کدام است ؟

تست : لگاریتم عددی در مبنای a برابر b است . در کدام مبنای برابر $\frac{b}{3}$ است ؟ (فرض $\log_{\frac{a}{b}}^{\frac{a}{b}} = 6$ و جایگذاری در گزینه)

تست : لگاریتم عدد $(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2})$ در مبنای ۸ کدام است ؟

تست : اگر $x = \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} - \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ ، حاصل لگاریتم x بر پایه ۲ کدام است ؟

تست : اگر $x = \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{37})$ باشد، لگاریتم $x^2 + 3x + 1$ در پایه ۴ کدام است ؟ (عبارت دوم را مربع کامل کن)

تست : در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری وجود دارد . تعداد باکتری ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{-0.4t}$ است . پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است ؟ ($\ln 5 = 1/68$)

$$۳) \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy} \longrightarrow \log_5 + \log_2 = \log_{10} = \log_{10}^2 = 2 \log_{10} = 2$$

$$۴) \log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}} \longrightarrow \log_2^2 - \log_2^5 = \log_2^4 = \log_2^2 = 2 \log_2^2 = 2$$

نتیجه : در مبنای ۱۰ ، بین لگاریتم ۲ و ۵ رابطه مقابل برقرار است : $\log_5 = 1 - \log_2$

تست : حاصل $\log 24 - \log 9 + \log 125$ کدام است ؟

تست : اگر $\log 2 + \log 3 + \log 4 = a$ آنگاه حاصل $\frac{3 \log 6 + 2 \log 8}{\log 2400}$ کدام است ؟

$$\xrightarrow{\log 24 = a} \frac{3 \log 6 + 6 \log 2}{\log 24 \times 100} = \frac{3(\log 6 + 2 \log 2)}{\log 24 + \log 100} = \frac{3a}{a+2}$$

تست : حاصل $\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \log\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ کدام است ؟

تست : اگر $\log 2 = k$ حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$ کدام است ؟

تست : اگر $\log 20 = 1/3$ باشد ، لگاریتم $\sqrt[5]{625} \times \sqrt[3]{4}$ کدام است ؟

$$\log 20 = 1 + \log 2 \Rightarrow \boxed{\log 2 = 0/3} \Rightarrow \log A = \frac{4}{5} \frac{\log 5}{1 - \log 2} + \frac{2}{3} \log 2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{15} \log 2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{15} (0/3) = 0/76$$

تست : حاصل عبارت $(\log 2)^2 + \log 5 \times \log 20$ کدام است ؟

تست: با فرض $\log 2 = a$ حاصل $\log 1/25$ کدام است ؟

تست : اگر $\log 6 = a$ و $\log 3 = b$ ، حاصل $\log 25$ کدام است ؟

تست : اگر $\log ab = k_1$ و $\log bc = k_2$ و $\log ac = k_3$ باشد ، حاصل $\log a^2 b^2 c$ کدام است ؟

- (۱) $2k_1 + k_2$ (۲) $k_1 + k_2 + k_3$ (۳) $2k_1 + k_3$ (۴) $2k_2 + k_1$

حل : با جایگذاری $a = 10, b = 100, c = 1000$ داریم $k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 4$ پس :

$$\log a^2 b^2 c = 2 \log a + 2 \log b + \log c = 10 = 2k_1 + k_3$$

تست : اگر $\log_{mn}^m = a$ حاصل \log_{mn}^n کدام است ؟ (با جایگذاری $n = 4, m = 2$)

- (۱) $1-a$ (۲) $a-1$ (۳) $(1-a)^2$ (۴) $2(1-a)$

تست : اگر $\log xy^2 = 2$ و $\log x^2 y = 4$ باشد ، حاصل $\log xy^4$ چقدر است ؟ (با جایگذاری $x = 100, y = 1$)

تست : اگر $\log x = 4/23$ ، x قبل از ممیز چند رقم دارد ؟

تست : اگر $\log 2 = 0/30103$ ، عدد 5^{30} چند رقمی است ؟

$$\log 5^{30} = 30 \log 5 = 30(1 - \log 2) = 30 - 9/0309 = 20/9691 \quad \text{۲۰ رقمی}$$

$$\delta) \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \longrightarrow \log 5 = a \Rightarrow \log_5^2 = \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{1-a}{a}$$

نتیجه : طبق قانون تغییر مبنا می توانیم جای ضابطه و مبنا را عوض کنیم : $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

نتیجه : طبق نتیجه قبل می توان حاصل ضرب چند لگاریتم را ساده کرد : $\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$

تست : اگر $\log_{\sqrt{r}}^4 = a$ باشد ، حاصل $\log_{r\sqrt{r}}^{3\sqrt{r}}$ کدام است ؟

$$\log_{\frac{r}{2}}^{\frac{1}{2}} = a \Rightarrow \log_r^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{4}$$

$$\log_{r\sqrt{r}}^{3\sqrt{r}} = \frac{\log_r^{3\sqrt{r}}}{\log_r^{r\sqrt{r}}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \log_r^{\frac{1}{2}}}{\log_r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{a}{4}}{\frac{a}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{4+a}{2a+4}$$

تست : اگر $\log_2 = a$ و $\log_3 = b$ حاصل $\log_{\sqrt{6}}^{\frac{1}{6}}$ کدام است ؟

تست : مجموع 1390 جمله اول دنباله $a_n = \frac{1}{\log_{(n+1)}^{1391}}$ کدام است ؟

$$\frac{1}{\log_2^{1391!}} + \frac{1}{\log_3^{1391!}} + \dots + \frac{1}{\log_{1391}^{1391!}} = \log_{1391!}^2 + \log_{1391!}^3 + \dots + \log_{1391!}^{1391} = \log_{1391!}^{2 \times 3 \times \dots \times 1391} = \log_{1391!}^{1391!} = 1$$

تست : اگر $\log_{17}^2 = a$ باشد ، حاصل $\log_2^2 \times \log_4^2 \times \dots \times \log_{17}^{36}$ کدام است ؟

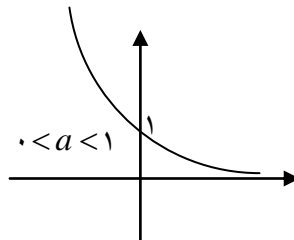
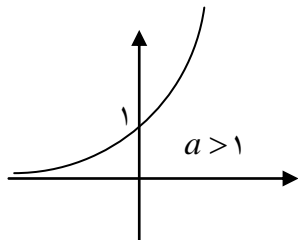
۶) $b^{\log_a^x} = x^{\log_a^b} \longrightarrow a^{\log_a^x} = x$

تست : حاصل $5^{(2\log_5^1 + 3\log_5^2)}$ کدام است ؟

تست : حاصل $\sqrt{8^{4-\log_2^r}}$ کدام است ؟

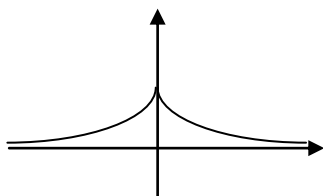
تابع نمایی

هر تابع به شکل $y = a^x$ با شرط $a > 0, a \neq 1$ را تابع نمایی می گویند. که به دو شکل کلی زیر هستند:



نکته: e را عدد نپر می نامند که تقریباً برابر $2/71$ است.

تست: شکل مقابل مربوط به کدام تابع زیر است؟ (جایگذاری ۱ و -۱)



(۱) $y = |2^x|$

(۲) $y = 2^{-x}$

(۳) $y = 2^{|x|}$

(۴) $y = |2^{-x}|$

تست: نمودار تابع $y = 2^x + 2^{x+1}$ به کدام صورت است؟ (جایگذاری عدد)

تست: معادله $2^x = \frac{x^2 + 2x + 1}{2}$ چند جواب دارد؟

تست: نمودار کدام تابع در ناحیه اول بالای سایرین قرار دارد؟

(۴) $y = 3 \times 4^{x-1}$

(۳) $y = 4^x$

(۲) $y = 2^{2x+1}$

(۱) $y = 2^{2x-1}$

حل: همه توابع فوق صعودی هستند و آنکه عرض از مبدا بزرگتری داشته باشد در ناحیه اول از همه بالاتر خواهد بود. با قرار دادن $x = 0$ در توابع بالا معلوم می شود گزینه ۲ از بقیه بالاتر است.

تست: تابع نمایی $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \times a^{x-1}$ نزولی است. حدود a کدام است؟

$$f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times a^x \times a^{-1} = \frac{3}{2a} \times \left(\frac{4a}{9}\right)^x \Rightarrow 0 < \frac{4a}{9} < 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{9}{4}$$

تست اگر در تابع $y = \left(\frac{a+2}{a-2}\right)^x$ با افزایش x ، مقدار تابع افزایش یابد، محدوده a کدام است؟

تست: تعداد باکتری ها در یک نوع کشت بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد اولین باکتری ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه بیستم ۳۲۰۰ باشد، در دقیقه سی ام تعداد آنها کدام است؟

حل: در شروع یعنی دقیقه صفرم $f(0) = A = 800$

$$3200 = 800 \times e^{20k} \Rightarrow e^{20k} = 4 \Rightarrow e^{10k} = 2 \Rightarrow f(30) = 800 \times e^{30k} = 800 \times (e^{10k})^3 = 800 \times 8 = 6400$$

معادلات نمایی:

برای حل معادلات نمایی سعی می کنیم در طرفین معادله پایه ها یا توان ها را برابر کنیم اگر این امکان وجود نداشت از طرفین بر مبنای پایه، لگاریتم می گیریم.

تست: اگر $\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = 2^A$ عدد A کدام است؟

تست: جواب معادله $4^{2-x} = 5^x$ کدام است؟ (\log_4^6 جواب است)

نامعادلات نمایی :

اگر توابع صعودی بر نامساوی عمل کنند جهت را تغییر نمی دهند و اگر توابع نزولی بر نامساوی اثر کنند جهت را تغییر می دهند. از طرفی در حل نامعادلات حتما باید به دامنه تابع نیز توجه داشت.

تست : مجموعه جواب نامعادله $(\frac{1}{5})^{5x-x^2-8} < 625$ کدام است ؟ (پایه برابر)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{5x-x^2-8} < 625 \Rightarrow 5^{x^2-5x+8} < 5^4 \Rightarrow x^2 - 5x + 8 < 4 \Rightarrow 1 < x < 4$$

تست : مجموعه جواب نامعادله $8^{x-3} < 9^{x-3}$ کدام است ؟ (توان برابر)

حل : طرفین را بر 9^{x-3} تقسیم می کنیم (عبارت نمایی همواره مثبت است)

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{x-3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^{x-3} < \left(\frac{8}{9}\right)^0 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

تست : اگر $2^{-x} < 0.00001$ و $\log 2 = 0.301$ ، کوچک ترین عدد x با دو رقم اعشار کدام است ؟ (پایه و توان نابرابر)

- (۱) ۱۹/۸۹ (۲) ۱۹/۹۱ (۳) ۱۹/۹۴ (۴) ۱۹/۹۷

$$2^{-x} < 10^{-6} \xrightarrow{\log} -x \log 2 < -6 \Rightarrow x > \frac{6}{0.301} = \frac{6000}{301} \approx 19.933 \Rightarrow x = 19.94$$

تست : اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است ؟

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \Rightarrow 2^{2x+1} > 1 \Rightarrow 2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

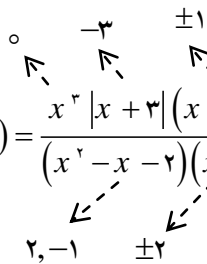
تعیین علامت یک تابع :

- ۱) ریشه ی تک تک عبارات را می یابیم .
- ۲) ریشه های بدست آمده را به ترتیب صعودی در جدول تعیین علامت جایگذاری می کنیم .
- ۳) علامت ناحیه اول از راست علامت ضریب جمله ای است که از ضرب و تقسیم بزرگترین جمله ها بدست آمده .
- ۴) از ناحیه ای اول شروع به حرکت می کنیم اگر به ریشه های فرد (به تعداد فرد تکرار شده اند) برخورد کردیم علامت تابع را عوض می کنیم و اگر به ریشه های زوج (به تعداد زوج تکرار شده اند) برخورد کردیم علامت تابع را تغییر نمی دهیم .

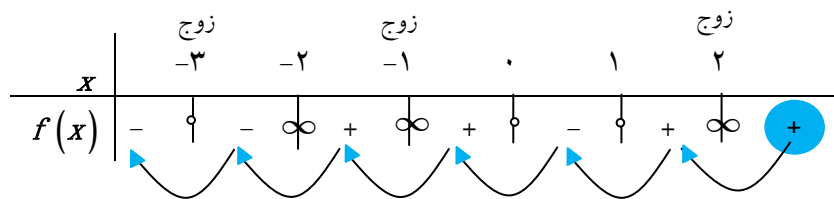
نکته : عبارات نا منفی دارای ریشه زوج محسوب می شوند مثل $(x-a)^2, |x-a|$

مثال : تابع $f(x) = \frac{(x^2 - x^2)|x+3|(x-3)^4}{(x^2 - x - 2)(x^2 - 4)}$ را تعیین علامت کنید .

$$f(x) = \frac{x^2 |x+3| (x^2-1)}{(x^2-x-2)(x^2-4)}$$



علامت ناحیه اول = علامت نهایی ضریب بزرگترین جملات $f(x) \approx \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 1 > 0$



تست : مجموعه جواب های حقیقی نا معادله $x^2 - 3x^2 + 3x - 1 \geq \frac{3}{4}(x-1)^2$ کدام است ؟

$$(x-1)^2 \geq \frac{3}{4}(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 \left(x - \frac{5}{4} \right) \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}, +\infty \right) \cup \{1\}$$