سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

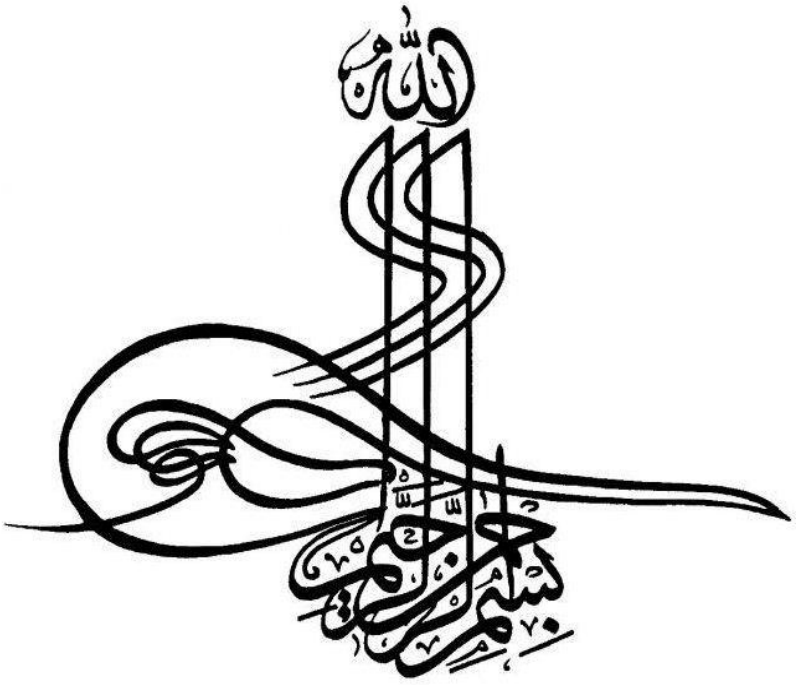
نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)


الله
بسم الله الرحمن الرحيم

جهت تهیه جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور و دبیر رسمی آموزش وپرورش با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱تماس حاصل فرمایید.

ترکیبیات و احتمال

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلفین:
حبیب هاشمی- سکینه علی زاده

۱۳۹۵

سرشناسه : هاشمی ، حبیب، ۱۳۵۸ -
عنوان و نام پدیدآور : ترکیبیات و احتمال
مشخصات نشر : ایلام: صبح آراد، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری : ۱۷۲ ص.: جدول ،نمودار .
فروست : فانوس؛ ۸
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۸۴۶۹-۲۱-۶
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
یادداشت : فهرستنویسی کامل این اثر در نشانی: http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است
یادداشت : واژه نامه .
شناسه افزوده : علهزاده، سکینه، ۱۳۶۴ -
شماره کتابشناسی ملی : ۴۵۰۴۲۳۱

نام کتاب: **ترکیبیات و احتمال**
مؤلفین: حبیب هاشمی، سکینه علهزاده
ویراستارعلمی: دکتر عبدالله لطفی
ویراستار ادبی: فرزاد طاهری
ناشر: صبح آراد
صفحه آرایی: سکینه علهزاده
طراحی جلد: یاسر زیدی
نوبت چاپ: اول- ۱۳۹۵
شمارگان: ۱۰۰۰
چاپ خانه: تهران –دیبا
شابک: ۶-۲۱-۸۴۶۹-۶۰۰-۹۷۸
قیمت: ۱۴۰۰۰ تومان

مرکز پخش تهران: خیابان انقلاب، بین خیابان صبا و فلسطین جنوبی شماره ۱۰۸۰
تلفن: ۱-۰۹۱۲۰۴۱۹۳۳۰ تلفن ۶۶۱۷۵۵۱۹
وبسایت:http://www.sanjeshsa.ir/, Email: Sobharad@yahoo.com

کلیه حقوق این اثر برای ناشر محفوظ است و متخلفین به موجب بند ۵
از مادهی ۲ قانون حمایت از ناشرین تحت پیگرد قانونی قرار میگیرند

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مقدمه

کتاب حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث های «احتمال و ترکیبیات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

مؤلفان

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

۱ترکیبیات ۰

۱.۱اصل ضرب ۰

۱.۱.۱احتمال های مربوط به اصل ضرب ۷

۱.۱.۲ پیدا کردن تعداد توابع با استفاده از اصل ضرب ۱۰

۱.۱.۳ پیدا کردن توابع یک به یک با استفاده از اصل ضر ۱۱

۱.۲جایگشت ۱۳

۱.۳جایگشت های خاص(کنارهم بودن چند شیء، یک در میان قرار گرفتن اشیاءو...) ۱۵

۱.۳.۱قرار گرفتن چند شیءِ درکنار هم.... ۱۵

۱.۳.۲قرار گرفتن اشیاءِ در یک جای خاص ۱۹

۱.۳.۳یک در میان قرار گرفتن اشیاءِ..... ۲۰

۱.۴انتخاب اشیاء(ترتیب وترکیب) ۲۲

۱.۴.۱تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ۲۸

۱.۴.۲ترکیب های خاص (شامل و فاقد) ۲۹

۱.۴.۳مسائل هندسی ترکیب ۳۱

۱.۴.۴انتخاب همراه با جایگشت ۳۲

۲احتمال های مربوط به انتخاب ۳۵

۲.۱متغیر تصادفی... ۴۰

۲.۲احتمال های مربوط به انتخاب (متوالی و بدون جایگذاری) ۴۸

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲.۳احتمال های مربوط به انتخاب (متوالی با جایگذاری).....۵۵

۲.۴احتمال های مربوط به انتخاب از دو جعبه.....۵۸

۲.۵احتمال های دو انتخابی (ابتدا انتخاب جعبه سپس انتخاب مهره).....۵۹

۲.۶احتمال های انتقالی.....۶۱

۳قوانین احتمال.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳.۱اشتراک دو پیشامد.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳.۲دو پیشامد مستقل.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳.۳دو پیشامد ناسازگار.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳.۴اجتماع دو پیشامد.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳.۵تفاضل دو پیشامد.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳.۶احتمال شرطی...

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۴احتمال های مربوط به فرزند و سکه.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴.۱ترتیب فرزندان بیان نشود.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۴.۲ترتیب فرزندان بیان شود (اصل ضرب)..... .....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۴.۳احتمال های مربوط به فرزند (غیر هم شانس).....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۴.۴احتمال های مربوط به فرزند (ترکیبی).....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۴.۵احتمال های شرطی مربوط به فرزند.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۴.۶احتمال های مربوط به RH ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۴.۷احتمال های مربوط به روز تولد، ماه تولد و.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۵احتمال های مربوط به پرتاب تاس.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۵.۱احتمال های مربوط به یک تاس.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۵.۲احتمال های مربوط به دو تاس.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۵.۳احتمال های مربوط به سه تاس.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۵.۴احتمال های شرطی تاس.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵.۵احتمال پرتاب سکه و تاس با هم.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۶قانون احتمال کل واحتمال دو جمله ای.....

ERROR! BOOKMARK NOT

DEFINED.

۶.۱قانون احتمال کل (احتمال های اولیه –ثانویه)..... .....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۶.۲احتمال دوجمله ای.....

ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

منابع.....۱۷۲

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ترکیبیات

اصل ضرب

اصل ضرب (اصل شمارش): اگر عملی به n_1 طریق مختلف انجام شود و پس از آن عمل دومی به n_2 طریق مختلف انجام گیرد و... و عمل k اُمی به n_k طریق مختلف صورت پذیرد، این k عمل با هم (پشت سرهم) به $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ طریق مختلف صورت می گیرند.

مثال۱: می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن ها، یکی از حروف {ا،ب،ج،د} و در سمت چپ آن ها، عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود. چند کارت متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب:

$$\boxed{۹}\ \boxed{۹}\ \boxed{۴} = ۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴$$

(۱ ۲ ... ۹) (۱ ۲ ... ۹) (۱ ب ج د)

مثال۲: یک ساختمان با ۸ طبقه و ۵ رنگ مختلف داریم؛ به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد؛ به طوری که هیچ دو طبقه ی مجاوری هم رنگ نباشند. (شبیه تمرین ص۱۸۲ ریاضی ۲)

۱) $۵^۸$ ۲) ۵×۴^۷ ✓ ۳) $۵\times۴\times۳^۶$ ۴) ۵×۳^۷

جواب:

طبقه اول: $\boxed{۵}$ (سبز) — آبی، قرمز، زرد، نارنجی

طبقه دوم: $\boxed{۴}$ (آبی) — قرمز، زرد، نارنجی

طبقه سوم: $\boxed{۴}$ — سبز، قرمز، زرد، نارنجی

طبقه هشتم: $\boxed{۴}$

$$\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۴} \times ... \times \boxed{۴} = ۵ \times ۴^۷$$

مثال۳: یک اتوبوس دارای ۸ مسافر است و در ۵ ایستگاه متوقف می‌شود. مسافرین این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

۱) ۴۰ ۲) $۸^۵$ ۳) $۵^۸$ ۴) $\frac{۸!}{۵!}$

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۵}}_{\text{مسافر اول}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\text{مسافر دوم}} \times \dots \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\text{مسافر هشتم}} = \underbrace{۵ \times ۵ \times \dots \times ۵}_{\text{۸ تا}} = ۵^۸$$

ایستگاه اول / ایستگاه پنجم

مثال۴: در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سؤال متفاوت، اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه ی سؤال‌ها پاسخ دهند، چند پاسخنامه‌ی متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش‌آموزان از تعداد سؤالات بیشتر است) شبیه تمرین در کلاس ۴ ص ۱۸۰ ریاضی۲.

جواب:
$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\text{سوال اول}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\text{سوال دوم}} \times \dots \underbrace{\boxed{۴}}_{\text{سوال دهم}} = ۴^{۱۰} = (۲^۲)^{۱۰} = ۲^{۲۰}$$

گزینه ۱ / گزینه۲ / گزینه ۳ / گزینه۴

مثال۵: تعداد ۲ نفر برای ریاست اداره‌ای نامزد شده‌اند؛ به چند طریق ۱۵ نفر از کارمندان می‌توانند به آن ها رأی دهند، به طوری که هر فرد حداکثر به یک نفر رأی داده باشد؟

۱) $۲^{۱۵}$ ۲) $۱۵^۲$ ۳) $۳^{۱۵}$ ۴) $۱۵^۳$

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\text{نفر اول}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\text{نفر دوم}} \times \dots \underbrace{\boxed{۳}}_{\text{نفر پانزدهم}} = \underbrace{۳ \times ۳ \times \dots \times ۳}_{\text{۱۵تا}} = ۳^{۱۵}$$

کاندید A / کاندید B / هیچکدام

تمرین۱: سؤال قبل را در حالتی حل کنید،که هر فرد تنها به یک نفر رأی داده باشد.

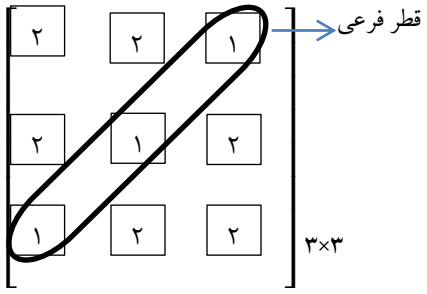
جواب: $۲^{۱۵}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۶: با اعداد ۰ و ۱ چند ماتریس ۳×۳ می‌توان ساخت به طوری که همه‌ی درایه‌های روی قطر فرعی آن، ۰ باشند؟

جواب: درایه‌های روی قطر فرعی فقط یک انتخاب دارند؛ (عدد صفر) بقیه درایه‌ها که ۶ درایه هستند دوانتخاب دارند (صفر و یک) پس داریم:

$$\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}=۲^{۶}=۶۴$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$۱\quad۱\quad۱\quad۱\quad۱\quad۱$$



مثال۷: با حروف کلمه‌ی «جمهوری» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آن ها نقطه‌دار نباشد؟

جواب:

$$\underset{(و)}{\boxed{۴}}\times\underset{(ه)}{\boxed{۵}}\times\underset{(م)}{\boxed{۴}}=۴\times۵\times۴=۸۰$$

(و)	(ه)	(م)
ر	و	ه
ج	ر	و
ی	ج	ر
	ی	

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات می‌کنیم که محدودیت در آن باشد. (بخصوص وقتی تکرار مجاز نیست)

برای پیدا کردن تعداد اعداد، مطمئن ترین روش اصل ضرب می باشد.

چند محدودیت مهم:

۱) اگر صفر در بین ارقام داده شده باشد، نمی‌توان صفر را در سمت چپ عدد قرار داد.

۲) اگر در بین اعداد داده شده صفر وجود داشته باشد، **به ناچار** باید از اصل ضرب استفاده کنیم.(نمی توان از جایگشت وترکیب استفاده کرد.)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳)عددی مضرب ۲ (بخش‌پذیر بر ۲) است، که رقم سمت راست آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

۴) عددی مضرب ۳ است، که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

۵) عددی مضرب ۵ (بخش‌پذیر بر ۵) است، که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.

۶)عددی مضرب ۶ است، که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳

نکته: قبل از انجام هر کاری مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام را مشخص می کنیم؛ سپس سوال را حل می کنیم.

مثال ۸: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجازاست)

جواب: (اگر تکرار ارقام مجاز باشد، از هرجا شروع به شمارش حالات کنیم ایراد ندارد.)

$$\boxed{۳} \times \boxed{۴} \times \boxed{۴} = ۴۸$$

۱	۰	۰
۲	۱	۱
۳	۲	۲
	۳	۳

مثال۹: چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۰، ۱ وجود دارد؟ (سراسری تجربی)

جواب:

$$\boxed{۱} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} = ۲^۵ = ۳۲$$

۱	۰	۰	۰	۰	۰
	۱	۱	۱	۱	۱

مثال۱۰: چند عدد چهار رقمی بدون رقم ۷ داریم؟ (شبیه تمرین ۵ ص ۱۸۲ریاضی۲)

جواب:

$$\boxed{۸} \times \boxed{۹} \times \boxed{۹} \times \boxed{۹} = ۵۸۳۲$$

۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

مثال۱۱: چه تعداد عدد چهار رقمی زوج وجود دارد؟

جواب:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\boxed{۹}\times\boxed{۱۰}\times\boxed{۱۰}\times\boxed{۵}=۴۵۰۰$$

مثال۱۲: با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟(تکرار ارقام مجاز است)

جواب:

$$\boxed{۳}\times\boxed{۴}\times\boxed{۲}=۲۴$$

مثال۱۳: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگتراز ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:۴۹۹ $= ۱ - ۵۰۰ = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۴$ (عدد ۲۰۰۰هم در بین این ۵۰۰ عدد قرار دارد که باید حذف شود.)

$$\boxed{۴}\times\boxed{۵}\times\boxed{۵}\times\boxed{۵}=۵۰۰$$

نکته: کد با عدد متفاوت است. رقم سمت چپ و حتی رقم‌های بعدی آن (کد) می‌تواند صفر باشد؛ در حالی که این ویژگی در مورد اعداد صدق نمی کند.

مثال۱۴: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند کد سه رقمی می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\boxed{۵}\times\boxed{۵}\times\boxed{۵}=۱۲۵$$

نکته: کد شهرستان الزاماً رقم سمت چپ آن را صفر قرار می‌دهیم (یک حالت) و رقم بعدی آن غیر صفر

مثال۱۵: با ارقام ۰، ۱، ۳، ۶، ۷ چند کد چهار رقمی تلفن شهرستان می‌توان نوشت؟

جواب:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\boxed{۱} \times \boxed{۴} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} = ۱ \times ۴ \times ۵ \times ۵ = ۱۰۰$$

۰ ۱۳۶۷ ۱۳۶۷ ۱۳۶۷

مثال۱۶: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} = ۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$$

(۲) ۳۴۵ (۳) ۴۵۰ ۴۵۰

مثال۱۷: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی و بزرگتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:

شروع

$$\boxed{۳} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

(۵) ۷۹ (۷) ۹۱۳ (۹) ۳۱ ۱۳

مثال ۱۸: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کمتر از ۷۰۰۰ می توان نوشت؟

جواب:

$$\boxed{۲} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۴۸$$

(۳) ۵ (۵) ۷۹۱ (۷) ۹۱ ۹۱

مثال۱۹: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و زوج، بزرگتر از ۴۰۰۰ وجود دارد؟ (ارقام زوج‌اند نه خود عدد)

جواب:

شروع

$$\boxed{۳} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

(۴) ۶۸ (۲) ۶۸۰ (۶) ۸۰ ۸۰

نکته: وقتی در طرح مسئله ای ارقام زوج مطرح می شود ، یعنی برای تمام خانه ها از اعداد زوج استفاده می کنیم. اما وقتی عدد زوج ذکر شود، فقط رقم یکان آن باید زوج باشد، و مابقی ارقام هم می توانند زوج باشند و هم فرد.

مثال۲۰: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ √ ۴) ۱۰۸

جواب: گزینه ۳

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

برای نوشتن عدد چهار رقمی بزرگ تر از ۳۰۰۰ و با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام، از اصل ضرب کمک می گیریم. کافی است تک تک خانه های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان را شمارش حالت کرده و در هم ضرب کنیم. دقت کنید شروع شمارش حالت ها از خانه ای انجام می شود که محدودیت رقم گذاری در آنجاست. پس شمارش حالت ها را از هزارگان انجام می دهیم. داریم:

$$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

مثال۲۱: با ارقام $\{۰،۱،۲،۵،۸\}$ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم یکان و صدگان یکسان باشند؟

جواب:$۱۰۰ = \boxed{۱} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴}$

برای رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم(صفر در سمت چپ عدد قرار نمی‌گیرد). برای رقم دهگان ۵ انتخاب داریم؛ چون قرار است رقم صدگان و یکان مثل هم باشند، آن ها را یکی در نظر می‌گیریم و ۵ انتخاب دارند. یا این که می‌گوییم رقم صدگان ۵ انتخاب دارد، چون می خواهیم رقم صدگان و یکان یکسان باشند، برای رقم یکان تنها یک انتخاب داریم(باید همان رقم قرار گرفته در صدگان را قرار دهیم).

نکته: هرگاه در طرح مسئله سه شرط زیر لحاظ شده باشد:

شرط۱: در بین ارقام داده شده، صفر وجود داشته باشد.

شرط۲: تعداد اعداد زوج (مضرب ۲) یا مضرب ۵ (بخشپذیر بر ۵) را از ما بخواهد.

شرط۳: تکرار ارقام مجاز نباشد.

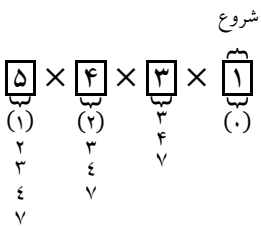
آن را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: فقط رقم صفر در یکان باشد. حالت ۲: رقم صفر در یکان نباشد.

مثال۲۲: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که هیچکدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشند؟ (شبیه تمرین ۴ ص ۱۸۶ ریاضی ۲)

جواب:$۱۵۶ = ۹۶ + ۶۰$

حالت۱:



حالت۲:

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

شروع ۲ شروع ۱

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۴)\\ ۱۳۷}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۱)\\ ۳۷۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۳\\ ۷۰}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۴}} = ۹۶$$

مثال۲۳: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)

جواب: $۶ + ۴ = ۱۰$

حالت۱:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۳۵}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\ ۵}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{\substack{۵}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{\substack{۰}} = ۶$$

حالت۲:

شروع ۲ شروع ۱

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{\substack{۳}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{\substack{۵}} = ۴$$

احتمال های مربوط به اصل ضرب

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}} = \frac{\text{خواسته ی احتمال}}{\text{کل اعداد خواسته شده}}$$

مثال ۲۴: اگر با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ √ ۴) ۱

جواب:

شروع

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۴۶}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴۶}} \quad \text{و} \quad n(S) = \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴۶}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۱۴۶}}$$

$$P(A) = \frac{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۳}{۴}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲۵: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید احتمال آن که این عدد زوج باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$ √

جواب:

$$n(S) = \overset{\text{شروع}}{\boxed{۴}} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} = ۴۸$$

$$n(A) = \left\{ \underbrace{\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۲}}_{\text{۲ یا ۴}} \right\} = ۳۰ \rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{۳۰}{۴۸} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین۲: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟ (سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

جواب: $\frac{۵}{۹}$

تمرین۳: چهار رقم ۹، ۷، ۵،۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۱۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد، تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود، به سراغ مضرب۵ می رویم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

مثال۲۶: با استفاده از اعداد مجموعه {۱،۲،۵،۸،۹} به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساختهایم، با چه احتمالی این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ✓ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

جواب:

$$n(S) = ۵! = ۱۲۰ \, , n(A) = \boxed{۱}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲}\boxed{۱} = ۲۴, \mathrm{P(A)} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

مثال۲۷: از بین اعداد طبیعی سه رقمی به تصادف یک عدد برداشتهایم با کدام احتمال:

الف) رقم ۲ در این عدد ظاهر نشده است؟

جواب:

$$n(S): \boxed{۹}_{\text{ب}} \times \boxed{۱۰}_{\text{ب}} \times \boxed{۱۰}_{\text{ب}} \quad , \quad n(A): \boxed{۸}_{\text{ب}} \times \boxed{۹}_{\text{ب}} \times \boxed{۹}_{\text{ب}}$$

ب: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ — ب: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ — ب: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

ب: ۱ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ — ب: ۱ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{۸ \times ۹ \times ۹}{۹ \times ۱۰ \times ۱۰} = \frac{۱۸}{۲۵}$$

ب) لااقل یک بار رقم ۲ در این *عدد* ظاهر شده است(سراسری ریاضی ۸۶).

جواب: $P(B) = ۱ - \frac{۱۸}{۲۵} = \frac{۷}{۲۵}$

مثال۲۸: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج میشود از ۴ بیشتر نیست، یا مضرب ۳ میباشد.(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمیرود) (سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$S = \{۱,۲,۳, \dots ,۹\} \, , n(A) = ۹$

$A =$ پلاک مضرب۳ یا بیشتر از ۴ نیست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹\}, n(A)=۶ \rightarrow \mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

مخصوص صددرصدی ها

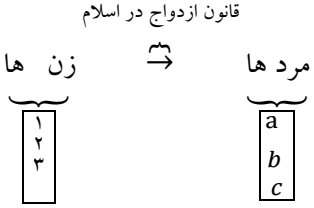
پیدا کردن تعداد توابع با استفاده از اصل ضرب

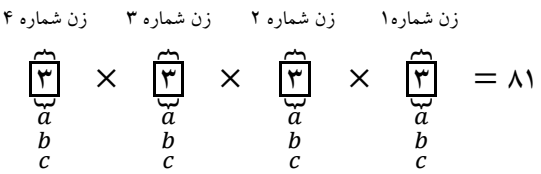
مثال۲۹: تعداد کل توابعی که از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان به مجموعه ی $B=\{a,b,c\}$ تعریف کرد چندتاست؟

۱) ۸۱ ✓ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۷

جواب:

قانون ازدواج در اسلام

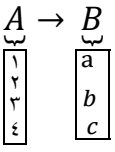


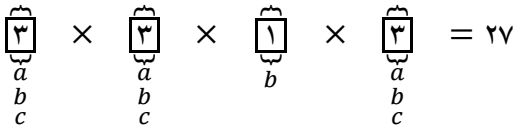


مثال ۳۰: تعداد کل توابعی که از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان به مجموعه ی $B=\{a,b,c\}$ تعریف کرد به طوری که:

الف) شامل زوج مرتب $(۲,b)$ باشد.

جواب:

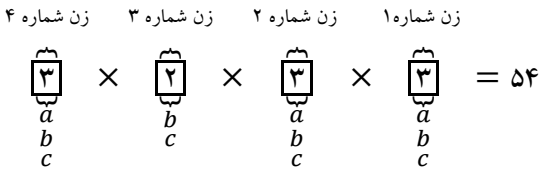




ب)شامل زوج مرتب $(۳,a)$ نباشد.

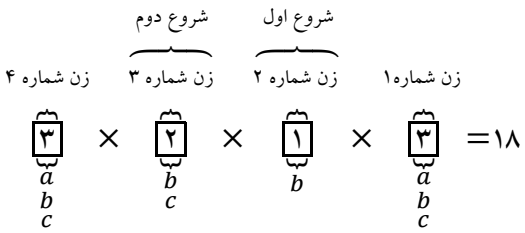
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:



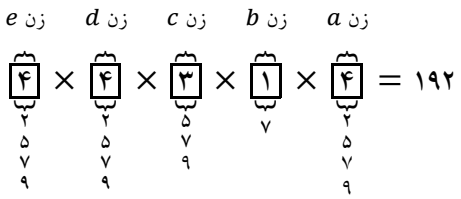
پ) شامل زوج مرتب $(۲, b)$ باشد ولی شامل زوج مرتب $(۳, a)$ نباشد.

جواب:



مثال۳۱: چند تابع از مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ در $B = \{۹,۷,۵,۲\}$ می‌توان تعریف کرد در صورتی که $f(b) = ۷, f(c) \neq ۲$ باشند.

جواب:

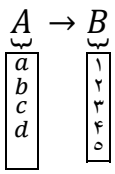


پیدا کردن توابع یک به یک با استفاده از اصل ضرب

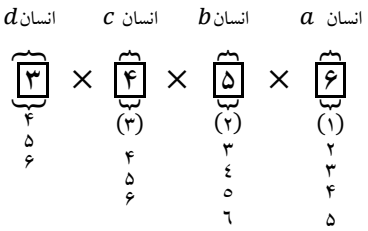
تعریف: تابعی که هیچ دو عنصری از دامنه به یک عضو از برد نظیر نشود. به بیان ساده‌تر در نمودار پیکانی به هیچ عضوی از بردش بیش از یک فلش نمی‌رسد را تابع یک به یک می‌گویند.

مثال۳۲: از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ مجموعه‌ی $B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند تابع یک به یک می‌توان نوشت؟

جواب: $۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۳۶۰$



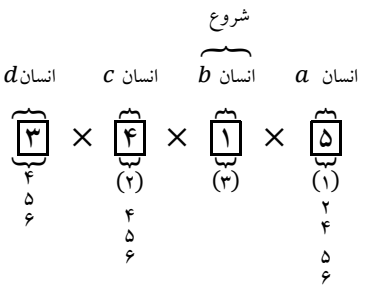
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال۳۳: از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ مجموعه‌ی $B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند تابع یک به یک می‌توان نوشت. به طوری که:

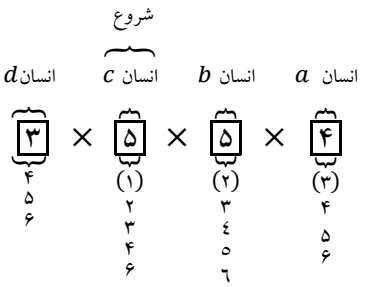
الف) شامل زوج مرتب $(b, ۳)$ باشد.

جواب: $۳ \times ۴ \times ۱ \times ۵ = ۶۰$



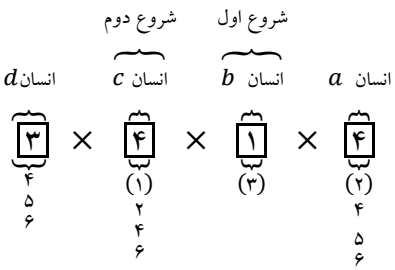
ب) شامل زوج $(c, ۵)$ نباشد.

جواب: $۳ \times ۵ \times ۵ \times ۴ = ۳۰۰$



پ) شامل زوج مرتب $(b, ۳)$ باشد ولی شامل زوج $(c, ۵)$ نباشد.

جواب: $۳ \times ۴ \times ۱ \times ۴ = ۴۸$



تمرین۴: چندتابع یک به یک $A = \{a, b, c, d\}$ به $B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ وجود دارد، به طوری که $f(a) = ۴, f(d) \neq ۶$ باشد.

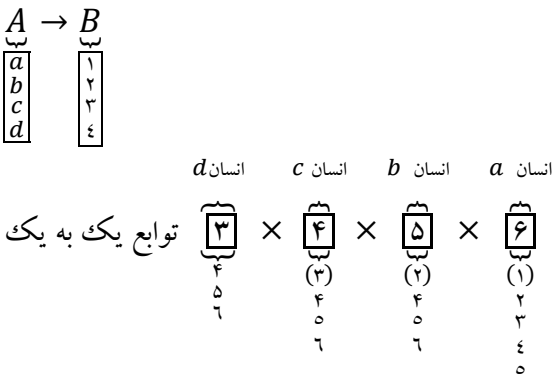
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: ۹۶

مثال۳۴: تعداد توابع روی مجموعه‌ی ۴ عضوی کدام است؟ (شبیه تمرین ۵ ص ۱۸۶ ریاضی۲)

۱) ۲۴ √ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

جواب: $۲۴ = \boxed{۱} \times \boxed{۲} \times \boxed{۳} \times \boxed{۴}$



جایگشت

نحوه قرار گرفتن اشیا در کنار هم را جایگشت می نامیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های nشی از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{n!}{\text{حاصلضرب جایگشت‌های تکراری}}$$

دقت کنید در سوالاتی از جایگشت که نیاز به فضای نمونه ای(کل حالات) داریم، از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال۳۶: با حروف کلمه‌ی آبدانان چند کلمه‌ی ۷حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{۲! \times ۳!}$ (۲ تا ن داریم. × ۳ تا آ داریم.)

مثال۳۷: با حروف کلمه‌ی ATAXIA چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۶!}{۳!}$

تمرین۵: با حروف کلمه‌ی شمشیر چند کلمه‌ی۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: ۶۰

مثال۳۸: با حروف کلمه‌ی شاهزاده چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{۲! \times ۲!}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۳۹: با حروف کلمه‌ی $APADANA$ چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۱۰ √ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰

جواب: $\frac{۷!}{۴!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = ۲۱۰$

مثال۴۰: با حروف کلمه‌ی ستایش چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: تکراری نداریم که بر تکرار تقسیم کنیم پس برابر است با !۵

مثال۴۱: به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در یک صف پشت سرهم قرار داد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰ √

جواب: ۷۲۰=!۶

مثال۴۲: ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

جواب: !۱۰

مثال۴۳: با ارقام شماره تلفن «۲۲۵۷۵۵» چند شماره تلفن ۶ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

جواب: $\frac{۶!}{۲!\times۳!}$

مخصوص صددرصدی ها

*مثال۴۴: با ارقام ۲، ۰، ۰، ۰، ۳ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۸ √ ۴) ۱۰

جواب: $\frac{۲\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳!}$

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\۳}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\۰\\۰\\۳}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۰)\\۰\\۲}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\۲}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۲}$$

نکته: اگر در بین اعداد صفر داشته باشیم، ابتدا فرض می‌کنیم رقم‌های داده شده متمایز هستند وبا استفاده از اصل ضرب جواب را به‌دست می‌آوریم و در آخر جواب به‌دست آمده را بر جایگشت تکرارها تقسیم می‌کنیم.

*مثال۴۵: با ارقام ۲، ۲، ۲، ۰، ۰، ۱، ۴، ۳ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۱) !۸ ۲) $\frac{۸!}{۲!\times۳!}$ ۳) $\frac{۷!}{۲!}$ √ ۴) $\frac{۷!}{۲!\times۳!}$

جواب: $\frac{۶\times۷!}{۲!\times۳!} = \frac{۷!}{۲!}$

$$\underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{(۲)\\۲\\۲\\۱\\٤\\۳}} \times \underbrace{\boxed{۷}}_{\substack{(۲)\\۲\\۱\\٤\\۳\\۰\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{(۲)\\۱\\٤\\۳\\۰\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۱)\\۴\\۳\\۰\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۴)\\۳\\۰\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۳)\\۰\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۰}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

*مثال۴۶: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $\frac{۸!}{۲! \times ۴!}$ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ √

جواب: ۲۰ $= \frac{۴ \times ۶! \times ۴}{۴! \times ۴!}$

$$\boxed{۴} \times \boxed{۱} \times \boxed{۲} \times \boxed{۳} \times \boxed{۴} \times \boxed{۵} \times \boxed{۶} \times \boxed{۴}$$
$$(۰) \quad ۰ \quad (۰) \quad (۰) \quad (۳) \quad (۳) \quad (۳) \quad (۳)$$
$$\vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad ۳$$
$$۳$$

جایگشت های خاص(کنارهم بودن چند شیء، یک در میان قرار گرفتن اشیاءو...)

قرار گرفتن چند شیءِ درکنار هم

نکته: اگر در جایگشت چند شیء قرار شد تعدادی از اشیاء کنار هم باشند، آن ها را با طناب به هم بسته و یک شی در نظر می‌گیریم.

تذکر: اگر در جا دادن این اشیاء ترتیبی ذکر نشود، جایگشت خود این اشیاء را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می‌کنیم.

مثال۴۷: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق ممکن می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد، به طوری که:

الف) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند. (سراسری تجربی و ریاضی)

جواب: کتاب‌های ریاضی را به هم می‌بندیم و یک کتاب در نظر می‌گیریم $۳! \times ۵!$

کتاب های ادبی کتاب های ریاضی

ؤؤؤؤ ؤؤؤ

ب)کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند.

جواب: $۴! \times ۴!$

پ) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم و کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند؟

جواب: $۲! \times ۳! \times ۴!$

مثال۴۸: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد ۵ رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۱۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ √ ۴) ۴۸

جواب: $۳! \times ۳!$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱,۳,۵ , ۲, ۴

مثال۴۹: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره در آن عدد ۱۲۵ به کار رفته باشد، تعداد ۵ رقمی-های حاصل کدام است؟

جواب: ۶= !۳

۱۲۵ , ۳, ۴

مثال۵۰: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف c, m, o به صورت com قرار گرفته باشند چندتاست؟(تمرین کتاب)

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۷۲۰ √ ۳) ۴۸۰ ۴) ۳۶۰

جواب: ۷۲۰ = !۶

com, p, u, t, e, r

مثال ۵۱: با حروف کلمه‌ی مهتاب چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که «الف» بلافاصله بعد «ت» بیاید؟

۱) ۱۲ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰ جواب: ۲۴ = !۴

تا م ه ب

مثال۵۲: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum

الف)عبارت op وجود دارد؟

جواب: $\frac{!۶}{!۲}$

op , i , s , s , u , m

ب)عبارت osوجود دارد.

جواب: !۶

پ)oو sکنارهم هستند.

جواب: !۲ × !۶

مثال۵۳: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum عبارت op وجود ندارد؟

جواب: جایگشت های کنارهم قرار نگرفتن چند شیء کنارهم، برابر است با کل جایگشت‌ها، منهای جایگشت‌های کنارهم قرار گرفتن چند شیء.

$$\frac{!۷}{!۲} - \frac{!۶}{!۲}$$

مثال۵۴: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت حروف یکسان، کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ √

۴) ۱۴۴۰

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$$\boxed{AA}\ ,\boxed{GG}\ ,L\ ,R\ ,N\ ,E$$

مثال۵۵: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت حروف یکسان، کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

جواب: $۶! - \frac{۸!}{۲!\times۲!}$

تمرین۶: تعداد جایگشت های حروف کلمه ی SYSTEM به طوری که S ها کنار هم‌نباشند،کدام است؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ √ ۴) ۳۶۰

جواب: گزینه ۳

مثال۵۶: تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید؛ در چند حالت دو حروف $a\ ,\ w$ کنار هم قرار ندارند؟(تمرین کتاب)

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲ √ ۳) ۴۸ ۴) ۸۲

جواب:

$۵! - (۴! \times ۲!) = ۷۲$ جایگشت هایی کهa, wکنار هم هستند − کل جایگشت ها

مثال۵۷: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که:

الف) حروف صدا دار کنار هم باشند(o, u, e).

جواب: $۶! \times ۳!$

ب) در آن ها کلمه‌ی $comp$ وجود داشته باشد.

جواب: $۵!$

پ) حروف r, e, t, p کنار هم نباشند.

جواب: $۸! - (۵! \times ۴!)$

مثال۵۸: افراد A , B , C , D , E , F به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؛ به نحوی که A , B کنار هم باشند و E , F کنار هم نباشند؟

۱) ۱۶۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۴۴

جواب: حالت‌هایی که A, B کنار هم هستند را، منهای حالت‌هایی که A , B کنار هم هستند و $E\ ,\ F$ نیز کنار هم هستند می کنیم.

مثال۵۹: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) حروف یکسان کنار هم باشند.

جواب:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶!}{\frac{۸!}{۲! \times ۲!}} = \frac{۶! \times ۲! \times ۲!}{۸!}$$

ب) حروف یکسان کنار هم نباشند.

جواب: $\frac{۱۳}{۱۴}$

تمرین۷: حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، سه حرف A در کنار هم قرار می گیرند؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مثال۶۰: اعداد ۹، ۶، ۲ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ √

جواب: $p(A) = \frac{۲! \times ۲!}{۳!} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند −۱ =احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

مثال۶۱: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر می‌باشند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن‌که برادرها کنار هم نباشند.(شبیه مثال ص ۱۶ ریاضی ۳)

جواب:

(احتمال برادرها کنار هم باشند − ۱)= احتمال برادرها کنار هم نباشند

$$۱ - \frac{۵! \times ۲!}{۶!} = ۱ - \frac{۵! \times ۲}{۶ \times ۵!} = ۱ - \frac{۲}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

مثال۶۲: از بین تمام کلمات پنج حرفی که از جایگشت حروف کلمه TEACH حاصل می شود، یک کلمه به تصادف انتخاب می کنیم؛ در چند حالت بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار می گیرد ؟

جواب: بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار گیرد؛ یعنی دو حرف A, E درکنار هم نیستند. بنابراین از متمم کمک می گیریم.

$$۵! - (۴! \times ۲!)$$

مثال۶۳: با ارقام ۰و۱و۱و۲و۳ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که دو رقم۱ کنار هم قرار گیرند کدام است؟

جواب: در جایگشت های این ۵ رقم دو تای آن ها یکسان هستند. در ضمن صفر سمت چپ قرار نمی گیرد، بنابراین داریم:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$n(S) = \frac{۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۲!} = ۴۸$$

اما برای یافتن تعداد حالت های مطلوب دو رقم ۱ را با هم در نظر می گیریم پس ۴ شیء متمایز داریم که صفر نمی تواند سمت چپ باشد:

$$n(A) = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸ \rightarrow P(A) = \frac{۱۸}{۴۸} = \frac{۳}{۸}$$

قرار گرفتن اشیاءِ در یک جای خاص

مثال۶۴: با حروف کلمه‌ی TARANEH چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۷۲۰ √ ۴) ۱۴۴۰

جواب:

$$\boxed{۶} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \underset{A\text{ حرف}}{\boxed{۱}} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = ۶!$$

مثال۶۵: با حروف کلمه‌ی *ARAYEHA* چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{۶} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \underset{A\text{ حرف}}{\boxed{۱}} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = \frac{۶!}{\underset{A\text{ تعداد }}{۲!}} = ۳۶۰$$

تمرین۸: با حروف کلمه گل بهار چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که با حرف گ شروع و به حرف ب ختم شود؟

جواب: ۲۴

مثال۶۶: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حروف r , c در اول و آخر کلمه باشند؟

جواب:

$$\underset{c}{\overset{\boxed{۲}}{(r)}} \times \underbrace{\square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square}_{۶!} \times \underset{c}{\boxed{۱}} = ۶! \times ۲$$

مثال **۶۷**: ۶ نفرکه ۲ تای آن ها برادر هستند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که برادرها در اول و آخر صف باشند.(مثال ص ۱۶ ریاضی ۳).

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$n(S) = ۶!, n(A) = \boxed{۲} \times \underbrace{\square \times \square \times \square \times \square}_{۴!} \times \boxed{۱}$$

$$p(A) = \frac{۴! \times ۲}{۶!} = \frac{۴! \times ۲}{۶ \times ۵ \times ۴!} = \frac{۱}{۱۵}$$

مثال۶۸: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) حروف R, L در اول و آخر کلمه باشند.

جواب:

$$n(A) = \frac{۲ \times ۶!}{۲! \times ۲!} \ , \ n(S) = \frac{۸!}{۲! \times ۲!} , P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲ \times ۶!}{۸!} = \frac{۲ \times ۶!}{۸ \times ۷ \times ۶!} = \frac{۱}{۲۸}$$

ب)حروف R, G در اول و آخر کلمه باشند.

ج)حروف A, G در اول و آخر کلمه باشند.

یک در میان قرار گرفتن اشیاءِ:

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز، و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند، و $m = n$ باشد، تعداد حالت‌هایی که:

الف)m, n شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

ب) فقط m شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

ج) فقط n شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

مثال۶۹: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف، به طور یک در میان قرار داد؟

۱) $۴! \times ۴!$ ۲) $۲ \times ۴! \times ۴!$ √ ۳) $۴! + ۴!$ ۴) $۴! \times ۴! + ۲! \times ۲!$

جواب: $۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال ۷۰: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب:$۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال ۷۱: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟(یعنی دخترها یک در میان باشند)

جواب:$۲ \times (۴! \times ۴!)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷۲: با جابجایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ✓ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

جواب: $\frac{۳!\times ۲}{۱} = \frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۳!} = ۶ \times ۲ = ۱۲$

تمرین۹: در ساختن یک کلمه شش حرفی باحروف کلمه PANAMA احتمال آن که حروف A یک در میان باشند کدام است؟

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند $m = n + ۱$ باشد تعداد حالت‌هایی که:

الف) m , n شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$m! \times n!$$

ب) فقط m شیءِ(عدد بزرگتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با: $m! \times n!$

ج) فقط n شیءِ(عدد کوچکتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با: $۳ \times (m! \times n!)$

مثال۷۳: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۴! × ۳! ✓ ۲) ۳! × ۴! × ۲ ۳) ۴! + ۳! ۴) ۴! × ۲ + ۴!

جواب: ۳! × ۴!

مثال۷۴: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که دخترها یک در میان باشند؟

جواب: ۳! × ۴!

مثال۷۵: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب: ۳ × ۳! × ۴!

مثال۷۶: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟

جواب: ۳! × ۴!

مثال۷۷: با جابجایی ارقام ۱۲۳۴۵۶۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که:

الف) ارقام فرد یک در میان باشند؟

جواب: ۳! × ۴!

ب) هیچ دو رقم فردی متوالی نباشند؟

جواب: ۳! × ۴!

ج) ارقام زوج یک در میان باشند؟

جواب: ۳ × ۳! × ۴!

د) بین هر دو رقم فرد، یک رقم زوج قرار گیرد؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۷۸: سه نوع کتاب علمی متمایز، و چهار نوع کتاب ادبی متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب‌های علمی یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۴۳۲ √ ۴) ۵۷۶

جواب: $۴! \times ۳! \times ۳ = ۲۴ \times ۶ \times ۳ = ۴۳۲$

تمرین۱۰: ظرفی شامل ۵ مهره‌ی سفید متمایز و ۴ مهره‌ی سیاه متمایز است. مهره‌ها را یکی پس از دیگری به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم؛ چقدر احتمال دارد:

الف) مهره‌های سیاه و سفید، به صورت یک در میان خارج شده باشند.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۴!}{۹!}$

ب) مهره‌های سفید یک در میان باشند.

پ) دو مهره‌ی سفید به صورت متوالی خارج نشود.

ت) مهره‌های سیاه یک در میان خارج شده باشند.

ج) بین دو مهره‌ی سیاه، فقط یک مهره‌ی سفید قرار گیرد.

مثال۷۹: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد، متوالیاً خارج نمی‌شود؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۰/۱ √ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۲!}{۵!} = \frac{۱۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$

مثال ۸۰: در سؤال قبل اگر مهره‌ها با شماره زوج و یک در میان باشند، احتمال را به‌دست آورید.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۲! \times ۳}{۵!} = \frac{۶ \times ۲ \times ۳}{۱۲۰} = \frac{۳۶}{۱۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$

مثال۸۱: پنج نفر a , b , c , d , e می‌خواهند در یک همایش سخنرانی کنند به چند طریق این ۵ نفر می‌توانند سخنرانی کنند، به طوری که بین سخنرانی a , b فقط یک نفر سخنرانی کند؟(سراسری ریاضی)

جواب:$۳ \times (۲! \times ۳!)$

انتخاب اشیاء(ترتیب وترکیب)

در انتخاب k از n شیء متمایز دو حالت وجود دارد:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) اگر اولویت(تقدم و تاخر) اشیاء مهم باشد این نوع انتخاب را ترتیب می نامند و تعداد حالت های آن را از فرمول زیر به‌دست می آوریم.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ب) اگر اولویت (تقدم وتاخر) اشیاء مهم نباشد، این نوع انتخاب ر ا ترکیب می نامیم و تعداد حالت های آن از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$c(n\ ,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال۸۲: با حروف کلمه‌ی فردوسی چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}$

در این مثال تقدم و تاخر اشیاء (حروف) مهم است به عنوان مثال اگر سه حرف (ف – ر- د) را از حروف کلمه فردوسی انتخاب کنیم می‌توان کلمه فرد و درف را باآن ساخت که باهم متفاوتند؛ یعنی با جابجایی حرف کلمه جدیدی ساخته می شود. به همین دلیل از ترتیب استفاده می شود.

نکته:

- $\binom{n}{۰}=۱$
- اگر $a+b=n$ آنگاه $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}$.

مثال۸۳:

$$\binom{۸}{۲}=\binom{۸}{۶}\quad,\quad\binom{۵}{۵}=\binom{۵}{۰}\quad,\quad\binom{۱۰۰}{۹۸}=\binom{۱۰۰}{۲}$$

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۲}{۲\times۱}\quad,\quad\binom{۱۰}{۱}=\frac{۱۰}{۱}\quad,\quad\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱}$$

$$\binom{۵}{۵}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱},\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲\times۱},\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱}$$

مثال۸۴: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه شش عضوی $\{a,b,c,d,e,f\}$ را به‌دست آورید.

جواب: در این مثال تقدم و تاخر اشیا (عضوها) مهم نیست، برای مثال زیرمجموعه های $\{c,b,a\}$و$\{a,b,c\}$ با هم تفاوت ندارند به همین دلیل از ترکیب استفاده می‌کنیم. $c(۶,۳)=۲۰$

مثال۸۵: هفت نقطه روی دایره ای قرار دارند، حساب کنید که با این هفت نقطه:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف)چند پاره خط ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ب)چند بردار ایجاد می‌شود؟

جواب: $P(۷,۲)$

ج)چند مثلث ایجاد می‌شود؟

جواب:$C(۷,۳)$

چ) چند وتر ساخته می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ح)چند چهار ضلعی محدب که هر راس چهار ضلعی واقع بر یک نقطه باشد می توان ساخت؟

جواب: $C(۷,۴)$

مثال۸۶: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند؛ می خواهیم از بین آن ها:

الف)۳ نفر انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم نیست، پس:

$$C = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱} = ۲۲۰$$

ب)یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان‌پذیراست.

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم است، پس:

$$P = (۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = ۱۳۲۰$$

مثال۸۷: به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به طوری که در هر کمیته ۲ دانش-آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ √

جواب:$\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۳} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$

مثال۸۸: به چند طریق از بین ۵ زن و ۴ مرد، انجمنی ۳ نفری می‌توان تشکیل داد به طوری‌که:

الف) فقط یک نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یکی از زنها و دوتا از مردها $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}$

ب) هر سه نفر همجنس باشند.

جواب: یعنی هر سه مرد باشند یا هرسه زن $\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳}$

پ) حداقل یک نفر آن ها مرد باشد.(شبیه تمرین ۲ ص ۱۹۰ ریاضی ۲)

جواب: یعنی یا یکی از مردها انتخاب بشه، یا دوتا، و یا هرسه تا مرد باشند. پس داریم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ت) حداکثر دو نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یا دو تا از آن‌ها زن باشه یا یکی، و یا هیچکدام از آن‌ها

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}$$

مثال۸۹: از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد، به طوری که لااقل دو نفراز آن ها دانش‌آموز تجربی باشند؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ √

جواب: $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰}=۱۰\times۳+۱۰\times۱=۴۰$

مثال۹۰: به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی، ۴مهره سبز، و۲ مهره زرد۳ مهره انتخاب کنیم، به طوری که:

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

ب)هر ۳ مهره آبی باشند ؟

جواب: $C(۵,۳)$

ج) هر سه مهره سبز باشند؟

جواب: $C(۴,۳)$

چ) دو مهره آبی و یک مهره سبز باشد ؟

جواب: $C(۵,۲)\times C(۴,۱)$

ح) دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۵,۲)\times C(۶,۱)$

خ) هر سه مهره همرنگ باشند؟

جواب: $C(۵,۳)+C(۴,۳)$

د) مهره ها همرنگ نباشند؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۳)+C(۴,۳)]$

ز)حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۳)+C(۴,۳)]$

ذ) مهره ها متمایز باشند؟ (هیچ دو مهره ای همرنگ نباشد)

جواب: $C(۵,۱)\times C(۴,۱)\times C(۲,۱)$

ر) حداقل دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۱)\times C(۴,۱)\times C(۲,۱)]$

س) مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$C(۱۱,۳) - \left[C(۵,۳) + C(۴,۳) + \left(C(۵,۱) \times C(۴,۱) \times C(۲,۱)\right)\right]$$

ش) حداقل یک مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۰) \times C(۶,۳)]$

ل) حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۳) \times C(۶,۰)]$

م) حداکثر دو مهره زرد باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

مثال۹۱: تعداد قطر های یک n ضلعی محدب را به‌دست آورید.

جواب: تعداد کل پاره خط ها برابر $C(n, ۲)$ است، که برای تعداد قطرها بایستی تعداد اضلاع یعنی n را از کل پاره خط ها کم کنیم. $C(n, ۲) - n$

مثال۹۲: از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن‌که:

الف) ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۴} \times \binom{۵}{۴}$

ب) ۵ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۳} \times \binom{۵}{۵}$

پ) حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟(سراسری ریاضی ۸۹)

جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۵} + \binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}$

ت) حداکثر ۳ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۵} \times \binom{۵}{۳}$

مثال۹۳: اگر $\frac{p(n,۴)}{c(n-۱,۴)} = ۲۶$ باشد مقدار nکدام است؟(سراسری تجربی ۸۴ خارج ازکشور)

۱) ۵۲ √ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

جواب:

$$p\left(n\,,۴\right) = \frac{n!}{(n-۴)!}$$

$$c\left(n-۱\,,۴\right) = \frac{(n-۱)!}{\left(n-۱-۴\right)! \times\ ۴!} = \frac{(n-۱)!}{(n-۵)! \times\ ۴!}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)} = \frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۵)!\times ۴!}} = ۲۶ \Rightarrow \frac{n!\times(n-۵)!\times ۴!}{(n-۱)!\times(n-۴)!} = ۲۶$$

$$\Rightarrow \frac{n\times(n-۱)!\times(n-۵)!\times ۲۴}{(n-۱)!\times(n-۴)(n-۵)!} = ۲۶ \Rightarrow \frac{۲۴n}{n-۴} = ۲۶$$

$$\Rightarrow ۲۴n = ۲۶n - ۱۰۴ \rightarrow ۲n = ۱۰۴ \rightarrow n = ۵۲$$

مثال ۹۴: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $C(n,۱) = ۵n - ۸$

جواب:

$$C(n,۱) = n \rightarrow n = ۵n - ۸ \rightarrow ۴n = ۸ \rightarrow n = ۲$$

ب) $P(n,n) = P(n,n-۱)$

جواب:

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!} = n!$$

$$P(n,n-۱) = \frac{n!}{(n-(n-۱))!} = \frac{n!}{۱!} = n!$$

مثال۹۵: از میان ۴ جفت کفش متمایز، به چند طریق می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ جفتی در میان آن ها نباشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب سه جفت کفش}} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت اول}} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت دوم}} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت سوم}}$$

ب) در میان آن ها یک جفت وجود داشته باشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\substack{\text{انتخاب یک جفت}\\ (\text{دو لنگه})}} \times \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه}}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۹۶: ۶ زوج داریم به چند طریق می‌توان ۴ نفر از آن ها را به‌طور تصادفی انتخاب کرد، به طوری که:

الف) هیچ زن و شوهری در بین آن ها نباشد.

جواب: $\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۶}{۴}$

ب) فقط یک زوج در بین آن ها باشد.

جواب:

روش اول:

$$\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{یک زوج از بین ۶ زوج انتخاب می کنیم.}}\times\underbrace{\binom{۵}{۲}\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{از بین ۵ زوج باقیمانده ۲ زوج انتخاب کرده سپس از هر کدام یک نفر انتخاب می کنیم}}$$

روش دوم:

$$\binom{۶}{۱}\times\left(\binom{۱۰}{۲}-۵\right)$$

مثال۹۷: از هریک از مدارس $A\ ,B\ ,C\ ,D\ ,\ E$ چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز دو به دو غیر هم مدرسه ای انتخاب کرد.(سراسری تجربی ۹۲)

جواب: $\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۶۴۰$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

مثال۹۸: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ √ ۴) ۱۶

جواب: $\binom{۶}{۴}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳}{۴\times۳\times۲\times۱}=۱۵$

مثال۹۹: تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ کدام است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: $\binom{۶}{۶}+\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۲}+\binom{۶}{۰}$

مثال ۱۰۰: تعداد زیر مجموعه‌های هریک از مجموعه های زیر را به‌دست آورید؟

الف) $A=\{a,b\}$

جواب: $\binom{۲}{۰}+\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۲}=۲^۲=۴$

ب) $B=\{a,b,c\}$

جواب: $\binom{۳}{۰}+\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۲^۳=۸$

پ) $C=\{a,b,c,d\}$

جواب: $\binom{۴}{۰}+\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۲^۴=۱۶$

ت) $D=\left\{\underbrace{a,b,c,\ldots}_{n\text{ تا}}\right\}$

جواب: $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$

مثال ۱۰۱: حاصل عبارت $\binom{۸}{۱}+\binom{۸}{۲}+\cdots+\binom{۸}{۸}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵۵ √ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۱

جواب:

$$\binom{۸}{۱}+\binom{۸}{۲}+\cdots+\binom{۸}{۸}=۲^۸-\binom{۸}{۰}=۲^۸-۱=۲۵۶-۱=۲۵۵$$

مثال ۱۰۲: اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه برابر ۴۵ باشد، تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی آن کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۱۲۰ √ ۳) ۲۱۰ ۴) ۴۶۵

جواب:

$$\binom{n}{۲}=۴۵\Rightarrow\frac{n\times(n-۱)}{۲\times۱}=۴۵\ \rightarrow n(n-۱)=۹۰\rightarrow n=۱۰$$

$$\rightarrow\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=۱۲۰$$

ترکیب های خاص (شامل و فاقد)

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که حتماشامل m انتخاب اجباری باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r-m}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۰۳: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که شخص به خصوصی حتما در میان آن ها باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ √ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵

جواب: $\binom{۸-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲\times۱} = ۲۱$

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که فاقد m شیءِ به خصوص باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r}$

مثال۱۰۴: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که یک شخص به خصوصی حتما در میان آن ها نباشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵ √

جواب: $\binom{۸-۱}{۳} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱} = ۳۵$

مثال۱۰۵: از بین ۱۰ نفر فوتبالیست به چند طریق می‌توان ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که بهترین بازیکن در بین آن ها باشد و بدترین بازیکن در بین آن ها نباشد؟

۱) $\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۹}{۳}$ ۳) $\binom{۹}{۴}$ ۴) $\binom{۸}{۴}$

جواب: حاصل برابر است با $\binom{۸}{۳}$ که جز گزینه های داده شده نیست، ولی داریم اگر:

$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ آنگاه $a+b=n$

دراین‌صورت:

$$\binom{۸}{۳} = \binom{۸}{۵}$$

مثال۱۰۶: تعداد زیر مجموعه سه عضوی مجموعه $\{a\,,b\,,c\,,d\,,e\,,f\}$ که:

الف) شامل a باشد کدام است؟(سراسری تجربی ۸۳)

جواب: $\binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲\times۱} = ۱۰$

ب) شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۵}{۳} = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = ۱۰$

ت) شامل a باشد ولی شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۴}{۲} = \frac{۴\times۳}{۲\times۱} = ۶$

مثال۱۰۷: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که اعداد ۲ و ۵ همزمان در آن ها نیستند؟(یعنی اگر یکی از این اعداد داخل مجموعه باشد اشکال ندارد).

۱) ۳۵ ۲) ۲۵ √ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{کل مجموعه های ۴ عضوی}} - \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\substack{\text{تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی} \\ \text{شامل ۲ و ۵}}} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴}{۴\times۳\times۲\times۱} - \frac{۵\times۴}{۲\times۱} = ۳۵ - ۱۰ = ۲۵$$

مثال۱۰۸: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که شامل اعداد ۲ و ۵ نباشد؟

جواب: یعنی هم ۲ در آن نباشد و هم۵ پس برابر است با: $\binom{۵}{۴}$

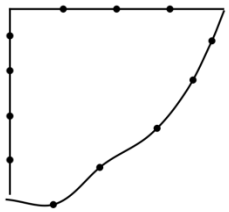
مسائل هندسی ترکیب

مثال ۱۰۹: با نقاط مشخص شده در شکل زیر چند مثلث می‌توان ساخت؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ √ ۴) ۸۰

جواب: $\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۱} = ۴\times۱۰ + ۶\times۵ = ۷۰$

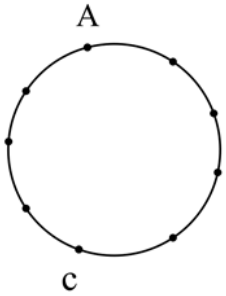
مثال ۱۱۰: با نقاط مشخص شده در شکل زیر، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۲۲۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۲۱۵ √ ۴) ۲۴۰

جواب: $\binom{۱۲}{۳} - [\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳}] = ۲۲۰ - (۱ + ۴) = ۲۲۰ - ۵ = ۲۱۵$

مثال ۱۱۱: در شکل مقابل چند چهار ضلعی با نقاط داده شده می‌توان رسم کرد که:



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) Ac ضلع چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲} = ۶ + ۳ = ۹$

ب) Ac قطر چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۴ \times ۳ = ۱۲$

انتخاب همراه با جایگشت

در بعضی مسائل علاوه بر انتخاب اشیاءِ آن‌ها را در کنار هم می‌چینیم. به این نوع مسائل انتخاب همراه با جایگشت می‌گوئیم.

مثال۱۱۲: با حروف کلمه‌ی $computer$ چند کلمه‌ی ۵ حرفی با معنی و بی معنی می‌توان ساخت؟ به طوری که:

الف) در همه‌ی آن ها حرف r به کار رفته باشد.

جواب: $\binom{۷}{۴} \times ۵!$

ب) در همه‌ی آن ها حروف r , u به کار رفته باشد.

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۵!$

ج) در آن ها حروف r, u به کار نرفته باشد.

جواب: $\binom{۶}{۵} \times ۵!$

مثال ۱۱۳: انجمن فرهنگ و هنر دانشگاه ۶ نفر عضو دارد. به چند طریق می‌توان از بین این ۶ نفر یک نفر رئیس، یک معاون اجرایی و یک مسئول امور مالی انتخاب کرد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰ √

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۳! = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳ \times ۲ \times ۱} \times ۶ = ۲۰ \times ۶ = ۱۲۰$

مثال ۱۱۴: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توانیم بسازیم؛ به طوری که دو رقم از عدد سه رقمی ساخته شده زوج باشد؟

جواب:

$$\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو رقم از زوج ها}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک رقم از فرد ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ارقام}}$$

مثال ۱۱۵: با ارقام ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ چند عدد سه رقمی با شرط رقم صدگان> رقم دهگان > رقم یکان می‌توان نوشت؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ √ ۴) ۱۲

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: ۱۰ $= \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ عدد از ۵ عدد}} \times \underbrace{۱}_{\text{فقط یک حالت وجود دارد}}$

که با سه رقم شرط برقرار شود.

تمرین۱۱: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یکی در میان در قفسه‌ای چید؟

۱) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳!$ ۲) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

۳) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$ ۴) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

مثال ۱۱۶: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در قفسه‌ای چید؛ به طوری‌که:

الف) کتاب‌های سال اول یکی در میان باشند.

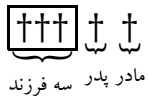
جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۳$

ب) هیچ دو کتاب سال دومی متوالی نباشد.

جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$

مثال ۱۱۷: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۶ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:



$$n(S) = P(۶,۵)\ ,n(A) = \underbrace{۲}_{\text{صندلی های متوالی}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}}$$

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۲}{P(۶,۵)} = \frac{۷۲}{۷۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

مثال ۱۱۸: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۷ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$n(S) = P(۷,۵)\ ,n(A) = \underbrace{۳}_{\text{صندلی های متوالی}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}}$$

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۳}{P(۷,۵)} = \frac{۱۰۸}{۲۵۲۰}$$

مثال ۱۱۹: هر یک از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۷)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$n(S) = P(۶,۵)\ \ , n(A) = ۴! \times ۲! \times ۲$$

مثال ۱۲۰: تعداد ۷ نفر که ۲ برادر در بین آن ها حضور دارند، مفروضند. از بین آن ها ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم و در یک ردیف کنار هم می نشانیم، با چه احتمالی دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف نشسته اند؟

جواب: درمحاسبه تعداد اعضای فضای نمونه ای، ابتدا ۵ نفر از ۷ نفر را انتخاب می کنیم و سپس آن ها را در یک ردیف می نشانیم که ۵! جایگشت دارند:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} \times ۵! = \frac{۷!}{۵! \times (۷-۵)!} \times ۵! = \frac{۷!}{۲} = ۲۵۲۰$$

برای آن که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند باید حتما در بین انتخاب شده ها باشند. در نتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقیمانده را انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند:

$$n(A) = \boxed{۲} \times \boxed{\binom{۵}{۳} \times ۳!} \times \boxed{۱} = ۱۲۰ \text{ و } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲۱}$$

تنها حالت جمع دو ترکیب:

$$\boxed{\text{نکته : } \binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k} = \binom{n+۱}{k}}$$

مثال ۱۲۱: حاصل عبارت $\binom{۲۵}{۹} + \binom{۲۵}{۱۰}$ برابر است با:

۱) $\binom{۲۶}{۱۰}$ ✓ ۲) $\binom{۲۵}{۱۱}$ ۳) $\binom{۲۶}{۱۱}$ ۴) $\binom{۵۰}{۱۹}$

جواب: $\binom{۲۵+۱}{۱۰} = \binom{۲۵}{۹} + \binom{۲۵}{۱۰}$

مثال ۱۲۲: حاصل عبارت $\binom{۱۰}{۵} + ۲\binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۳}$ برابر است با:

۱) $\binom{۱۲}{۵}$ ✓ ۲) $\binom{۱۲}{۶}$ ۳) $\binom{۱۱}{۶}$ ۴) $\binom{۱۰}{۶}$

جواب:

$$\binom{۱۰}{۳} + ۲\binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۵} = \underbrace{\binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۴}}_{\binom{۱۱}{۴}} + \underbrace{\binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۵}}_{\binom{۱۱}{۵}}$$

$$= \binom{۱۱}{۴} + \binom{۱۱}{۵} = \binom{۱۲}{۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

احتمال های مربوط به انتخاب

احتمال‌های مربوط به انتخاب مانند انتخاب مهره، انتخاب موش، انتخاب سیب،..

- الف) با هم
- ب) متوالیا
  - بدون جایگذاری
  - با جایگذاری

الف) اشیاءِ را با هم انتخاب کنیم.

مثال ۱۲۳: کیسه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف و با هم از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فقط یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = ۱۶۵ \, , n(A) = \binom{۵}{۱} \times \binom{۶}{۲} = ۷۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷۵}{۱۶۵}$$

ب) هر سه مهره آبی باشند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۷}{۰}}{۱۶۵} = \frac{۴}{۱۶۵}$$

ج) حداکثر دو مهره آبی باشد.

جواب:

$$P(\acute{B}) = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۴}{۱۶۵} = \frac{۱۶۱}{۱۶۵}$$

د) یک مهره آبی و حداکثر یک مهره زرد باشد؟

جواب:

ه) دو مهره سفید و حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب:

و) هر سه مهره همرنگ باشند.

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳}}{۱۶۵} = \frac{۱۴}{۱۶۵}$$

ز) مهره‌ها همرنگ نباشند.

جواب:

$$P(\acute{C}) = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۱۴}{۱۶۵} = \frac{۱۵۱}{۱۶۵}$$

نکته: احتمال مهره ها همرنگ باشند – ۱= احتمال حداکثر دو مهره همرنگ باشند.

ح) حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب:

احتمال مهره ها همرنگ باشند – ۱= احتمال حداکثر دو مهره همرنگ باشند

ط) مهره‌ها متمایز باشند (هیچ دو مهره‌ای هم رنگ نباشد).

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$P(D) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{۱۶۵} = \frac{۴۰}{۱۶۵}$$

ی) حداقل دو مهره هم رنگ باشد.

$$P(D') = ۱ - P(D) = ۱ - \frac{۴۰}{۱۶۵} = \frac{۱۲۵}{۱۶۵}$$

نکته: احتمال هیچ دو مهره ای همرنگ نباشند = ۱− احتمال حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ح) هیچکدام از مهره‌ها سفید نباشند.

جواب:

$$P(E) = \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{۱۶۵} = \frac{۲۰}{۱۶۵}$$

ط) حداقل یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$P(\acute{E}) = ۱ - \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵}$$

ی) یک مهره آبی و حداقل یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۱} \times \binom{۲}{۱} + \binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} \times \binom{۲}{۰}}{\binom{۹}{۳}}$$

ک) حداکثر سه مهره *آبی* باشد؟

جواب:۱

ل) حداقل دو مهره زرد باشد؟

جواب: $\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۲۴: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ اند؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۶}$ √ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۱۰}{۸۴}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

مثال۱۲۵: در جعبه‌ای۳ مهره‌ی سفید ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟ (سراسری تجربی ۹۴)

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ √ ۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

جواب:

$$P\left(\text{همرنگ نبودن ۲ مهره ی انتخابی}\right)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=$$

$$\frac{(۳\times۲)+(۳\times۵)+(۲\times۵)}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

تمرین۱۲: در جعبه ای ۴ مهره سفید و۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است ؟(سراسری تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

مثال۱۲۶: درظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم، با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می شود؟ (سراسری تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ √ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{(۴\times۱۰)+(۶\times۵)+(۴\times۱)}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۲۷: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ✓ ۴) $\frac{۳}{۵}$

جواب:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۳}{۱} \times \binom{۵}{۳}}{\binom{۸}{۴}} = \frac{۳۰}{۷۰} = \frac{۳}{۷}$$

مثال۱۲۸: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن ها خارج می کنیم، با کدام احتمال لا اقل یکی از موش ها سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$ ✓

جواب: خواسته سوال ۱یا ۲ یا ۳ تا از موش ها سفید باشند متمم آن برابر هیچ‌کدام سفید نباشند.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}') = ۱ - \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = ۱ - \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

تمرین۱۳: در جعبه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید است؟(سراسری تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

مثال۱۲۹: در آزمایشگاهی ۴ موش سفید و ۷ موش سیاه نگهداری می شوند. سه موش به تصادف بیرون می آوریم، احتمال آن که تعداد موش های سیاه بیشتر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۸۴}{۱۶۵}$ ۲) $\frac{۱۰۹}{۱۶۵}$ ✓ ۳) $\frac{۵۶}{۱۶۵}$ ۴) $\frac{۱۱۹}{۱۶۵}$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۷}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۷}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۲۱ \times ۴ + ۳۵ \times ۱}{۱۶۵} = \frac{۱۰۹}{۱۶۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱۳۰: در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن ها خارج می کنیم مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر دو موش سفید باشند.

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۶\times۱}{۴۵} = \frac{۶}{۴۵}$$

ب) فقط یک موش سفید باشد.

جواب:

$$P(B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۴\times۶}{۴۵} = \frac{۲۴}{۴۵}$$

ج) موش سفید در بین آن ها نباشد.

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۱\times۱۵}{۴۵} = \frac{۱۵}{۴۵}$$

متغیر تصادفی

اگر در آزمایشی، عددی منحصر به فرد به هر نتیجه ی آزمایش نسبت دهیم، این اختصاص عدد را متغیر تصادفی می نامیم. و آن را با حروف بزرگ $X, Y, \ldots$ نشان می دهیم.

مثال ۱۳۱: وقتی یک سکه را پرتاب می کنیم، فضای نمونه ای $S = \{پ , ر\}$ است. اگر متغیر تصادفی X تعداد رو آمدن باشد، داریم:

$$X: \text{تعداد رو آمدن} \Rightarrow X = ۰ , ۱$$

جدول توزیع احتمال: جدولی است که در آن تمام مقادیرمتغیر تصادفی و احتمال وقوع هریک آورده شده است.

مثال ۱۳۲: در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به صورت تصادفی ۲ موش از بین آن ها خارج می کنیم X تعداد موش های سفید خارج شده است:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x = \underset{\text{سفید}}{۰} \text{ یا } \underset{\text{سفید}}{۱} \text{ یا } \underset{\text{سفید}}{۲}$$

الف) $P(x = ۲)$ را حساب کنید.

جواب: $P(A) = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۶}{۴۵}$

ب) $P(x = ۱)$ را حساب کنید.

جواب: $P(B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۲۴}{۴۵}$

ج) $P(x = ۰)$ را حساب کنید.

جواب: $P(C) = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۱۵}{۴۵}$

د) بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟ (سراسری ۹۱)

جواب: $\frac{۸}{۱۵} = \frac{۲۴}{۴۵}$

ه) $P(x > ۱)$ را حساب کنید.

جواب:

$$P(x > ۱) = P(x = ۲) = \frac{۶}{۴۵}$$

ز) $P(۰ < x < ۲)$ را حساب کنید.

جواب:

$$P(۰ < x < ۲) = P(x = ۱) = \frac{۲۴}{۴۵}$$

ح) $P(۰ \leq x < ۲)$ را حساب کنید.

جواب:

$$P(۰ \leq x < ۲) = P(x = ۰) + P(x = ۱) = \frac{۱۵}{۴۵} + \frac{۲۴}{۴۵} = \frac{۳۹}{۴۵}$$

ط) $P(x \leq ۲)$ را حساب کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$P(x \le ۲) = P(x = ۰) + P(x = ۱) + P(x = ۲) = \frac{۶}{۴۵} + \frac{۲۴}{۴۵} + \frac{۱۵}{۴۵} = ۱$$

نتیجه: جمع همه‌ی احتمال‌ها همیشه یک است.

مثال۱۳۳: از بین ۳ موش سفید، ۴ موش سیاه و ۵ موش خاکستری، ۳ موش به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که حداقل دو موش همرنگ باشد؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ √ ۳) $\frac{۷}{۱۱۰}$ ۴) $\frac{۱۰۳}{۱۱۰}$

جواب: برای به‌دست آوردن احتمال آن که حداقل دو موش همرنگ باشد، از متمم استفاده می‌کنیم. که متمم آن برابراست با هیچ دو موشی مثل هم نباشد (موش‌ها متمایز باشند).

$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}} = ۱ - \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{\frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱}} = ۱ - \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{۲ \times ۱۱ \times ۱۰}$$

$$= ۱ - \frac{۳}{۱۱} = \frac{۸}{۱۱}$$

مثال ۱۳۴: ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم احتمال آن که:

الف) یک لامپ سالم باشد.

جواب: $P(A) = \frac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ب) هر سه لامپ سالم باشند. (سراسری ریاضی).

جواب: $P(B) = \frac{\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ج) حداقل یک لامپ سوخته باشد.

جواب: حداقل یک لامپ سوخته باشد، برابر است با ۳ یا ۲ یا ۱ $= C$ که متمم آن $\acute{C}$ برابر است با این‌که هیچ لامپی نسوزد.

(۳ یا ۲ یا ۱: لامپ سوخته)

↓

$$P(\acute{C}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۳۵: از میان ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم چهار نفره تشکیل دهیم. اگر افراد به تصادف انتخاب شوند، چقدر احتمال دارد:

الف) یک نفر زن باشد؟

جواب: $P(A) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۴}}$

ب) حداقل یک نفر مرد باشد؟

جواب: حداقل یک نفر مرد باشد برابر است با $B = \underbrace{۴ \text{ یا } ۳ \text{ یا} ۲ \text{ یا} ۱}_{\text{مرد}}$ که متمم آن $\acute{B}$برابر است با هیچ‌کدام مرد نباشند.

$$P(\acute{B}) = ۱ - \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۴}}{\binom{۹}{۴}}$$

ج) حداقل سه نفر زن باشد؟

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۴}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۴}}$$

مثال۱۳۶: از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱,۲,۳,۳ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند؛ اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن ها معرفی شوند با کدام احتمال:

الف) از هر گروه یک نفر معرفی شده اند؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ √ ۳) $\frac{۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۳}{۱۲۶} = \frac{۱}{۷}$$

ب) حداقل دو نفر از یک گروه آزمایشی باشند.

جواب:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$P(\acute{A}) = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۷} = \frac{۶}{۷}$$

مثال۱۳۷: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند؛ اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آن ها انتخاب شوند با کدام احتمال، تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوتند؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

جواب: متمم این مساله برابر است با تعداد افراد انتخابی مساوی باشند.

$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}} = ۱ - \frac{۶ \times ۱۵}{۲۱۰} = \frac{۲۰}{۲۱۰} = \frac{۴}{۷}$$

مثال۱۳۸: از هر یک از تیم های فوتبال، والیبال، هندبال و بسکتبال ۵ نفر به جلسه‌ای دعوت شده‌اند؛ اگر سه نفر به طور تصادفی از بین آن ها انتخاب شود مطلوبست احتمال آن که:

الف) دو به دو هم تیمی نباشند.

جواب: فضای نمونه‌ای برابر است با انتخاب ۳ نفر از کل افراد. یعنی ۲۰ نفر و برای پیشامدآن، ابتدا از ۴ تیم، ۳ تیم انتخاب می‌کنیم، سپس از هر تیم یک نفر انتخاب می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

ب) فقط دو نفر از آن ها هم تیمی باشند.

جواب: برای پیشامدآن ابتدا یک تیم از چهار تیم انتخاب می‌کنیم، سپس ۲ نفر از آن تیم بیرون آورده و سپس یک نفر باقیمانده را از بقیه افراد، یعنی ۱۵ نفر انتخاب می‌کنیم.

$$P(B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

مثال۱۳۹: از میان ۲۰ دانش‌آموز که در ۴ ردیف مساوی روی نیمکت‌های یک کلاس نشسته‌ان، دو نفر را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن که هر دو از یک ردیف باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۴}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۹}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۲۰}{۲}}=\frac{۱۰+۱۰+۱۰+۱۰}{۱۹۰}=\frac{۴۰}{۱۹۰}=\frac{۴}{۱۹}$$

مثال۱۴۰: از میان ۵ جفت کفش متمایز، سه لنگه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که در میان آن ها یک جفت موجود باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$ √

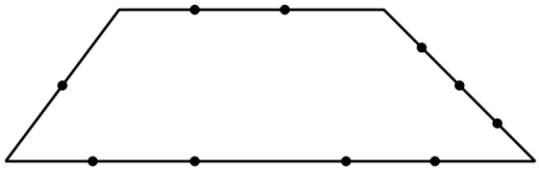
جواب:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک جفت از ۵ جفت}}\times\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{یک لنگه از ۸ لنگه باقیمانده}}=۵\times۸=۴۰$$

$$P(A)=\frac{۴۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳}$$

مثال۱۴۱: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، ۴ نقطه به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که با ۴ نقطه ی انتخاب شده بتوان یک چهار ضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهار ضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی)



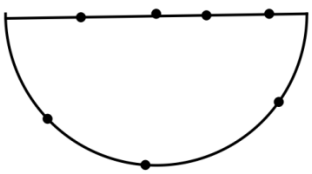
۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$ √

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

مثال۱۴۲: از نقاط شکل زیر سه نقطه به تصادف خارج می کنیم؛ احتمال آن که نقاط انتخاب شده تشکیل مثلث بدهند کدام است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



۱) $\frac{۳۰}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۵}$ √

جواب:

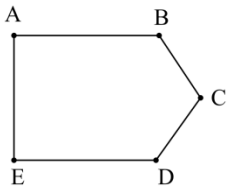
$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}} = ۱ - \frac{۴}{۳۵} = \frac{۳۱}{۳۵}$$

نکته: در صورتی که سه نقطه روی یک خط باشند، مثلث تشکیل نمی‌شود.

مثال۱۴۳: دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این دو رأس مجاور باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ √ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

جواب:



$$A_{\text{پیشامد}} = \{AB, BC, CD, DE, EA\} \rightarrow P(A) = \frac{۵}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

مثال۱۴۴: اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند، اگر به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون آوریم، با کدام احتمال:

الف) جمع اعداد این دو کارت زوج است ؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۲}{۵}$ √ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

جواب: **جمع دو عدد وقتی زوج است که یا هردو زوج باشند یا هر دو فرد باشند.**

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۳ + ۳}{۱۵} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

ب) جمع اعداد این دو کارت فرد است؟

جواب:

جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی زوج و یکی فرد باشد.

$$P(B) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۹}{۱۵}$$

ج) ضرب اعداد این دو کارت زوج است؟

جواب:

ضرب دو عدد وقتی زوج است که یا هردو زوج باشند، یا یکی زوج یکی فرد.

$$P(C) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۱۲}{۱۵}$$

مثال۱۴۵: اعداد ۹،...،۲،۱ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است؛ به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است. (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

جواب:

$$A_{\text{پیشامد}} = \{(۲,۹), (۳,۸), (۴,۷), (۵,۶)\}\ , P(A) = \frac{۴}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

مثال۱۴۶: در ظرفی شش مهره با شماره های ۱,۲,۳,۴,۵,۶ ریخته شده اند دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ✓ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

جواب:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A\text{ پیشامد} = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۴), (۴,۵), (۵,۶)\}, P(A) = \frac{۵}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

مثال۱۴۷: در ظرفی ۱۰ مهره با شماره های ۱,۲,...,۱۰ موجود است. سه مهره به تصادف و با هم از جعبه خارج می کنیم؛ احتمال آن که عدد یکی از مهره ها ۵ و عدد هیچکدام ۱ یا ۲ نباشد کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۷}{۴۰}$ √

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۲۱}{۱۲۰} = \frac{۷}{۴۰}$$

مثال۱۴۸: از مجموعه $A = \{۱۱,۱۲, \dots ,۲۰\}$ یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ احتمال آن که این عدد یک عدد اول است چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$ √

جواب:

$$A\text{ پیشامد} = \{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}\text{ و}P(A) = \frac{۴}{\binom{۱۰}{۱}} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

احتمال های مربوط به انتخاب (متوالی و بدون جایگذاری)

نکته: در هنگام انتخاب مهره از کیسه ای به صورت متوالیاً اگر رنگ تک تک دفعات انتخاب به صراحت گفته شود، احتمال هر کدام را با توجه به شرط مهره قبلی به‌دست آورده و در هم ضرب می کنیم.

مثال۱۴۹: از کیسه‌ای محتوی ۵ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز، سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم؛ احتمال آن که اولی سفید، دومی و سومی قرمز باشند؛ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ √ ۴) $\frac{۳}{۳۵}$

جواب:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$P(A) = \underbrace{\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۷}{۱}}}_{\text{سفید}} \times \underbrace{\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}}}_{\text{قرمز}} \times \underbrace{\frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۱}}}_{\text{قرمز}} = \frac{۵ \times ۲ \times ۱}{۷ \times ۶ \times ۵} = \frac{۱۰}{۲۱۰} = \frac{۱}{۲۱}$$

مثال ۱۵۰: از کیسه‌ای محتوی ۴ مهره سیاه و ۷ مهره‌ی قرمز دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج می کنیم، احتمال آن که:

الف) اولی سیاه و دومی قرمز باشد.

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} = \frac{۴}{۱۱} \times \frac{۷}{۱۰} = \frac{۲۸}{۱۱۰} = \frac{۱۴}{۵۵}$$

ب) اولی قرمز و دومی قرمز باشد.

جواب:

$$P(B) = \frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} = \frac{۷}{۱۱} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۴۲}{۱۱۰} = \frac{۲۱}{۵۵}$$

ج) دومی قرمز باشد.

جواب: چون در مورد مهره‌ی اول صحبت نشده و فقط گفته احتمال قرمز بودن مهره‌ی دوم کدام است بنابراین می توان این طور فرض کرد که این مهره، اولین مهره‌ای است که دارد از جعبه خارج می شود. (مهره‌ی دوم جایگزین مهره‌ی اول می‌شود چون در مورد مهره‌ی اول صحبت نکرده است.)

راه حل اول تشریحی:

$$P(C) = \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} + \frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} = \frac{۴ \times ۷}{۱۱ \times ۱۰} + \frac{۷ \times ۶}{۱۱ \times ۱۰} = \frac{۷۰}{۱۱۰} = \frac{۷}{۱۱}$$

راه حل دوم کنکوری:

$$\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} = \frac{۷}{۱۱}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۵۱: در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره‌ی سیاه وجود دارد، دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۳}{۵}$

جواب:

راه حل اول تشریحی: اولین مهره سیاه و دومین مهره سفید، یا اولین مهره سفید و دومین مهره سفید باشد.

$$\frac{\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}}\times\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۴}{۱}}+\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}}\times\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۴}{۱}}=\frac{۹\times۶}{۱۵\times۱۴}+\frac{۶\times۵}{۱۵\times۱۴}=\frac{۸۴}{۲۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

راه حل دوم کنکوری:

$$\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

مثال۱۵۲: از کیسه‌ای محتوی ۴ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی سفید، سه مهره یکی پس از دیگری به تصادف خارج می کنیم؛ احتمال آن که اولی سفید و سومی سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۴}$

جواب: چون درمورد مهره‌ی دوم صحبت نکرده، مهره‌ی سوم جایگزین مهره‌ی دوم می‌شود.

روش کنکوری: $P(A)=\frac{\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{سفید}}}{\binom{۱۰}{۱}}\times\frac{\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{سفید}}}{\binom{۹}{۱}}=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$

نکته: اگر در سؤال یکی پس از دیگری (متوالی) انتخاب کردیم و در مورد بدون جایگذاری یا با جایگذاری صحبتی نکرد، منظور بدون جایگذاری است.

مثال۱۵۳: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شوند. به طور تصادف متوالیاً سه موش از بین آن ها انتخاب می شود، با کدام احتمال:

الف) اولین موش سفید، دومین موش سفید و سومین موش سیاه باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}}\times\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}}$$

ب) اولین موش سفید، دومین موش سیاه و سومین موش سیاه باشد.

جواب:

$$P(B)=\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}}\times\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}}$$

ج) اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد.(سراسری تجربی ۸۸)

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

جواب: چون در مورد موش دوم صحبتی نکرده است موش سوم به جای موش دوم قرار می گیرد.

روش کنکوری: $\frac{\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{موش سفید}}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{موش سیاه}}}{\binom{۷}{۱}}$

د) اولین موش سفید و دومین موش سیاه باشد.

جواب: چون درمورد موش سوم صحبتی نشده، با موش سوم کاری نداریم.

$$P(C)=\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}}$$

ه) اولین موش سیاه و دومین موش سیاه باشد.

جواب: چون درمورد موش سوم صحبتی نشده، با موش سوم کاری نداریم.

$$P(D)=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۷}{۱}}$$

و) دومین موش سفید باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: چون درمورد موش اول صحبتی نکرده است؛ موش دوم جایگزین موش اول می‌کنیم.

$$P(E) = \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}}$$

ز) سومین موش سیاه باشد.

جواب: چون درمورد موش اول و دوم صحبتی نکرده است موش سوم به عنوان موش اول در نظر گرفته می‌شود.

$$P(F) = \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}}$$

نکته: هرگاه قسمتی از فضای نمونه را بدون آگاهی از چند و چون آن حذف کنیم و سپس بخواهیم احتمال پیشامد دیگری، از همین فضای نمونه ای را حساب کنیم، می توان فرض کرد که اعضای حذف شده، به علت فاش نکردن اطلاعات فضای نمونه ای هم چنان در فضای نمونه ای حضور دارند.

مثال۱۵۴: ظرفی شامل ۳ مهره سیاه و ۷ مهره سفید است. یک مهره به تصادف و بدون دیدن رنگ آن خارج کرده و کنار می گذاریم. سپس دو مهره ی دیگر بر می داریم. احتمال آن که این دو مهره نا همرنگ باشند کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

جواب:

راه حل اول تشریحی:

$$P(A) = \underbrace{\frac{۳}{۱۰}}_{\text{مهره اول سیاه}} \times \frac{\overbrace{\binom{۲}{۱} \times \binom{۷}{۱}}^{\text{دو مهره نا همرنگ (یک سیاه و یک سفید)}}}{\binom{۹}{۲}} + \underbrace{\frac{۷}{۱۰}}_{\text{مهره اول سفید}} \times \frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۶}{۱}}^{\text{دو مهره نا همرنگ (یک سیاه و یک سفید)}}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$= \frac{۳ \times ۲ \times ۷}{۱۰ \times ۳۶} + \frac{۷ \times ۳ \times ۶}{۱۰ \times ۳۶} = \frac{۱۶۸}{۳۶۰} \xrightarrow{\div ۲۴} = \frac{۷}{۱۵}$$

راه حل دوم کنکوری:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۲۱}{۴۵} = \frac{۷}{۱۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۵۵: در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره خارج می‌کنیم و بدون آن که به رنگ آن ها نگاه کنیم، مهره‌ی چهارمی خارج می‌کنیم، احتمال آن که مهره‌ی آخری سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ✓ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

نکته: در مسائل مربوط به متوالی و بدون جایگذاری، اگر خواسته ی سؤال در مورد ترتیب رنگ‌ها اشاره‌ای نکرد، فرض بر این می‌گذاریم که مهره‌ها را با هم برداشته‌ایم و مانند احتمال‌های مربوط به با هم حل می کنیم.

مثال۱۵۶: در یک کیسه ۲ مهره قرمز، ۴ مهره سیاه و ۵ مهره‌ی سفید وجود دارد و اگر سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از کیسه خارج کنیم، احتمال آن که دو مهره سیاه باشد کدام است؟

جواب:

راه حل اول: چون ترتیب نگفته خودمان یک ترتیب دلخواه را در نظر می گیریم، سپس در تعداد جایگشت ها ضرب می-کنیم.

$$P(A) = \left(\frac{\binom{۴}{۱}}{\underbrace{\binom{۱۱}{۱}}_{\text{سیاه}}} \times \frac{\binom{۳}{۱}}{\underbrace{\binom{۱۰}{۱}}_{\text{سیاه}}} \times \frac{\binom{۷}{۱}}{\underbrace{\binom{۹}{۱}}_{\text{غیر سیاه}}} \right) \times \frac{\overbrace{۳!}^{\text{کل جایگشت}}}{\underbrace{۲!}_{\text{تکراری ها}}}$$

$$= \frac{۴ \times ۳ \times ۷}{۱۱ \times ۱۰ \times ۹} \times \frac{۶}{۲} = \frac{۲۸}{۱۱۰} = \frac{۱۴}{۵۵}$$

راه حل دوم:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۶ \times ۷}{۱۶۵} = \frac{۴۲}{۱۶۵} = \frac{۱۴}{۵۵}$$

مثال۱۵۷: در یک کیسه ۴ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه وجود دارد. اگر سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از کیسه برداریم، احتمال آن که حداقل یکی از آن ها سفید باشد کدام است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱) $\frac{۴۷}{۵۵}$ ۲) $\frac{۴۱}{۵۵}$ ✓ ۳) $\frac{۴۳}{۵۵}$ ۴) $\frac{۳۹}{۵۵}$

جواب:

$$P(A) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = ۱ - \frac{۱ \times ۵۶}{۲۲۰} = \frac{۱۶۴}{۲۲۰} \xrightarrow{\div ۴} \frac{۴۱}{۵۵}$$

مثال ۱۵۸: از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می آوریم، سپس کارت دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ✓ ۴) $\frac{۴}{۷}$

جواب:

راه حل اول: ممکن است اولین کارت سفید و دومین کارت سفید باشد؛ یا اولین کارت سبز و دومین کارت نیز سبز باشد.

$$\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}} + \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}} = \frac{۳ \times ۲}{۷ \times ۶} + \frac{۴ \times ۳}{۷ \times ۶} = \frac{۱۸}{۴۲} \xrightarrow{\div ۶} \frac{۳}{۷}$$

راه حل دوم:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۳ + ۶}{۲۱} = \frac{۹}{۲۱} \xrightarrow{\div ۳} \frac{۳}{۷}$$

مثال۱۵۹: هر کدام از اعداد طبیعی یک رقمی را بر روی یک مهره نوشته و مهره‌ها را در درون یک کیسه می اندازیم؛ به تصادف و بدون جایگذاری مهره‌ای بیرون می‌آوریم، سپس مهره‌ی دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال مجموع اعداد روی مهره ی انتخابی زوج است؟

جواب:

راه حل اول:

$$\frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۱۰ + ۶}{۳۶} = \frac{۱۶}{۳۶} \xrightarrow{\div ۴} \frac{۴}{۹}$$

راه حل دوم: احتمال آن برابراست با این‌که اولین و دومین مهره زوج یا اولین و دومین مهره فرد باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۱}}+\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۱}}=\frac{۴\times۵}{۸\times۹}+\frac{۳\times۴}{۸\times۹}=\frac{۲۰+۱۲}{۷۲}=\frac{۳۲}{۷۲}\xrightarrow{\div۸}\frac{۴}{۹}$$

احتمال های مربوط به انتخاب (متوالی با جایگذاری)

مثال ۱۶۰: از کیسه‌ای محتوی ۵ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی قرمز، سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و با جایگذاری انتخاب می کنیم. احتمال آن که:

الف) اولی سفید، دومی سیاه و سومی قرمز باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}$$

ب) اولی سفید، دومی سفید و سومی قرمز باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}$$

پ) اولی سفید و سومی قرمز باشد.

جواب: چون درمورد مهره‌ی دوم صحبت نکرده است مهره‌ی سوم جایگزین مهره‌ی دوم می‌شود.

$$\frac{\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{قرمز}}}{\binom{۱۱}{۱}}$$

ت) یک مهره سفید، یک مهره سیاه و یک مهره قرمز باشد.

جواب: چون به ترتیب رنگ‌ها اشاره‌ای نکرده، خودمان یک ترتیب دلخواه می نویسیم و در تعداد جایگشت ها ضرب می کنیم. در این قسمت نمی‌توان مسأله را همانند انتخاب مهره ها با هم حل کرد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left(\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۲}{۱}}^{\text{سیاه}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{قرمز}}}{\binom{۱۱}{۱}}\right) \times \overbrace{۳!}^{\text{تعداد جایگشت}}$$

ث) دقیقاً دو مهره سفید باشد.

جواب:

راه حل اول: چون به ترتیب رنگ ها اشاره ای نشده، خودمان یک ترتیب دلخواه انتخاب می‌کنیم و سپس در تعداد جایگشت ها ضرب می‌کنیم.

$$\left(\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۶}{۱}}^{\text{غیر سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}}\right) \times ۳!$$

راه حل دوم: اگر مهره ها را متوالیاً با جایگذاری خارج کنیم و ترتیب رنگ ها را به ما نگوید و بخواهیم دقیقاً k مهره از یک نوع باشند با احتمال دو جمله ای سر وکار داریم. (احتمال دو جمله ای در بخش آخر این کتاب به طور مفصل توضیح داده شده است.)

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k(۱-p)^{n-k}$$

$$\begin{matrix} n=۳ \\ k=۲ \end{matrix} \Rightarrow \binom{۳}{۲}\left(\frac{۵}{۱۱}\right)^{۲}\left(\frac{۶}{۱۱}\right)^{۱} \quad p=\text{سفید بودن}\ \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}=\frac{۵}{۱۱}$$

مثال۱۶۱:کیسه‌ای حاوی ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است، اگر ۵ مهره به تصادف و با جایگذاری از کیسه خارج کنیم، احتمال آن که دقیقاً سه بار سفید بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۴}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۴۰}{۲۴۳}$ √

جواب: گزینه ۴

راه حل اول:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left(\frac{\overbrace{\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۶}{۱}}\times\frac{\overbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}}^{\text{سیاه}}}{\binom{۶}{۱}}\right)\times\frac{۵!}{۳!\times۲!}=\left(\frac{۲^{۳}\times۴^{۲}}{۶^{۵}}\right)\times\frac{۱۲۰}{۶\times۲}$$

$$=\frac{۱۲۸}{۷۷۷۶}\times۱۰=\frac{۱۲۸۰}{۷۷۷۶}\xrightarrow{\div۳۲}\frac{۴۰}{۲۴۳}$$

راه حل دوم: احتمال دوجمله‌ای

$$P_{\text{سفید}}=\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$\underset{k=۳}{\overset{n=۵}{}}\ P(x=۳)=\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=۱۰\times\frac{۱}{۲۷}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۴۰}{۲۴۳}$$

مثال۱۶۲: از مجموعه$A=\{۱,۲,۳,۴\}$ سه بار و با جایگذاری عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آن که:

الف) هر سه بار عددی زوج خارج شود چقدر است؟

جواب:

$$\left(\underbrace{\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}}_{\text{زوج}}\right)\times\frac{۳!}{۳!}=\frac{۸}{۶۴}\times\frac{۶}{۶}=\frac{۱}{۸}$$

ب) دقیقاً دو بار زوج بیاید؟

جواب:

$$\left(\underbrace{\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}}_{\text{زوج}}\times\underbrace{\frac{۲}{۴}}_{\text{فرد}}\right)\times\frac{۳!}{۲!}=\frac{۸}{۶۴}\times۳=\frac{۲۴}{۶۴}\xrightarrow{\div۸}\frac{۳}{۸}$$

مثال۱۶۳: ظرفی حاوی سه مهره ی سیاه و ۵ مهره‌ی سفید است، یک مهره به تصادف از جعبه خارج می کنیم و پس از مشاهده رنگ، آن را به جعبه برمی گردانیم و مجدداً مهره‌ی خارج می کنیم احتمال آن که فقط یک بار سفید آمده باشد کدام است؟ (بار دوم سفید و بار اول سیاه یا بار دوم سیاه و بار اول سفید)

جواب:

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

راه حل اول: اگر بار اول سفید بیاید، باید بار دوم سیاه باشد. اگر بار اول سیاه بیاید باید بار دوم سفید باشد.

بار اول سفید بار دوم سیاه بار اول سفید بار دوم سفید

$$\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{بار اول سفید}}}{\binom{۸}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}}^{\text{بار دوم سیاه}}}{\binom{۸}{۱}} + \frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}}^{\text{بار اول سفید}}}{\binom{۸}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{بار دوم سفید}}}{\binom{۸}{۱}} = \frac{۵ \times ۳}{۸ \times ۸} + \frac{۳ \times ۵}{۸ \times ۸} = \frac{۳۰}{۶۴} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱۵}{۳۲}$$

راه حل دوم احتمال دو جمله ای :

$$\text{سفید بودن } P = \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}} = \frac{۵}{۸}, \begin{matrix} n = ۲ \\ k = ۱ \end{matrix} \quad P(x = ۱) = \binom{۲}{۱}\left(\frac{۵}{۸}\right)^{۱}\left(۱ - \frac{۵}{۸}\right)^{۱}$$

$$\rightarrow ۲ \times \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۸} = \frac{۱۵}{۳۲}$$

احتمال های مربوط به انتخاب از دو جعبه

مثال۱۶۴: در جعبه‌ی A، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه در جعبه B، ۳ مهره‌ی سفید و ۴

مهره‌ی سیاه قرار دارد، از هر یک از دو جعبه یک مهره بیرون می کشیم احتمال آن‌که همرنگ باشند.

جواب: احتمال آن که دو مهره همرنگ باشند، برابر است با احتمال آن که مهره‌ی جعبه‌ی B سیاه و مهره‌ی جعبه‌ی A سیاه. یا مهره‌ی جعبه‌ی B سفید و مهره‌ی جعبه‌ی A سفید باشد.

$$\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۱}} \times \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}} + \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۵}{۱}} \times \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}} = \frac{۲ \times ۳}{۵ \times ۷} + \frac{۳ \times ۴}{۵ \times ۷} = \frac{۱۸}{۳۵}$$

مثال۱۶۵: در ظرفی ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه و یک مهره‌ی سبز وجود دارد. در ظرف دیگر نیز، ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سبز قرار دارد. حالا به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم؛ با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟ (سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$ √

جواب:

$$۱ - \left(\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} \times \frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۸}{۱}} + \frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\right) = ۱ - \left(\frac{۴ \times ۶}{۱۰ \times ۸} + \frac{۱ \times ۲}{۱۰ \times ۸}\right)$$

$$\rightarrow ۱ - \frac{۲۶}{۸۰} = \frac{۵۴}{۸۰} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۲۷}{۴۰}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۶۶: در جعبه A، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد. از هر ظرف به تصادف دو مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال ۴ مهره‌ی خارج شده همرنگ هستند؟

جواب:

$$\underbrace{\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}}_{\text{۲ مهره ی } A\text{سفید}} \times \underbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}}_{\text{۲ مهره ی } B\text{سفید}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}}_{\text{۲ مهره ی } A\text{ سیاه}} \times \underbrace{\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}}_{\text{۲ مهره ی } B\text{سیاه}}$$

احتمال های دو انتخابی (ابتدا انتخاب جعبه سپس انتخاب مهره)

مثال۱۶۷: دو ظرف همانند داریم که در ظرف اول، ۶ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه و در ظرف دوم، ۶ مهره ی سفید و ۸ مهر ه ی سیاه قرار گرفته است، با چشم بسته یکی از دو ظرف را اختیار کرده و مهره ای از آن خارج میکنیم. احتمال این که این مهره سفید باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۱۷}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۶}{۷۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۷۰}$

جواب: احتمال این که این مهره سفید باشد برابر است با انتخاب ظرف اول ومهره سفید باشد یا انتخاب ظرف دوم ومهره سفید باشد.

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۴}{۱}} = \frac{۶}{۲۰} + \frac{۶}{۲۸} = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۴} = \frac{۴۲+۳۰}{۱۴۰} = \frac{۷۲}{۱۴۰} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۳۶}{۷۰}$$

مثال۱۶۸: در اولین ظرف از سه ظرف همانند، ۳ مهره سفید و ۹ مهره سیاه و در دومین ظرف ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه داریم. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها یک مهره بیرون می‌آوریم احتمال آن که این مهره سیاه باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۳}$

جواب: احتمال آن که آن مهره سیاه باشد برابراست با انتخاب ظرف اول ومهره سیاه باشد یا انتخاب ظرف دوم ومهره سیاه باشد یا انتخاب ظرف سوم ومهره سیاه باشد.

$$\frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۲}{۱}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}} + \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۷}{۲۴}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

* چون ظرف سوم همگی سیاه هستند، پس احتمال سیاه بودن در ظرف سوم قطعی (حتمی) است. بنابراین احتمال آن یک است.

مثال۱۶۹: ظرف A، دارای ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ظرف B، دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ظرف C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه است. یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و ۳ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال:

الف) دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟

جواب:

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۲}{۱}}{\binom{۸}{۳}}$$

ب) هر سه مهره‌ی خارج شده، سفید هستند؟

جواب:

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۶}{۳}\binom{۲}{۰}}{\binom{۸}{۳}}$$

ج) سه مهره از مهره های خارج شده، سیاه می باشد؟

جواب: انتخاب سه مهره سیاه از ظرف سوم یک پیشامد غیر ممکن است؛ چون از ۲ مهره‌ی سیاه نمی توان ۳ مهره‌ی سیاه انتخاب کرد.

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۳}{۳}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{۱}{۳}\times ۰$$

مثال۱۷۰: در ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه قرار دارد؛ و هر یک از دو ظرف B, C حاوی ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه می‌باشد. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ √　　۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$　　۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$　　۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$ √

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب: باید یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و سپس احتمال سفید بودن دو مهره از آن را به‌دست آورد. انتخاب ظرف A و ۲ تا از ۴ مهره‌ی سفید انتخاب شوند، یا انتخاب ظرف B و ۲ تا از ۶ مهره‌ی سفید انتخاب شوند، یا انتخاب ظرف C و ۲ تا از ۶ مهره‌ی سفید انتخاب شوند.

$$P = \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} \rightarrow$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۶۰}{۱۲۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۵}{۱۲۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۵}{۱۲۶} = \frac{۲۰}{۱۲۶} + \frac{۱۵}{۱۲۶} + \frac{۱۵}{۱۲۶} = \frac{۵۰}{۱۲۶} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۲۵}{۶۳}$$

مثال ۱۷۱: در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و دو مهره از آن بیرون می‌آوریم. باکدام احتمال هردو مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ✓ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

جواب: باید یکی از دو ظرف را انتخاب کرده و سپس احتمال سفید بودن هر دو مهره از آن را به‌دست آوریم.

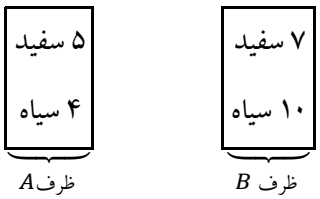
$$P = \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۶}{۴۲} + \frac{۳}{۷۲} = \frac{۴۳۲ + ۱۲۶}{۳۰۲۴} = \frac{۵۵۸}{۳۰۲۴} \xrightarrow{\div ۱۸} \frac{۳۱}{۱۶۸}$$

احتمال های انتقالی

مثال ۱۷۲: دو ظرف داریم، در ظرف اول ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در ظرف دوم ۷ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه موجود است. از ظرف یک مهره برداشته و بدون روئیت در ظرف دوم قرار می دهیم. آن گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی ۸۴, ۷۵)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ ✓ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

جواب: احتمال این‌که مهره ای که از ظرف دوم بیرون می‌آوریم سفید باشد برابر است با آن که مهره‌ی انتقالی از ظرف اول سفید باشد یا سیاه.



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{۵}{۹} \times \frac{۸}{۱۸} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۷}{۱۸}$$

مهره ی انتقالی از ظرف اول سیاه است. مهره ی انتقالی از ظرف اول سفید است.

$$\rightarrow \frac{۴۰}{۱۶۲} + \frac{۲۸}{۱۶۲} = \frac{۶۸}{۱۶۲} \overset{\div ۲}{\rightarrow} \frac{۳۴}{۸۱}$$

مثال۱۷۳: دو ظرف همانند A, B به ترتیب A دارای ۵ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز و B دارای ۶ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز است، ۴ مهره از ظرف A و ۳ مهره از ظرف B خارج کرده و در ظرف خالی C می ریزیم؛ و سپس از ظرف C یک مهره خارج می کنیم، احتمال آن که مهره‌ی خارج شده سیاه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۸}$ √

جواب: احتمال آن که مهره خارج شده از ظرف C سیاه باشد، برابر است با احتمال آن که مهره‌ی انتخابی از ظرف A باشد یا از ظرف B.

ظرف A	ظرف B	ظرف C
۵ سیاه	۶ سیاه	از A ۴
۲ قرمز	۲ قرمز	از B ۳

$$P = \frac{۴}{۷} \times \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۶}{۸} = \frac{۲۰}{۵۶} + \frac{۱۸}{۵۶} = \frac{۳۸}{۵۶} \overset{\div ۲}{\rightarrow} \frac{۱۹}{۲۸}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا