



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

رادیکالها

(۱) روش تبدیل رادیکال مرکب به رادیکال ساده :

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\square + \sqrt{3})^2} = \sqrt{(\square + \sqrt{3})^2} = |\square + \sqrt{3}| = \square + \sqrt{3}$$

تست : حاصل $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \times \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ کدام است ؟

حل :

$$\sqrt{4-2\sqrt{2}} \times \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

تست : حاصل $\sqrt{6-4\sqrt{2}} \times \sqrt{2+2\sqrt{2}}$ کدام است ؟

(۲) ساده کردن رادیکال های تو در تو با پایه های یکسان : توان ها و فرجه ها را مشخص کرده و از چپ شروع می کنیم اول ضرب و حاصل را جمع می کنیم و این کار را ادامه می دهیم .

$$p^a \sqrt[n]{p^b \sqrt[m]{p^c \sqrt[k]{p^d}}} = nmk \sqrt[p^{((am+b)m+c)k+d}]{}$$

تست : حاصل $\sqrt{a^n} \sqrt{a^n}$ کدام است ؟

تست : حاصل $(\sqrt{2\sqrt{2}} + 4^{-1/25})^2$ کدام است ؟ $(4^{-1/25} = 2^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt{2}})$

(۳) استفاده از اتحاد مزدوج در گویا کردن :

تست : حاصل $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ کدام است ؟

حل : با فرض $\sqrt{2}-\sqrt{3}=a$ داریم $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{1}{a}$ بنابراین این کسر به صورت $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+a^{-1}}$ است که برابر با ۱ است .

تست : حاصل عبارت $\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot \underbrace{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}_A$ کدام است ؟ (سراسری ۹۳ داخل)

$$\left. \begin{aligned} A &= (a + \frac{1}{a}) \Rightarrow A^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \Rightarrow A^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2 = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6} \\ B &= \sqrt[2]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \times B = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

تست : اگر $\sqrt[4]{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times (2+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ برابر $\sqrt[3]{A}$ باشد ، کدام است ؟ (سراسری ۹۳ خارج)

$$a^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}} = a^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[2]{2} = \sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{|1-\sqrt{3}|} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \Rightarrow A = \sqrt{3}-1$$

تست : حاصل $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ برابر است با :

تست : مقدار $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{\sqrt{3}-2} \right)^{\sqrt{9+2\sqrt{3}+4}}$ کدام است ؟ (در توان های این عبارت اتحاد چاق و لاغر وجود دارد)

اتحاد ها و تجزیه ها

➤ **اتحاد:** یک تساوی که به ازای تمام مقادیر متغیرها درست است.

$$\checkmark \text{ مربع دو جمله ای: } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

اولی به توان ۲، دو برابر اولی در دومی، دومی به توان ۲

$$\checkmark \text{ مکعب دو جمله ای: } (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

اولی به توان ۳، سه برابر مربع اولی در دومی، سه برابر مربع دومی در اولی، دومی به توان ۳

$$\checkmark \text{ مربع سه جمله ای: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اولی و دومی و سومی به توان ۲، دو برابر هر دو تا

$$\checkmark \text{ مزدوج: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اولی به توان ۲ منهای دومی به توان ۲

$$\checkmark \text{ چاق و لاغر: } (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

اولی به توان ۳، دومی به توان ۳ (در عبارت لاغر)

$$\checkmark \text{ جمله مشترک: } (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مشترک به توان ۲، جمع غیر مشترک در مشترک، ضرب غیر مشترک

$$\text{تذکره! } (x+y)^2 \neq x^2 + y^2 \quad \text{ولی در ضرب} \quad (xy)^2 = x^2 y^2$$

تست: حاصل $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ کدام است؟ (روش تستی: جایگذاری عدد)

تست: حاصل عبارت $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ برابر است با: (روش تستی: $x=1, y=1$)

$$(1) \quad x^4 + y^4$$

$$(2) \quad (x^2 - y^2)^2$$

$$(3) \quad x^4 - x^2 y^2 + y^4$$

$$(4) \quad x^4 + x^2 y^2 + y^4$$

تست: اگر $x^2 - x - 7 = 0$ آنگاه حاصل $(x-3)(x+1)(x+3)$ کدام است؟

$$(x^7 - 9)(x+1) \xrightarrow{x^7 = x+7} \left(x + \cancel{x^7 - 9}\right)(x+1) = x^7 - x - 9 \xrightarrow{x^7 - x = 7} 7 - 9 = -2$$

➤ چند اتحاد فرعی مهم:

$$1) a^7 + b^7 = (a+b)^7 - 7ab(a+b)$$

$$3) a^7 + b^7 = (a+b)^7 - 7ab(a+b)$$

$$2) a^7 + b^7 = (a-b)^7 + 7ab(a-b)$$

$$4) a^7 - b^7 = (a-b)^7 + 7ab(a-b)$$

تست: اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^7 + \frac{1}{x^7}$ کدام است؟

تست: هرگاه $\frac{x^7}{x^7+1} = \frac{1}{14}$ ، با شرط $x > 0$ حاصل $x^7 + \frac{1}{x^7}$ کدام است؟

تست: در صورتی که $a^7 - 7ab + 9b^7 = 0$ باشد، با شرط مثبت بودن a, b ، حاصل کسر $\frac{a+7b}{a-7b}$ کدام است؟

➤ تجزیه: یعنی نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل ضرب عامل های آن.

$$4x^7 - 12x = 4x(x-3) \quad \checkmark \text{ روش فاکتور گیری}$$

$$x^7 - y^7 = (x^7 + y^7)(x^7 - y^7) = (x^7 + y^7)(x^7 + y)(x^7 - y) \quad \checkmark \text{ روش اتحادی}$$

$$x^7 + 4x^7 - 9x - 36 = x^7(x+4) - 9(x+4) = (x+4)(x^7-9) = (x+4)(x+3)(x-3) \quad \checkmark \text{ روش دسته بندی}$$

استفاده از اتحاد ها در تجزیه:

$$a^7 - b^7 = (a-b)(a+b) \quad \checkmark \text{ مزدوج}$$

$$a^7 \pm b^7 = (a \pm b)(a^6 \mp ab + b^6) \quad \checkmark \text{ چاق و لاغر}$$

$$x^7 + \underbrace{p}_{a+b} x + \underbrace{q}_{a \times b} = (x+a)(x+b) \quad \checkmark \text{ مربع و جمله مشترک}$$

$$ax^7 + \underbrace{b}_{m+n} x + \underbrace{\frac{ac}{m \times n}} = \frac{(ax+m)(ax+n)}{a} \quad \checkmark \text{ تجزیه به روش A}$$

مثال: عبارت $6x^2 + 7x + 2$ را تجزیه کنید.

$$6x^2 + \underbrace{7x}_{3+4} + \underbrace{2}_{3 \times 1} = \frac{(6x+3)(6x+4)}{6} = \frac{\cancel{3}(x+1) \times \cancel{3}(3x+2)}{\cancel{3}} = (x+1)(3x+2) \quad \text{حل:}$$

تست: در تجزیه $4a^2 - 4a - b^2 - 4b - 3$ کدام عامل وجود دارد؟

$$2a+b+1 \quad (4) \qquad 2a+b-3 \quad (3) \qquad 2a-b+1 \quad (2) \qquad 2a+b+3$$

حل:

$$4a^2 - 4a + 1 - b^2 - 4b - 3 = (2a-1)^2 - (b+2)^2 = (2a-1-b-2)(2a-1+b-2) = (2a-b+1)(2a+b-3)$$

تست: اگر $2a^2 + 4b^2 - 4ab - 6a + 9 = 0$ ، آنگاه حاصل $5a - 6b$ کدام است؟

$$\underline{a^2} + \underline{a^2} + \underline{4b^2} - \underline{4ab} - \underline{6a} + \underline{9} = 0 \Rightarrow (a-2b)^2 + (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a=3, a=2b \Rightarrow a=3, b=\frac{3}{2}$$

تست: عبارت $x^4 + 4y^4$ بر کدام یک بخش پذیر است؟

$$x^2 + 2y^2 - 4xy \quad (4) \qquad x^2 - 2y^2 - 2xy \quad (3) \qquad x^2 - 2y^2 + 2xy \quad (2) \qquad x^2 + 2y^2 + 2xy \quad (1)$$

حل:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

تست: در تجزیه $x^2 + (x-1)(y+1) - x$ کدام عامل وجود دارد؟

$$x+y+1 \quad (4) \qquad x+y-1 \quad (3) \qquad x-y-1 \quad (2) \qquad x-y+1$$

$$x^2 + xy + \cancel{x} - y - 1 - \cancel{x} = x^2 + \underbrace{y}_{y+1-1} x - \underbrace{(y+1)}_{-1 \times (y+1)} = (x-1)(x+y+1)$$

تست : عبارت $x^{\frac{4}{3}} - 1$ بر کدام عبارت بخش پذیر است ؟

$$(1) \quad x\sqrt{x} + 1 \quad (2) \quad x^2 + x\sqrt{x} + 1 \quad (3) \quad x^2 - x\sqrt{x} + 1 \quad (4) \quad x + x\sqrt{x} + 1$$

حل :

$$\sqrt{x^3} - 1 = (\sqrt{x^3} - 1)(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3} + 1) = (x\sqrt{x} - 1)(x^2 + x\sqrt{x} + 1)$$

➤ تجزیه دو جمله ای در حالت کلی :

عبارت $a^n - b^n$ را به دو صورت می توان تجزیه کرد :

$$\boxed{\text{در حالت کلی}} \Rightarrow a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\boxed{\text{برای } n \text{ زوج باشد}} \Rightarrow a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\boxed{\text{برای } n \text{ فرد باشد}} \Rightarrow a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

تست : مجموع $a^y - a^x b + a^2 b^2 - a^3 b^3 + \dots - b^y$ کدام است ؟

$$\text{حل : مقدار } n \text{ در واقع ۸ و زوج است پس : } \frac{a^8 - b^8}{a + b}$$

تست : عبارت $(x+2)^n + (x+2)^{n-1}(x+1) + \dots + (x+1)^n$ برابر است با :

$$(1) \quad (x+2)^n + (x+1)^n \quad (2) \quad (x+2)^n - (x+1)^n$$

$$(3) \quad (x+2)^{n+1} + (x+1)^{n+1} \quad (4) \quad (x+2)^{n+1} - (x+1)^{n+1}$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

پ.م.م: ضرب عامل های مشترک با کوچک ترین توان .

گ.م.م: ضرب عامل های مشترک با بزرگ ترین توان در عوامل غیر مشترک .

تست : ب.م.م $x^2 - 2xy - 15y^2$ و $x^2 + 7xy + 12y^2$ کدام است ؟

حل : طبق تجزیه ی جمله مشترک بر حسب x داریم :

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 2xy - 15y^2 &= (x + 3y)(x - 5y) \\ x^2 + 7xy + 12y^2 &= (x + 3y)(x + 4y) \end{aligned} \right\} \rightarrow x + 3y \quad \text{ب.م.م}$$

تست : ک.م.م اعداد $a = 20^5 \times 15^4$ و $b = 24^3 \times 10^3$ کدام است ؟

تست : ک.م.م $x^3 + x^2 - x - 1$ و $x^3 - x^2 - x + 1$ کدام است ؟

تست : ب.م.م عبارات $x^3 - x$ و $x^4 - 3x^2 + 2$ کدام است ؟

تست : اگر $(x^2 - 1)^2$ ک.م.م $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ و $Q(x) = x^3 + ax^2 - x + 1$ باشد ، a کدام است ؟

حل : چون $P(x) = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2-1)$ و $Q(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ ک.م.م است پس $Q(x)$ عامل $(x+1)^2$

را دارد پس $Q(1) = 0$ در نتیجه $a = -1$

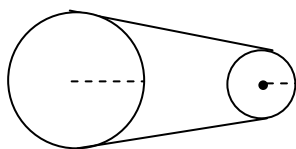
تست : اگر $\frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1}$ آنگاه $A + B + C$ کدام است ؟

تست : بزرگ ترین پیمانه ای که با آن می توان ظروفی با گنجایش ۷۲ و ۶۰ و ۳۶ را پر کرد ، چند لیتری است ؟ (حجم پیمانه عدد طبیعی باشد)

تست : سه زنگ در یک کارخانه هستند که به ترتیب هر ۱۸ دقیقه ، هر ۲۴ دقیقه ، هر ۳۲ دقیقه دزنگ می زنند . بعد از اولین باری که با هم زنگ می زنند ، حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا دوباره با هم زنگ بزنند ؟

تست : می خواهیم سالی با ابعاد ۷۲ و ۵۴ را با فرش های مربعی که طول ضلع آنها عدد صحیح است بپوشانیم ، کمترین تعداد فرش ها برای این کار چقدر است ؟

تست : در شکل زیر دو چرخ به شعاع های ۲۷ و ۴۵ وجود دارد . چرخ بزرگ چند دور بزند تا برای بار پنجم دو علامت مقابل هم قرار بگیرند ؟



$$\text{حل : } 3 = 135 \div 45 \Rightarrow [27, 45] = 135$$

چرخ بزرگ ۳ دور بزند اولین بار دوباره علامت ها کنار هم قرار

می گیرند و اگر $3 \times 5 = 15$ دور بزند برای بار پنجم این اتفاق می افتد .

تست : در یک کیسه بین ۸۰۰ تا ۹۰۰ مهره وجود دارد . اگر آنها را پنج تا پنج تا ، هفت تا هفت تا ، سه تا سه تا ، و چهار تا چهار تا بشماریم . همواره ۲ مهره باقی می ماند ، تعداد مهره ها چقدر است ؟

حل : اگر آن عدد x باشد پس $x - 2$ بر اعداد ۵ و ۷ و ۳ و ۴ بخش پذیر است . پس این عدد مضرب ک.م.م این اعداد است که برابر ۴۲۰ است پس :

$$x - 2 = 420k \Rightarrow x = 420k + 2 \xrightarrow{800 < x < 900} x = 420 \times 2 + 2$$