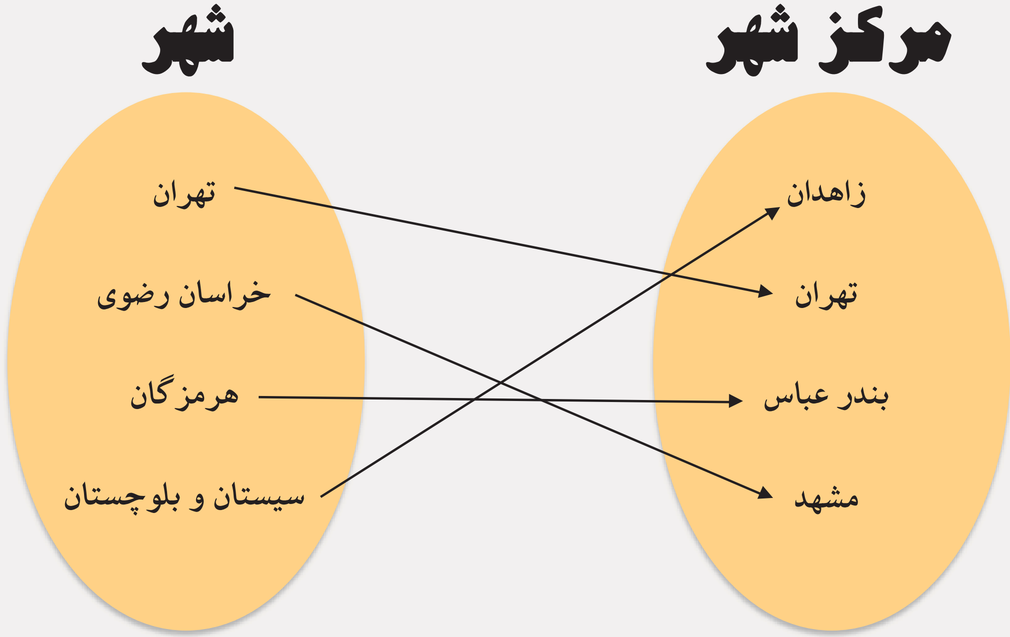
به نام خدایی که جهان را بر اساس ریاضیات آفرید

جزوه کامل تابع ریاضیات انسانی
(دهم و یازدهم)

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

تابع : یک رابطه بین دو مجموعه ی A و B یک تابع است ، هر گاه متناظر با هر عضو از مجموعه ی A فقط و فقط یک عضو از مجموعه ی B بتوان نظیر کرد.

در واقع تابع رابطه ای از مجموعه ی A به مجموعه ی B است که هر عضو A را دقیقا به یک عضو از مجموعه ی B مربوط می کند.



تابع است زیرا هر عضو از مجموعه ی (شهر) را فقط و فقط به یک عضو از مجموعه ی (مرکز شهر) مربوط کرده است.

نمایش تابع :

یک تابع را می توان به شکل های زیر نمایش داد :

۱- نمودار وِن

۲- زوج های مرتب

۳- دستگاه مختصات

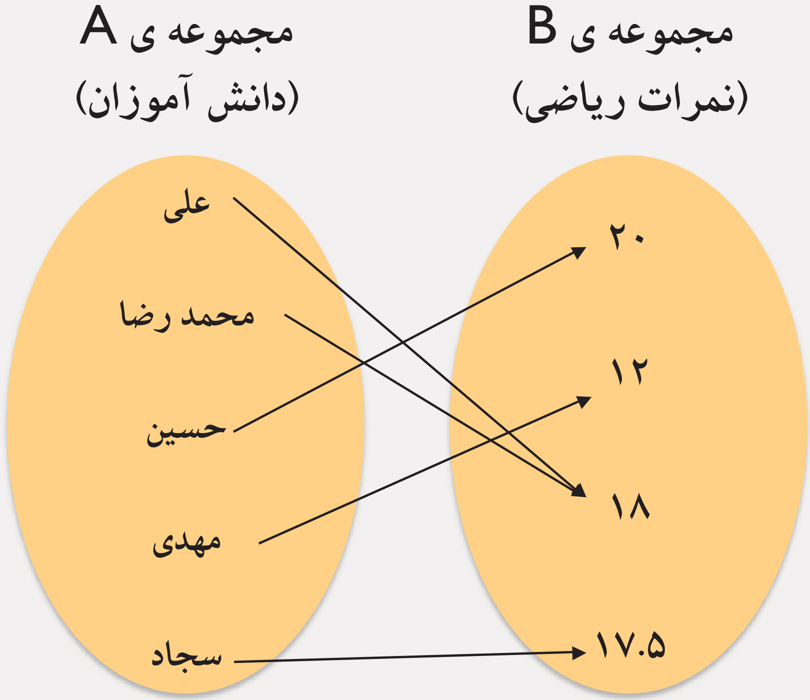
۴- ضابطه ی تابع

توابع را با حروفی نظیر f ، g ، h و ... نشان می دهیم.

