



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

[@riazisara](https://telegram.me/riazisara)

## مثلثات

زاویه :

درجه : به زاویه مرکزی که  $\frac{1}{360}$  محیط دایره را در بر می گیرد ، ۱ درجه می گویند .

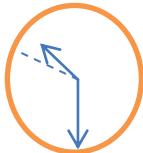
رادیان : زاویه مرکزی که طول کمان مقابل آن برابر شعاع دایره است .

نتیجه : هر دایره  $360^\circ$  درجه و  $2\pi$  رادیان است . پس برای تبدیل درجه به رادیان و بر عکس داریم :

نتیجه : هر ساعت  $30^\circ$  است ، و وقتی دقیقه شمار یک دقیقه حرکت می کند ساعت شمار  $5^\circ$  حرکت می کند .

تست : زاویه های مثلثی با اعداد ۱ و ۲ و ۳ متناسبند ، مجموع دو زاویه کوچک تر چند رادیان است ؟

تست : زاویه بین عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار وقتی ساعت  $10:30$  کدام است ؟



حل :  $135^\circ = \frac{1}{5} (4 \times 30 + 30 \times 0)$  است .

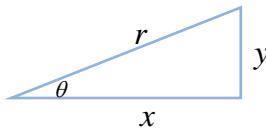
نکته : زاویه بین عقربه های دقیقه و ساعت شمار در ساعت  $m':h$  برابر است با :

طول کمان :

طول کمانی از دایره مقابل به زاویه  $\theta$  رادیان برابر است با :

تست : در یک تراکتور شعاع چرخ جلو  $40$  و شعاع چرخ عقب  $30$  درجه بچرخد ، چرخ عقب چند درجه می چرخد ؟ ( راهنمایی : هر دو چرخ یک مسافت را می پیمایند )

نسبت های مثلثاتی روی مثلث :



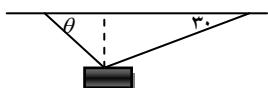
$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{y}{x}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{x}{y}$$

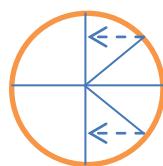
تست : در شکل مقابل یک وزنه به کمک دو طناب به طول های ۳ و ۴ واحد نگه داشته شده اند . سینوس زاویه  $\theta$  چقدر است ؟



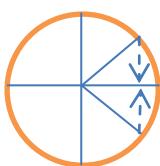
حل : اگر فاصله وزنه از سقف را  $h$  بنامیم :

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2 \Rightarrow \sin \theta = \frac{h}{3} = \frac{2}{3}$$

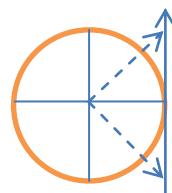
نسبت های مثلثاتی روی دایره مثلثاتی :



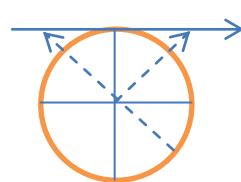
$$y = \sin \theta$$



$$y = \cos \theta$$



$$y = \tan \theta$$



$$y = \cot \theta$$

۱) هر نقطه روی دایره مثلثاتی دارای مختصات  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  است :

تست : نقطه  $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$  روی دایره مثلثاتی است . اگر  $\sin \theta = \sqrt{m}$  باشد ،  $m$  کدام است ؟

۲) علامت نسبت های مثلثاتی در ربع های مختلف :

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
۱ ن	+	+	+	+
۲ ن	+	-	-	-
۳ ن	-	-	+	+
۴ ن	-	+	-	-

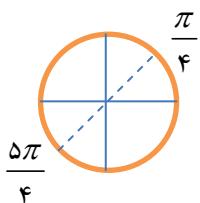
تست : اگر  $\sin x > \cos x$  و  $\tan x < 0$  ، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه مشتاتی است ؟

تست : اگر  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$  ، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است ؟ (روش تستی) انتخاب یک زاویه از هر ناحیه و قرار دادن آن در شرایط داده شده )

(۳) نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم :

	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	$\infty$	۰	$\infty$	۰
cot	$\infty$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	$\infty$	۰	$\infty$

(۴) مقایسه سینوس و کسینوس :



در دایره مثلثاتی در کمان های بالای خط  $y = x$  همواره  $\sin x > \cos x$

در دایره مثلثاتی در کمان های پایین خط  $y = x$  همواره  $\cos x > \sin x$

تست : اگر  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$  کدام نامساوی نادرست است ؟ ( با رسم محدوده نیز مشخص است )  $\cos x > \sin x$  است )

$$\cos x - \sin x > 0 \quad (۱) \quad \cos^{\circ} x > \sin^{\circ} x \quad (۲) \quad \sqrt[3]{\sin x} > \sqrt[3]{\cos x} \quad (۳) \quad \sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x} \quad (۴)$$

تست : اگر  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  ، حاصل عبارت  $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$  کدام است ؟

**نگاه معمم :** از طرفین نامساوی نمی توان نسبت مثلثاتی گرفت بلکه باید کمان را مشخص کرده و بیشترین و کمترین مقدار را در آن کمان بیابیم .

تست : اگر  $\cos^3 \alpha = \frac{1-m}{2}$  و  $\frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{5\pi}{9}$  حدود  $m$  کدام است ؟

(5) محاسبه نسبت های مثلثاتی کمان های  $(k\pi \pm \alpha)$  و  $\left(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha\right)$

ابتدا علامت نسبت مثلثاتی را در ربعی که کمان در آن قرار دارد را می نویسیم سپس :

اگر کمان شامل ضرایب  $\frac{\pi}{2}$  بود آن را حذف و نسبت را تغییر می دهیم (  $\sin \longleftrightarrow \cos$  ،  $\tan \longleftrightarrow \cot$  )

اگر کمان شامل ضرایب  $\pi$  بود آن را حذف کرده و نسبت را تغییر نمی دهیم .

تست : حاصل عبارت  $\sin^{\circ} \frac{\pi}{10} + \sin^{\circ} \frac{\pi}{11} + \sin^{\circ} \frac{11\pi}{10} + \sin^{\circ} \frac{12\pi}{11}$  کدام است ؟

تست : اگر  $\tan 10^\circ = a$  ، حاصل  $\frac{4\cos 100^\circ - \sin 80^\circ}{3\cos 280^\circ + \sin 26^\circ}$  کدام است ؟

نسبت های مثلثاتی کمان های منفی :

$$\cot(-\theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

تست : حاصل عبارت  $2\cos(-\frac{125\pi}{4}) + 3\tan(\frac{125\pi}{4}) + 4\cot(-\frac{125\pi}{4})$  کدام است ؟

نسبت های مثلثاتی کمان های مکمل :  $(\alpha + \beta = \pi)$

$$\cot \alpha + \cot \beta = \cdot$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \cdot$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cdot$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

تست : حاصل  $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$  کدام است ؟

تست : حاصل  $x = \frac{\pi}{10}$  به ازای  $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos 9x + \cos 10x$  کدام است ؟

نسبت های مثلثاتی کمان های متمم :  $(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2})$

$$\sin \alpha = \cos \beta , \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

**پس** هرگاه بخواهیم نسبت مثلثاتی را تغییر دهیم داریم :  $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$  و  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} \pm x)$

**پس** دو زاویه  $\alpha, \beta$  متمم هستند اگر و تنها اگر  $\tan \alpha \tan \beta = 1$

تست : حاصل  $\tan(2x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \cot(\frac{\pi}{3} - 2x) - \cos(\frac{\pi}{6} - x)$  کدام است ؟

تست : مقدار عددی  $\cos^{\circ}\frac{\pi}{\lambda} + \cos^{\circ}\frac{3\pi}{\lambda}$  کدام است ؟

تست : مقدار عددی عبارت  $\tan 1 \times \tan 2 \times \dots \times \tan 89$  کدام است ؟

تست : در مثلث  $ABC$  رابطه  $\tan(B + 30^\circ) \tan(C + 30^\circ) = 1$  برقرار است ،  $\hat{A}$  چند درجه است ؟

**روش تستی روابط مثلثاتی :** جایگذاری زاویه مناسب زاویه ای که به ازای آن، دو گزینه یکسان نباشد.

تست : حاصل  $\frac{1}{\cos^{\circ} x} - \frac{3 \tan^{\circ} x}{\cos^{\circ} x}$  کدام است ؟

۱)  $1 + \tan^{\circ} x$     ۲)  $\tan^{\circ} x$     ۳)  $1 + \tan^{\circ} x$     ۴)  $\tan^{\circ} x$

حل : با جایگذاری  $x = 60^\circ$  در گزینه ها و در عبارت داریم  $28 = 64 - 36$  که گزینه ۴ درست خواهد بود.

تست : اگر  $a + b + c = \frac{\pi}{2}$  حاصل  $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a$  کدام است ؟

۱) -۱    ۲) ۲    ۳) ۰    ۴) ۱

حل : با جایگذاری  $a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{4}, c = 0$  داریم :

$$1) \quad \sin^r x + \cos^r x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^r x + \cos^r x = 1 - r \sin^r x \cos^r x \\ \sin^r x + \cos^r x = 1 - r \sin^r x \cos^r x \end{cases}$$

$$\text{v) } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \tan x \cot x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$v) \quad 1 + \tan^r x = \frac{1}{\cos^r x} \quad , \quad 1 + \cot^r x = \frac{1}{\sin^r x}$$

**نکته:** وقتی مقدار یکی از نسبت های مثلثاتی را داشته باشیم با استفاده از مثلث قائم الزاویه می توان نسبت های دیگر را به

سرعت یافت و نیازی به استفاده از روابط بالا نخواهد بود. مثلاً اگر  $x$  در ربع سوم و آنگاه :

$$\sin x = \frac{-r}{s} \Rightarrow \begin{array}{c} s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{triangle} \end{array} \quad \rightarrow \cos x = \frac{-r}{s}, \quad \tan x = \frac{r}{-r}$$

تست: اگر  $\sin^{\circ} x + \cos^{\circ} x = \frac{3}{5}$  کدام است؟ حاصل  $\sin^{\circ} x + \cos^{\circ} x$ ،

$$\text{تست: ساده شده عبارت } \frac{1}{\cos^{\circ} x} - \frac{3 \tan^{\circ} x}{\cos^{\circ} x} \text{ کدام است؟ (روش تستی: جایگذاری } x = 60^\circ)$$

$$1 + \tan^2 x \quad (4) \qquad \qquad \qquad \tan^2 x \quad (3) \qquad \qquad \qquad 1 + \tan^2 x \quad (2) \qquad \qquad \qquad \tan^2 x \quad (1)$$

تست: اگر  $x$  در ربع دوم باشد عبارت  $\sqrt{\frac{\cot^r x}{1+\cot^r x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^r x}}$  برابر است با: (روش تستی: جایگذاری  $x = 45^\circ$ )

تست: اگر  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  و انتهای کمان در ناحیه سوم باشد مقدار  $\tan(\frac{3\pi}{4} - x)$  کدام است؟

( $\alpha \pm \beta$ ) کمان های یافته نسبت های زاویه های ( $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ$ )

- ۱)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
- ۲)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$
- ۳)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- ۴)  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- ۵)  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
- ۶)  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

تست : حاصل  $A = \frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cos 10^\circ}$  کدام است ؟

تست : اگر  $\alpha + \beta = 135^\circ$  و  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$  کدام است ؟

تست : حاصل عبارت  $x = 30^\circ$  (روش تستی: جایگذاری) کدام است ؟

$$\cos x \cos 2x - \cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x + \sin x \sin 2x + \sin 3x = \cos x - \sin 3x + \sin 3x = \cos x$$

تست : اگر  $\alpha$  حاده و  $\beta$  منفرجه باشد و  $\cos \beta = \frac{-12}{13}$  و  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  ، مقدار  $\sin(\alpha + \beta)$  کدام است ؟

تست : اگر  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  ، حاصل  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$  کدام است ؟

تست : اگر  $a = 60^\circ, b = 30^\circ$  و  $\tan(2a), \tan(a+b) = y$  کدام است ؟ ( جایگذاری :

$$\tan(2a) = \tan(20^\circ + x + 25^\circ - x) = \tan(45^\circ - x)$$

$$\tan(a+b) = \tan(60^\circ + 30^\circ) = \tan(90^\circ)$$

تست : اگر  $\tan 45^\circ = \tan(20^\circ + x + 25^\circ - x)$  باشد ،  $\cot(25^\circ - x)$  کدام است ؟ ( از  $\tan(x + 20^\circ) = \frac{3}{4}$  کمک می گیریم )

تست : حاصل  $\tan 17^\circ \tan 28^\circ + \tan 17^\circ + \tan 28^\circ$  کدام است ؟

و شش اتحاد کمکی :

$$v) \quad \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$w) \quad \sqrt{2} \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x) \quad \sin x \pm \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \cos x \left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y) \quad \cos(\alpha + \beta) \times \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$z) \quad \sin(\alpha + \beta) \times \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

روابط کمان مزدوج

تست : اگر  $\sin x + \cos x = \frac{m-1}{2}$  و  $\frac{-\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  تمام حدود  $m$  چقدر است ؟

تست : حاصل  $\frac{\sin \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}}$  کدام است ؟

تست : اگر  $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x$  تقسیم کن ) چقدر است ؟ ( طرفین را برابر  $\sqrt{3}$  کن )

تست : مقدار عبارت  $\frac{\cos 20 + \sqrt{3} \sin 20}{\cos 40}$  چقدر است ؟

تست : حاصل عبارت  $\frac{\cos^2 a - \sin^2 b}{\cos(a-b)}$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری زاویه )

تست : حاصل  $\frac{1 - \tan 15}{1 + \tan 15} \times \frac{\sqrt{3} - \tan 15}{1 + \sqrt{3} \tan 15}$  کدام است ؟

تست : عدد  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  تا نزانت کدام زاویه حاده است ؟ ( صورت و مخرج تقسیم بر ۳ )

۱۵°، ۲۲° / ۵° را پایه نصف کمان نسبت های زاویه های

$$1) \sin 2x = \begin{cases} 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \\ \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \end{cases}$$

$$2) \cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x \\ \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \end{cases}$$

$$3) \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$4) \cot x + \tan x = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$5) \cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

تست : حاصل  $\cos^2 a \sin a - \sin^2 a \cos a$  به ازای  $a = 7/5$  کدام است ؟

تست : ساده شده  $A = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$  چقدر است ؟ ( در  $\frac{\sin 12}{\sin 12}$  )

تست : حاصل  $2 \cos^2 \left( \frac{7\pi}{4} - x \right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x)$  برابر کدام است ؟ ( عبارت دوم ۱ است و کل عبارت به صورت  $2 \cos^2 \alpha - 1$  شده است )

تست : مقدار  $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$  کدام است ؟

تست : حاصل  $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری زاویه )

تست : حاصل کسر  $\frac{2 \sin x + \sin 2x}{1 + 2 \cos x + \cos 2x}$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری زاویه )

تست : اگر  $\frac{\tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2} = \frac{1}{8}$  ، حاصل  $\sin 4x$  کدام است ؟

تست : اگر  $\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)}$  ، کمترین مقدار  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  کدام است ؟

تست : اگر  $\frac{\sqrt{2} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = 2$  ، حاصل  $\cot 2x$  کدام است ؟ ( طرفین وسطین کن )

تست : حاصل  $\frac{\tan x \cot 2x}{1 - \tan^2 x}$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری زاویه )

تست : اگر  $\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$  باشد ، حاصل  $\cot 2x - \tan 2x$  کدام است ؟ ( طرفین را به توان ۲ برسان )

روابط مربع کامل پرست آمده از نصف گمان : هر گاه عبارت مشتاتی زیر رادیکال باشد ، حتماً مربع کامل است

- ۶)  $1 + \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2$
  - ۷)  $1 - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$
  - ۸)  $1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x$
  - ۹)  $1 - \cos^2 x = 2 \sin^2 x$
- روابط تقلیل توان

تست : حاصل  $\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$  وقتی  $x < \frac{3\pi}{2}$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری زاویه )

تست : اگر  $\alpha$  در ربع اول باشد ، حاصل  $\sqrt{1+\cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری زاویه )

تست : حاصل  $\sin 22/5 \cos 67/5$  کدام است ؟

$$\sin 22/5 \sin 22/5 = \sin^2 22/5 = \frac{1 - \cos 45}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

روابط مثلث گمان :

- ۱)  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
- ۲)  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

تست : حاصل عبارت  $(8 \sin^2 \frac{\pi}{36} - 6 \sin \frac{\pi}{36})(8 \cos^2 \frac{\pi}{36} - 6 \cos \frac{\pi}{36})$  چقدر است ؟

تست : یکی از ریشه های معادله  $3 \sin x - k = 4 \sin^3 x$  برابر  $\frac{\pi}{18}$  است ،  $k$  کدام است ؟

۱۶۰ پایه همچوپنی بیشتر :

$$1) \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$2) \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$3) \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$4) \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$5) \tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

تست : حاصل کدام است ؟ ( روابط کمان مزدوج )  $\frac{\sin 40^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 10^\circ}$

تست : حاصل  $(\sqrt{1+\cos 40^\circ} = \sqrt{2 \cos^2 20^\circ})$  برابر کدام است ؟  $\frac{\sqrt{1+\sin 50^\circ}}{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}$

تست : اگر  $\sin x = \frac{1}{3}$  باشد ، حاصل  $\frac{\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}$  چقدر است ؟

تست : حاصل عبارت  $\frac{1}{\cos 2^\circ} + 2$  کدام است ؟

$$\frac{1+2\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + \cos 2^\circ\right)}{\cos 2^\circ} = \frac{2(\cos 60^\circ + \cos 2^\circ)}{\cos 2^\circ} = \frac{2\cos 4^\circ \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 2\cos 4^\circ$$

تست : ساده شده عبارت  $\frac{2\sin v_0 - 1}{\cos v_0 + \sin 2v_0 + \sqrt{3} \sin v_0}$  کدام است ؟ ( بر حسب کمان  $20^\circ$  )

تست : عبارت  $(\cos 10^\circ - \cos v_0)(\tan v_0 - \cot 10^\circ)$  برابر کدام است ؟

تست : اگر  $a = 45^\circ, b = 0^\circ$  باشد ، حاصل  $\tan a + \tan b$  کدام است ؟ ( روش تستی :  $a + b = \frac{\pi}{4}$  )

جواب پیشنهادی همچو:

$$1) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$2) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$3) \quad \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

تست : حاصل  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$  برابر کدام است ؟

تست : مقدار عددی عبارت  $\frac{\sin x \cos 3x}{\sin 2x} - \cos 2x$  کدام است ؟ ( روش تستی : جایگذاری  $x = \frac{\pi}{6}$  )

روش تستی حل معادلات مثلثاتی : جایگذاری گزینه ها در معادلات مثلثاتی ، وقتی جواب معادله در گزینه ها باشد :

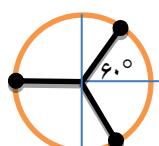
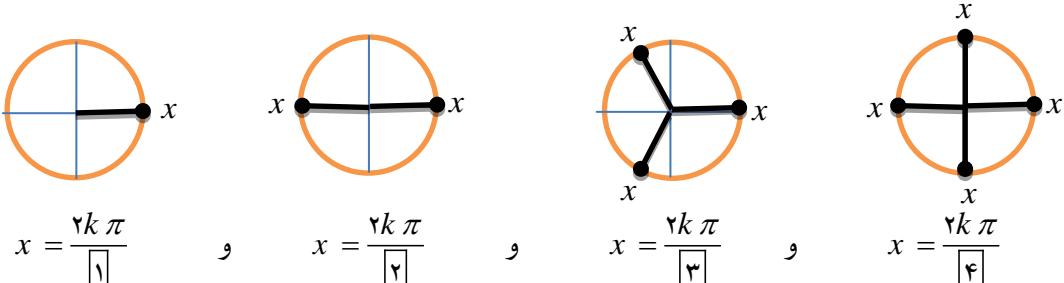
$$\text{تست : جواب کلی معادله } \frac{1-\cos 2x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3} \text{ کدام است ؟}$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

حل : به ازای  $k=0$  فقط گزینه ها ۲ و ۴ صادق هستند و به ازای  $k=1$  فقط گزینه ۲ درست است .

### معادلات مثلثاتی :

عقربه های چند سر : عقربه هایی هستند که در دایره مثلثاتی با فاصله های مساوی قرار گرفته اند .



مثال : فرمول عمومی جواب زیر به صورت  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$  است

کاربرد عقربه های چند سر :

۱) حل معادلات مثلثاتی که در سمت راست تساوی عدد باشد .

۲) تشخیص تعداد جواب های معادله مثلثاتی در یک بازه

۳) ترکیب چند فرمول جواب و ساختن یک فرمول کلی

مثال : معادله  $\sin 3x = 1$  مفروض است. تعداد جواب های آن در بازه  $[0, 2\pi]$  را بیابید.

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow \text{جواب ۳ سر است} \quad 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

مثال : فرمول کلی جواب معادله  $2\sin^2 x - 1 = 0$  را بنویسید.

حل : از ترکیب دو عقره دو سر هم فاصله عقره ۴ سر پدید آمده است.

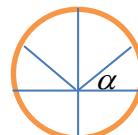
$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

تست : معادله  $(2\sin^2 x - 1)(2\sin^2 x - 2) \dots (2\sin^2 x - 10) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟ (دو پرانتز اول جواب دارد)

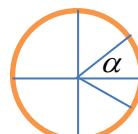
تست : نمودار تابع  $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می کند؟

معادلات مثلثاتی که در درجه طرف تساوی یک نسبت وضوح دارند :

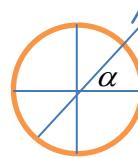
$$1) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$



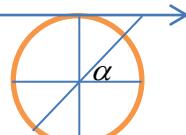
$$2) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi - \alpha \end{cases}$$



$$3) \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



$$4) \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



نگته گرامی :

الف) ازین بردن منفی پشت عبارت مثلثاتی:

$$-\cos x = \cos(\pi - x) \quad \text{و} \quad -\cot x = \cot(-x) \quad \text{و} \quad -\tan x = \tan(-x) \quad \text{و} \quad -\sin x = \sin(-x)$$

ب) تبدیل نسبت ها به همدیگر

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{و} \quad \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{و} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{و} \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$$

تست : معادله  $\cos 2x = \sin 3x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

تست : جواب کلی معادله  $\cos 3x + \cos x = 0$  با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

تست : معادله  $\tan 3x - \cot 2x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

-----

تست : جواب کلی معادله  $2\sin^3 x = 3\cos x$  به کدام صورت است؟

تست : جواب کلی معادله  $2\cos 2x = \cot x (4\sin x + \tan x)$  کدام است؟ ( سمت راست ضرب توزیع شود )

تست : جواب کلی معادله  $2\sqrt{2}\sin x \cos x = \sin x + \cos x$  کدام است ؟

تست : معادله  $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند ریشه متمایز دارد ؟

تست : تمام جواب های معادله  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$  کدام است ؟

تست : یکی از جواب های معادله  $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 1$  کدام است ؟ ( روابط فرعی مجموع کمان )

تست : جواب کلی معادله  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$  کدام صورت است ؟ ( رابطه کمان مزدوج )

تست : جواب کلی معادله  $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$  کدام است ؟

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 + \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \tan 2x = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

تست : جواب کلی معادله مشتاتی  $\sin 4x \cos 2x = \cos^3(x - \frac{\pi}{4})$  کدام است ؟

حل : از رابطه تقلیل توان و ضرب به جمع داریم :

$$\frac{1}{2} [\sin 6x + \sin 2x] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \right] \Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

نکته: معادلات به فرم  $a \tan x + b \cot x = c$  حل می کنیم.

تست: معادله  $\tan^2 x - 2 \cot^2 x = 1$  در  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟ (راهنمایی: در  $\tan^2 x \neq 0$  ضرب شود)

تست: به ازای کدام مقادیر  $m$  معادله  $m \tan x + \cot x = 4$  دو جواب متمایز در فاصله  $(0, \frac{\pi}{2})$  دارد؟

حل: باید معادله درجه دوم حاصل دارای دو جواب مثبت (ربع اول) باشد پس  $0 < m < 4$

$$m \tan^2 x + 1 = 4 \tan x \Rightarrow m \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0, P > 0, S > 0} 0 < m < 4$$

نکته ۸ در معادلات کسری در نهایت ریشه هایی که مخرج را صفر می کنند کنار می گذاریم.

تست: جواب کلی معادله مشتقه ای کدام است؟

$$\frac{\cos 5x \cos 3x - \sin 3x \sin x}{\cos 2x} = 1$$

حل: توجه شود که صورت عبارت متقابله نبیست تا از روابط مجموع کمان استفاده شود. پس:

$$\frac{\frac{1}{2}[\cos 8x + \cos 2x] + \frac{1}{2}[\cos 4x - \cos 2x]}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}[\cos 8x + \cos 4x]}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\cos 6x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \xrightarrow{\cos 2x \neq 0} \cos 6x = 1$$

$$6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6}$$

تست: جواب کلی معادله  $\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$  کدام است؟ (طرفین وسطین)

معادلات تابعی رفته مهندسی :

۱) هندسی : وقتی معادله غیر قابل ساده شدن است ( معمولا اعداد مزاحم یا عبارت غیر مثلثاتی وجود دارد )

تست : معادله  $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2\sin x$  در  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد ؟

تست : معادله  $x \sin x - 1 = 0$  در  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد ؟

تست : تعداد جواب های معادله  $x + \tan x = 0$  در بازه  $(-\pi, \pi)$  کدام است ؟

۲) با تعیین حدود تغییرات : ( وقتی عدد بزرگ یا ناشناسی داریم و شکل تابع را نمی دانیم )

۱)  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ،  $-1 \leq \cos x \leq 1$

۲)  $\tan x + \cot x \geq 2$  یا  $\tan x + \cot x \leq -2$

تست : مجموع جواب های بین  $[0, 2\pi]$  معادله  $2\sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3\cos(x - \frac{5\pi}{\lambda}) = 5$  کدام است ؟ ( سینوس و کسینوس هردو ۱

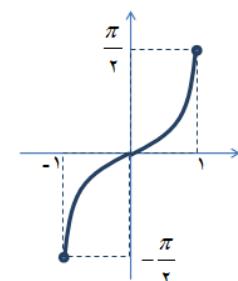
تست : معادله  $\cos^4 x = 1 + \sqrt{\sin x}$  چند ریشه در  $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$  دارد ؟

تست : معادله  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3 + \sin^4 x$  در  $[\pi, 5\pi]$  چند ریشه دارد ؟

تست : کدام معادله جواب ندارد؟

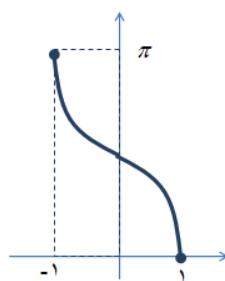
$$\tan x + \cot x = \sqrt{5} \quad (4) \quad \tan x + \cot x = 3 \quad (3) \quad \tan x + \cot x = 3 - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2) \quad \tan x + \cot x = 3 + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

### نواریع معکوس مثلثاتی :



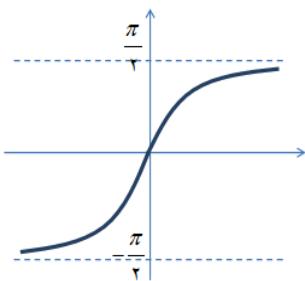
$$y = \sin^{-1} x$$

$$|x| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



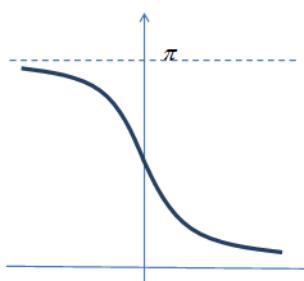
$$y = \cos^{-1} x$$

$$|x| \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi$$



$$y = \tan^{-1} x$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



$$y = \cot^{-1} x$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < \pi$$

نسبت های وارون مثلثاتی یک عدد مثبت ، زاویه ای در ربع اول است .

نسبت های وارون مثلثاتی یک عدد منفی ، برای سینوس و تانژانت اینورس در ربع چهارم و برای کسینوس و کتانژانت اینورس در ربع دوم است .

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$$

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$$

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

$$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$$

تست : حاصل عبارت  $A = \tan^{-1} \sqrt{x^2 + x} + \sin^{-1}(x^2 + x + 1)$  کدام است؟ (روش تستی : جایگذاری  $x = 0$ )

حل : با توجه به دامنه ها :

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(x^r + x + 1) \Rightarrow -1 \leq x^r + x + 1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x^r + x \leq 0 \\ \tan^{-1}\sqrt{x^r + x} \Rightarrow x^r + x \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow x^r + x = 0 \Rightarrow A = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

تست : حاصل  $\tan^{-1}(-1) + \cot^{-1}2 + \cot^{-1}(-2)$  کدام است ؟

یافتن مقادیر وارون نسبت های مثلثی

(۱) وقتی عدد مربوط به زاویه شناخته شده ای باشد :

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\tan^{-1}(\cot\frac{\pi}{3}) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

تست : حاصل  $\cos(2\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  کدام است ؟

تست : حاصل عبارت  $\cot(2\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin^{-1}(-1) + \tan^{-1}(\sqrt{3}))$  کدام است ؟

(۲) وقتی عدد مربوط به زاویه شناخته شده ای نباشد :

$$\tan(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)) \Rightarrow \underbrace{\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\alpha} = \alpha \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \begin{array}{c} \sqrt{3} \\ | \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \alpha \end{array} \quad \tan \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

تست : حاصل  $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)$  چقدر است ؟

تست : حاصل  $\tan(2\cos^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{5}}))$  کدام است ؟

تست : مقدار عددی  $(\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})})$  برابر کدام است ؟ (توجه :  $\tan(\frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{1}{3}))$ )

تست : حاصل  $\cos(3\sin^{-1}(\frac{-2\sqrt{2}}{3}))$  کدام است ؟

تست : جواب های معادله  $\sin^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{3}$  در بازه  $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  کدام است ؟

تست : اگر  $x$  ، مقدار  $\cot(\underbrace{\tan^{-1}x}_{\alpha}) = 3x$  کدام است ؟ (روش تستی : جایگذاری گزینه ها)

$$\begin{cases} \cot \alpha = x \\ \tan \alpha = 3x \end{cases} \longrightarrow x \times 3x = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تست : حاصل  $\sin^{-1}(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$  اگر  $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ$  کدام است ؟ (جایگذاری)

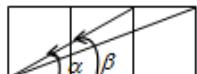
۳) وقتی تانژانت اینورس دو عدد نابرابر با هم جمع شوند :

$$1) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

$$2) \tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a+b}{1-ab} \quad a, b > 0$$

تست : حاصل عبارت  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) + \tan^{-1}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$  کدام است ؟

تست : در شکل مقابل زاویه  $\alpha + \beta$  کدام است ؟



$$\frac{\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}}{\beta = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \tan^{-1} \frac{\frac{5}{\sqrt{6}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{6}}} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

۴) وقتی سینوس و کسینوس اینورس یک عدد با هم جمع شوند . ( یا تانژانت و کتانژانت اینورس یک عدد )

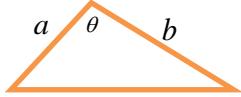
$$1) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x}$$

$$2) \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x}$$

تست : حاصل  $\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) - \sin^{-1}\frac{3}{5}$  کدام است ؟

تست : حاصل  $\sin(2\sin^{-1} \frac{2}{3} + \cos^{-1} \frac{2}{3})$  کدام است ؟

گروههایی از مثلثات:



$$1) \text{ مساحت مثلث وقتی زاویه بین دو ضلع را داشته باشیم: } S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

تست: در متوازی الاضلاع  $ABCD$  اگر  $\hat{A} = 120^\circ$  و  $AB \cdot BC = 14$ . مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

حل: مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث است که توسط قطر پدید می آید:

$$S = 2 \times \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 60^\circ = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

تست: در متوازی الاضلاعی با اندازه قطر های ۱۲ و ۸ و زاویه بین دو قطر  $135$  درجه، مساحت متوازی الاضلاع چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

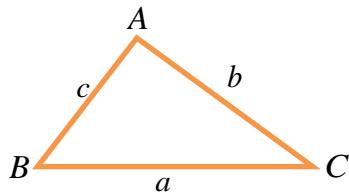
$$2) \text{ مساحت مثلث با داشتن طول سه ضلع: } P = \frac{a+b+c}{2} \quad : \quad S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

تست: مساحت مثلثی با طول اضلاع ۷ و ۹ و ۱۲ برابر است با:

$$3) \text{ قضیه کسینوس ها در مثلث (ض زض): } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

تست: مساحت مثلث  $ABC$  برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر  $b = 8, c = 5$  باشد، اندازه ضلع متوسط  $a$  کدام است؟

تست: بین اضلاع مثلثی رابطه  $b^2 - c^2 = a^2b - a^2c$  برقرار است، اندازه یکی از زاویه های مثلث چقدر است؟



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{قضیه سینوس ها در مثلث (ز ز ض) :}$$

نتیجه : از ترکیب دو قضیه قبل داریم :

نتیجه : کسرهای بالا برابر با  $2R$  هستند که  $R$  شعاع دایره محیطی مثلث است .

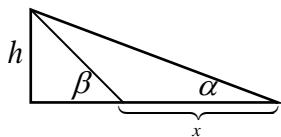
تست : در مثلث  $ABC$  با معلوم بودن  $BC = \sqrt{3}$  و زاویه های  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 75^\circ$ . اندازه  $AC$  کدام است ؟

تست : در مثلث  $ABC$  شعاع دایره محیطی ۵ است . حاصل  $\frac{a+2b+3c}{\sin A + 2\sin B + 3\sin C}$  کدام است ؟

تست : در مثلث  $ABC$  ، طول ضلع  $AB$  کدام است ؟  $a^r \sin^r C + c^r \cos^r A = 12$

تست : اگر در مثلثی  $\sin^r A + \cos^r B + \cos^r C = 2$  باشد ، زاویه  $A$  چند درجه است ؟

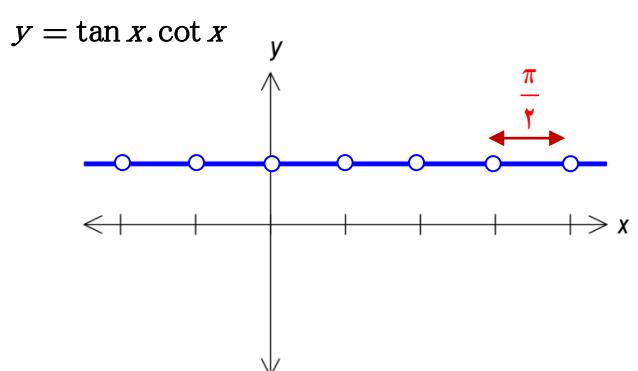
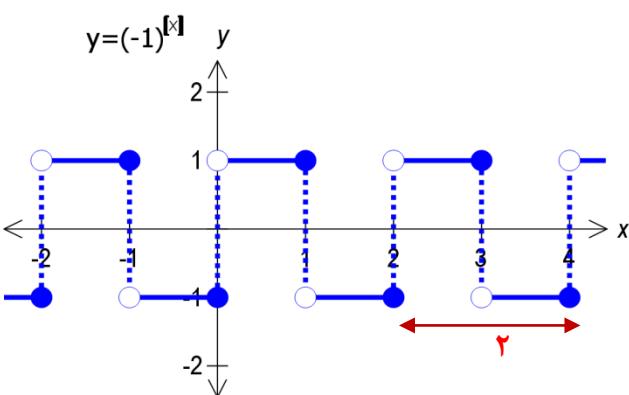
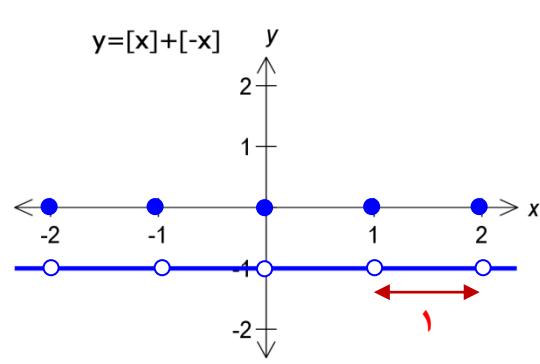
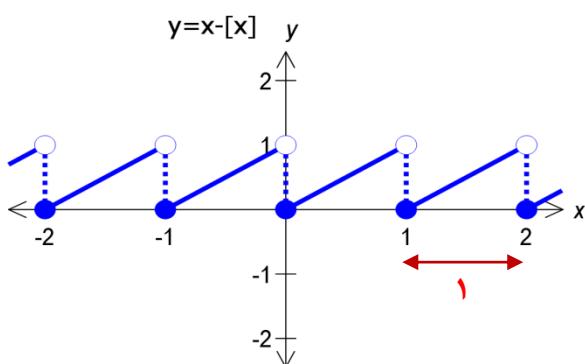
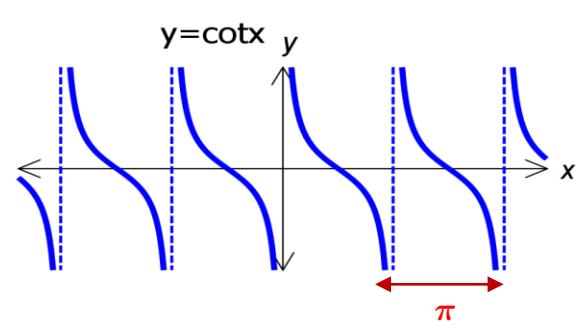
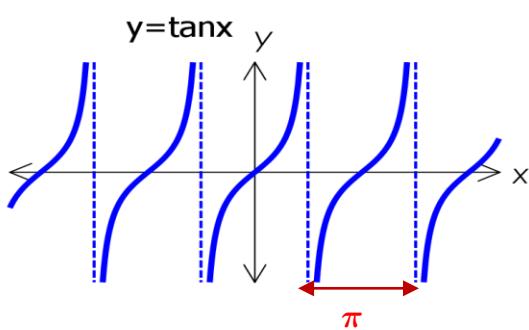
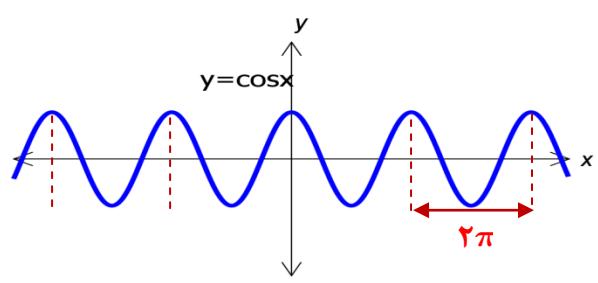
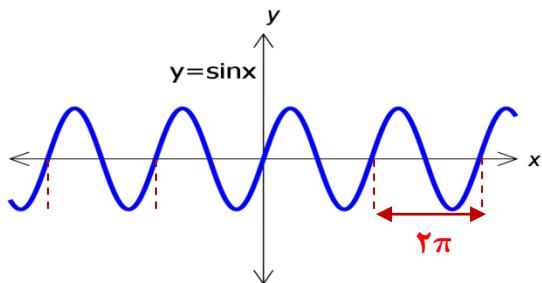
۵) هرگاه شکلی مانند پایین داشته باشیم رابطه فاصله «دو راس زاویه» و «ارتفاع» با خود دو زاویه به صورت زیر است :



$$\frac{x}{h} = \cot \alpha - \cot \beta$$

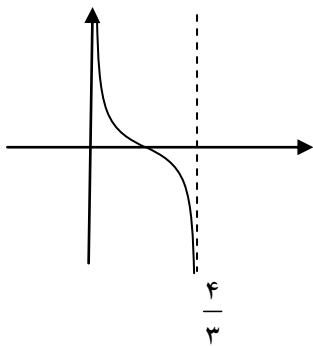
تست : ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه ای قرار دارد ایستاده است . زاویه رویت انتهای و ابتدای مجسمه با سطح افق  $45^\circ$  و  $40^\circ$  درجه است . ارتفاع مجسمه کدام است ؟ (  $\tan 40^\circ = 0.8$  )

تابع  $f$  را متناوب می‌گویند هرگاه عدد حقیقی و مثبت  $T$  موجود باشد که برای هر  $x$  از دامنه  $x+T$  نیز در دامنه باشد و  $f(x+T) = f(x)$ . که به کوچکترین مقدار  $T$  دوره تناوب تابع  $f$  می‌گویند.



**توضیح:** تابع ثابت، متناوب است و هر عدد حقیقی مثبت می تواند دوره تناوب آن باشد ولی چون کوچکترین دوره تناوب آن مشخص نیست دوره تناوب اصلی ندارد.

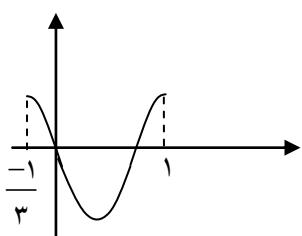
**نکته ۱:** اگر دوره تناوب تابع  $f(x)$  باشد آنگاه دوره تناوب تابع  $f(ax + b)$  برابر است با :



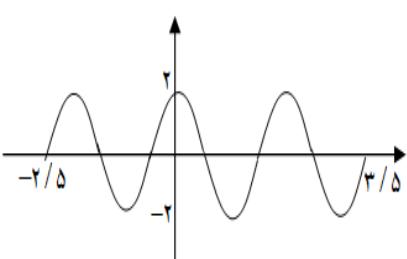
تست : شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $y = \tan(ax + \frac{1}{4}\pi)$  است.  $a$  کدام است ؟

$$y = \tan(a\pi x + \frac{1}{4}\pi) = -\cot(a\pi x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a\pi|} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{4}$$

چون با وجود ضریب منفی شکل کتابخانه تغییر نکرده است ، پس  $a = -\frac{3}{4}$



تست : شکل مقابل نمودار تابع  $y = \cos(ax + \frac{1}{4}\pi)$  است.  $a$  کدام است ؟



تست : شکل مقابل نمودار تابع  $y = a \sin(\frac{1}{4}\pi + bx)$  است.  $ab$  کدام است ؟ ( راهنمایی :  $2T = 6 \Rightarrow T = 2$  )

تست : دوره تناوب تابع  $y = \tan x \cot x + \tan 3x \cot 3x$  کدام است ؟

حل : تابع ثابت  $y = 2$  است که در قسمت اول تابع در  $\frac{k\pi}{2}$  و در قسمت دوم تابع در  $\frac{k\pi}{6}$  تعریف نمی شوند پس تابع در

$$T = \frac{\pi}{6}$$

تست : دوره تناوب تابع  $y = \frac{\sin(4x - \frac{\pi}{4})}{\tan 2x + \cot 2x}$  کدام است ؟

حل : از روابط ضرب به جمع داریم :

$$y = \frac{\sin(\varphi x - \frac{\pi}{4})}{\sin \varphi x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\varphi x - \frac{\pi}{4}) \sin \varphi x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos(\lambda x - \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{4} \right] \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4}$$

تست : دوره تناوب تابع  $y = \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin 2x - \sin x}$  کدام است ؟

$$y = \frac{-\sqrt{3} \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}} \xrightarrow{\sin \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \Rightarrow T_1 = \pi} y = -\tan \frac{3x}{2} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = 2\pi$$

تست : دوره تناوب تابع  $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$  کدام است ؟

$$y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow T = \pi$$

تست : دوره تناوب  $y = x - 5\left[\frac{x}{5}\right]$  کدام است ؟

تست : دوره تناوب تابع  $f(x) = (-1)^{[rx]}$  کدام است ؟

تست : اگر دوره تناوب  $(2x)f$  برابر ۱۶ باشد ، دوره تناوب  $f\left(\frac{x}{2}\right)$  کدام است ؟

حل : اگر دوره تناوب  $(x)f$  برابر  $T$  باشد :  $\frac{T}{2} = 16 \Rightarrow T = 32 \Rightarrow 2T = 64$

نکته ۲ : اگر توابع سینوس و کسینوس درون تابع زوج قرار بگیرند ، دوره تناوب آنها نصف می شود . ولی اگر با عدد ثابتی جمع شوند بعد درون تابع زوج قرار بگیرند دوره تناوب نصف نمی شود .

تست : دوره تناوب تابع  $y = \cos(\sin x)$  کدام است ؟

تست : دوره تناوب تابع  $y = |\sin x - \cos x|$  کدام است ؟

تست : دوره تناوب تابع  $y = \sin^2 x \cos^2 x$  کدام است ؟

تست : اگر دوره تناوب  $y = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  برابر  $T$  و دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin x + \cos x + 1$  برابر  $T_1$  و دوره تناوب  $(T_1 = T_2 = T)$  برابر  $T$  باشد . رابطه بین دوره تناوب ها کدام است ؟

**نکته ۳** : دوره تناوب توابع خاص زیر برابر  $T = \frac{\pi}{|2a|}$  است :

$$y = \sin^n ax + \cos^n ax \quad (n \neq 1), \quad y = \tan^n ax + \cot^n ax$$

$$y = |\sin ax| + |\cos ax|, \quad y = |\tan ax| + |\cot ax|$$

تست : دوره تناوب  $y = \tan^2 x + \cot^2 x$  کدام است ؟

**نکته ۴** : در صورت ساده نشدن تابع یکی از امکان های ما برای دوره تناوب، ک.م.م دوره تناوب های توابع حاضر در ضابطه است.

تست : دوره تناوب تابع  $y = \sin \frac{x}{2} + \cos^2 x$  کدام است ؟

$$T_1 = 4\pi, \quad T_2 = 2\pi \Rightarrow T = 4\pi$$

تست : دوره تناوب تابع  $y = \sin^2 \frac{2\pi x}{3} + \sin^2 \frac{3\pi x}{2}$  کدام است ؟

تست : دوره تناوب تابع  $y = |\sin x| + |\cos x - 1|$  کدام است ؟

تست : دوره تناوب  $y = \sin 3x \cos 5x$  کدام است؟ ( در ضرب دو تابع مثلثاتی حتماً به جمع تبدیل می‌کنیم )

$$y = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x) \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{4}, \quad T_2 = \pi \Rightarrow T = \pi$$

تست : دوره تناوب تابع  $y = 4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$  کدام است؟

$$y = 4 \sin x \times \frac{1 - \cos x}{2} = 2 \sin x - \sin 2x \Rightarrow T_1 = 2\pi, \quad T_2 = \pi \Rightarrow T = 2\pi$$

تست : دوره تناوب تابع  $y = [2x] + [x] - 3x$  کدام است؟

**نگته ⑥ :** معمولاً در ضرب توابع متناوب غیر مثلثاتی نصف آن چیزی که فکر می‌کنیم دوره تناوب باشد را نیز بررسی می‌کنیم چون ممکن است دوره تناوب اصلی آن باشد.

تست : دوره تناوب  $y = (-1)^{[x]} \sin 3\pi x$  کدام است؟

حل : فکر ما : بررسی نصف آن :  $T = 2$  :  $f(x+1) = (-1)^{[x+1]}(-1)(-\sin 3\pi x) = f(x) \Rightarrow T = 1$

**نگته :** در تابع  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Q} \\ h(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  دوره تناوب در صورت وجود گویا و ک.م.م دوره تناوب های  $g, h$  است.

تست : دوره تناوب  $y = \begin{cases} \sin \frac{4\pi x}{3} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \cos \frac{3\pi x}{4} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  کدام است؟

تست : دوره تناوب تابع  $f(x) = \begin{cases} \sin^2 2x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  کدام است؟

حل : دوره تناوب اولی  $T = \frac{\pi}{2}$  و همین عدد می‌تواند دوره تناوب دومی باشد ولی چون گنگ است متناوب نیست.