



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

### پیشامدهای مستقل

#### استقلال پیشامدها :

اساساً دو پیشامد رو مستقل می گن که روی دادن یکی روی دیگری بی اثر باشه یا احتمال وقوع یکی به وقوع یا عدم وقوع دیگری هیچ ربطی نداشته باشد. امکان داره دو پیشامد سازگار (یعنی اشتراک داشته باشند) یا ناسازگار باشند (اشتراک نداشته باشند) کلاً پیشامدهای مستقل می تونن در دو حالت تعریف بشن.

❖ **دسته اول** پیشامدهایی هستن که از نوع آنها می شه به سادگی مستقل بودن شان را فهمید مثل احتمال قبولی دو نفر در امتحان رانندگی که قبولی هر فرد به میزان مهارت خودش ربط داره و به قبولی یا عدم قبولی فرد دیگر هیچ ربطی ناره یا رنگ چشم یک فرد به نوع گروه خونی او هیچ ارتباطی نداره.

❖ **دسته دوم** پیشامدهایی هستند که تعیین احتمال اونها به تعداد عضوهاشون بستگی داره و باید در تعیین احتمال هر کدام، از نظریه مجموعه کمک بگیریم. در این حالت امکان داره نتونی به طور مستقیم، مستقل یا وابسته بودنشان رو بفهمی که در این صورت لازمه از قانون استقلال پیشامد  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  کمک بگیری. واسه این که کاملاً متوجه منظورم بشی چندتا مثال در رابطه با چیزای که بهت گفتم حل می کنم.

#### قانون استقلال پیشامدها :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

◀ **نکته:** شرط لازم و کافی برای آن که دو پیشامد  $A$  ,  $B$  مستقل باشند، آن است که رابطه  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  برقرار باشد.

📖 **سؤال ۱:** اگر ۷۵ درصد از افراد جامعه ای دارای چشم مشکی و ۴۰ درصد گروه خونی آنها از نوع  $A$  باشد در انتخاب

یک فرد به طور تصادفی از این جامعه با کدام احتمال گروه خونی اش غیر از  $A$  و رنگ چشمش مشکی است؟

- (۱) ۰/۰۳      (۲) ۰/۱      (۳) ۰/۰۱      (۴) ۰/۴۵

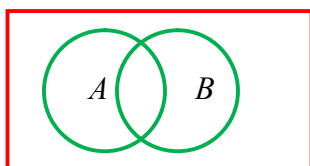
👉 **پاسخ:** گزینه ۴

رنگ چشم کاملاً مستقل از گروه خونی است بنابراین داریم:

$$P(\text{گروه خونی غیر از } A) \times P(\text{چشم مشکی}) = P(\text{گروه خونی غیر از } A \cap \text{رنگ چشم مشکی}) \\ = \left(1 - \frac{40}{100}\right) \times \frac{75}{100} = \frac{45}{100}$$

📖 **سؤال ۲:** شخصی به یک تخته هدف به شکل روبرو شلیک می کند احتمال آن که ناحیه  $A$  را بزند ۰/۲ و احتمال آنکه

ناحیه  $B$  را بزند ۰/۳ و احتمال آنکه هر دو ناحیه را بزند ۰/۱ است احتمال های زیر را بیابید.



$$P(A \cap B) = 0.1$$

(۱)  $A$  را بزند و  $B$  را نزنند.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1$$

(۲)  $B$  را بزند و  $A$  را نزنند.

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2$$

(۳)  $B$  را نزنند.

$$P(B') = 1 - P(B) = 0.7$$

(۴)  $A$  یا  $B$  را بزند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

سؤال ۳: احتمال موفقیت به شکست پیشامد  $A$  به ۲ است و احتمال رخ داد پیشامد  $B$  به عدم آن  $\frac{1}{4}$  در این

صورت اگر  $A$ ،  $B$  مستقل باشند احتمال های زیر را حساب کنید.

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(A') = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{5}, P(B') = \frac{4}{5}$$

(۱) هم  $A$  و هم  $B$  رخ دهد.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{12}{25}$$

(۲) هیچ یک از دو پیشامد  $A$ ،  $B$  رخ ندهد.

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

(۳)  $A$  رخ دهد و  $B$  رخ ندهد.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{3}{25} = \frac{12}{25}$$

(۴) حداکثر یکی از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  رخ دهد.

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2 \times 3}{25} = \frac{4}{5} - \frac{6}{25} = \frac{14}{25}$$

سؤال ۴: در یک آزمایش تصادفی دو پیشامد  $A$ ،  $B$  مستقل بوده  $n(A) = 4$ ،  $n(B) = 9$  و پیشامد این که

حداقل یکی از دو پیشامد  $A$  و  $B$  روی دهد، ۱۲ عضو دارد. فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

۷۲ (۴)

۶۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پیشامد این که حداقل یکی از دو پیشامد  $A$ ،  $B$  رخ دهد همان  $A \cup B$  است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 12 = 4 + 9 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

اگر دو پیشامد  $A$ ،  $B$  مستقل باشند آنگاه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} \times \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(S)} = \frac{4}{n(S)} \times \frac{9}{n(S)} \Rightarrow n(S) = 36$$

**سؤال ۵:** خانواده ای دارای سه فرزند است. اگر پیشامد از هر دو جنس بودن فرزندان این خانواده را با  $A$  و پیشامد دارا بودن حداکثر یک پسر را با  $B$  نمایش دهیم پیشامدهای  $A$  و  $B$  ...  
 (۱) وابسته اند (۲) ناسازگارند (۳) جدا از هم هستند. (۴) مستقلند.

**پاسخ:** گزینه ۴

در این مثال شرایط پیشامدها به گونه ای است که نمی توان مستقیماً نوع آنها را تعیین نمود. بنابراین لازم است که برای تعیین مستقل یا وابسته بودن آنها از شرط لازم و کافی  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  استفاده کنیم:

$$A = \{(د,د,د), (د,د,پ), (د,پ,د), (د,پ,پ), (پ,د,د), (پ,د,پ), (پ,پ,د), (پ,پ,پ)\} \xrightarrow{n(s)=8} P(A) = \frac{6}{8}$$

$$B = \{(د,د,د), (د,د,پ), (د,پ,د), (د,پ,پ), (پ,د,د), (پ,د,پ), (پ,پ,د), (پ,پ,پ)\} \xrightarrow{n(s)=8} P(B) = \frac{4}{8}$$

$$A \cap B = \{(د,د,د), (د,پ,د), (د,پ,پ)\} \xrightarrow{n(s)=8} P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A)P(B) = \frac{6}{8} \times \frac{4}{8} \rightarrow \text{پیشامدهای } A \text{ و } B \text{ مستقلند}$$

**نکته:** اگر دو پیشامد  $A$ ,  $B$  مستقل باشند آنگاه پیشامدهای  $A', B'$  و پیشامدهای  $A$  و  $B'$  و پیشامدهای  $A'$  و  $B$  مستقل هستند در حالت کلی می توان گفت اگر دو پیشامد مستقل از هم باشند متمم های آنها مستقلند و متمم یکی با دیگری مستقل از هم هستند.

می خواهیم با فرض مستقل بودن  $A$ ,  $B$  برای ثابت کنم که  $A'$  و  $B$  مستقلند.

$$\left. \begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\ &: P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A' \cap B) &= P(B)P(A') \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A))$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(B)P(A')$$

حالا با فرض مستقل بودن  $A$ ,  $B$  ثابت کن که پیشامدهای  $A', B'$  و پیشامدهای  $A$  و  $B'$  مستقلند.

**سؤال ۶:** دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می شود؟

(۱)  $\frac{3}{8}$  (۲)  $\frac{5}{8}$  (۳)  $\frac{5}{12}$  (۴)  $\frac{7}{12}$  (سراسری ۹۶)

**پاسخ:** گزینه ۱

پیشامد «دو سکه رو» را با  $A$  و پیشامد «۶ آمدن تاس» را با  $B$  نشان می دهیم. واضح است که  $A$  و  $B$  مستقل اند. پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2}}{2^2} + \frac{1}{6} - \frac{\binom{2}{2}}{2^2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

سؤال ۷: اگر  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $A$  و  $B$  مستقل باشند  $P(A \cup B')$  کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینه ۴

چون  $A, B$  مستقل هستند:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B))$$

$$\Rightarrow P(A \cup B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B') = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

سؤال ۸: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال رنگ این مهره ها متفاوت است؟

- (۱)  $\frac{19}{40}$  (۲)  $\frac{21}{40}$  (۳)  $\frac{23}{40}$  (۴)  $\frac{27}{40}$  (سراسری خارج ۸۹)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا احتمال هم رنگ بودن دو مهره انتقابی را به دست می آوریم:

$$P(\text{همرنگ}) = P(\text{هر دو سفید}) + P(\text{هر دو سبز}) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{1}}{\binom{10}{1} \binom{8}{1}} + \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{1} \binom{8}{1}} = \frac{24}{80} + \frac{2}{80} = \frac{26}{80}$$

احتمال غیرهمرنگ بودن برابر است با:

$$P(\text{غیرهمرنگ}) = 1 - P(\text{همرنگ}) = 1 - \frac{26}{80} = \frac{54}{80} = \frac{27}{40}$$

سؤال ۹: در جعبه ای ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید یکسان وجود دارند. به تصادف یک مهره از جعبه خارج و رنگ آن را یادداشت کرده و به جعبه برمی گردانیم. اگر  $X$  تعداد آزمایش هایی باشد که برای اولین بار مهره سفید خارج شود

$P(X \leq 3)$  کدام است؟ (سراسری خارج ریاضی ۹۰)

- (۱)  $\frac{21}{25}$  (۲)  $\frac{117}{125}$  (۳)  $\frac{119}{125}$  (۴)  $\frac{24}{25}$

پاسخ: گزینه ۲

برداشت متوالی مهره ها مستقل از هم می باشد.  $P(X \leq 3)$  به معنی آن است که یا اولین مهره خارج شده سفید است یا دومین

مهره (در این صورت اولین مهره باید سیاه باشد) یا سومین مهره سفید است (در این صورت اولین و دومین مهره سیاه هستند). چون

در هر مرتبه پس از یادداشت کردن رنگ آن را به جعبه برمی گردانیم، تعداد مهره ها در هر بار کم نمی شود. بنابراین داریم:

$$P(x \leq 3) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(x \leq 3) = \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} = \frac{75+30+12}{125} = \frac{117}{125}$$

**سؤال ۱۰:** احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب برابر ۵۰٪ و ۶۰٪ و ۷۰٪ است. احتمال آن که اقلاً یکی از سه نفر در کنکور قبول شود کدام است؟ (آزمون کانون ۹۲)

(۱) ۹۲٪ (۲) ۹۶٪ (۳) ۹۰٪ (۴) ۹۴٪ (۵) ۹۴٪

پاسخ: گزینه ۴

قبولی افراد در کنکور مستقل از یکدیگر است. پیشامد حداقل یک نفر قبول شود، متمم این است که هیچ یک قبول نشوند. بنابراین داریم:

$$P(\text{حداقل یکی قبول}) = 1 - P(\text{همگی مردود}) = 1 - 0/5 \times 0/4 \times 0/3 = 1 - 0/6 = 0/94$$

**سؤال ۱۱:** برای رسیدن به مرحله نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دوره مسابقات مقدماتی شرکت کنند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود به مرحله نهایی راه نخواهد یافت. اگر احتمال پیروزی در هر دوره بازی برای تیمی ۰/۴ باشد احتمال حضور این تیم در مرحله نهایی کدام است؟ (آزمون کانون ۹۲)

(۱) ۰/۴ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۶۴ (۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۳

امتثال بازنده شدن در هر دو دوره را حساب کرده و از یک کم می کنیم، چون اگر در یکی از دوره ها نیز ببود، به مرحله نهایی می رود. برد و باخت در دوره ها نیز مستقل از هم هستند.

$$P(\text{رفتن به مرحله نهایی}) = 1 - P(\text{بازنده شدن در هر دو دوره}) = 1 - 0/6 \times 0/6 = 1 - 0/36 = 0/64$$

**سؤال ۱۲:** ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف ۲ مهره را از ظرف خارج می کنیم با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ اند؟ (سراسری خارج ریاضی ۹۲)

(۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{4}{9}$  (۳)  $\frac{5}{9}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

$$P = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

**سؤال ۱۳:** در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنها مهارت قالی بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟

(۱) ۰/۷ (۲) ۰/۷۵ (۳) ۰/۸ (۴) ۰/۸۵ (تجربی داخل ۹۰)

پاسخ: گزینه ۱

طبق گفته های مسئله داریم:

$P = 0/6$  (تمصیلات ابتدایی) و  $P = 0/25$  (مهارت قالی بافی) معلوم است که این دو موضوع مستقل از هم درگردد پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0/6 + 0/25 - 0/6 \times 0/25 = 0/7$$

سؤال ۱۴: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال

لااقل عمل جراحی برای یکی از آن دو نفر موفقیت آمیز است؟ (تجربی داخل ۹۵)

- (۱) ۰/۹۲ (۲) ۰/۹۴ (۳) ۰/۹۶ (۴) ۰/۹۸

پاسخ: گزینه ۴

می توان گفت احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر  $P(A) = 0/9$  و برای شخص B برابر  $P(B) = 0/8$

است پس احتمال اینکه لااقل عمل جراحی برای یکی از دو نفر موفقیت آمیز باشد برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0/9 + 0/8 - 0/9 \times 0/8 = 1/7 - 0/72 = 0/98$$

سؤال ۱۵: احتمال تولد فرزند پسر در خانواده A برابر ۰/۴ و احتمال تولد فرزند پسر در خانواده B برابر ۰/۶ می باشد.

احتمال آن که فرزند اول فقط یکی از این دو خانواده پسر باشد کدام است؟

- (۱) ۰/۴۸ (۲) ۰/۵۲ (۳) ۰/۵۶ (۴) ۰/۶

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم A پیشامد پسر بودن فرزند اول خانواده A، B پیشامد پسر بودن فرزند اول خانواده B باشد در این صورت داریم:

$P(A) = 0/4$  و  $P(B) = 0/6$ . از آنجا که پسر بودن فرزندان اول این دو خانواده مستقل از یکدیگر است پس احتمال آن

که فرزند اول فقط یکی از این دو خانواده پسر باشد برابر است با:

$$P(A)P(B') + P(A')P(B) = (0/4)(1 - 0/6) + (1 - 0/4)(0/6)$$

$$= 0/4 \times 0/4 + 0/6 \times 0/6 = 0/16 + 0/36 = 0/52$$

سؤال ۱۶: یک سکه را پرتاب می کنیم اگر «رو» بیاید آنگاه تاس می ریزیم. اگر «پشت» بیاید دوباره سکه را پرتاب

می کنیم. این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه

عدد تاس مضرب ۳ می باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{7}{24}$  (۴)  $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه ۳

احتمال «رو» یا «پشت» آمدن در هر پرتاب سکه  $\frac{1}{2}$  است. همچنین احتمال اینکه در پرتاب تاس مضرب ۳ ظاهر شود (یعنی ۳ یا ۶

بیاید) برابر  $\frac{2}{6}$  است. پس می توان نوشت:

$$\text{احتمال} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{7}{24}$$

سؤال ۱۷: چهار دانش آموز یک کلاس بر نیمکت نشسته اند. با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنها یکسان است؟ (تجربی خارج ۹۲)

- (۱)  $\frac{19}{48}$  (۲)  $\frac{41}{96}$  (۳)  $\frac{23}{48}$  (۴)  $\frac{55}{96}$

پاسخ: گزینه ۲

بهتر است از روش متمم استفاده کنیم:

$$P(\text{حداقل دو نفر در یک ماه}) = 1 - P(\text{هر نفر در ماه متفاوت}) = 1 - \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12}$$

$$= 1 - \frac{11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12} = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

سؤال ۱۸: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از فضای نمونه ای  $S$  باشند به طوری که  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A) = \frac{3}{4}$

احتمال این که هیچ یک از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  روی ندهد کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

هیچیک از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  روی ندهد. یعنی:  $A' \cap B'$

در ضمن وقتی  $A$  و  $B$  مستقل هستند  $A'$  و  $B'$  نیز مستقل هستند. یعنی داریم:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = (1 - P(A)) \times (1 - P(B)) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

سؤال ۱۹: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از یک آزمون تصادفی باشند و  $P(B) = 2P(A) = \frac{1}{8}$  آنگاه

$P(A' \cap B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{32}$  (۳)  $\frac{1}{12}$  (۴)  $20\%$

پاسخ: گزینه ۳

اگر  $A$  و  $B$  مستقل باشند  $A'$  و  $B'$  نیز مستقل هستند. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A') \times P(B') = (1 - P(A)) \times (1 - P(B)) \\ P(B) &= \frac{1}{8}, 2P(A) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{16} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = \frac{15}{16} \times \frac{7}{8} = \frac{105}{128}$$

سؤال ۲۰: از ظرفی که ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد دو مهره را متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می کشیم.

احتمال آنکه اولی سفید و دومی سیاه باشد کدام است؟

- (۱)  $\frac{20}{81}$  (۲)  $\frac{20}{72}$  (۳)  $\frac{40}{81}$  (۴)  $\frac{40}{72}$



پاسخ: گزینه ۲

وقتی دو مهره متوالیاً بیرون آورده می شود پیشامدهای بیرون آوردن هر یک از آن ها مستقل از هم هستند. بنابراین می توان احتمال های آنها را جداگانه حساب کرد و در هم ضرب کرد. چون قید «بدون جایگزاری» آمده است پس از برداشتن یک مهره تعداد مهره ها کم می شود و دیگر آن را به کیسه بر نمی گردانیم.

$$P(\text{دومی سیاه}) \times P(\text{اولی سفید}) = P(\text{اولی سفید و دومی سیاه}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72}$$

سؤال ۲۱: ظرف A شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ظرف B شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. از هر

ظرف مهره ای به تصادف خارج می کنیم احتمال آنکه از ظرف A سفید و از ظرف B سیاه آمده باشد چقدر است؟

$$\begin{array}{l} \frac{62}{63} \text{ (۱)} \\ \frac{31}{63} \text{ (۲)} \\ \frac{25}{63} \text{ (۳)} \\ \frac{5}{21} \text{ (۴)} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴

انتخاب مهره ها از دو ظرف تمایز مستقل از هم هستند.

$$P(\text{مهره A سفید}) \times P(\text{مهره B سیاه}) = \frac{5}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$$

سؤال ۲۲: کیسه ای محتوی ۳ مهره سبز و ۴ مهره سفید و ۵ مهره قرمز است. از این کیسه سه مهره متوالیاً و بدون

جای گذاری بیرون می آوریم. احتمال این که هر سه مهره سفید باشند کدام است؟

$$\begin{array}{l} \frac{1}{220} \text{ (۱)} \\ \frac{1}{110} \text{ (۲)} \\ \frac{1}{55} \text{ (۳)} \\ \frac{2}{91} \text{ (۴)} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۳

انتخاب متوالی یعنی این که مهره ها دانه دانه از کیسه خارج شوند. در این صورت پیشامدهای ایجاب شده مستقل از هم هستند و چون بدون جایگزاری است از تعداد مهره در هر برداشت کم می شود.

$$P(\text{سومی سفید}) \times P(\text{دومی سفید}) \times P(\text{اولی سفید}) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{110} = \frac{1}{55}$$

سؤال ۲۳: ظرفی شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. مهره ای از آن خارج کرده و پس از مشاهده رنگ آن به

جعبه برمی گردانیم و مجدداً مهره ای خارج می کنیم. احتمال آنکه فقط یک بار مهره سفید بیرون آمده باشد کدام است؟

$$\begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ (۱)} \\ \frac{2}{15} \text{ (۲)} \\ \frac{6}{25} \text{ (۳)} \\ \frac{12}{25} \text{ (۴)} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴

برداشت متوالی مهره ها، مستقل از یکدیگر هستند. فقط یکبار سفید یعنی این که یا در مرتبه اول سفید رویت شده است و در مرتبه دوم سیاه و یا برعکس. چون مهره را به کیسه برگردانیم. از تعداد آنها در مرتبه بعدی کم نشده است.

$$P(\text{اولی سیاه و دومی سفید}) + P(\text{اولی سفید و دومی سیاه}) =$$

$$P(\text{دومی سفید}) \times P(\text{اولی سیاه}) + P(\text{دومی سیاه}) \times P(\text{اولی سفید}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

سؤال ۲۴: یک سکه را صد بار انداخته ایم و پشت آمده است. احتمال آنکه در یکصد و یکمین بار باز هم پشت بیاید کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه ۱

پرتاب های مختلف یک سکه مستقل از هم هستند. پس در پرتاب صد و یکم احتمال اینکه پشت بیاید  $\frac{1}{2}$  است.

سؤال ۲۵: خانواده ای دارای ۴ فرزند است. می دانیم که دو فرزند اول آنها پسر است. احتمال آنکه دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{16}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{5}{16}$  (۴)  $\frac{3}{8}$

پاسخ: گزینه ۲

بنسبت فرزندان مستقل از هم دیگر است. این که دو فرزند اول پسر هستند، تاثیری در فرزندان سوم و چهارم ندارد.

$$P(\text{فرزند سوم و چهارم دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

سؤال ۲۶: اگر  $A, B$  دو پیشامد مستقل از فضای نمونه  $S$  باشد  $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$  با کدام احتمال هیچ یک

از این دو پیشامد روی نمی دهد؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به اینکه  $A, B$  مستقل هستند:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \right) \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

سؤال ۲۷: تاس سالمی را افراد  $A, B, C$  به ترتیب پرتاب می کنند. اولین شخص که شش ظاهر کند برنده است.

احتمال برنده شدن  $A$  چند برابر برنده شدن  $C$  است؟

- (۱)  $\frac{6}{5}$  (۲)  $\frac{216}{125}$  (۳)  $\frac{36}{25}$  (۴)  $\frac{91}{216}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{6}} = \frac{36}{25}$$

سؤال ۲۸: اگر احتمال قفل بودن درب یک کیف رمزدار  $\frac{1}{3}$  باشد از بین پنج رمزی که یکی از آنها مربوط به این درب

است دو رمز انتخاب می کنیم. با کدام احتمال درب کیف باز می شود؟

$$\frac{2}{15} \quad (۴) \qquad \frac{1}{5} \quad (۳) \qquad \frac{4}{5} \quad (۲) \qquad \frac{11}{15} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$P(E) = \left. \begin{array}{l} \text{درب کیف بسته باشد} \rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{\binom{1}{1} \binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{15} = P_1 \\ \text{درب کیف باز باشد} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = P_2 \end{array} \right\} \Rightarrow P(E) = P_1 + P_2 = \frac{2}{15} + \frac{2}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

سؤال ۲۹: اگر  $A'$ ,  $B'$  دو پیشامد باشد و  $P(A) = \frac{1}{6}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$  حاصل  $P(A' \Delta B)$  کدام است.

$$P(A' \Delta B) = P(P(A \Delta B)') = 1 - P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) =$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + P(B) - \frac{1}{6}P(B) \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{5}{6}P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A' \Delta B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$P(A' \Delta B) = P(A') + P(B) - 2P(A')P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{5} - 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

سؤال ۳۰: اگر  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $A$ ,  $B$  مستقل باشند حاصل  $P(A' \cup B')$  کدام است.

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

سؤال ۳۱: اگر  $A$ ,  $B$  دو پیشامد مستقل باشند و  $P(A \cap B) = [P(A)]^2$  باشد حاصل  $P(A')$  کدام است.

( $P(A) \neq 0$ )

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (P(A))^2$$

طرفین را بر  $P(A) \neq 0$  تقسیم می کنیم

$$\Rightarrow P(A) = P(B) \rightarrow P(A') = P(B') = 1 - P(B)$$

سؤال ۳۲: در پرتاب ۴ سکه با هم اگر احتمال آمدن حداقل دوبار روی سکه را با  $P(A)$  و حداقل دو بار پشت را با  $P(B)$  بنامیم  $P(A \cap B')$  کدام است.

منظور از  $P(A \cap B')$  همان  $P(A-B)$  است یعنی کفیسست از بین حالت هایی حداقل دو بار روی سکه ظاهر می شود آن هایی که ۲ پشت یا بیشتر است را حذف کنیم

$$A = \{(ر,ر,ر,ر), (ر,ر,ر,پ), (ر,ر,پ,ر), (ر,پ,ر,ر), (پ,ر,ر,ر)\}$$

$$A - B = \{(ر,ر,ر,ر), (ر,ر,ر,پ)\}$$

$$P(A - B) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4} = \frac{5}{16}$$

سؤال ۳۳: یک تاس همگن را چندبار پرتاب می کنیم تا احتمال این که ۵ یا ۶ حداقل یک بار ظاهر شود برابر  $\frac{5}{9}$  گردد.

$$P(\text{حداقل یک بار ۵ یا ۶}) = 1 - P(\text{اصلاً ۵ یا ۶ نیاید}) = 1 - P$$

احتمال این که ۵ یا ۶ اصلاً نیاید برابر  $\frac{4}{6}$  یا  $\frac{2}{3}$  است و اگر  $n$  بار پرتاب انجام گیرد چون پرتاب ها مستقل اند برابر  $(\frac{2}{3})^n$  است

پس:

$$P = 1 - (\frac{2}{3})^n = \frac{5}{9} \rightarrow (\frac{2}{3})^n = \frac{4}{9} \rightarrow n = 2$$

سؤال ۳۴: یک خانواده دست کم چند فرزند داشته باشد تا احتمال داشتن حداقل یک پسر و حداقل یک دختر بیش از ۹۵ درصد باشد.

فرض می کنیم تعداد فرزندان  $n$  است

$$\begin{aligned} P(\text{هیچ دختر ل یا هیچ پسر}) &= 1 - P(\text{حداقل یک پسر} \cap \text{حداقل یک دختر}) \\ &= 1 - [P(\text{هیچ دختر}) - P(\text{هیچ پسر}) + P(\text{هیچ دختر} \cap \text{هیچ پسر})] \\ &= 1 - P(\text{هیچ دختر}) - P(\text{هیچ پسر}) \\ &= 1 - (\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^n = 1 - (\frac{1}{2})^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{اما } 1 - (\frac{1}{2})^{n-1} > \frac{95}{100} \text{ پس } (\frac{1}{2})^{n-1} < \frac{5}{100} \text{ و لذا } (\frac{1}{2})^{n-1} > \frac{100}{5} \text{ و } 2^{n-1} > 20 \text{ پس } n-1 \geq 5 \text{ و در نتیجه } n \geq 6$$

سؤال ۳۵: ۲۰ دانش آموز یک کلاس برای انجام امتحان به تصادف روی ۲۰ صندلی می نشینند احتمال آن که یک شخص به خصوص در دو آزمون روی یک صندلی یکسان بنشیند کدام است.

احتمال انتقاب یک صندلی به فصوص در دو آزمون متلف که مستقل از هم هستند برابر  $\frac{1}{20} \times \frac{1}{20}$  است و انتقاب صندلی به

$$\text{فصوص} \binom{20}{1} \text{ حالت متلف دارد پس جواب } \binom{20}{1} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \text{ است.}$$

سؤال ۳۶: احتمال آنکه افراد  $A, B, C, D$  همگی در یکی از روزهای هفته بدنیا آمده باشند کدام است.

راه حل اول: احتمال بدنیا آمدن هر فرد در هر کدام از روزهای هفته مستقل از دیگر افراد بوده و برابر  $\frac{1}{7}$  است بنابراین احتمال آن که همگی مثلاً در روز شنبه بدنیا آمده باشند برابر  $\left(\frac{1}{7}\right)^4 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$  است اما ممکن است همگی در روز یکشنبه و... جمعه نیز بدنیا آمده باشند که باز هم مطلوب است پس احتمال بالا ۷ برابر می شود  $7 \times \left(\frac{1}{7}\right)^4 = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

راه حل دوم: نفر اول را آزاد گذاشته که در هر روزی از هفته بدنیا آمده باشد اما نفرات بعدی هر کدام  $\frac{1}{7}$  احتمال دارند که در آن روز بدنیا بیایند که نفر اول بدنیا آمده است  $P = 1 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

سؤال ۳۷: چقدر احتمال دارد ۶ عضو تیم والیبال همگی متولد یک فصل از سال باشند؟

(۱)  $\left(\frac{1}{2}\right)^6$       (۲)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$       (۳)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$       (۴)  $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

پاسخ: گزینه ۳

نفر اول آزاد است که هر یک از ۴ فصل را انتخاب کند پس احتمالش می شود  $\frac{4}{4}$  اما پنج نفر دیگر باید همگی همان ماه باشند و احتمال هر کدام  $\frac{1}{4}$  است پس داریم:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

سؤال ۳۸: احتمال آنکه از بین سه نفر حداکثر دو نفر در فصل زمستان به دنیا آمده باشند کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{16}$       (۲)  $\frac{27}{64}$       (۳)  $\frac{15}{16}$       (۴)  $\frac{63}{64}$

پاسخ: گزینه ۴

از روش متمم می رویم یعنی احتمال آنکه هر سه نفر در فصل زمستان به دنیا آمده باشند را تعیین کرده و بعد جوابش را از ۱ کم می کنیم ببینیم:

$$P = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \Rightarrow 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

(تولد حداکثر دو نفر در زمستان) = ۱ - (تولد هر سه نفر در زمستان باشد)  $P$

سؤال ۳۹: یک سکه دو ریالی و یک سکه ۵ ریالی و یک سکه ده ریالی را با هم می اندازیم احتمال این که تنها یکی از سکه ها شیر بیاید کدام است.

احتمال این که یک سکه شیر و دو سکه دیگر فط بیاید برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  است و چون برای انتقاب یک سکه که شیر بیاید روش وجود دارد لذا احتمال مورد نظر  $\binom{3}{1} = 3$   $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

سؤال ۴۰: احتمال اینکه از بین ۳ فرزند یک خانواده حداقل ۲ فرزندشان از لحاظ روزهای هفته مثل هم باشد، چقدر است.

متمم پیشامد مطلوب آن است که هیچ کدام از لحاظ روزهای هفته یکسان نباشند که این احتمال برابر است با:

$$\frac{7 \times 6 \times 5}{7^3} = \frac{30}{49} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$$

سؤال ۴۱: دو دستگاه آژیر در ساختمان برای آگاهی از خطر نصب شده است این دو آژیر بطور مستقل کار می کنند و احتمال آن که در موقع خطر، آژیر اول به کار بیافتد برابر با  $0.95$  و این احتمال برای آژیر دوم برابر  $0.9$  است احتمال آن که در موقع خطر فقط یکی از آژیرهای کار کند چقدر است؟

$$P(A \Delta B) = P(A)P(B') + P(A')P(B) = 0.95 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.14$$

سؤال ۴۲: دو تیر به سوی هدف شلیک می کنیم احتمال آنکه فقط یکی از دو تیر به هدف اصابت کند برابر  $0.38$  است احتمال آنکه تیر اول به هدف بخورد برابر  $0.8$  است احتمال این که تیر دوم به هدف بخورد چقدر است.

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B) = 0.38$$

$$= 0.8 + P(B) - 2 \times 0.8 \times P(B) \rightarrow P(B) = 0.7$$

سؤال ۴۳:  $A, B$  دو پیشامد مستقل اند بطوری که وقوع همزمان آنها  $\frac{1}{6}$  و احتمال این که هیچ کدام رخ ندهند  $\frac{1}{3}$  است در این صورت  $P(A), P(B)$  را بیابید.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{3} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = \frac{5}{6} \\ P(A).P(B) = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, 3$$

ریشه های معادله با ۵، ۶ برابر  $P(A), P(B)$  هستند

$$\rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**سؤال ۴۴:** احتمال به صدا در آمدن هر یک از سه آژیر مستقلی که در یک فروشگاه نصب است به هنگام آتش سوزی  $۰/۹۵$  است احتمال آنکه به هنگام بروز آتش سوزی حداقل یکی از ۳ آژیر خطر به صدا در بیایند چقدر است.

$$P(\text{هیچ کدام}) = 1 - P(\text{حداقل یکی}) \\ = 1 - 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 1 - (0.5)^3$$

**سؤال ۴۶:** اگر  $A, B$  دو پیشامد مستقل باشند و  $P(A) = \frac{1}{4}$ ،  $P(B) = \frac{1}{5}$  آنگاه  $P(A' \cup B')$  کدام است.

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A)P(B) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

**سؤال ۴۷:** احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب  $۵۰\%$ ،  $۶۰\%$  و  $۷۰\%$  است احتمال آنکه اقلاً یکی از این سه نفر در کنکور قبول شود کدام است.

چون گفته حداقل یکی از متمم آن یعنی هیچ کدام استفاده می کنیم

$$P(\text{هیچ کدام قبول نشوند}) = 1 - P(\text{حداقل یکی قبول شود}) \\ = P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A')P(B')P(C') = 1 - 0.5 \times 0.4 \times 0.3 = 0.94$$

**سؤال ۴۸:** احتمال آنکه حداقل یک تیر از ۳ تیر شلیک شده یک تیر انداز به هدف برخورد کند  $۰/۹۷۳$  است احتمال اینکه تیر اول این تیرانداز به هدف برخورد کند کدام است.

$$P(\text{هیچ تیر}) = 1 - P(\text{حداقل یک تیر}) \\ \Rightarrow P(A) = P(B) = P(C) \\ P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A')P(B')P(C') \\ \Rightarrow \frac{973}{1000} = 1 - (P(A'))^3 \rightarrow (P(A'))^3 = \frac{27}{1000} \\ \rightarrow P(A') = \frac{3}{10} \rightarrow P(A) = \frac{7}{10}$$

**سؤال ۴۹:** تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. ۸ نفر از این تاجریں برای اولین بار سفر کرده اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{5}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{9} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳

اگر تاجر بودن را با  $A$  و برای اولین بار سفر کردن را با  $B$  نمایش دهیم سوال پیشامد  $(A \cup B)'$  را خواسته است:

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ = 1 - \left[ \frac{23}{72} + \frac{12}{72} - \frac{8}{72} \right] = 1 - \frac{27}{72} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}$$

سؤال ۵۰: دو تاس سالم را تا زمانیکه برای اولین بار هر دو عدد رو شده فرد باشند با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال حداکثر در دو پرتاب این نتیجه حاصل می شود؟

- (۱)  $\frac{5}{16}$  (۲)  $\frac{3}{16}$  (۳)  $\frac{7}{16}$  (۴)  $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه ۳

احتمال آنکه در پرتاب اول هر دو تاس فرد باشند ( $P_1$ ) برابر است با:  $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

احتمال آنکه در پرتاب اول هر دو تاس همزمان فرد نباشند ولی در پرتاب دوم هر دو تاس فرد باشند ( $P_2$ ) برابر است با:

$$P_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:  $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$

سؤال ۵۱: اگر  $A, B$  دو پیشامد مستقل و  $P(A - B) = P(A \cap B)$  باشد کدام نتیجه درست است؟ ( $A \neq \phi$ )

- (۱)  $P(B) = 1$  (۲)  $P(B) = 0$  (۳)  $P(B) = \frac{1}{2}$  (۴)  $P(B) = \frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

طبق فرمول مستقل داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B')$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

حالا سوال می گوید این ها مساوی اند پس:  $P(A)P(B') = P(A)P(B) \Rightarrow P(B) = P(B')$

$$P(B) = P(B') = \frac{1}{2}$$

سؤال ۵۲: احتمال این که حبیب تا بیست سال دیگر زنده بماند  $0.75$  و احتمال اینکه برادرش تا ۲۰ سال بعد زنده

بماند  $\frac{2}{3}$  است. چقدر احتمال دارد تا بیست سال بعد فقط برادر حبیب زنده بماند؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

زنده ماندن و نماندن افراد از هم مستقل است (عمر دست فراست) پس داریم:

$$P(B \text{ بماند و } A \text{ نماند}) = P(B \cap A')$$

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = \frac{2}{3} \times (1 - 0.75) = \frac{2}{3} \times 0.25 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$



سؤال ۵۳: در بین ۳ نفر با کدام احتمال روز تولد حداقل دو نفر در هفته مثل هم است؟

$$\frac{20}{49} \quad (4)$$

$$\frac{5}{7} \quad (3)$$

$$\frac{19}{49} \quad (2)$$

$$\frac{18}{49} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

از متمم استفاده کنیم:

(سه روز مختلف)  $1 - P = 1 - P$  (هیچ دو نفری مثل هم نباشند)  $1 - P$  (حداقل دو نفر مثل هم)  $P$

$$1 = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$$

سؤال ۵۴: اگر  $A, B$  دو پیشامد مستقل و  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}, P(A') = \frac{2}{5}$  باشد مقدار  $P(B)$  کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$A, B$  مستقل اند پس:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

گفته شده  $P(A') = \frac{2}{5}$  پس  $P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$  در نتیجه:

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{5}P(B) \Rightarrow \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = P(B) \left(1 - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{2}{5}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

سؤال ۵۵: اگر  $A, B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند و  $P(A) \cdot P(B) + P(A' \cup B') = 1$  آنگاه دو

پیشامد  $A, B$  نسبت به هم چگونه اند؟

(۴) ناسازگار

(۳) وابسته

(۲) مستقل

(۱) سازگار

پاسخ: گزینه ۲

اولاً  $P(A') = 1 - P(A)$  ثانیاً  $A' \cup B' = (A \cap B)'$  بنابراین:

$$P(A) \cdot P(B) + P(A' \cup B') = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B)' = 1$$

$$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) + 1 - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

در نتیجه  $A, B$  دو پیشامد مستقل اند.

**تمرینات بیشتر پیشامدهای مستقل**

**سؤال ۱:** خانواده ای ۵ فرزند دارد احتمال اینکه چهارمین فرزند آنها دومین پسر خانواده باشد چقدر است.

باید از بین ۳ فرزند اول یکی پسر باشد که  $\binom{3}{1} = 3$  حالت پیش می آید پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\binom{3}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

**سؤال ۲:** در یک دبیرستان ۱۸ دانش آموز در شهریور متولد می شوند احتمال آنکه هر ۱۸ نفر در روز هفتم شهریور متولد شده باشند کدام است.

احتمال این که یک نفر در روز هفتم شهریور متولد شود  $\frac{1}{31}$  است و چون افراد مستقل اند احتمال مطلوب  $\left(\frac{1}{31}\right)^{18}$  است.

**سؤال ۳:** در یک کلاس ۸ نفری احتمال اینکه همه افراد در روز شنبه به دنیا آمده باشند کدام است.

$$\underbrace{\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \dots \times \frac{1}{7}}_{8} = \left(\frac{1}{7}\right)^8$$

**سؤال ۴:** اگر به طور تصادفی سه نفر از جامعه ای انتخاب شوند با کدام احتمال فقط ماه تاریخ تولد برای هر سه یکسان است.

چون تولد سه نفر مستقل است احتمال این که هر سه در ماه فروردین باشند برابر  $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12}$  است و این احتمال برای سایر ماه ها نیز وجود دارد و چون ۱۲ ماه داریم لذا احتمال این که هر سه در یک ماه متولد شده باشند  $\frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{144}$  است.

**سؤال ۵:** سکه ای را  $n$  بار می اندازیم حداقل تعداد  $n$  تا احتمال آن که در هیچ بار خط نیاید کمتر از  $0.1$  باشد کدام است.

پرتاب ها مستقل اند احتمال آنکه در هر  $n$  پرتاب شیر بیاید برابر  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  است  $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$  پس  $2^n < 10$  و  $n \geq 4$

**سؤال ۶:** احتمال زنده بودن یک زن و شوهر در ۲۰ سال آینده به ترتیب  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{1}{2}$  است احتمال اینکه در این مدت دست کم یکی از آنها زنده بماند کدام است.

$$\begin{aligned} P(\text{هیچ کدام...}) &= 1 - P(\text{دست کم یکی...}) \\ &= 1 - P(A')P(B') = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

**سؤال ۷:** اگر  $A, B$  دو پیشامد مستقل باشند حاصل  $1 - P(A \cup B)$  کدام است.

$$1 - P(A \cup B) = P((A \cup B)') = P(A' \cap B') = P(A')P(B')$$

**سؤال ۸:** احتمال قبولی دو برادر در کنکور  $0.3$  و  $0.7$  است با چه احتمالی هر دو در کنکور قبول می شوند.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.21$$

**سؤال ۹:** احتمال قبولی حداقل یکی در کنکور کدام است.

$$P(\text{حداقل یکی}) = 1 - P(\text{هیچ کدام}) = 1 - P(A')P(B') = 1 - 0.3 \times 0.7 = 0.79$$