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

نمایش تابع به صورت نمودار وِن

برای نمایش یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B به صورت نمودار وِن از دو منحنی بسته و پیکان به صورت زیر استفاده می کنیم :



نمرات ریاضی یک کلاس به شرح زیر است:

علی : ۱۸

محمد رضا : ۱۸

حسین : ۲۰

مهدی : ۱۲

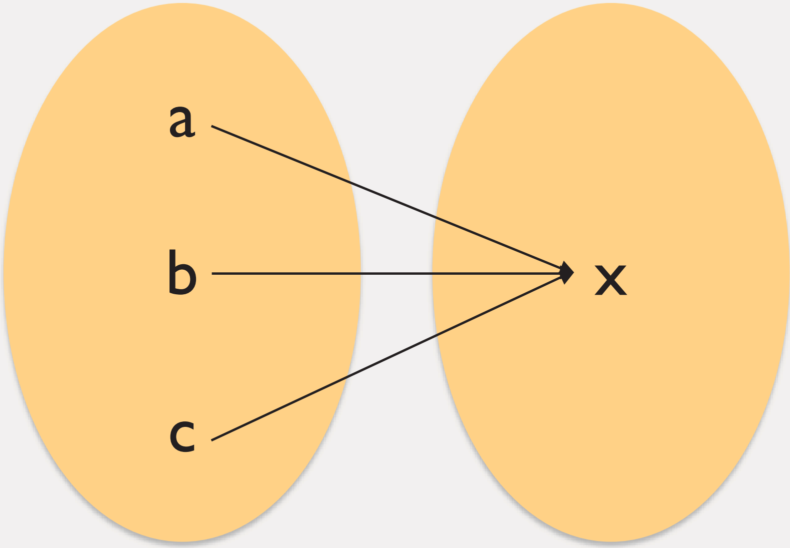
سجاد : ۱۷.۵

این نمرات را در قالب تابع به صورت نمودار وِن نمایش می دهیم .

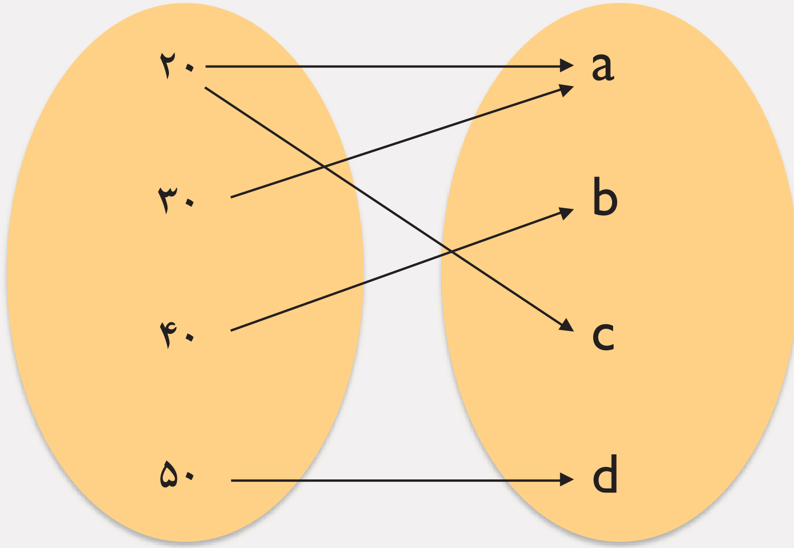
شرط تابع بودن در نمودار وِن :

رابطه ای که به شکل نمودار ون نمایش داده شده به شرطی تابع است که :

از هر عضو مجموعه ی A **فقط و فقط یک پیکان** خارج شده باشد.



تابع است ، زیرا از هر عضو مجموعه ی A فقط و فقط یک پیکان خارج شده است.



تابع نیست ، زیرا از یک عضو مجموعه ی A (۲۰) دو پیکان به دو عضو مختلف از مجموعه ی B نظیر شده است.

نمایش تابع به صورت زوج های مرتب :

نمایش تابع به صورت زوج های مرتب به شکل زیر است :

نمرات ریاضی مثال قبل را یادآور می شویم:

علی : ۱۸ محمد رضا : ۱۸ حسین : ۲۰ مهدی : ۱۲ سجاد : ۱۷.۵

این نمرات را در قالب تابع به شکل زوج های مرتب بازنویسی می کنیم:

f = {(علی , ۱۸) , (محمد رضا , ۱۸) , (حسین , ۲۰) , (مهدی , ۱۲) , (سجاد , ۱۷.۵)}

زوج مرتب a و b به صورت (a , b) تعریف می شود که به a مولفه ی اول و به b مولفه ی دوم می گویند.

شرط تابع بودن زوج های مرتب :

یه رابطه به صورت زوج های مرتب ، در صورتی تابع است که :

کافی است بررسی کنید که هیچ دو زوج مرتبی ، مولفه اول یکسان نداشته باشد و اگر دو زوج مرتب مولفه اول یکسان داشته باشند ، باید مولفه دوم یکسان داشته باشند.

f = {(۱,۲) , (۴,۸) , (۸,۳) , (۵,۵)}   تابع است زیرا هیچ دو زوج مرتبی مولفه اول یکسان ندارند

g = {(۳,۵) , (۲,۱) , (۷,۹) , (۳,۴)}   تابع نیست زیرا به ازای دو مولفه اول یکسان دو مولفه دوم متفاوت داریم

h = {(۶,۳) , (۹,۴) , (۶,۳)}   تابع است زیرا به ازای دو مولفه اول یکسان ، مولفه های دوم نیز یکسان است

اگر رابطه زوج مرتب زیر یک تابع باشد مقدار a کدام است؟

$f = \{(۴,۸) , (۳,۹) , (۱۳,۵) , (۳,a+۵)\}$

از جایی که دو زوج مرتب (۳,۹) و(۳,a+۵) دارای مولفه اول یکسان هستند و از جایی که رابطه مورد نظر یک تابع است پس باید مولفه دوم آن ها نیز برابر باشد :

$a + ۵ = ۹ \Rightarrow a = ۴$

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

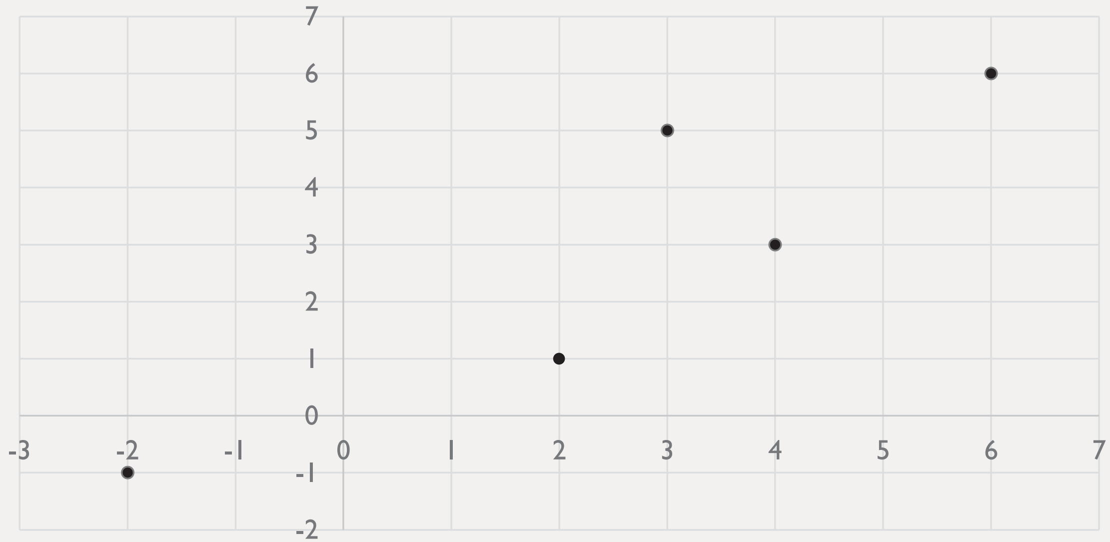
نمایش تابع در دستگاه مختصات :

می توان یک تابع را در قالب نقاط یا شکلی در دستگاه مختصات رسم کرد.

تابع زیر را که به صورت زوج های مرتب نوشته شده است را در نظر بگیرید :

f = {(۴,۳) , (۳,۵) , (۶,۶) , (۲,۱) , (-۲,-۱)}

این تابع را به صورت نقاطی در دستگاه مختصات رسم میکنیم :

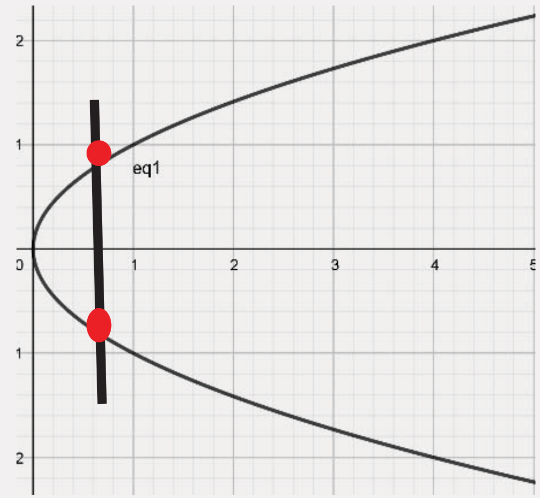


تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

شرط تابع بودن در دستگاه مختصات:

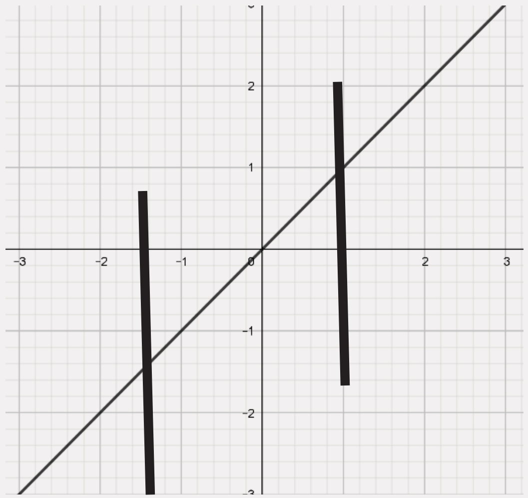
یک منحنی یا مجموعه نقاط در دستگاه مختصات در صورتی تابع است که :

هیچ خط عمودیِ موازی محور y ها منحنی را در بیش از یک نقطه قطع نکند.



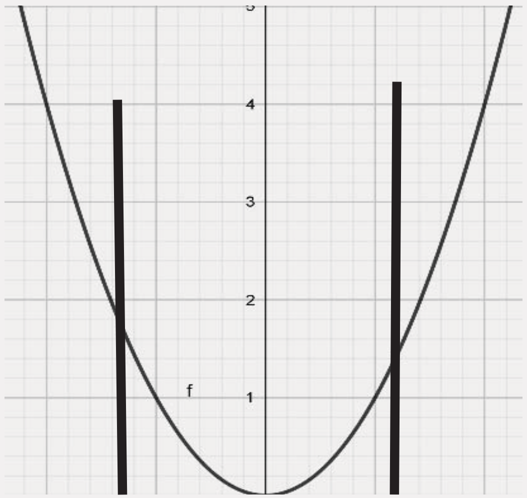
$x = y^2$

تابع نیست



$y = x$

یک تابع است



$y = x^2$

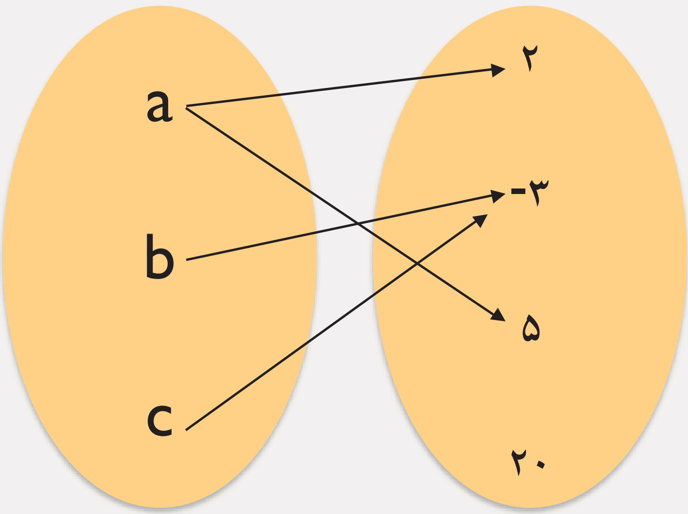
یک تابع است

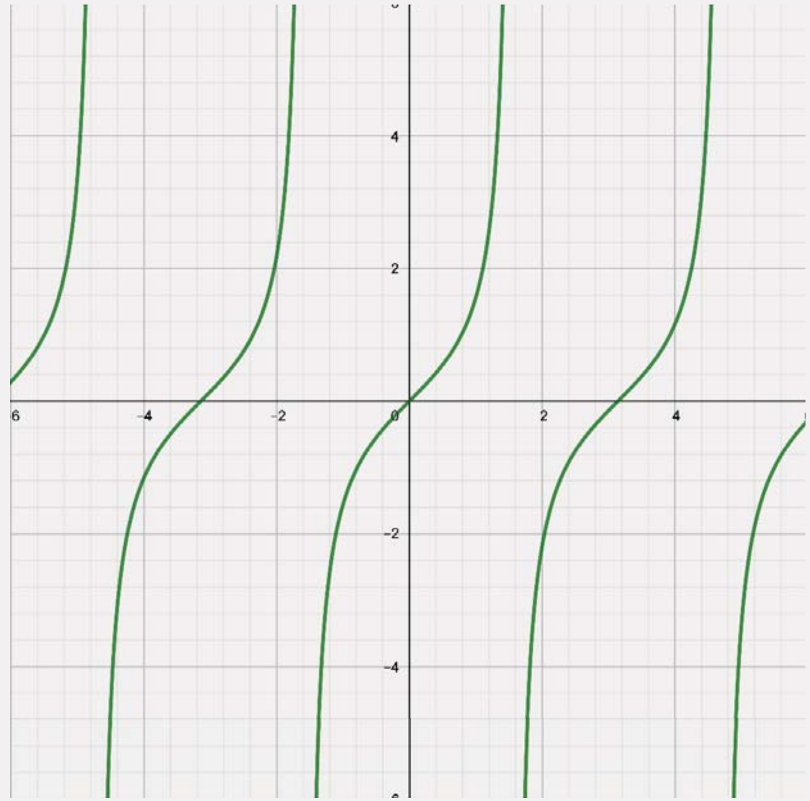
تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

کدام یک از موارد زیر نشان دهنده یک تابع است ؟

f = {(۱,۲) , (۴,۸) , (۸,۳) , (۵,۵) , (۸,۳) , (۴,-۲)}

g = {(-۱,-۸) , (۴,۸) , (۱,۳) , (۵,۵)}





ضابطه تابع:

گاهی اوقات می توانیم رابطه بین مولفه اول و دومِ زوج مرتب های مربوط به یک تابع را با یک ضابطه یا قانون نشان دهیم.

برای مثال زوج مرتب های زیر را در نظر می گیریم :

f = {(-۱,۳) , (۰,۴) , (۱,۵) , (۲,۶) , (۵,۹) , (۳,۷)}

با کمی تامل در میابیم که مولفه های اول به اضافه چهار شده و مولفه های دوم را ساخته اند. پس می توان نوشت:

f(x) = x + ۴

برای مثالی دیگر :

f = {(۰,۰) , (۱,۱) , (۲,۴) , (-۱,۱) , (-۲,۴) , (۴,۱۶)}

مولفه های اول به توان دو رسیده اند و مولفه های دوم را ساخته اند پس :

g(x) = x^2

دامنه و برد تابع:

نمودار وِن :

تمام اعضای مجموعه ی سمت راست دامنه و تمام اعضای مجموعه ی سمت چپ برد تابع هستند.

زوج های مرتب :

تمام مولفه های اول زوج های مرتب دامنه و تمام مولفه های دوم زوج های مرتب برد تابع هستند.

دستگاه مختصات :

اگر نمودار را روی محور x بخوابانیم ، آن مقادیر در واقع دامنه و اگر نمودار را روی محور y بخوابانیم ، آن مقادیر در واقع برد تابع هستند.

ضابطه تابع :

دامنه تابع مقادیری هستند که اگر در ضابطه تابع قرار دهیم ، به ما مقادیر دیگری می دهند که به آن ها برد تابع می گوییم.

نمایش نهایی تابع:

یک تابع را به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

مجموعه ی A ، دامنه تابع و مجموعه ی B ، برد تابع هستند.

نکته : با جایگذاری مقادیر دامنه در ضابطه تابع ، مقادیر برد به دست خواهد آمد.

تابع خطی:

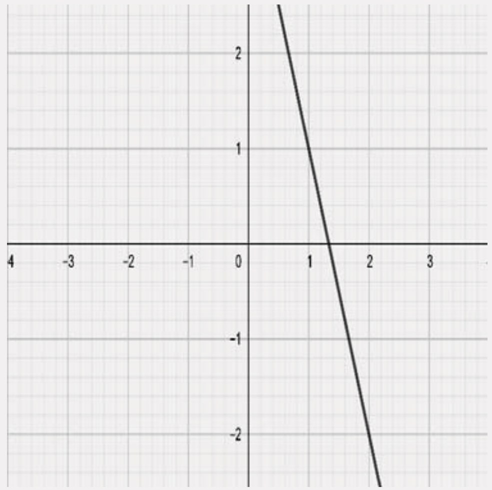
هر تابع به صورت $y = f(x)$ که در آن $y = mx + h$، یک تابع خطی نامیده می شود.

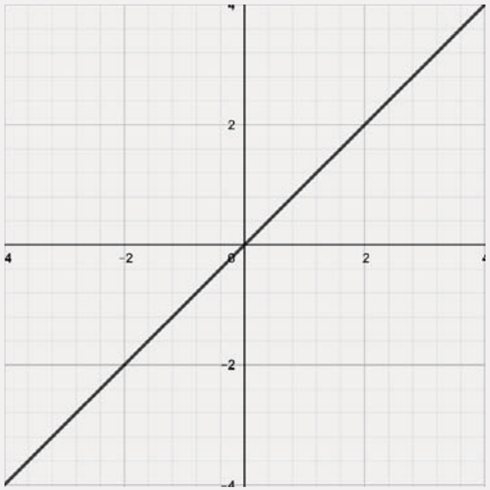
در واقع هر تابعی که در آن توان متغیر (X) یک باشد ، یک تابع خطی است.

مثال هایی از تابع خطی :

y=x+۱۰۰۰   y=-۲x-۶   y=۳x + ۲   y=x

نمودار یک تابع خطی در دستگاه مختصات به صورت یک خط راست است.

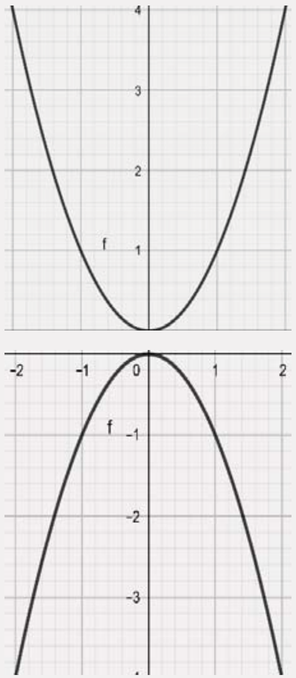




تابع درجه ی ۲:

هر تابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ یک تابع درجه دو نامیده می شود که در آن $a \neq 0$.

در سهمی بالا نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ راس سهمی است.



اگر در تابع درجه دو $a > 0$ باشد :

اگر در تابع درجه دو $a < 0$ باشد :

تابع ثابت:

تابع $\left\{\begin{array}{l} f: A \longrightarrow B \\ f(x)=c \end{array}\right.$ را تابع ثابت می نامند.

در تابع ثابت ، مجموعه ی $R=\{c\}$ برد تابع است. در تابع ثابت ، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

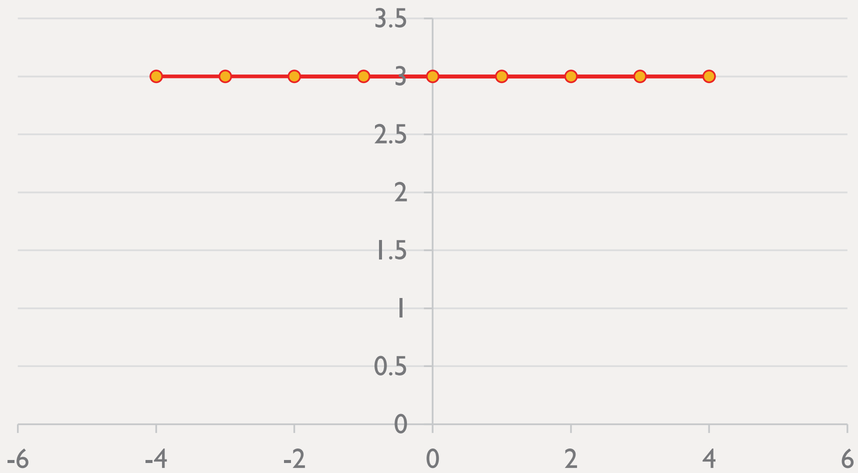
نمودار تابع ثابت خطی افقی ، موازی محور x ها است.

مثال :

نمودار $y=۳$ که دامنه آن از[۴ ,۴-] یک تابع ثابت است.

که برد آن به ازای هر عضو از دامنه فقط یک عدد یعنی

۳ است.



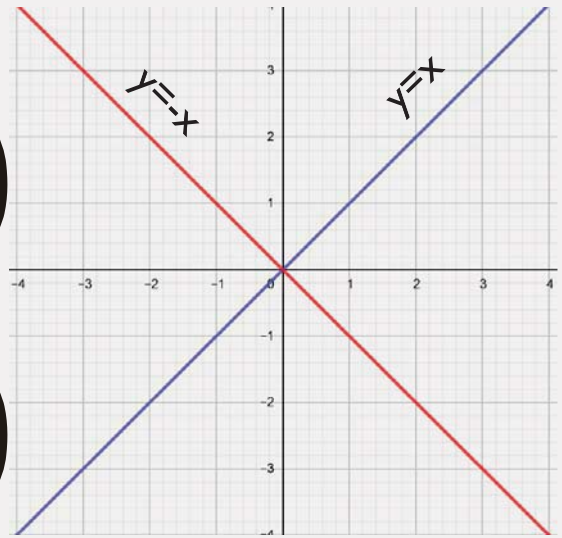
تابع همانی:

تابع با ضابطه ی $f(x) = x$ را تابع همانی می نامند.

با توجه به ضابطه و قانون تابع می توان گفت که در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند.

نمودار تابع $f(x) = x$ ، نیمساز ناحیه ی اول و سوم دستگاه مختصات است.

نمودار تابع $f(x) = -x$ ، نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم دستگاه مختصات است.



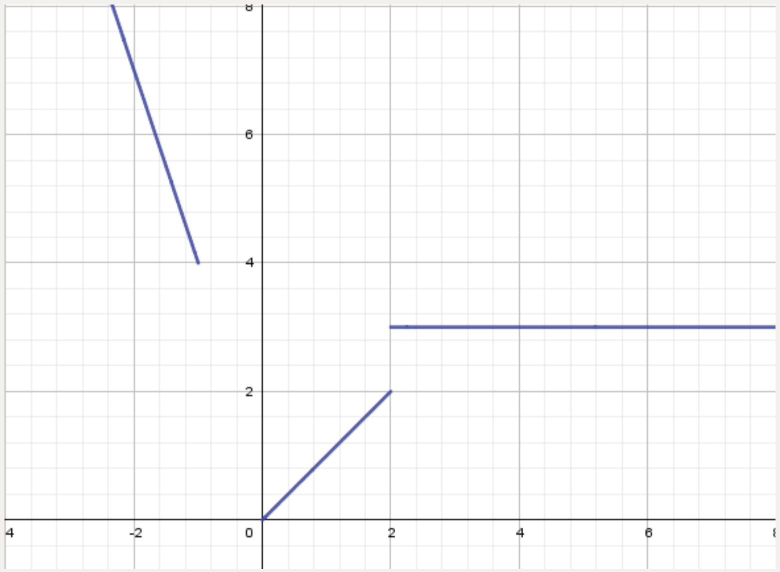
دامنه تابع همانی $f(x) = x$ اعداد حقیقی و برد آن هم اعداد حقیقی است.

$$D_f = R$$
$$R_f = R$$

تابع چند ضابطه ای:

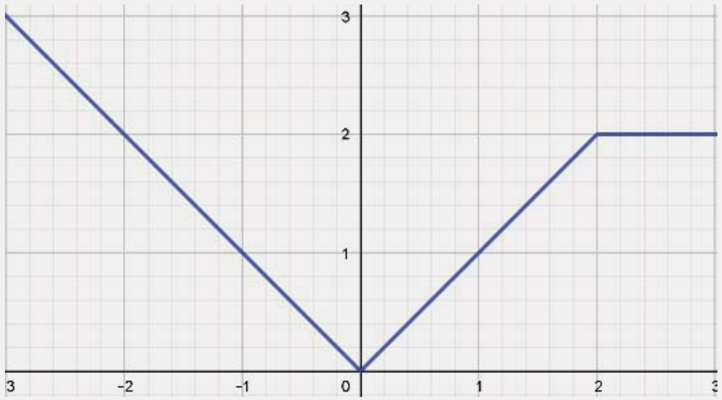
توابعی که در قسمت های مختلف دامنه ، ضابطه و قانون های متفاوت دارند توابع چند ضابطه ای نامیده می شوند.

مثلا تابعی که در بخش های مختلف دامنه ۳ ضابطه متفاوت دارد ، یک تابع سه ضابطه ای است.



$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<-1 \\ x & 2>x>-1 \\ 3 & 2<x \end{cases}$$

ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



تابع برای $x < 0$ دارای یک ضابطه برای $0 < x < 2$ دارای یک ضابطه و برای $x > 0$ دارای ضابطه ای دیگر است.

پس تابع ما سه ضابطه ای است و داریم.

برای باز اول شکل نمودار ، تابع ثابت $y = 2$ ، برای بازه دوم شکل نمودار نیم ساز ربع اول و سوم و برای بازه سوم شکل نمودار نیم ساز ربع دوم و چهارم است.

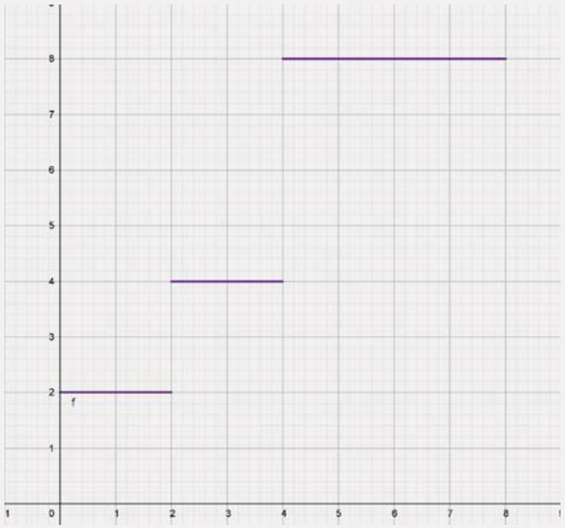
پس :

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 < x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

تابع پلکانی:

نمودار روبه رو یک تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است.

این نوع تابع را تابع پلکانی می نامند.



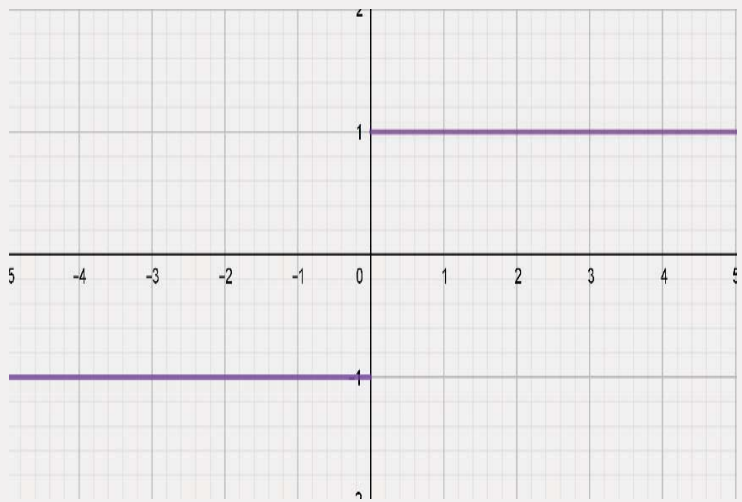
$$f(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x<2 \\ 4 & 2\le x<4 \\ 8 & 4\le x<8 \end{cases}$$

تابع علامت:

تابع علامت نوع خاصی از توابع پلکانی است.

تابع علامت را با $sgn(x)$ نشان می دهیم.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



دامنه تابع علامت اعداد حقیقی و برد آن اعداد ۱-و ۱ هستند.

جزء صحیح:

مفهوم جزء صحیح هر عدد به آن معناست که به هر عدد صحیح خود آن عدد را نسبت می دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی عدد صحیح کوچکتر را نسبت می دهد .

[۲]=۲

[۱.۴]=۱

[۷.۵]=۷

[۳.۹]=۳

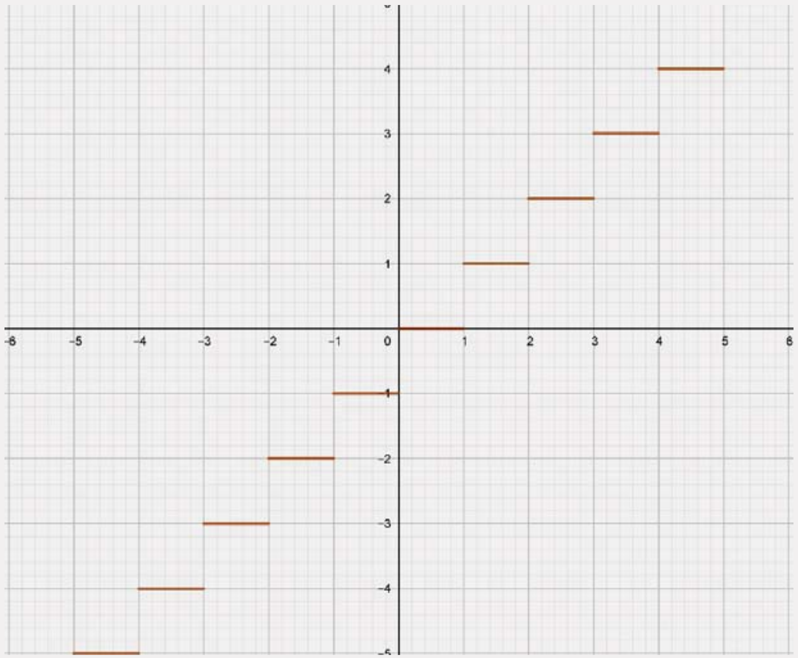
[-۱.۳]=-۲

[-۵.۱]=-۶

تابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح تابعی است که به هر عدد صحیح ، خود همان عدد را نسبت می دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی ، عدد صحیح کوچکتر را نسبت می دهد.

تابع جزء صحیح را با ضابطه ی $f(x) = [x]$ نشان می دهیم.



دامنه تابع جزء صحیح ، اعداد حقیقی و برد آن ، اعداد صحیح هستند.

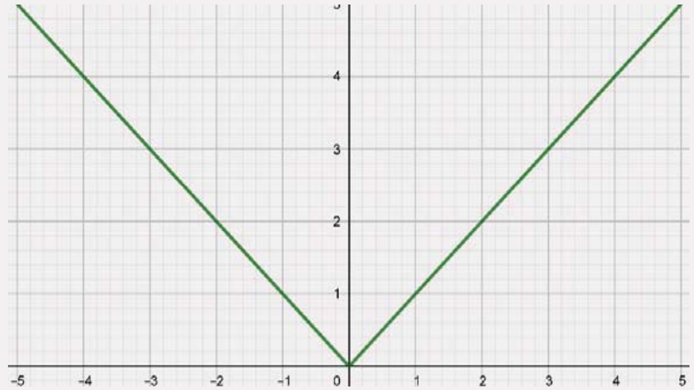
$$D_f = R$$
$$R_f = Z$$

تابع قدر مطلق:

قدر مطلقِ عددی حقیقی در ریاضیات ، مقدار عددی آن بدون در نظر گرفتن علامتش است . پس قدر مطلق همواره یک عدد نا منفی (فقط مثبت یا صفر) است.

طبق این تعریف می توان تابع قدر مطلق با ضابطه ی $f(x) = |x|$ را بدین شکل تعریف کرد :

$$f(x) = \begin{cases} X & 0 \leq x \\ -X & x < 0 \end{cases}$$



دامنه تابع $f(x) = |x|$ ، اعداد حقیقی و برد این تابع ، اعداد حقیقی نامنفی (صفر و مثبت) است.

مثال : نمودار تابع $y = |4x - 8|$ را رسم کنید.

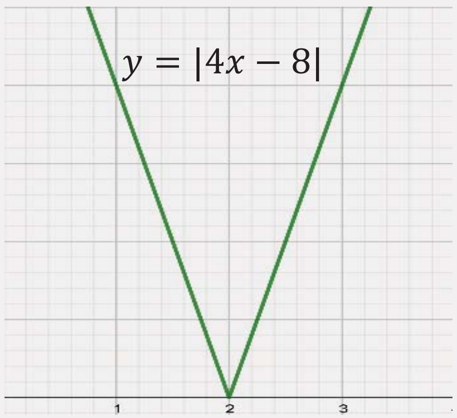
برای تعیین حدود x ، به کمک قوانین نامساوی ها داریم:

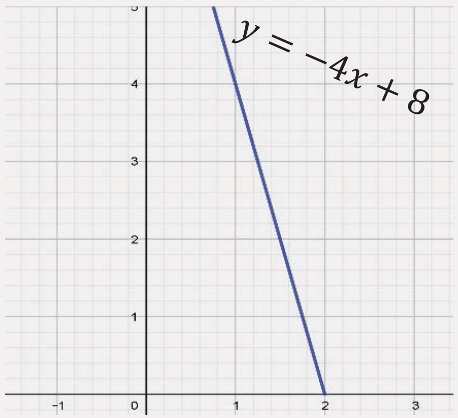
$$4x - 8 \geq 0\,,4x \geq 8 \ \rightarrow x \geq 2$$
$$4x - 8 < 0\,,4x < 8 \ \rightarrow x < 2$$

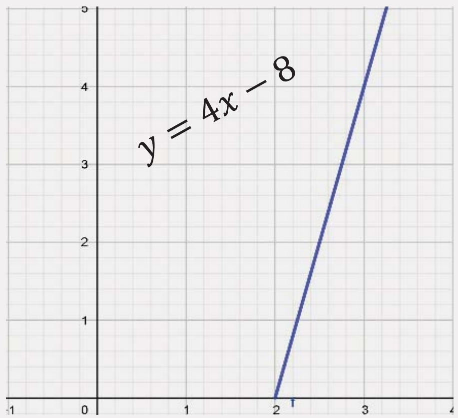
پس اگر اعداد بزرگتر از ۲ درون قدر مطلق قرار دهیم ، داخل قدر مطلق مثبت شده و خود عبارت بیرون می آید و اگر اعداد کوچکتر از ۲ درون قدر مطلق قرار دهیم ، داخل قدر مطلق منفی شده و عبارت قرینه می شود.

پس طبق تعریف قدر مطلق داریم :

$$\begin{cases} 4x - 8 & 2 \leq x \\ -(4x - 8) & 2 > x \end{cases}$$







دامنه توابع بر اساس ضابطه :

چند جمله ای ها : دامنه ی تمامی چند جمله ای ها اعداد حقیقی است.

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$ $\qquad D_f = R$

عبارت های گویا و کسری : دامنه این توابع عبارت است از اعداد حقیقی منهای ریشه های مخرج.

$$g(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

$x - 1 = 0 \ \rightarrow x = 1$ $\qquad D_g = R - \{1\}$

عبارت های رادیکالی : در این گونه توابع عبارت زیر رادیکال را بزرگتر و مساوی صفر قرار داده و دامنه را به دست می آوریم.

$h(x) = \sqrt{2x+4}$

$2x + 4 \geq 0 \ \rightarrow 2x \geq -4 \ \rightarrow x \geq -2$ $\qquad D_h = [2,\infty)$

ترکیب توابع $(\pm \times \div)$:

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مفروض است.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)_{(x)} = f(x) - g(x)$$

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

$$(f.g)_{(x)} = f(x) . g(x)$$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{$ریشه های مخرج$\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$(c.f)_{(x)} = c . f(x)$$

مثال : چنانچه توابع زیر مفروض باشند ، مطلوب است مقادیر خواسته شده .

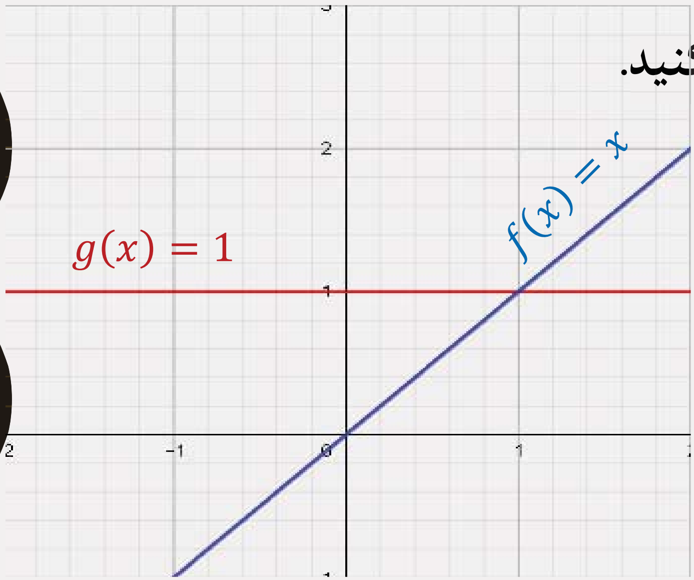
$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x - 5$$

$$(f+g)_{(2)} = f(2) + g(2) \rightarrow (2^2+1) + (2-5) = 2$$

$$\left(\frac{f \, . \, g}{3f}\right)_{(-2)} = \frac{f(-2)\,.\,g(-2)}{3f(-2)} \rightarrow \frac{((-2)^2+1)\times(-2-5)}{3((-2)^2+1)} = \frac{-7}{3}$$

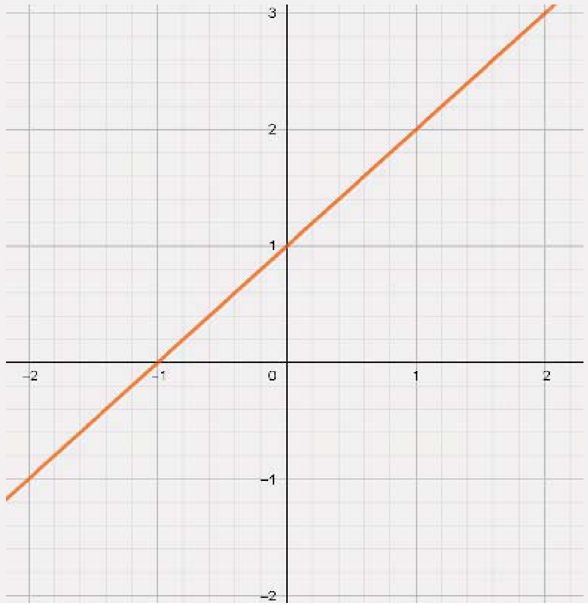
مبحث نمودارک ترکیب توابع:

به کمک نمودار های رسم شده ی توابع f و g نمودار تابع f + g را رسم کنید.



$$(f + x)_{(x)} = f(x) + g(x) = x + 1$$

حال تابع $h(x) = x + 1$ را رسم می کنیم.



رسم نمودار به کمک انتقال :

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید :

$f(x+a)$ نمودار $f(x)$ ، a واحد به سمت چپ می آید.

$f(x-a)$ نمودار $f(x)$ ، a واحد به سمت راست می آید.

$f(x)+a$ نمودار $f(x)$ ، a واحد به سمت بالا می آید.

$f(x)-a$ نمودار $f(x)$ ، a واحد به سمت پایین می آید.

$-f(x)$ نمودار $f(x)$ ، نسبت به محور x قرینه می شود.