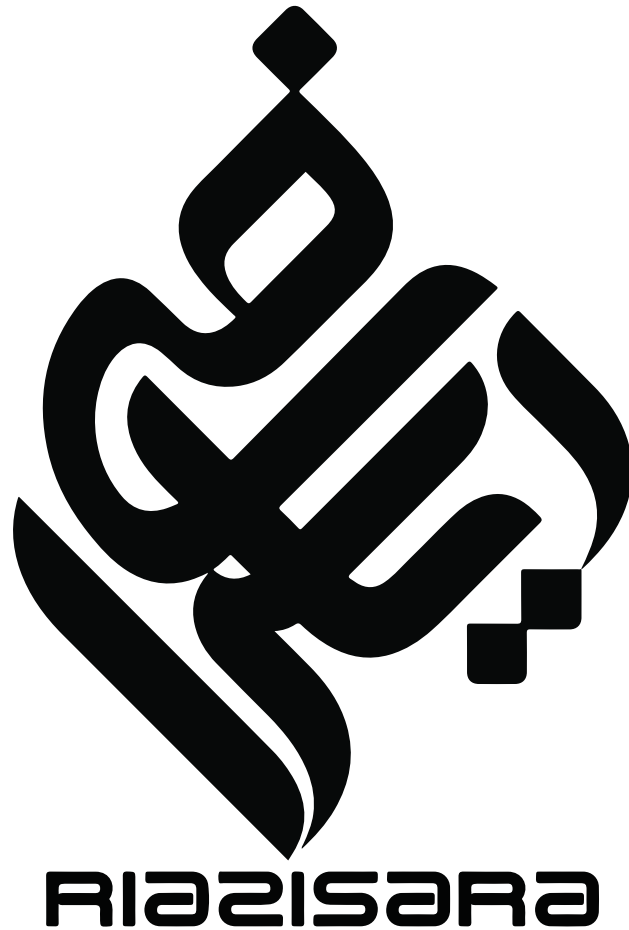




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی به سبک روحانی

فصل ششم

آنالیز و احتمال

مؤلف: محمد صادق روحانی

$$\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^n = a^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

مجموعه اعداد

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی :

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا :

$$\mathbb{R}$$

مجموعه اعداد حقیقی :

اعداد طبیعی را با حرف $\mathbb{N}$ که از کلمه ی **NATURAL** گرفته شده نمایش می دهند .

از این اعداد برای شمارش استفاده می کنیم یکی از زیر مجموعه های مهم اعداد طبیعی اعداد فرد هستند که با حرف **O (Odd)** نشان می دهیم.

زیر مجموعه دیگر اعداد زوج می باشند که با حرف **E (Even)** نشان می دهیم.

قاعده بخش پذیری بر ۲: عددی بر دو بخش پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد. (۰, ۲, ۴, ۶, ۸)

قاعده بخش پذیری بر ۳: عددی بر سه بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر سه بخش پذیر باشد.

قاعده بخش پذیری بر ۵: عددی بر پنج بخش پذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

فاکتوریل

فرض کنید اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰ را بفواهیم به صورت ضرب بنویسیم یعنی: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 10$ به جای نوشتن به صورت فوق از نماد فاکتوریل استفاده می‌کنیم.

فاصل ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را n فاکتوریل خوانده و به صورت: $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n!$ نشان می‌دهیم.

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

$$n!(n+1)(n+2)\dots(n+k) = (n+k)! \Rightarrow (5!) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 = 11!$$

$$0! = 1, \quad 1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$6! = 5! \times 6 = 720$$

$$7! = 6! \times 7 = 5040$$

اصل جمع: اگر برای انجام کار K مجبور به انجام یکی از کارهای $K_1, K_2, \dots, K_n$ باشیم و این کارها هیچ اشتراکی نداشته باشند به طوری که K_1 به m_1 طریق، K_2 به m_2 طریق و K_n به m_n طریق انجام پذیر باشد آن‌گاه برای انجام کار K راه‌های ممکن برابر است با:

$$P = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

مثال: برای رفتن از شهر بندرعباس به بوشهر سه راه زمینی، دو راه دریایی و یک راه هوایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از بندرعباس به بوشهر رفت؟

$$P = 3 + 2 + 1 = 6$$

اصل ضرب: اگر کاری از چند قسمت تشکیل شده باشد، تعداد حالت‌های هر قسمت را حساب می‌کنیم و اونارو در هم ضرب می‌کنیم. یعنی اگر برای انجام کاری مانند K انجام کارهای K_1 تا K_n به ترتیب و پشت سر هم لازم باشد، به طوری که K_1 به m_1 طریق، K_2 به m_2 طریق و K_n به m_n طریق، آن‌گاه کار K با:

$$P = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$$

مثال:

- از میان ۷ زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توان یک مرد و یک زن انتخاب کرد به طوری که همسر یکدیگر نباشند؟

$$P = 7 \times 6 = 42$$

انتخاب یک زن از ۶ زن غیر
از همسر مرد انتخاب شده

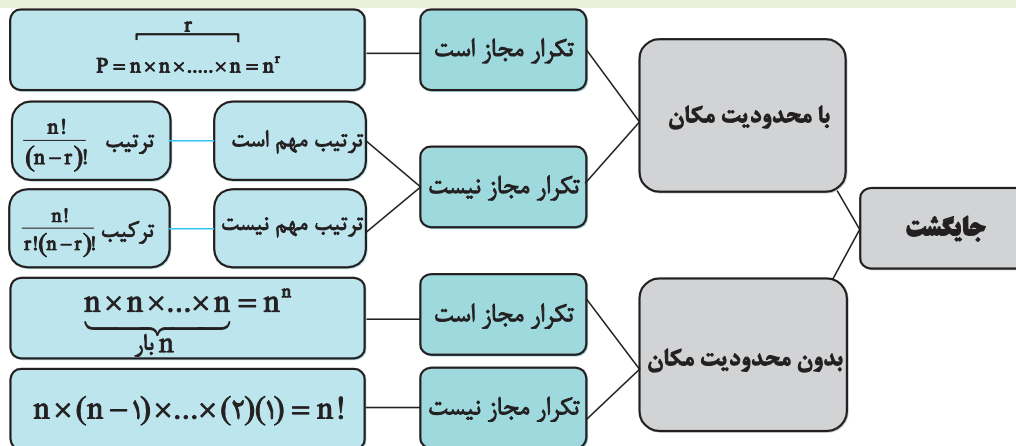
انتخاب یک مرد

تذکره: همیشه در حل مسائل مربوط به اصل ضرب از جایی شروع کنید که در صورت سوال یا در معنای آن محدودیتی وجود دارد

تبدیل یا جایگشت

جایگشت: ترتیب قرار گرفتن یا پرفش مکان اشیاء را جایگشت گویند.
اگر n شیء متمایز کنار یک دیگر قرار گیرند و از جایگشت عناصر n شیء حالت‌های مختلف به وجود آید، آرایش آن‌ها، تبدیل n شیء نامیده می‌شود.

اساساً برای حل مسائل جایگشت از الگوی زیر استفاده کنید.



نکته کلمه‌سازی و عددسازی از مسائل رایج آنالیز ترکیبی اند، برای کلمه‌سازی باید حروف را کنار هم بچینیم معمولاً تکرار حروف مجاز نیست. عددسازی هم با اصل ضرب انجام می‌شود، یادت باشه رقم اول سمت چپ نباید صفر بشه. البته کد و رمز با عدد متفاوت و رقم سمت چپ آن و ارقام دیگر نیز می‌توانند صفر باشند.

جایگشت r شیء از n شیء (ترتیب):

هرگاه بفوایم از میان n شیء r شیء را انتخاب کنیم، به طوری که جایگشت آن‌ها برای ما اهمیت داشته باشد آن را با

$$p(n, r) \text{ نشان می‌دهیم و تعداد حالات آن از رابطه: } p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ به دست می‌آوریم.}$$

مثال: با ارقام ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۹ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟

الف) اگر تکرار مجاز نباشد.

ب) اگر تکرار مجاز باشد.

الف) $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$

ب) $P = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

ترکیب یعنی انتخاب r تا از n شیء که ترتیب این انتخاب مهم نباشد اساساً در اکثر انتخاب‌ها ترتیب مهم نیست به جز در کلمه‌سازی، عددسازی و صف و یا مواردی که افراد یا اشیاء انتخاب شده کار یکسانی انجام نمی‌دهند و آن را

$$\text{با } c(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ نشان می‌دهیم.}$$

* در ترکیب، دو گروه فقط و فقط وقتی متمایز هستند که مجموعه اشیای آن‌ها متفاوت باشند، مثلاً $\{a,b,d\}, \{a,d,c\}$ دو ترکیب متمایز از اشیای $\{a,b,c,d\}$ هستند ولی $\{a,b,c\}, \{a,c,b\}$ متمایز نیستند.

مثال: از ۱۰ بفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که هتماً یک بفت در میان آن‌ها باشد؟

$$P = \binom{10}{1} \times \binom{18}{1} = 10 \times 18 = 180$$

انتخاب یک بفت
از ۱۰ بفت

انتخاب یک لنگه از
۱۸ کفش باقیمانده

اگر از میان n شی k شی بخواهند همواره کنار هم باشند این k شی را یک شی در نظر گرفته و از تعداد دسته‌ها کم می‌شوند و جایگشت آن‌ها در جایگشت اشیای دیگر ضرب می‌شود.

جایگشت مجموعه‌ی k شی به همراه $(n-k)$ شی

$$P = (n-k+1)! \times k!$$

جایگشت k شی کنار هم

مثلاً با حروف action چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت به طوری که حروف صدادار کنار یکدیگر باشند.

aoi c t n

$$4! \times 3! = 144$$

تبدیل با تکرار (جایگشت n شیء وقتی بعضی از اشیاء تکراری باشند)

اگر از میان n عنصر k_1 تای آنها مانند هم و k_r تای آنها مانند هم و ... k_m تای آنها مانند هم باشند یا از میان n تا عنصر

k_1 تای آن در یک لانه و k_r تای آن در لانه دوم و ... تعداد حالات ممکن از رابطه $P = \frac{n!}{k_1! \times k_r! \times \dots \times k_m!}$ به دست می‌آید.

(در مفرج باید به تعداد تکرارها فاکتوریل قرار دهیم)

تعداد حالاتی که می‌توان n_1 شی مشابه و ... n_k شی مشابه را کنار هم قرار داد برابر است با:

$$\frac{(n_1 + n_r + \dots + n_k)!}{(n_1! \times n_r! \times \dots \times n_k!)}$$

$$DDPP \Rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6$$

مثلاً در خانواده‌ای چهار فرزندی حالات ممکن دو دختر و دو پسر

$$kanoon \Rightarrow \frac{6!}{2!2!}$$

یا با حروف کلمه kanoon چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت؟

۱) ۸ مسافر به چند طریق می‌توانند در یک هتل که دارای یک اتاق ۲ نفره و ۲ اتاق ۳ نفره می‌باشد اقامت کنند؟

$$P = \frac{8!}{2!3!3!} = 560$$

برای ۲ اتاق ۳ نفره

برای ۱ اتاق ۲ نفره

۲) با جایگشت ارقام ۰, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟

$$P = \frac{3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!2!} = 12$$

بظا ۲ و ۲ تا صفر

اگر بفوایم اعضای دو مجموعه n عضو A, B کنار هم به صورت یک در میان قرار گیرند این کار به $2 \times n! \times n!$ حالت امکان‌پذیر است.

۳) با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ چند عدد ۸ رقمی می‌توان نوشت به طوری که ارقام زوج و ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟

$$P = 4! \times 4! \times 2$$

پاسخ: ☒

هرگاه بفوایم n و $n+1$ نفر یا شی متمایز را یک در میان کنار هم قرار دهیم تعداد حالت‌ها برابر است با $P = (n)! \times (n+1)!$

۴) ۵ تکنسین و ۴ مهندس به چند حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند به طوری که تکنسین‌ها و مهندسان یک در میان کنار هم باشند.

$$P = 5! \times 4!$$

پاسخ: ☒

همیشه با گروهی شروع می‌کنیم که تعدادشان بیش‌تر است یعنی اول یک تکنسین می‌ایستد بعد یک مهندس و ادامه ...
ویژگی‌های ترکیب:

$$۱) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$۲) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$۳) \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$۴) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

$$۵) \binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Leftrightarrow a + b = n$$

$$۶) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$۷) \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \Rightarrow \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$$

قاعده‌ی پاسکال:

$$\binom{n}{k}$$

تعداد زیر مجموعه‌های k عضو یک مجموعه‌ی n عضو برابر است با:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضو برابر است با:

۵ حاصل $\binom{10}{3} + \binom{10}{6}$ را به دست آورید.

پاسخ: ☒

قاعده‌ی پاسکال

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7} \Rightarrow \binom{10}{3} + \binom{10}{6} = \binom{10}{7} + \binom{10}{6} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{7!(11-7)!}$$



تعداد ترکیبات شامل k عضو خاص:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

تعداد ترکیبات فاقد k عضو خاص:

$$\binom{n-k}{r}$$

تعداد ترکیبات شامل k_1 عضو خاص و فاقد k_2 عضو خاص:

$$\binom{n-k_1-k_2}{r-k_1}$$

۶ به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر که ۳ تای آنها کرجی هستند هیئت ۳ نفره انتخاب نمود که رئیس هیئت کرجی باشد؟
ثانیاً این عمل را به چند طریق می‌توان انجام داد مشروط بر آن که دو نفر دیگر غیر کرجی باشد؟

پاسخ: ☒

$$P = \binom{3}{1} \binom{9}{2} \quad \text{الف)} \quad P = \binom{3}{1} \binom{7}{2} \quad \text{ب)}$$

۷ به چند طریق می‌توان ۵ نفر را از میان افراد ۲۰ نفره یک کلاس انتخاب کرد به طوری که:

الف) شامل اشخاص A و B باشند؟

ب) شامل اشخاص D, E, F نباشند؟

ج) شامل اشخاص M و N باشند ولی شامل اشخاص P, Q, R نباشند؟

پاسخ: ☒

$$P_1 = \binom{18}{3} = 816 \quad \text{الف)} \quad P_2 = \binom{17}{5} = 6188 \quad \text{ب)} \quad P_3 = \binom{15}{3} = 455 \quad \text{ج)}$$



در مسائل احتمال مهم‌ترین کار شناخت و تعیین، تعداد اعضای فضای نمونه و پیشامد است. برای تعیین اعضاء، باید از قواعد آنالیز ترکیبی با دقت و وسواس استفاده کرد. این کار باعث سرعت و دقت در پاسخ‌گویی می‌شود.

احتمال

تعاریف مهم:

◀ آزمایش (پدیده) تصادفی: آزمایشی (پدیده‌ای) که قبل از رخداد، نتیجه‌ی آن معلوم نباشد ولی کل نتایج ممکن آن قابل پیش‌بینی باشد، آزمایش تصادفی می‌نامیم.
مانند پرتاب یک سکه یا یک تاس یا انتخاب یک عدد از بازه $(-1, 1)$ یا بیرون آوردن یک مهره از کیسه که در آن ۵ مهره سفید و ۷ مهره قرمز داریم که پیش از خارج کردن آن رنگ آن مشخص نیست، ولی در هر حال می‌دانیم یا سفید است و یا قرمز.

۸ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

به پدیده‌هایی که از به وقوع پیوستن آن‌ها اطمینان نداشته باشیم می‌گوییم.
(خرداد ۹۱) ☒ پاسخ: پدیده یا آزمایش تصادفی

فضای نمونه‌ای: مجموعه کل حالت‌های ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ممکن است شمارش پذیر و یا ناشمارا باشد، اگر شمارا باشد آن را فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامند و با $n(S)$ نمایش می‌دهند. برای مناسبه تعداد اعضای فضای نمونه‌ای اگر مجموعه‌ای بزرگ باشد باید با دقت از آنالیز ریاضی استفاده و آن را مناسبه کنیم.

اگر غیر قابل شمارش باشد آن را اصطلاحاً پیوسته می‌گویند. مانند انتخاب عددی از بازه $(0, 3)$ که بی‌شمار عدد در این بازه ناشمارش پذیر وجود دارد.

۹ اگر اعضای فضای نمونه‌ای قابل شمارش باشد آن را یک فضای نمونه‌ای می‌نامیم.
(خارج کشور خرداد ۹۴) ☒ پاسخ: گسسته

یک سکه را پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای آن:
 $S = \{P, R\}$
یک سکه را دوبار پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای آن:
 $S = \{(P, P), (P, R), (R, P), (P, P)\}$
سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم:
 $S = \{(R, R, R), (R, R, P), (R, P, R), \dots, (P, P, P)\}$

اگر یک آزمایش تصادفی از دو مرحله تشکیل شده باشد به طوری که برای مرحله اول m حالت و برای مرحله دوم نیز p حالت، امکان وقوع وجود داشته باشد. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر خواهد بود با:
 $n(S) = m \times p$

اگر تعداد حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی برابر با m باشد و بخواهیم این آزمایش تصادفی را k مرتبه تکرار کنیم، بخواهیم داشت:

$$n(S) = m^k$$

فضاهای مهم نمونه‌ای و تعداد اعضای آن‌ها: $n(S)$

فضایی نمونه‌ای پرتاب n سکه یا n بار پرتاب یک سکه: 2^n

فضایی نمونه‌ای پرتاب m تاس یا m بار پرتاب یک تاس: 6^m

فضایی نمونه‌ای پرتاب n سکه و m تاس: $2^n \times 6^m$

فضای نمونه‌ای انتخاب r شیء از n شیء: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

فضای نمونه‌ای خانواده‌ی n فرزندی: 2^n

تعریف پیشامد: به زیر مجموعه‌های فضای نمونه‌ای پیشامد می‌گویند.

پیشامدها را با حروف بزرگ مانند $A, B, \dots$ نشان می‌دهیم. در نمودار ون مقابل، A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S است.



وقوع پیشامد: هنگامی می‌گوییم پیشامد A رخ داده است که یکی از اعضای آن به عنوان نتیجه آزمایش اتفاق افتاده باشد. مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامد ظاهر شدن عدد زوج به صورت $A = \{2, 4, 6\}$ است حال وقتی می‌گوییم A رخ داده که در پرتاب تاس ۲ یا ۴ یا ۶ ظاهر شود.

اگر فضای نمونه n عضو داشته باشد آن‌گاه 2^n زیر مجموعه دارد بنابراین 2^n پیشامد خواهد داشت.

انواع پیشامد:

(۱) پیشامد ساده: پیشامدی که دارای یک برآمد باشد را پیشامد ساده می‌گوییم.

$$A = \{(6, 6)\}$$

مثال: در پرتاب دو تاس آمدن جفت شش:

$$A = \emptyset$$

(۲) پیشامد ناممکن: پیشامدی که هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد را پیشامد ناممکن می‌گوییم:

مثلاً در پرتاب تاس سالم پیشامد آمدن ۷ در این فضای نمونه‌ای تعوی است.

$$A = S$$

(۳) پیشامد مطمئن یا حتمی: پیشامدی که حتماً رخ می‌دهد را پیشامد مطمئن یا حتمی گویند:

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.



(دی ماه ۹۰)

پیشامد $A = \emptyset$ را پیشامد و پیشامد $A = S$ را پیشامد می‌نامیم.

☒ پاسخ: ناممکن - قطعی (حتمی)

۱۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای زیر را تعیین کنید.

انتخاب تصادفی دو رقم از بین ارقام ۲، ۳، ۵، ۷ و ساختن عدد دو رقمی به طوری که تکرار مجاز نباشد.

پاسخ: ✓

$$S = \{23, 25, 27, 32, 35, 37, 52, 53, 57, 72, 73, 75\}$$

$$n(S) = P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = 12$$

انتخاب دو عدد از چهار عدد هنگامی که ترتیب آن‌ها مهم است و تکرار مجاز نیست

۱۲ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B به طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

پاسخ: ✓

$$A \cap B'$$

$$\text{الف) } S = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, R, R), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\}$$

$$\text{ب) } A = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, R, P), (P, P, R)\}$$

$$\text{ج) } B = \{(P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\}$$

$$\text{د) } B' = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, R, R)\}$$

$$A \cap B' = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6)\}$$

۱۳ در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی متمایز با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ وجود دارد فضای نمونه‌ای و اعضای آن را در هر یک از آزمایش‌های زیر بنویسید.

الف) از این کیسه یک مهره خارج می‌کنیم.

ب) از این کیسه دو مهره با هم خارج می‌کنیم.

ج) از این کیسه دو مهره‌ی متوالی با جایگذاری خارج می‌کنیم.

د) از این کیسه دو مهره متوالی بدون جایگذاری خارج می‌کنیم.

پاسخ: ✓

$$\text{الف) } S = \{1, 2, 3, 4\} \quad n(S) = \binom{4}{1} = 4$$

ب) اعضای این مجموعه فوراً مجموعه‌هایی دو عضویند زیرا ترتیب در این انتخاب مهم نیست.

$$S = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \quad n(S) = \binom{4}{2} = 6$$

ج) عضوهای این مجموعه زوج مرتبند چون ترتیب خارج کردن مهره‌ها اهمیت دارد.

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), \dots, (4, 4)\} \quad n(S) = 4 \times 4 = 16$$

د) مشابه قبلی اما چون بدون جایگزینی پس $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ رخ نمی‌دهند.

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), \dots, (4, 3)\} \quad n(S) = 4 \times 3 = 12$$

۱۴

در یک خانواده‌ی ۳ فرزند، فضای نمونه‌ای را مشخص کنید و تعداد آن را حساب کنید.

✓ پاسخ: می‌دانیم چون تعداد فرزندان چهار می‌باشد $n(s) = 2^4 = 16$ است. ولی اگر از مفاهیم آنالیز به فوپی استفاده کنیم می‌توانیم پیشامدهای ممکن را بهتر درک کنیم. این فضای نمونه‌ای به فرم زیر است.

$$\frac{4!}{4!} = 1 \text{ هر چهار تا پسر}$$

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ حالات ممکن دو دختر و دو پسر}$$

{PPPP

PPPD

PPDD

DDDP

DDDD}

$$\frac{4!}{3!} = 4 \text{ حالات ممکن ۳ پسر و یک دختر}$$

$$\frac{4!}{3!} = 4 \text{ حالات ممکن ۳ دختر و یک پسر}$$

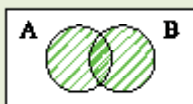
$$\frac{4!}{4!} = 1 \text{ هر چهار تا دختر}$$

اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای قوی شمارش اصل شمول و عدم شمول است.

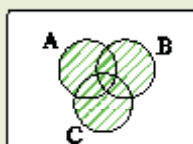
مثلاً فرض کنید A_1, A_2 مجموعه‌هایی متناهی باشند در این صورت:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



فرض A_1, A_2, A_3 مجموعه‌هایی متناهی باشند در این صورت:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



۱۵ چند عضو از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ بر ۲ یا ۳ بخش پذیر است؟

مجموعه S شامل ۴۰ عضو است که باید اعدادی را که بر ۲ یا ۳ بخش پذیرند بشماریم. فرض کنید مجموعه A_1 اعدادی باشند که بر ۲ بخش پذیرند (مضارب ۲) و مجموعه A_2 شامل اعدادی باشد که بر ۳ بخش پذیرند (مضارب ۳) در این صورت داریم:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{40}{2} \right\rfloor = 20, \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{40}{3} \right\rfloor = 13$$

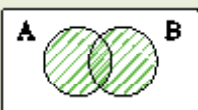
از طرفی برقی از اعداد هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند (اعضای مجموعه $A_1 \cap A_2$) هم در A_1 و هم در A_2 شمرده شده‌اند در واقع مضارب هر دو عدد (مضارب ۶) دوبار شمرده شده‌اند که باید آن‌ها را از $|A_1| + |A_2|$ کم کنیم پس داریم:

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{40}{6} \right\rfloor = 6 \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = 20 + 13 - 6 = 27$$

اجتماع دو پیشامد (عراقل یکی از دو پیشامد B, A)

اگر B, A دو پیشامد باشند $B \cup A$ وقتی رخ می‌دهد که یکی از پیشامدهای B, A یا هر دو رخ داده باشند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



اشتراک دو پیشامد هم A و هم B (هم A و هم B)

اگر B, A دو پیشامد باشند، $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد B, A رخ داده باشند.



تفاضل دو پیشامد $(A - B)$

اگر B, A دو پیشامد باشند $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ برده ولی پیشامد B رخ ندهد:



۱۶

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

(خرداد ماه ۹۴)

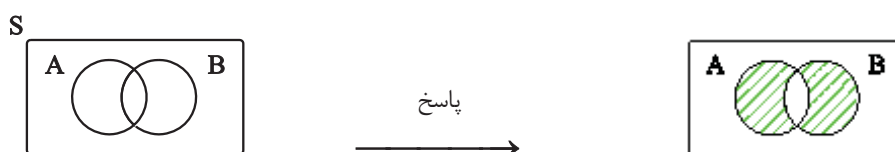
اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

پاسخ: ☒درست است. $A - B = A \cap B'$

۱۷

با توجه به شکل مقابل پیشامد $(A - B) \cup (B - A)$ را هاشور بزنید.

(خرداد ماه ۹۳)

پاسخ: ☒

۱۸

با توجه به شکل مقابل پیشامد $(A \cap B)'$ را هاشور بزنید.

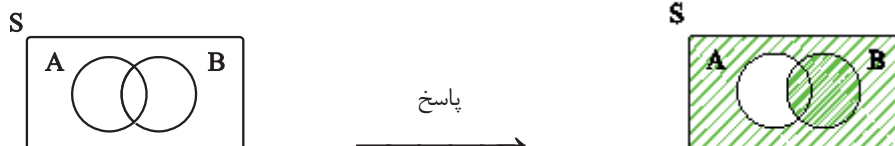
(دی ماه ۹۳)

پاسخ: ☒

۱۹

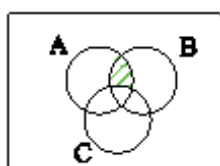
با توجه به شکل مقابل، پیشامد $(A - B)'$ هاشور بزنید.

(دی ماه ۹۴)

پاسخ: ☒

۱۹

ناحیه‌ی هاشور زده را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ: ☒

$$A \cap B \cap C'$$

۲۰

هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۶ را روی کارت نوشته و آن‌ها را مخلوط می‌کنیم مطلوب است تعیین:

(۱) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.

(۲) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.(۳) پیشامد B که در آن عدد روی کارت ۱ رقمی باشد.(۴) پیشامدهای: $A \cap B, B - A$ پاسخ: ☒

$$۱) S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$۲) A = \{3, 9, 15\}$$

$$۳) B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\Rightarrow \quad ۴) A \cap B = \{3, 9\} \quad \text{و} \quad B - A = \{1, 5, 7\}$$

۲۱) ارقام ۵, ۳, ۰, ۹ را در نظر بگیرید مطلوب است تعیین:

(۱) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.

(۲) پیشامد A آن که اعداد دو رقمی مضرب ۵ باشند.

(۳) پیشامد B آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشند.

(۴) پیشامد $A \cap B'$

پاسخ: ☒

$$n(s) = 3 \times 3 = 9$$

$$S = \{30, 35, 39, 50, 53, 59, 90, 93, 95\}$$

$$A = \{30, 35, 50, 90, 95\}$$

$$\Rightarrow A \cap B' = \{30, 35, 50\}$$

$$B = \{53, 59, 90, 93, 95\} \quad B' = \{30, 35, 39, 50\}$$

۲۲) تاسی را دو بار می‌اندازیم و پیشامد A آن است که عدد رو شده‌ی تاس اول ۴ باشد و پیشامد B آن است که مجموع اعداد رو شده‌ی

دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند. هر یک از پیشامدهای A و B و $A \cap B$ را مشخص کنید. (خارج کشور خرداد ۹۴)

پاسخ: ☒

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1), (1,2), \dots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{matrix} \right\} \Rightarrow n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$$B = \{(3,4), (4,3), (2,5), (5,2), (1,6), (6,1), (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$A \cap B = \{(4,3)\}$$

$$A - B = \{(4,1), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

احتمال: اندازه‌گیری شانس

احتمال هم شانس در فضای گسسته

فضای گسسته را فضایی گزفتم که تعداد عناصر آن متناهی باشند و بنابراین هر زیر مجموعه آن دارای تعداد معینی عضو است که قابل شمارش است و چون هر زیر مجموعه یک فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌باشد، بنابراین با تعیین تعداد اعضای متناظر با هر پیشامد و تقسیم آن بر تعداد کل عضوهای فضای نمونه‌ای، می‌توان شانس وقوع آن پیشامد یا احتمال رخداد آن را اندازه گرفت. (عملاً همیشه فراوانی نسبی پیشامد A نسبت به فراوانی کل که همان S است).
به زبان ریاضی احتمال وقوع پیشامد A را با رابطه رو به رو نشان می‌دهیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

که $n(A)$ تعداد عضوهای A (تعداد حالات مطلوب) و $n(S)$ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای S است. (تعداد حالات ممکن) احتمال در فضاهای گسسته هم شانس را احتمال کلاسیک می‌گویند.

$$A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

۲۳ دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم احتمال وقوع پدیده‌های زیر کدام است؟

۱) هر دو سکه به پشت بیفتد.

۳) حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بیفتد.

پاسخ:

فضای نمونه‌ای آزمایش $S = \{(P, R), (R, R), (R, P), (P, P)\}$ می‌باشد.

$$\text{پیشامد آمدن دو سکه به پشت ۱)} \Rightarrow A_1 = \{(P, P)\} \Rightarrow P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{پیشامد یکی پشت یکی رو ۲)} \Rightarrow A_2 = \{(R, P), (P, R)\} \Rightarrow P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۴ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است محاسبه احتمال‌های زیر

الف) دو فرزند این خانواده پسر باشد.

ب) حداقل دو فرزند خانواده پسر باشد

ج) تعداد فرزندان پسر از تعداد فرزندان دختر بیش تر باشد.

$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{16} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{16} + \frac{\binom{4}{3}}{16} + \frac{\binom{4}{4}}{16} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

حداقل دو فرزند پسر یعنی دو تا، سه تا یا چهار تا پسر

راه دوم (ب):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PPDD} \\ \frac{4!}{2!2!} = 6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PPPD} \\ \frac{4!}{3!} = 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PPPP} \\ \frac{4!}{4!} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow n(A) = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{16}$$

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{16} = \frac{5}{16}$$

تعداد فرزندان پسر بیش تر یعنی ۳ تا پسر یا هر ۴ تا پسر باشد.

راه دوم (ج):

$$\left\{ \begin{array}{l} n(S) = 2^4 = 16 \\ A_1 = \{ \text{تعداد پسرها بیشتر از تعداد دخترها} \} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PPPD} \\ \frac{4!}{3!} = 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PPPP} \\ \frac{4!}{4!} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow n(A) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{16}$$

۲۵ در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سیاه وجود دارد.

- (۱) از این کیسه دو مهره با هم بیرون می‌آوریم، احتمال این که دو مهره قرمز باشد، چه قدر است؟
 (۲) از این کیسه سه مهره با هم بیرون می‌آوریم، احتمال این که مهره‌ها هم‌رنگ باشند، چه قدر است؟
 (۳) از این کیسه چهار مهره بیرون می‌آوریم، احتمال این که حداقل دو مهره سیاه باشد چه قدر است؟

پاسخ:

$$1) P(A) = \frac{\binom{5}{2} \binom{7}{0}}{\binom{12}{2}} \quad 2) P(B) = \frac{\binom{5}{3} \binom{7}{0} + \binom{5}{0} \binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} \quad 3) P(C) = \frac{\binom{7}{2} \binom{5}{2} + \binom{7}{3} \binom{5}{1} + \binom{7}{4} \binom{5}{0}}{\binom{12}{4}}$$

۲۶ عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد:



- الف) عقربه عددی اول را نشان دهد.
 ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد.
 ج) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

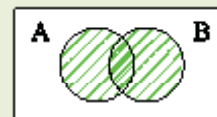
پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \left\{ \begin{array}{l} n(S) = 8 \\ A = \{1, 3, 5, 7\} \end{array} \right. &\Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \text{ب)} \quad B = \{1, 2, 3, 5, 7\} &\Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{8} \\ \text{ج)} \quad C = \{3, 6\} &\Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

چیر پیشامدها

اگر از ما بپرسند ((احتمال آن که A یا B رخ بدهد چه قدر است)) باید $P(A \cup B)$ را مناسبه کنیم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



اگر از ما بپرسند ((احتمال آن که A, B هر دو رخ بدهند چه قدر است)) باید $P(A \cap B)$ را پیدا کنیم.

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$



قوانین دمورگان:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

اگر از ما بپرسند ((احتمال آن که A رخ بدهد ولی B رخ ندهد چه قدر است)) باید $P(A - B)$ را مناسبه کنیم

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$$



$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A)$$

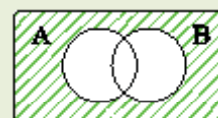


$$p = p(A - B) + p(B - A)$$

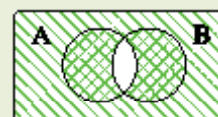
$$p = P(A \cup B) - p(A \cap B)$$



$$P(A' \cap B') = p(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$



$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$



اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، $P(A \cap B')$ برابر کدام است؟ (خارج کشور ۸۴)

$P(A) - P(B)$ (۱)
 $P(A) \times P(B')$ (۲)
 $1 - P(A) \times P(B)$ (۳)
 $P(A) - P(A \cap B)$ (۴)

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

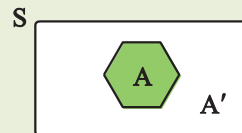
متمم یک پیشامد

متمم پیشامد A پیشامدی است که با A^c یا A' نشان می‌دهیم به طوری که رخ دادن یکی مانع از رخ دادن دیگری می‌شود. این پیشامد در صورتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

$$A \cup A' = S \quad A \cap A' = \phi$$

$$n(A') = n(S) - n(A)$$

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$



گاهی اوقات مناسبه احتمال وقوع پیشامدی مانند A بفاطر طولانی بودن مسابقات امکان پذیر نیست در این گونه مواقع از احتمال متمم A استفاده می‌کنیم به طوری که به جای مناسبه حالت‌های مطلوب که سوال خواسته اونایی که نفواسته رو حساب می‌کنیم و از کل کم می‌کنیم.

در سوالات آنالیز و احتمال اگر کلمات حداقل و حداکثر اومد، بهترین روش کم کردن حالات متمم (نامطلوب) از کل حالات می‌باشد.

۲۸

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

(شهریور ۹۰)

اگر $A \subseteq S$ و A' متمم باشد. آن گاه $A \cap A' = \dots\dots\dots$ و $A \cup A' = \dots\dots\dots$

$$A \cap A' = \phi$$

$$A \cup A' = S$$

پاسخ: ☒

۲۹

سه سکه را با هم به هوا پرتاب می‌کنیم، احتمال این که حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید، کدام است؟

پاسخ: حداقل یک سکه پشت بیاید متممش می‌شود هر سه سکه رو بیاید. بنابراین داریم:

$$n(S) = 2^3 = 8 \quad A = S - \{RRR\} \Rightarrow n(A) = 7 \quad P(A) = \frac{7}{8}$$

۳۰

در پرتاب یک تاس و یک سکه با هم، پیشامد ((تاس بیش تر از ۴ نباید یا سکه پشت بیاید)) چند عضو دارد؟

پاسخ: ☒

متمم پیشامد ۱ تاس بیش تر از ۴ نباید یا سکه پشت بیاید عبارت است از تاس بیش تر از ۴ بیاید و سکه پشت نیاید که تعداد اعضای آن ۲ است یعنی $\{(6, r), (5, r)\}$ چون اعضای فضای نمونه ۱۲ می‌باشد بنابراین داریم:

$$n(A) = n(S) - n(A') \Rightarrow n(A) = 12 - 2 = 10$$

۳۱

در پرتاب دو تاس احتمال این که اعداد رو شده یکسان نباشند را تعیین کنید.

پاسخ: متمم اینکه اعداد رو شده یکسان نباشند این است که دو عدد رو شده یکسان باشد بنابراین داریم:

$$A' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

۳۲

در پرتاب دو تاس احتمال این که مجموع اعداد رو شده کوچک تر از ۱۰ باشد را به دست آورید.

پاسخ: متمم این پیشامد می‌شود مجموع دو تاس ۱۰ یا ۱۱ و ۱۲ شود در نتیجه:

$$A' = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

۳۳ در ظرفی ۳ توپ سیاه و ۲ توپ سفید قرار دارد اگر ۲ توپ بیرون بیاوریم با کدام احتمال حداقل یک توپ سیاه است؟

پاسخ: ☒

راه اول:

$$\text{هراقل یک توپ سیاه} = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

راه دوم:

هر دو توپ سفید باشد - کل حالات = هراقل یک توپ سیاه

$$\text{هراقل یک توپ سیاه} = 1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

۳۴ احتمال قبولی یک دانش آموز در کنکور به عدم قبولی آن $\frac{2}{3}$ است، احتمال این که این شخص در کنکور قبول شود، چقدر است؟

پاسخ: ☒

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3P(A) = 2 - 2P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

پاسخ: ☒

۳۵ در یک خانواده با ۵ فرزند احتمال وجود داشتن حداقل یک دختر چقدر است؟

پاسخ: ☒

متهم هراقل یک دختر می شود هر پنج فرزند پسر باشد یعنی دختر اصلاً نداشته باشیم.

$$p(A') = \frac{\binom{5}{5}}{3^5} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow p(A) = 1 - \frac{1}{3^5} = \frac{3^5 - 1}{3^5}$$

۳۶ یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آن که لااقل یک بار رو ظاهر شود بیش تر از $\frac{95}{100}$ باشد؟

پاسخ: ☒

پاسخ: ☒

$$p(\text{هراقل یک رو}) = 1 - p(\text{همواره پشت}) = 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{95}{100}$$

۳۷ عددی دو رقمی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن که حداقل یکی از ارقام آن ۷ باشد را به دست آورید.

پاسخ: ☒

پاسخ: ☒

$$10 \leq n \leq 99 \Rightarrow n(S) = 90$$

$$p(\text{هیچ رقمی ۷ نباشد}) = 1 - p(\text{هراقل یک رقم ۷ باشد})$$

$$n(\text{هیچ رقمی ۷ نباشد}) = \boxed{8} \times \boxed{9} = 72$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{72}{90} = \frac{1}{5}$$

۳۸ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. حاصل عبارت $1 - P(A') - P(A \cap B)$ را به دست آورید.

پاسخ: ☒

$$1 - P(A') - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A - B) = P(A \cap B')$$

پاسخ: ☒

دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد A, B را ناسازگار گویند هرگاه جدا از هم باشند یا به عبارت دیگر هیچ عضو مشترکی با هم نداشته باشند. با هم نمی‌توانند رخ دهند.



$$A \cap B = \emptyset$$

مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامد رخ دادن عدد زوج A باشد، پیشامد رخ دادن عدد فرد B بنامیم، دو پیشامد A, B ناسازگارند زیرا:

$$A \cap B = \emptyset$$

اگر A, B دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A - B) = P(A)$$

$$P(B - A) = P(B)$$



۱. اول دو پیشامد را مشخص نموده و اشتراک می‌گیریم.

۲. اگر اشتراک دو پیشامد تهی شد قطعاً ناسازگار است.

۳. در صورت ناسازگاری داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(خرداد ۹۴)

۳۹

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، رابطه‌ی $A \cap B \neq \emptyset$ برقرار است.

✓ پاسخ: نادرست است. دو پیشامد وقتی ناسازگارند که اشتراکی نداشته باشند.

۴۰

اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B') = \frac{3}{4}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل $P(A \cup B)$ را به دست آورید. (فرورد ۹۳)

✓ پاسخ:

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B') = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$

$$P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

چون گفته دو پیشامد ناسازگارند اشتراکشان

تهیست. بنابراین $P(A \cap B) = 0$

در پرتاب دو تاس سالم احتمال این که جمع دو شماره هفت و یا جمع دو شماره ده باشد را محاسبه کنید.



✓ پاسخ: این دو پیشامد ناسازگارند.

$$A = \{(1, 6), (6, 1), (5, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$B = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4)\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - 0 = \frac{1}{4}$$

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A, B را مستقل می‌نامیم هرگاه رخ دادن یا ندادن یکی هیچ تاثیری بر دیگری نداشته باشد، با هم نیز می‌توانند رخ دهند.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

دو پیشامد A, B را مستقل می‌گوییم هرگاه:

عملاً پیشامدهای مستقل ربطی به هم ندارند مثلاً در جنسیت فرزندان خانواده هیچ یک به هم ربطی ندارند و یا رنگ چشم یک فرد ربطی به گروه فونی آن ندارد.

۱. دو یا چند نفر، دو یا چند تاس، دو یا چند آزمایش مختلف، فرزندان مختلف و ... مستقل اند.

۲. هر آزمایش قابل تکرار از آزمایش بعدی مستقل است. مثلاً پرتاب چندباره‌ی سکه یا چندباره‌ی تاس از یکدیگر مستقل اند.

۳. هر یک از پیشامدهای تهی و S نسبت به هر پیشامد دیگری مستقل اند.

۴. اگر A, B پیشامدهای مستقل باشند در این صورت متمم‌های آن‌ها نیز مستقل اند.



۱. ابتدا دو پیشامد را تعیین و احتمال هر یک را به دست می‌آوریم.

۲. از دو پیشامد اشتراک می‌گیریم احتمال اشتراک را حساب می‌کنیم اگر تهی شد قطعاً ناسازگار است.

۳. اگر اشتراک دو پیشامد ناتهی شد چک می‌کنیم که آیا رابطه‌ی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ برقرار است، در صورت برقراری مستقل اند در غیر این صورت وابسته‌اند.

(شهریور ماه ۹۴)

تاسی را دوبار می‌اندازیم،

۴۲

(الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

(ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده تاس اول ۳ باشد را مشخص کنید.

(ج) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ باشد را مشخص کنید.

(د) مستقل بودن یا نبودن دو پیشامد A و B را با دلیل بررسی کنید.

پاسخ:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(2,5), (5,2), (4,3), (3,4), (6,1), (1,6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(3,4)\} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{36}$$

دو پیشامد مستقل اند چون احتمال اشتراکشان با حاصل ضرب احتمال‌هایشان برابر است.

۴۳ یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.

(۱) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

(۲) پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.

(۳) پیشامد B که در آن سکه رو و تاس عدد کوچک‌تر از ۵ بیاید را مشخص کنید.

(۴) آیا دو پیشامد A, B مستقل‌اند؟ چرا؟

پاسخ: ☒

$$S = \left\{ (1, R), (2, R), \dots, (6, R), (1, P), (2, P), \dots, (6, P) \right\} \Rightarrow n(S) = 6 \times 2 = 12$$

$$A = \left\{ (1, R), (3, R), (5, R), (1, P), (3, P), (5, P) \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left\{ (1, R), (2, R), (3, R), (4, R), (1, P), (2, P), (3, P), (4, P) \right\} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$A \cap B = \left\{ (1, R), (3, R) \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

دو پیشامد مستقل‌اند چون احتمال اشتراکشان با حاصل ضرب احتمال‌هایشان برابر است.

۴۴ سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم اگر پیشامد A برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو بیاید و پیشامد B برآمدهایی باشد

که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شوند. آن‌گاه موارد زیر را تعیین کنید.

(۱) فضای نمونه‌ای و پیشامدهای A, B را تعیین کنید.

(۲) احتمال پیشامدهای A, B حساب کنید.

(۳) آیا این دو پیشامد مستقل‌اند؟ چرا؟

پاسخ: ☒

$$S = \left\{ (P, P, P), (P, P, R), \dots, (R, R, R) \right\} \Rightarrow n(S) = 2^3 = 8$$

$$A = \left\{ (P, R, P), (P, R, R), (R, R, P), (R, R, R) \right\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left\{ (R, R, P), (P, R, R) \right\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \left\{ (P, R, R), (R, R, P) \right\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

دو پیشامد مستقل نیستند چون احتمال اشتراکشان با حاصل ضرب احتمال‌هایشان برابر نیست.

۴۵ در یک خانواده ۳ فرزندی، A پیشامد ((داشتن ۲ دختر و یک پسر)) و B پیشامد ((وجود حداکثر یک پسر)) می‌باشند.

(۱) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

(۲) احتمال‌های هر دو پیشامد را حساب کنید.

(۳) آیا این دو پیشامد مستقل‌اند؟ چرا؟

$$S = \{PPP, PPD, PDP, DPP, DDP, DPD, PDD, DDD\} \quad n(S) = 2^3 = 8$$

$$A = \{DDP, DPD, PDD\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

$$B = \{DDD, DDP, DPD, PDD\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{DDP, DPD, PDD\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \neq P(A) \times P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$$

دو پیشامد مستقل نیستند چون احتمال اشتراکشان با حاصل ضرب احتمال هایشان برابر نیست.

(کتاب درسی)

چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال تیم ۶ نفره:

۴۶

(ب) همه در یک ماه متولد شده باشند؟

(الف) همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟

(ج) در همین تیم چقدر احتمال دارد هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند.

پاسخ: (الف) تولد اعضای تیم مستقل از یکدیگر است بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^6$$

$$P(B) = 12 \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{12}\right)^5$$

(ب) چون گفته همشون در یک ماه این ماه می‌تونه هر کدوم از دوازده ماه باشه بنابراین

(ج)

$$P(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12}$$

(خرداد ماه ۹۳)

چقدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی ۳ نفره:

۴۷

(ب) هیچ دو نفری در یک سال متولد نشده باشند؟

(الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند؟

پاسخ:

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^3$$

$$P(B) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} = \frac{110}{144}$$

(دی ۹۴)

۴ نفر را در نظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد:

۴۸

(ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

(الف) هر ۴ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

پاسخ:

$$P(A) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^4$$

$$P(B) = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7}$$

(نویسی ۹۰)

در یک کلاس ۲۵ نفری مقدار احتمال دارد که روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد؟

۴۹

پاسخ:

$$P(A) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{341}{365}$$



اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند:

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

(۱) دو پیشامد A و B' نیز مستقل اند و داریم:

$$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$$

(۲) دو پیشامد A' و B نیز مستقل اند و داریم:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

(۳) دو پیشامد A' و B' نیز مستقل اند و داریم:

۵۰ اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری‌که $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A) = \frac{1}{4}$ باشد آن‌گاه $P(A - B)$ را

به‌دست آورید.

پاسخ: ☒

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = P(A) \times (1 - P(B)) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

۵۱ آزمایشات ژنتیکی نشان می‌دهد که ۴۰ درصد زن‌ها تعیین‌کننده RH خون، منفی می‌باشند، احتمال این‌که RH خون نوزادی منفی

نباشد، چقدر است؟

پاسخ: منفی شدن RH فرزند وقتی رخ می‌دهد که RH پدر و مادرش منفی باشد. ضمناً RH پدر و مادر ربطی به هم ندارند. پس مستقل اند. متمم‌هاشون هم مستقل اند.

فرد R در R و H و H و R مادر $RH = H$ و $RH = H$ فرد R زنده

$$\Rightarrow P(A) = \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{16}{100} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{16}{100} = \frac{84}{100}$$

۵۲ اگر ۷۵ درصد افراد جامعه‌ای دارای چشم مشکلی و ۴۰ درصد گروه خونی آن‌ها از نوع A باشد و یک فرد به‌طور تصادفی از بین آن‌ها

انتخاب شود، احتمال این‌که این فرد دارای چشم مشکلی و یا دارای گروه خونی A باشد، کدام است؟

پاسخ: ☒

$B =$ پیشامد گروه خونی A و $C =$ پیشامد چشم مشکلی

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

چون B, C دو پیشامد مستقل اند (چشم مشکلی ربطی به گروه خونی ندارد) پس داریم:

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C)$$

$$P(B \cup C) = \frac{40}{100} + \frac{75}{100} - \frac{40}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{84}{100}$$

۵۳ اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن دختر ۶٪ و پسر ۴٪ باشد، احتمال آن‌که هر سه فرزند این خانواده پسر باشد، چقدر است؟

پاسخ: چون جنسیت نوزادان پیشامدهای مستقل هستند داریم:

$$P(B, B, B) = P(B)P(B)P(B) = \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{64}{1000}$$

۵۴ یک خانواده دارای سه فرزند است اگر A پیشامد آن باشد که این خانواده هم فرزند دختر و هم فرزند پسر داشته باشد و B پیشامد آن باشد که این خانواده حداکثر دارای یک فرزند دختر باشد آیا پیشامدهای A, B مستقل از یکدیگرند؟

پاسخ: ✓

$$S = \{ppp, ppd, pdp, dpp, ddd, ddp, dpd, pdd\}$$

$$A = \{ppd, pdp, dpp, ddp, dpd, pdd\} \quad B = \{ppp, ppd, pdp, dpp\} \quad A \cap B = \{ppd, pdp, dpp\}$$

$$p(A) = \frac{6}{8}, \quad p(B) = \frac{4}{8}, \quad p(A \cap B) = \frac{3}{8} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

۵۵ احتمال آن که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۸ و احتمال آن که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ است، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند.

پاسخ: ✓

بیماری شفص A ربطی به بیماری شفص B ندارد یعنی از هم مستقل اند. هر دوی آنها بعد از ۲۰ سال ناراحتی قلبی بگیرند یعنی اشتراک، حداقل یکی از آنها ناراحتی بگیرد یعنی اجتماع.

$$\text{الف)} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{8}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{48}{100}$$

$$\text{ب)} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} - \left(\frac{8}{10} \times \frac{6}{10}\right) = \frac{92}{100}$$

۵۶ آزمایش‌های انجام شده روی دو شخص A, B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از پیوند کلیه ۸۰٪ و احتمال بهبود شخص B پس از عمل جراحی ۶۰٪ است اگر این دو نفر تحت عمل جراحی قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

۱) هر دو نفر سلامتی خود را به دست آورند.

پاسخ: ✓

چون گفته هر دو نفر سلامت خود را به دست آورند همیشه اشتراک. ولی فوب شدن این دو ربطی به هم ندارد، پس استقلالی اند.

$$۱) P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{48}{100}$$

چون گفته حداقل یکی یعنی یکی یا هر دو. پس همیشه اجتماع.

$$۲) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{48}{100} = \frac{92}{100}$$

۵۷ چقدر احتمال دارد در یک تیم ۴ نفره المپیاد زیست شناسی:

۱) همه در ماه دی متولد شده باشند؟

پاسخ: ✓

۲) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند؟

$$۱) P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^4$$

$$۲) P(B) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12}$$

۵۸ احتمال قبولی دو برادر در کنکور ۳/۰، ۷/۰، ۰/۰ است احتمال قبولی حداقل یکی از آنها کدام است؟

پاسخ: ✓ قبولی این دو برادر از هم مستقل است پس $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ بنابراین داریم:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0/3 + 0/7 - (0/3 \times 0/7) = 0/79$$

۵۹ سه نفر با نام‌های A, B, C هر کدام تیری به هدف پرتاب می‌کنند، اگر احتمال برخورد تیر آن‌ها به هدف به ترتیب $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ باشد،

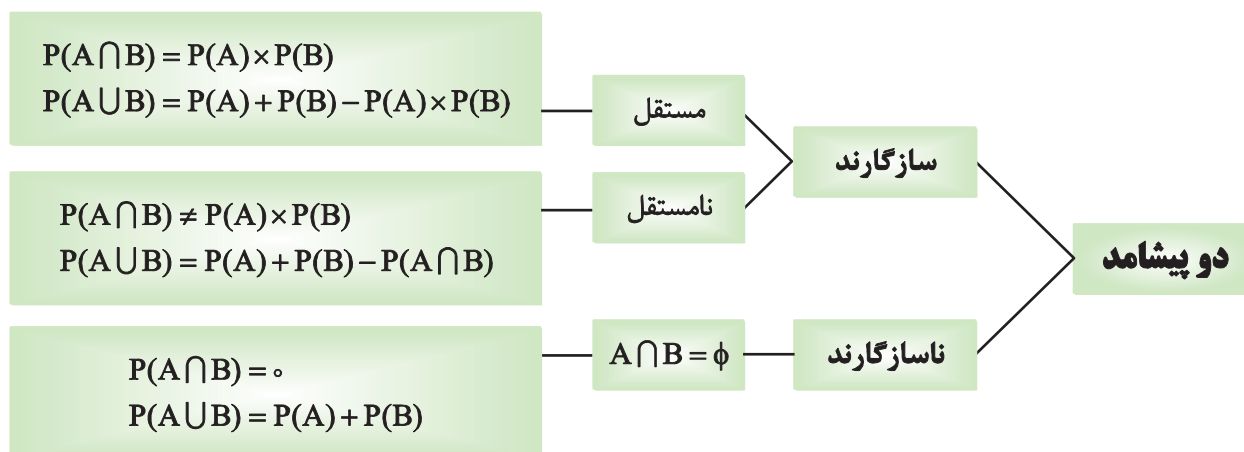
آن‌گاه احتمال این که هدف مورد اصابت قرار گیرد، کدام است؟

✓ پاسخ: چون پرتاب‌ها مستقل از یک‌دیگرند بنابراین داریم:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A \cup B \cup C)' = 1 - P(A' \cap B' \cap C')$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A')P(B')P(C') = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

یه جمع‌بندی توپ



« - جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

(۱) اگر $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ باشد آن‌گاه $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

(۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S و $A \cap B \neq \emptyset$ در این صورت A و B را دو پیشامد $\dots\dots\dots$ می‌نامیم.

(۳) پیشامد $A = \emptyset$ را پیشامد $\dots\dots\dots$ و پیشامد $A = S$ را پیشامد $\dots\dots\dots$ می‌نامیم.

(۴) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند در این صورت $A \cap B = \dots\dots\dots$

(۵) آزمایشی که قبل از وقوع، نتیجه‌ی آن را نمی‌توان تعیین کرد $\dots\dots\dots$ می‌گویند.

تعریف کنید و مثال بزنید.

(۱) فضای نمونه‌ای

(۲) پدیده تصادفی

(۳) پیشامد

(۴) پیشامدهای مستقل

(۵) دو پیشامد ناسازگار

(۶) پیشامد نشدنی

احتمال شرطی



اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(B) \neq 0$ آنگاه احتمال پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد به صورت $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ تعریف می شود. اگر $P(B) = 0$ آن گاه احتمال شرطی $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

در عمل برای مسائل شرطی به پای این که از رابطه ی بالا استفاده کنیم سعی می کنیم فضای نمونه ای جدید رو تشفیص بدهیم و از اون حالت های مورد نظر مون روانتخاب کنیم.

مثلا در یک خانواده ۳ فرزند اول دختره ، احتمال این که دو فرزند دیگه ی این خانواده پسر باشه چی میشه ؟

$$S' = \{(pp), (pd), (dp), (dd)\}$$

میگیم فرزند اول که دختره پس می مونه فضای نمونه ای جدید دو فرزند ی :

$$P = \frac{n(A)}{n(S')} = \frac{1}{4}$$

پیشامد مطلوب یعنی (pp) ، پس داریم :



$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$



یادمان باشد : در تست های احتمال شرطی پیشامدی که رخ داده B می نامیم و آن را به عنوان فضای نمونه ای در نظر می گیریم و عضو های پیشامد مورد نظر سوال را A نامیده و از داخل B انتخاب می کنیم . سپس احتمالی شرطی A به شرط وقوع B را از رابطه ی :

$$P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

اینائی که گفتم یعنی : در مسائلی که یک پیش فرض یا عبارت هایی مانند (اگر شره باشه) (می دانیم است) به فرض اینکه باشد (اومره باشه و فضای نمونه ای رو مفرد کنه . در فضای مفرد شره احتمال رو حساب می کنیم .

۶۰

تاسی را پرتاب میکنیم اگر بدانیم عدد آمده بزرگتر از ۳ است. احتمال آن که عدد آمده فرد باشد کدام است.

مثلاً در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است می دانیم عدد بر زمین نشسته بزرگ تر از ۳ رخ داده اگر پیشامد عدد بر زمین نشسته فرد است را A بنامیم و پیشامدی که رخ داده را B در نظر بگیریم، احتمال شرطی A به شرط وقوع B برابر است با:

$$B = \{4, 5, 6\}, A = \{1, 3, 5\}, A \cap B = \{5\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

الان کافیست پیشامدی که رخ داده رو $B = S = \{4, 5, 6\}$ در نظر بگیریم و پیشامد مورد سوال یعنی $A = \{\text{عدد فرد}\}$ از داخل فضای نمونه ای بگردیم انتخاب کنیم و در نتیجه داریم:

$$A = \{5\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

۶۱

اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ ، $P(B') = \frac{1}{5}$ باشد آن گاه حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{13}{25} \quad (3)$$

$$\frac{13}{15} \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \quad (1)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = \frac{4}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{13}{15}$$

۶۲

کارمندان اداره ای مطابق جدول زیر توزیع شده اند احتمال آن که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

$$\frac{5}{39} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{13} \quad (2)$$

$$\frac{1}{7} \quad (1)$$

	زن	مرد
تحصیلات دانشگاهی	۱۰	۱۵
تحصیلات کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

پیشامد دارا بودن تحصیلات دانشگاهی: A

پیشامد مرد بودن شخص مورد نظر: B

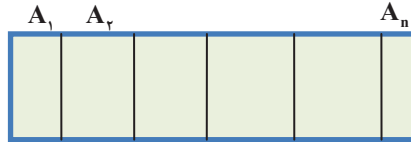
$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{15}{15 + 90} = \frac{1}{7}$$

قانون جمع احتمال‌ها

اگر فضای نمونه ای S به پیشامد های $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ افراز شده باشد . یعنی :

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$



فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهائی از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$ و این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند و حال اگر X یک پیشامد دلخواه از S باشد در این صورت داریم :

$$P(X) = p(A_1)p(X|A_1) + p(A_2)p(X|A_2) + \dots + p(A_n)p(X|A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(X|A_i)$$



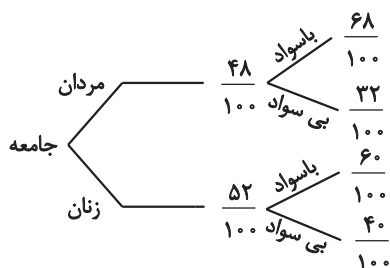
اگر فضای نمونه ای چند قسمت باشد ، مثل زنان و مردان ، ظرف ها و کیسه های مختلف ، ماشین و کارخانه های مختلف ، حالت های متفاوت و احتمال به پیشامد مثل X در این فضا از فرمول بالا به دست میار .

در بعضی از مسایل احتمال ، فضای نمونه ای به چند قسمت تقسیم می شوند. مثلاً مردان و زنان - ظرف ها و کیسه ها و برای حل این مسایل از نمودار درختی استفاده می کنیم به طوری که اعداد موجود در هر شاخه از درخت را در هم ضرب نموده و اگر از شاخه ای به شاخه ای دیگر برویم اعداد آن ها را با هم جمع می کنیم.

۶۳ ۵۲٪ جمعیت کشور را زنان و ۴۸٪ دیگر را مردان تشکیل می دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ از مردان با سواد باشند چند درصد از

افراد جامعه باسوادند؟

پاسخ: ☒

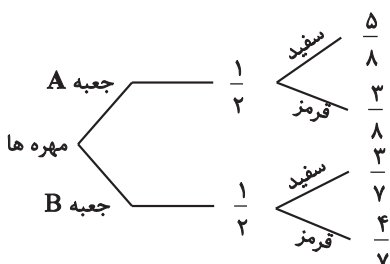


$$P = \frac{48}{100} \times \frac{68}{100} + \frac{52}{100} \times \frac{60}{100}$$

۶۴ در جعبه A ، ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز و در جعبه B ، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به

تصادف انتخاب و از آن یک مهره خارج می کنیم چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

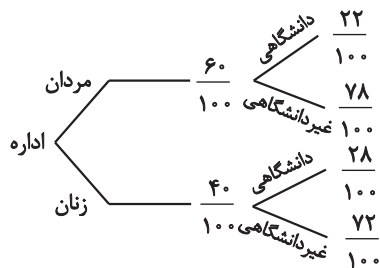
پاسخ: ☒



$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$$

۶۵ در اداره‌ای ۶۰٪ کارمندان مرد، و ۲۲٪ آن‌ها تحصیلات دانشگاهی دارند. ۲۸٪ زنان این اداره نیز تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر یک نفر از میان آن‌ها انتخاب شود چقدر احتمال دارد تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد؟

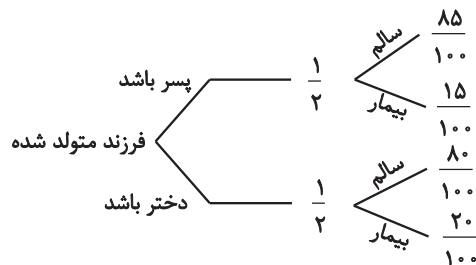
پاسخ: ☒



$$P = \frac{6}{10} \times \frac{78}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{72}{100}$$

۶۶ انتقال نوعی بیماری ارثی از پدر مادر به فرزند پسر ۱۵٪ و به فرزند دختر ۲۰٪ است. والدینی که حامل این نوع بیماری‌اند انتظار فرزندی را دارند. احتمال آن‌که این فرزند سالم به دنیا بیاید را حساب کنید.

پاسخ: ☒



$$P(\text{فرزند سالم}) = \frac{1}{2} \times \frac{85}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{80}{100}$$

۶۷ در جعبه A، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از این دو جعبه ۱ مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه دو مهره هم رنگ باشند کدام است؟

پاسخ: ☒

$$P(\text{هر دو سیاه}) + P(\text{هر دو مهره سفید}) = P(\text{دو مهره هم رنگ})$$

$$P(\text{دو مهره هم رنگ}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{18}{35}$$

۶۸ احتمال قبولی کنکور نفر اول $\frac{2}{5}$ و احتمال قبولی نفر دوم $\frac{3}{7}$ است.

الف) احتمال اینکه فقط نفر دوم در کنکور قبول شود.

پاسخ: ☒

قبولی نفر اول ربطی به قبولی نفر دوم ندارد یعنی مستقل‌اند، هم چنین متمم این پیشامدها نیز مستقل‌اند

$$P(\text{اولی قبول نشود و دومی قبول شود}) = P(A') \times P(B) = (1 - \frac{2}{5}) \times \frac{3}{7} = \frac{9}{35}$$

$$\text{ب) } P(\text{هیچکدام قبول نشوند}) = P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = (1 - \frac{3}{7})(1 - \frac{2}{5}) = \frac{12}{35}$$

۶۹ احتمال این‌که شخصی گروه خونی B^+ داشته باشد ۳۰٪ و احتمال اینکه او ناراحتی کلیه داشته باشد ۱۵٪ است، چقدر احتمال دارد: (خرداد ماه ۹۴)

الف) این شخص گروه خونی B^+ و ناراحتی کلیه داشته باشد.

ب) این شخص گروه خونی B^+ یا ناراحتی کلیه داشته باشد.

پاسخ:

گروه فونی ربطی به بیماری کلیه ندارد و این شش اگر بفواهد گروه فونی B^+ و ناراحتی کلیه همزمان داشته باشد، یعنی:

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{30}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{45}{1000}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{30}{100} + \frac{15}{100} - \frac{30}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{45}{100} - \frac{45}{1000}$$

$$70 \text{ احتمال اینکه مردی تا بیست سال دیگر زنده بماند } \frac{30}{100} \text{ و احتمال اینکه همسرش بیست سال دیگر زنده بماند } \frac{40}{100} \text{ است مطلوب است}$$

محاسبه‌ی احتمال‌های زیر:

الف) هر دو تا بیست سال آینده زنده بمانند.

ب) حداقل یکی از آن‌ها تا بیست سال آینده زنده بماند.

ج) هیچ‌یک تا بیست سال دیگر زنده نماند.

د) فقط زن تا بیست سال آینده زنده بماند.

پاسخ:

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{12}{100}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{12}{100}$$

$$\text{ج) } P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = (1 - \frac{30}{100}) \times (1 - \frac{40}{100}) = \frac{42}{100}$$

$$\text{د) } P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = (1 - \frac{30}{100}) \times (\frac{40}{100}) = \frac{28}{100}$$

۷۱

سه جعبه یکسان داریم، در اولین جعبه ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است و در جعبه دوم ۱۰ مهره وجود دارد که تمام آنها قرمزند و در جعبه سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد را پیدا کنید.

$$P(j_1)P(g|j_1) + P(j_2)P(g|j_2) + P(j_3)P(g|j_3) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{8} = \frac{25}{36}$$

۷۲

در کیسه ای ۵ مهره قرمز و ۳ مهر آبی و در کیسه دوم ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی داریم. تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر عدد رو شده مضرب ۳ باشد از کیسه اول دومهره و اگر مضرب ۳ نباشد از کیسه دوم ۲ مهره بر می‌داریم احتمال آنکه دو مهره هم‌رنگ نباشند را محاسبه کنید.

مضارب ۳ یعنی $\{3, 6\}$ و غیر سه یعنی $\{1, 2, 4, 5\}$ پس داریم

$$P = \frac{2}{6} \times \frac{\binom{5}{1} \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} + \frac{4}{6} \times \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{2}{6} \times \frac{15}{28} + \frac{4}{6} \times \frac{20}{36} =$$

احتمال مضارب ۳

احتمال مضارب غیر ۳

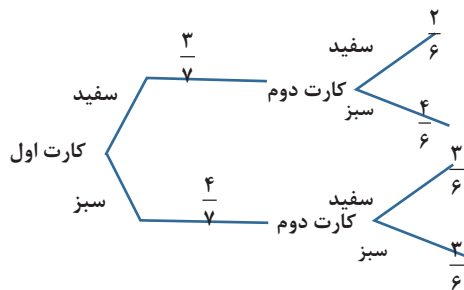
احتمال هم‌رنگ نباشد کیسه دوم

احتمال هم‌رنگ نباشد کیسه اول

۷۳

از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بیرون می آوریم. بدون جای گذاری سپس کارت دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال هر دو کارت هم رنگ هستند.

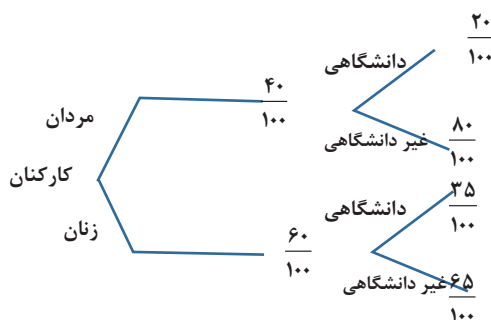
یعنی هر دو کارت سفید یا هر دو کارت سبز باید باشد



$$p = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

۷۴

۴۰٪ کارکنان یک شرکت را مردان و ۶۰٪ آن را زنان تشکیل می دهند ۲۰٪ مردان و ۳۵٪ زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. فردی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن که فرد مورد نظر تحصیلات دانشگاهی داشته باشد را تعیین کنید.



$$p(D) = p(M)p(D|M) + p(Z)p(D|Z) = \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{35}{100}$$

۷۵

اگر $P(A \cup B) = ۰/۶$ ، $P(A) = ۰/۲$ ، $P(B|A) = ۰/۱$ باشد، آن گاه $P(B)$ را بیابید

$$\begin{cases} P(A) = ۰/۲, \quad P(B|A) = ۰/۱ = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = ۰/۱ \times ۰/۲ = ۰/۰۲ \\ P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(B) = P(A \cup B) + p(A \cap B) - p(A) = ۰/۶ + ۰/۰۲ - ۰/۲ = ۰/۴۲ \end{cases}$$

۷۶

یک سکه را پرتاب می کنیم اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر

شود چقدر است

$$S = \{r, pppp, pppr, pppr, prpp, prrr, prpr, prrr, prrr\}$$

$$A = \{r, pppr, pppr, prpp\}$$

می دونی که پرتاب هر سکه از سکه دیگر مستقله به خاطر همین برای محاسبه، احتمال ها شونو رو در هم ضرب می

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{11}{16}$$

۷۷

دو کیسه یکسان داریم کیسه اول ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و کیسه دوم شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است از کیسه اول به تصادف یک مهره بر می داریم و در کیسه دوم قرار می دهیم سپس یک مهره از کیسه دوم انتخاب می کنیم با چه احتمالی این مهره سفید است ؟

مهره انتقاب شده از جعبه اول یا سفید است با احتمال $p(w) = \frac{4}{10}$ و یا سیاه با احتمال $p(b) = \frac{6}{10}$ از طرفی پیشامد انتقاب مهره سفید از جعبه دوم را با A نشان می دهیم و داریم $p(A|w) = \frac{6}{13}$ و $p(A|b) = \frac{5}{13}$ در این صورت احتمال آن که مهره خارج شده سفید باشد برابر است با :

$$p(A) = p(w)p(A|w) + p(b)p(A|b) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{13}$$

۷۸

- اگر احتمال تاخیر مترو در یک ایستگاه در روز های شنبه و یکشنبه ۸/۰ و در سایر روزها ۶/۰ باشد با چه احتمالی مترو به موقع به ایستگاه می رسد ؟

$\frac{23}{35}$ (۴)	$\frac{13}{70}$ (۳)	$\frac{12}{35}$ (۲)	$\frac{53}{70}$ (۱)
شنبه یا یکشنبه $\frac{2}{7}$	$\xrightarrow{0/8}$	تاخیر مترو	
سایر روزهای هفته $\frac{5}{7}$	$\xrightarrow{0/6}$	تاخیر مترو	

$$P(A) = \frac{2}{7}(1 - 0/8) + \frac{5}{7}(1 - 0/6) = \frac{4}{70} + \frac{20}{70} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$$

۷۹

ظرف A شامل ۴ مهره سیاه و ۲ مهره سفید و ظرف B شامل ۳ مهره سیاه و ۵ مهره سفید می باشد از ظرف A ۲ مهره و از ظرف B ۳ مهره انتخاب کرده و در ظرف C (خالی) می ریزیم سپس از ظرف C مهره ای انتخاب می کنیم . احتمال آن که این مهره سیاه باشد کدام است ؟

$\frac{53}{120}$ (۴)	$\frac{59}{120}$ (۳)	$\frac{19}{40}$ (۲)	$\frac{17}{40}$ (۱)
----------------------	----------------------	---------------------	---------------------

ظرف C دارای ۵ مهره است که ۲ مهره ی آن از ظرف A و ۳ مهره ی آن از ظرف B است مهره ای که از ظرف C بر می داریم ممکن است از ظرف A باشد و سیاه باشد و یا ممکن است از ظرف B باشد و سیاه باشد .

مهره از ظرف A $\frac{2}{5}$	$\xrightarrow{\frac{4}{6}}$	سیاه
مهره از ظرف B $\frac{3}{5}$	$\xrightarrow{\frac{2}{8}}$	سیاه

$$P(A) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{8} \right) = \frac{4}{15} + \frac{9}{40} = \frac{59}{120}$$

۸۰

دو جعبه یکسان داریم جعبه اول شامل ۷ مهره سبز و ۵ مهره آبی و جعبه دوم شامل ۶ مهره سبز و ۸ مهره آبی است از جعبه اول به تصادف یک مهره انتخاب می کنیم و در جعبه دوم قرار می دهیم سپس از جعبه دوم یک مهره بر می داریم به چه احتمالی این مهره سبز است ؟

پاسخ مهره انتخاب شده از جعبه اول یا سبز است با احتمال $p(g) = \frac{7}{12}$ و یا آبی با احتمال $p(b) = \frac{5}{12}$ از طرفی پیشامد انتقال مهره سبز از جعبه دوم را با A نشان می دهیم و داریم $p(A|g) = \frac{7}{15}$ و $p(A|b) = \frac{6}{15}$ در این صورت احتمال آن که مهره خارج شده سبز باشد برابر است با :

$$p(A) = p(g)p(A|g) + p(b)p(A|b) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{6}{15}$$

۸۱

جعبه ی A شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و جعبه B شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه می باشد ، از جعبه ی A به طور تصادفی ۲ مهره وارد جعبه B می کنیم سپس از جعبه ی B مهره ای خارج می کنیم با چه احتمالی مهره خارج شده سفید است ؟

$$\frac{19}{48} \quad (۱) \quad \frac{131}{336} \quad (۲) \quad \frac{65}{168} \quad (۳) \quad \frac{-67}{168} \quad (۴)$$

پاسخ

۱ مهره سفید	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\text{سفید B}}$	$\frac{5}{12}$
۱ مهره سیاه	$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$			
۲ مهره سفید	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\text{سفید B}}$	$\frac{6}{12}$
۲ مهره از سیاه	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\text{سفید B}}$	$\frac{4}{12}$

$$P(A) = \left(\frac{15}{28} \times \frac{5}{12} \right) + \left(\frac{3}{28} \times \frac{6}{12} \right) + \left(\frac{10}{28} \times \frac{4}{12} \right) = \frac{133}{28 \times 12} = \frac{19}{48}$$

۸۲

۲ مهره سفید و ۴ مهره سیاه در کیسه ای موجودند یک مهره از این کیسه به تصادف خارج و بعد از مشاهده رنگ آن ، مهره را به همراه دو مهره از رنگ دیگر به کیسه بر می گردانیم اگر مجدداً سه مهره از کیسه خارج کنیم احتمال این که فقط دو مهره از این ۳ مهره سفید باشد کدام است ؟

$$\frac{2}{7} \quad (۱) \quad \frac{9}{28} \quad (۲) \quad \frac{11}{28} \quad (۳) \quad \frac{13}{28} \quad (۴)$$

$$\text{سفید} \quad \frac{2}{6} \xrightarrow{\text{۲ مهره سفید باشد}} \frac{\binom{2}{2} \binom{1}{6}}{\binom{3}{8}} = \frac{6}{56}$$

$$\text{سیاه} \quad \frac{4}{6} \xrightarrow{\text{۲ مهره سفید باشد}} \frac{\binom{2}{4} \binom{1}{4}}{\binom{3}{8}} = \frac{24}{56}$$

$$P(A) = \left(\frac{2}{6} \times \frac{6}{56} \right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{24}{56} \right) = \frac{27}{28 \times 3} = \frac{9}{28}$$

تیپ ۱: احتمال خانواده‌گی و سکه



۱. در یک خانواده n فرزندی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = 2^n$$

۲. پیشامدهای مربوط به جنسیت رو دقیق تعیین کنید و اعضای اون رو بنویسید و برای تعیین تعداد آن اگر مجموعه بزرگ بود از آنالیز ریاضی استفاده کنید.

۳. یادتان باشد تولد و جنسیت هر فرزند مستقل از فرزندان دیگر است.



احتمال آمدن دقیقاً k شیر در پرتاب n سکه یا در یک خانواده n فرزندی احتمال این که k تای آن‌ها پسر یا k تای آن‌ها دختر باشند همواره از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

در پرتاب n سکه سالم احتمال آن که حداقل یک رو یا یک پشت ظاهر شود برابر با احتمال آن است که حداکثر $(n-1)$

$$P = 1 - \frac{1}{2^n}$$

پشت یا $(n-1)$ رو بیاید.

(کتاب درسی)

۸۳ در یک خانواده ۴ فرزندی احتمال آن که:

(۲) احتمال حداقل ۲ فرزند پسر کدام است؟

(۱) تعداد پسرها بیش‌تر از تعداد دخترها باشد؟

پاسخ: ☒

$$n(S) = 2^4 = 16$$

۱) PPPD

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

PPPP

$$\frac{4!}{4!} = 1$$

$$\Rightarrow n(A) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{16}$$

۲) PPDD

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

PPPD

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

PPPP

$$\frac{4!}{4!} = 1$$

$$\Rightarrow n(A) = 6 + 4 + 1 = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{16}$$

(خرداد ۹۴)

۸۴ خانوادهای دارای ۳ فرزند است.

(۱) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

(۲) پیشامد A که در آن فرزند سوم پسر باشد را مشخص کنید.

(۳) پیشامد B که در آن حداکثر یک فرزند دختر باشد را مشخص کنید.

$$۱) n(S) = 2^3 = 8 \quad \left\{ \begin{array}{l} ۲) A = \{PPP, DDP, DPP, PDP\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ ۳) B = \{PPP, DPP, PDP, PPD\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{پاسخ: } \checkmark$$

۸۵ خانوادهای ۳ فرزند دارد مطلوب است احتمال آن که:

(۱) فرزندان به صورت یکی در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند.

(۲) هر سه فرزند پسر باشند.

(۳) فرزند سوم دختر باشد.

پاسخ: $\checkmark$

$$n(S) = 2^3 = 8$$

$$۱) A = \{PDP, DPD\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$۲) B = \{PPP\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

$$۳) C = \{PPD, DDD, PDD, DDP\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

یه جور دیگه: چون فرزند سوم دختر بودنش ربطی به دو فرزند اول ندارد، احتمال دختر بودن فرزند سوم هم $\frac{1}{2}$ است.

(شهریور ۹۱)

۸۶ خانوادهای ۳ فرزند دارند.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) احتمال آن که خانواده فقط یک دختر داشته باشد را محاسبه کنید.

ج) احتمال آن که خانواده حداقل ۲ پسر داشته باشد را محاسبه کنید.

پاسخ: $\checkmark$

الف)

$$S = \{(D, D, D), (D, P, P), (P, D, P), (P, P, D), (P, D, D), (D, P, D), (D, D, P), (P, P, P)\} \Rightarrow n(S) = 2^3 = 8$$

$$ب) A = \{(D, P, P), (P, D, P), (P, P, D)\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

$$ج) B = \{(D, P, P), (P, D, P), (D, P, P), (P, P, P)\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

تیم ۲: احتمال کلاس و جعبه و کیسه و مهره و ...

در هنگام انتخاب مهره از کیسه اگر به ترتیب رنگ مهره‌ها اشاره نکنه هیچ خرفی نمی‌کنه که چند مهره را باهم برمی‌داریم یا یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری اما اگر رنگ تک تک دفعات انتخاب را به روشنی گفت احتمال هر کدام را با توجه به شرط مهره قبلی به دست آورده و در هم ضرب می‌کنیم.



اگر تو سوال بگه مهره‌ها رو با هم انتخاب می‌کنیم، بهتره سوال از روش ترکیب حل بشه.

اگر گفت متوالی و بدون جای‌گذاری، در این حالت فضای نمونه‌ای تغییر می‌کنه بهتره از روش ترکیب حل نکنیم و از روش ضرب نسبت‌ها استفاده کنیم.

۸۷ در کیسه‌ای که شامل ۵ مهره قرمز متمایز و ۳ مهر سفید متمایز و ۶ مهره آبی متمایز وجود دارد مطلوب است.
(۱) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم احتمال آن که یکی سفید و دیگری آبی باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{6}{1}}{\binom{14}{2}}$$

پاسخ: ☒

(۲) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم احتمال آن که فقط یک مهره قرمز باشد.

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1} \binom{9}{1}}{\binom{14}{2}}$$

پاسخ: ☒

(۳) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم احتمال آن که حداقل یکی آبی باشد.

$$P(C) = \frac{\binom{6}{1} \binom{8}{1} + \binom{6}{2} \binom{8}{0}}{\binom{14}{2}}$$

پاسخ: ☒

(۴) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال آن که یکی سفید و دیگری قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ: ☒

اولی سفید دومی قرمز

چون گفته متوالی و بدون جایگذاری از روش ضرب تناسب‌ها می‌بریم.

$$P(D) = \frac{3}{14} \times \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \times \frac{3}{13}$$

اولی قرمز دومی سفید

۸۸ می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۶ دانش‌آموز کلاس دوم، یک تیم ۳ نفره به تصادف انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد:

(الف) هیچ دانش‌آموز کلاس اول در تیم نباشد.

(ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس اول بیش‌تر باشد.

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

پاسخ: ✓

$$\text{الف) } n(A) = \binom{6}{3} = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \quad \text{ب) } n(B) = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = 80 \Rightarrow P(B) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

۸۹ در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز وجود دارد. از این کیسه ۴ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این که حداکثر ۲ مهره آبی باشد، چه قدر است؟

پاسخ: ✓

$$n(S) = \binom{12}{4} = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{8}{2} + \binom{4}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{4}{0} \times \binom{8}{4} = 462 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{462}{495}$$

۹۰ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایش برداشته شوند با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش سفید است؟

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

پاسخ: ✓

۹۱ در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. ۳ لامپ به تصادف و هم زمان خارج می‌کنیم. احتمال آن که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید.

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120$$

پاسخ: ✓

$$n(A) = \binom{4}{3} \binom{6}{0} + \binom{6}{3} \binom{4}{0} = 4 + 20 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

۹۲ می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۳ زن یک کمیته‌ی ۳ نفره انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن که: (۲) هر سه مرد باشند. (۱) حداکثر یک مرد انتخاب شود.

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$۱) n(A) = \binom{5}{5} \binom{3}{0} + \binom{5}{4} \binom{3}{1} = 1 + 15 = 16 \Rightarrow P(A) = \frac{16}{56}$$

پاسخ: ✓

$$۲) n(A) = \binom{5}{3} \binom{3}{0} = 10 \Rightarrow P(B) = \frac{10}{56}$$

۹۳ در جعبه‌ای ۱۲ لامپ وجود دارد که چهار عدد از آن‌ها معیوب‌اند از این جعبه دو لامپ خارج می‌کنیم احتمال اینکه یکی سالم و دیگری معیوب باشد، کدام است؟

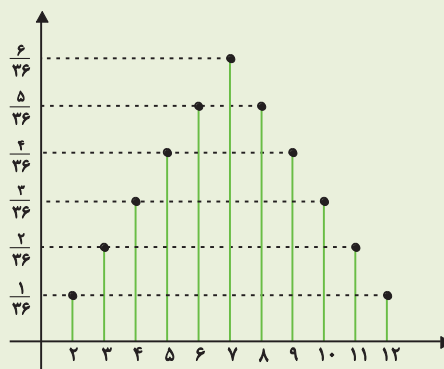
$$P(\text{یکی سالم و یکی معیوب}) = \frac{\binom{4}{1} \binom{8}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{4 \times 8}{66} = \frac{16}{33}$$

پاسخ: ✓

تیپ ۳: احتمال چند تاس

وقتی دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم که پرتاب تاس اول مستقل از پرتاب تاس دوم است. بنابراین در پرتاب دو یا چند تاس با در نظر گرفتن استقلال پرتاب تاس‌ها مسئله را حل می‌کنیم. یک سری از سوالات پرتاب دو تاس مربوط به مجموع رقم‌های رو شده دو تاس می‌باشد. می‌دانیم مجموع رقم‌های رو شده ۲ و ۳ و ۴ و ... و ۱۲ می‌باشند برای آن‌که احتمال مجموع دو تاس x باشد، داریم؛ برای حل مسائل مربوط به مجموع دو تاس می‌توان از جدول و نمودار زیر استفاده کنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲



نمودار مربوط به مجموع دو تاس

۱) در پرتاب دو تاس مطابق جدول و نمودار احتمال مجموع ۷ از همه بیش‌تر است. از طرفی این‌که مجموع x شود با این‌که $x - 14$ شود مساوی است. مثلاً احتمال مجموع ۱۰ با احتمال مجموع ۴ برابر است.



۱. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای چند تاس (n تاس): $n(S) = 6^n$

۲. در مسئله‌های چند تاس برای هر تاس اگر توضیح مستقیم بیان شود مثلاً اگر بگویید دو تاس عدد اول باشد یا هر دو فرد باشد آن‌گاه از قواعد استقلالی پرتاب چند تاس استفاده می‌کنیم.

۳. ولی اگر تاس‌ها باهم درگیر بودند دیگر همیشه از طریق استقلالی بودن عمل کرد. مثلاً اگر بگه مجموع دو تاس بشه ۷ و یا حاصلضرب دو تاس مضرب ۴ باشه یعنی دو تاس باهم، درگیر یک موضوعند و نمی‌توان به صورت مستقل عمل کرد.

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$n(A)$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
احتمال $P(A)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

۹۴ تاسی را دوبار می‌اندازیم و پیشامد A آن است که عدد روشدهی تاس اول ۴ باشد و پیشامد B آن است که مجموع اعداد رو شدهی دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند. هر یک از پیشامدهای A و B و $A \cap B$ را مشخص کنید.

✓ پاسخ:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$$B = \{(3,4), (4,3), (5,2), (2,5), (6,1), (1,6), (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$A \cap B = \{(4,3)\}$$

۹۵ دو تاس را با هم می‌ریزیم مطلوب است احتمال آن که:

(۱) هر دو تاس زوج باشند.

✓ پاسخ:

$$۱) A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \quad \text{راه حل استقلالی}$$

(۲) هر دو تاس مثل هم باشند.

✓ پاسخ:

$$۲) A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(۳) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس زوج باشد.

✓ پاسخ: پیشامد A مجموع دو تاس ۸ و پیشامد B هر دو تاس زوج باشند.

$$۳) A = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \quad B = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 9 - 3 = 11 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{11}{36}$$

(۴) مجموع دو تاس کم‌تر از ۱۰ باشد.

$$۴) A' = \{(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

از راه متمم هاش می‌کنیم. مجموع دو تاس کم‌تر از ۱۰ متممش همیشه مجموع دو تاس مساوی یا بیش‌تر از ۱۰

(۵) حاصل ضرب ۲ تاس مضرب ۴ باشند.

$$۵) A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4), (2,6), (6,2), (6,6), (2,2)\}$$

$$n(A) = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{36}$$

(۶) حاصل ضرب دو تاس مضرب ۵ باشد.

$$۶) A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$$

$$n(A) = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$$

۷) احتمال آن که حداقل یک بار عدد ۶ بیاید.

پاسخ: ☒

از راه متمم می‌رویم. متمم حداقل یکبار ۶ بیاید آن است که اصلاً ۶ نیاید. در نتیجه:

تاس اول ۶ نیاید

تاس دوم ۶ نیاید

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$$

۸) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند.

پاسخ: ☒

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{15}{36}$$

۹) مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد.

پاسخ: ☒

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,4), (4,2), (4,5), (5,1), (1,5), (5,4), (3,6), (6,3), (3,3), (6,6)\}$$

$$n(A) = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

۱۰) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند؟

پاسخ: ☒

$$A' = \{(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)\} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{4}{36} = \frac{8}{9}$$

۹۶) دو تاس پرتاب می‌کنیم اگر هر دو عدد رو شده کوچک‌تر از ۴ باشند با کدام احتمال هر دو فرد هستند؟

پاسخ: ☒

چون گفته هر دو تاس کم‌تر از ۴ اند یعنی از ۱، ۲، ۳ باید انتخاب کنیم.

$$n(S) = 9 \quad \boxed{3} \times \boxed{3} = 9$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

$$n(A) = 4 \quad \boxed{2} \times \boxed{2} = 4$$

۹۷) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

پاسخ: ☒

$$A = \{(1,3), (3,1), (2,2), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4), (6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۹۸) سه تاس را با هم به هوا پرتاب می‌کنیم احتمال این که هر سه عدد رو آمده مضرب سه باشند را محاسبه کنید.

پاسخ: ☒

$$\boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{8}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{27}$$

سه تاس را پرتاب می‌کنیم با کدام احتمال هیچ یک اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند؟

۹۹

پاسخ: ✓

باید اعداد رو شده هر تاس یکی از اعضای مجموعه $\{1, 2, 4, 5\}$ باشد. ضمن این که پرتاب تاس‌ها مستقل‌اند. پس احتمالشان به صورت حاصل ضرب در می‌آید.

$$P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$$

(کتاب درسی)

تاسی را سه بار می‌اندازیم احتمال‌های زیر را به دست آورید.

۱۰۰

(۱) هر سه عدد رو شده، مثل هم باشند.

(۲) هر سه عدد رو شده متمایز باشند.

(۳) مجموع سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد.

پاسخ: ✓

۱) $n(S) = 216$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

$$A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}$$

۲) $P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}$

۳) $A = \{(6,6,5), (6,5,6), (5,6,6), (6,6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$

دو تاس را با هم می‌اندازیم مطلوب است احتمال اینکه مجموع شماره‌ها ۸ و هر دو زوج باشد.

۱۰۱

$$A = \{(2,6), (6,2), (4,4)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$n(s) = 6 \times 6 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

تیپ ۴: احتمال جایگشته‌ها

۱۰۲

شش نفر که دو نفرشان برادرند به تصادف در یک ردیف ایستاده اند احتمال های زیر را حساب کنید. (کتاب درسی)

(۱) چقدر احتمال دارد ۲ برادر کنار هم بایستند؟

(۲) چقدر احتمال دارد دو برادر در اول و آخر صف باشند؟

پاسخ: ✓

$$1) \begin{cases} n(S) = 6! \\ n(A) = 5! \times 2! \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{1}{3}$$



$$2) n(B) = 4! \times 2! \Rightarrow P(B) = \frac{4! \times 2!}{6!} = \frac{1}{15}$$



(خرداد ماه ۹۴)

۵ نفر که دو نفر آنها خواهر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد:

۱۰۳

(الف) دو خواهر کنار هم قرار گرفته باشند.

(ب) دو خواهر در اول صف واقع شده باشند.

پاسخ: ✓

$$\text{الف) } n(S) = 5! \quad , \quad n(A) = 4! \times 2! \Rightarrow P = \frac{4! \times 2!}{5!}$$

$$\text{ب) } n(B) = 3! \times 2! \Rightarrow P(B) = \frac{3! \times 2!}{5!}$$

جایگشت دو خواهر

۱۰۴ تمام اعداد ۲ رقمی که با ارقام ۱ و ۴ و ۶ و ۷ می‌توان ساخت را روی کارت‌های متمایز نوشته در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از

(خرداد ۹۱ خارج کشور)

این کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم (ارقام غیر تکراری) مطلوب است.

(۱) فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی

(۲) پیشامد آن که در آن عدد روی کارت مضرب چهار یا کوچک‌تر از ۶۰ باشد.

پاسخ: ✓

$$S = \{14, 16, 17, 41, 46, 47, 61, 64, 67, 71, 74, 76\}$$

$$n(S) = 4 \times 3 = 12$$

$$A = \{16, 64, 76, 14, 17, 41, 46, 47\}$$

مضارب ۴

۱۰۵ در ظرفی مهره‌هایی با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ وجود دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو

مهره فرد است؟

پاسخ: ✓

برای آن که مجموع شماره‌ها فرد باشد باید یکی از مهره‌ها زوج و دیگری فرد باشد بنابراین:

$$P = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4 \times 3}{21} = \frac{12}{21}$$

۱۰۶ ۳ کارت سفید ۳ کارت سیاه داخل جعبه‌ای قرار دارد. اگر آن‌ها را برداریم و بغل هم قرار دهیم مقدار احتمال دارد کارت‌ها سیاه و سفید شوند؟



$$n(S) = 6! \quad n(A) = 3! \times 3! \times 2 \Rightarrow P(A) = \frac{3! \times 3! \times 2}{6!} = \frac{2}{5 \times 4} = \frac{1}{10}$$



هر وقت در انتخاب‌های متوالی یکی از انتخاب‌ها مورد پرسش قرار نگیرد یعنی از نتیجه‌ی یک آزمایش چیزی نگه ما باید خودمون حالت‌های ممکن رو برای اون در نظر بگیریم یا این‌که فکر کنیم اصلاً اون آزمایش رخ نداده و احتمال موارد گفته شده رو حساب کنیم.

۱۰۷ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شود با تصادف سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (سراسری تجربی ۸۸)



$$P_1 = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \quad (\text{راه اول})$$

$$P_2 = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56} \quad (\text{راه دوم})$$

پهن از رنگ موش دوم صرفی نذرده یا حالت‌های ممکن برای اون رو حساب می‌کنیم مثل راه حل اول و یا مثل راه حل دوم انگار اتفاقی نیفتاده. احتمال‌های اول و سوم را حساب می‌کنیم و در هم ضرب می‌کنیم.

۱۰۸ در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۲)



$$P(A) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{84}{15 \times 14} = \frac{2}{5} \quad (\text{راه اول})$$

$$P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad (\text{راه دوم})$$

بدون در نظر گرفتن مهره اول فقط احتمال سفید بودن مهره دوم را حساب می‌کنیم. میبینی که جواب یکیه.



۰۹۱۲۱۸۵۹۷۸۰

آکادمی ریاضی مهندسی روحانی

۴۷

@KIMIA_MAHAN

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا