Riazisara.ir

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

به نام خدا

واریانس داده های مرکب اردوان محمدی(arash.kasra8388@gmail.com)

مطلب را با ارائه و حل تست کنکور سراسری داخل کشور 89 شروع نموده و در ادامه به ذکر و اثبات چند قضیه ی مفید خواهیم پرداخت، امید است که مفید واقع شود.

سراسری 89 ریاضی: پانزده داده ی آماری با واریانس 12 و ده داده ی آماری دیگر با واریانس 7.6 را با هم ترکیب می نماییم، اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشد، انحراف معیار 25 داده ی حاصل کدام است.

الف: 3.1 ب: 9.36 ج: 9.52 د: 9.63

حل: اگر داده های سری اول را با $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ نشان دهیم، خواهیم داشت که

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i - \bar{X})^2}{15} \Rightarrow 12 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i - \bar{X})^2}{15} \Rightarrow \sum_{i=1}^{15}(X_i - \bar{X})^2 = 180$$

و اگر ده داده ی دیگر را با $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ نشان دهیم، آنگاه خواهیم داشت که

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(\mathrm{Y}_i - \bar{Y})^2}{10} \Rightarrow 7.6 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(\mathrm{Y}_i - \bar{Y})^2}{10} \Rightarrow \sum_{i=1}^{10}(\mathrm{Y}_i - \bar{Y})^2 = 76$$

از طرفی می دانیم که $\bar{X} = \bar{Y} = \mu$

و به راحتی می توان ثابت نمود که میانگین داده های مرکب همان μ خواهد بود. اگر 25 داده ی مرکب را با $z_1, z_2, \ldots, z_{25}$ نام گذاری جدید نماییم، خواهیم داشت که

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(\mathrm{Z}_i - \mu)^2}{25} = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{10}(\mathrm{Y}_i - \mu)^2}{25} = \frac{180 + 76}{25} = \frac{256}{25}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5} = 3.2$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حال سوالی که مطرح است آن است که اگر فرض برابری میانگین ها برداشته شود، چه اتفاقی خواهد افتاد.

سوال زیر را در نظر می گیریم

مسئله: میانگین و واریانس یک نمونه ی 20 تایی از داده ها به ترتیب 15 و 17 میباشد و میانگین و واریانس یک نمونه ی 30 تایی دیگر به ترتیب 10 و 12 می باشد، میانگین و واریانس 50 داده ی مرکب به ترتیب از چپ به راست عبارت است از

الف: 20 و 12.5

ب: 20 و 12

ج: 35 و 12.5

د: 35 و 12

برای حل این تست احتیاج به ملزوماتی می باشد که در ادامه به آن ها خواهیم پرداخت.

قضیه 1: برای دو نمونه به حجم n_2, n_1

و میانگین های $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ ثابت نمایید که میانگین داده های مرکب از رابطه ی $\frac{n_1\bar{X}+n_2\bar{Y}}{n_1+n_2}$ بدست می آید.

اثبات:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}X_i}{n_1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n_1}X_i=n_1\bar{X}$$

$$\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}y_i}{n_2}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n_2}y_i=n_2\bar{Y}$$

اگر میانگین کل داده ها را با μ نشان دهیم، آنگاه خواهیم داشت که

$$\mu=\frac{n_1\bar{X}+n_2\bar{Y}}{n_1+n_2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تعمیم قضیه 1: اگر k نمونه آماری با حجم های $n_1, n_2, \ldots, n_k$ و میانگین های $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$ مفروض باشد، آنگاه میانگین داده های مرکب از این نمونه ها عبارت است از $\mu = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2 + \ldots + n_k\bar{X}_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$

قضیه 2: اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر μ باشد، ثابت نمایید

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\mu^2$$

اثبات:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu.n\mu + n\mu^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\mu^2$$

قضیه 3: ثابت نمایید که واریانس n داده ی آماری $X_1, \ldots, X_n$ با میانگین $\bar{X}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

اثبات: با توجه به تعریف واریانس خواهیم داشت که

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

و با استفاده از قضیه ی 2 خواهیم داشت که

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

به عبارت دیگر ثابت نموده ایم که واریانس عبارت است از تفاضل مربع میانگین داده ها از میانگین مربعات داده ها(صورت کلامی قضیه ی 3)

قضیه ی 4: اگر دو نمونه به حجم های n_1 و n_2 و میانگین های μ_1 و μ_2 و واریانس های σ_1^2 و σ_2^2 مفروض باشد، ثابت نمایید واریانس داده ای ترکیبی از این دو نمونه به صورت زیر محاسبه خواهد شد

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i\sigma_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i(\mu_i - \mu)^2}{N}$$

که در آن μ میانگین داده های مرکب و $N = n_1 + n_2$ می باشد.

اثبات:

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N} \Rightarrow N\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 \Rightarrow N\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \mu)^2$$

با اضافه و کم کردن μ_1 به عبارت اول و همچنین اضافه و کم کردن μ_2 به عبارت دوم خواهیم داشت که

$$N\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \mu_2 + \mu_2 - \mu)^2$$

$$N\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n_1}[(X_i - \mu_1) + (\mu_1 - \mu)]^2 + \sum_{i=1}^{n_2}[(X_i - \mu_2) + (\mu_2 - \mu)]^2$$

$$N\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_1}(\mu_1 - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n_1}2(X_i - \mu_1)(\mu_1 - \mu) + \sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \mu_2)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(\mu_2 - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}2(X_i - \mu_2)(\mu_2 - \mu)$$

$$N\sigma_X^2 = n_1\sigma_1^2 + n_1(\mu_1 - \mu)^2 + 0 + n_2\sigma_2^2 + n_2(\mu_2 - \mu)^2 + 0$$

$$\sigma_X^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{N} + \frac{n_1(\mu_1 - \mu)^2 + n_2(\mu_2 - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i\sigma_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i(\mu_i - \mu)^2}{N}$$

تعمیم قضیه ی 4: اگر با K نمونه به حجم های $n_1, n_2, ..., n_k$ و میانگین های $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ و همچنین واریانس های $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_k^2$ مواجه باشیم، آنگاه واریانس داده های مرکب از این نمونه ها عبارت خواهد بود از

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \mu)^2}{N}$$

که در آن $N = n_1 + n_2 + ... + n_k$ و μ میانگین کل یا میانگین میانگین نمونه ها خواهد بود.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تذکر: اگر دقت نماییم شاید به خاطر سپردن این فرمول مقداری سخت و مشکل باشد، منتها با کمک گرفتن از معجزه ی مهارت کلامی می توان بر این مشکل فائق آمد.

سوال: قضیه ی فوق را با مهارت کلامی بنویسید؟

جواب: اگر دقت کنیم با مجموع دو کسر مواجه می باشیم.

تفسیر کسر اول: با مقایسه ی کسر $\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i^2}{N}$ با کسر $\frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$ در می یابیم که در حقیقت ما با یک میانگین وزنی مواجه ایم که داده ها عبارتند از واریانس نمونه ها و وزن داده ها همان حجم یا اندازه ی نمونه ها می باشد، پس به طور خلاصه می توان گفت که کسر اول میانگین وزنی واریانس نمونه ها می باشد.

تفسیر کسر دوم: با مقایسه ی کسر دوم یعنی کسر $\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\mu_i - \mu)^2}{N}$ با کسر $\frac{\sum_{i=1}^{k} w_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$

ملاحظه میکنیم که با یک واریانس گیری مواجه ایم که داده های ما میانگین نمونه ها می باشد، پس در حقیقت کسر دوم را می توان واریانس میانگین نمونه ها تعبیر نمود.

پس نهایتا می توان صورت کلامی قضیه ی فوق را به صورت زیر نوشت.

قضیه : ثابت نمایید واریانس داده های مرکب عبارت است از مجموع میانگین واریانس نمونه ها با واریانس میانگین نمونه ها

در این جا به حل تست مطرح شده می پردازیم

در گام اول به محاسبه ی میانگین میانگین نمونه ها یا میانگین کل داده ها می پردازیم.

$$\mu = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2} = \frac{(20\times15)+(30\times10)}{20+30} = \frac{300+300}{50} = 12$$

در گام دوم با توجه به قضیه ی 4 به محاسبه ی واریانس مرکب یا کل می پردازیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i \sigma_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i (\mu_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1(\mu_1 - \mu)^2 + n_2(\mu_2 - \mu)^2}{n_1 + n_2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(20\times 17) + (30\times 12)}{20+30} + \frac{20(15-12)^2 + 30(10-12)^2}{20+30} = 20$$

در ادامه به حالت خاص قضیه ی 4 می پردازیم، منتها قبل از آن به یادآوری قضیه ی زیر می پردازیم.

قضیه 5: ثابت نمایید که واریانس داده های یکسان، برابر صفر است.

اثبات با مهارت کلامی: فلسفه ی شاخص های پراکندگی آن است که می خواهیم میزان دوری و نزدیکی تک تک داده ها را از یک شاخص مرکزی(میانگین) بسنجیم، در این جا چون داده ها مساوی اند، پس میانگین داده ها هم با داده ها مساوی می باشد و لذا اختلاف از میانگین تک تک داده ها برابر صفر است و این بدان معناست که همه ی شاخص های پراکندگی، از جمله واریانس برابر صفر است.

حالت خاص قضیه ی 4: اگر میانگین نمونه ها یکسان باشد، واریانس را بدست آورید.

جواب:

چون میانگین نمونه ها یکسان است، پس واریانس میانگین نمونه ها(کسر دوم) صفر است و لذا واریانس مرکب از فرمول زیر بدست می آید.

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i^2}{N}$$

حال با توجه به زمینه سازی های صورت گرفته، به حل دوباره ی تست کنکور سراسری رشته ی ریاضی در سال 89 می پردازیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

روش دوم حل تست سراسری 89:

چون میانگین دو نمونه یکسان است ، با توجه به حالت خاص معرفی شده خواهیم داشت که

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i \sigma_i^2}{N} = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} = \frac{(15\times 12)+(10\times 7.6)}{15+10} = \frac{256}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{256}{25}} = 3.2$$

جان کلام: بدون شک ارایه ی این مطلب یا مطالب این چنینی در تمام کلاس ها نه موضوعیت دارد و نه پیشنهاد می گردد، منتها شاید کلاس ها یا دانش آموزانی باشند که بتوانیم مطالب و مفاهیم را به طور دقیق برای آنها بازگو نماییم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا