

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>

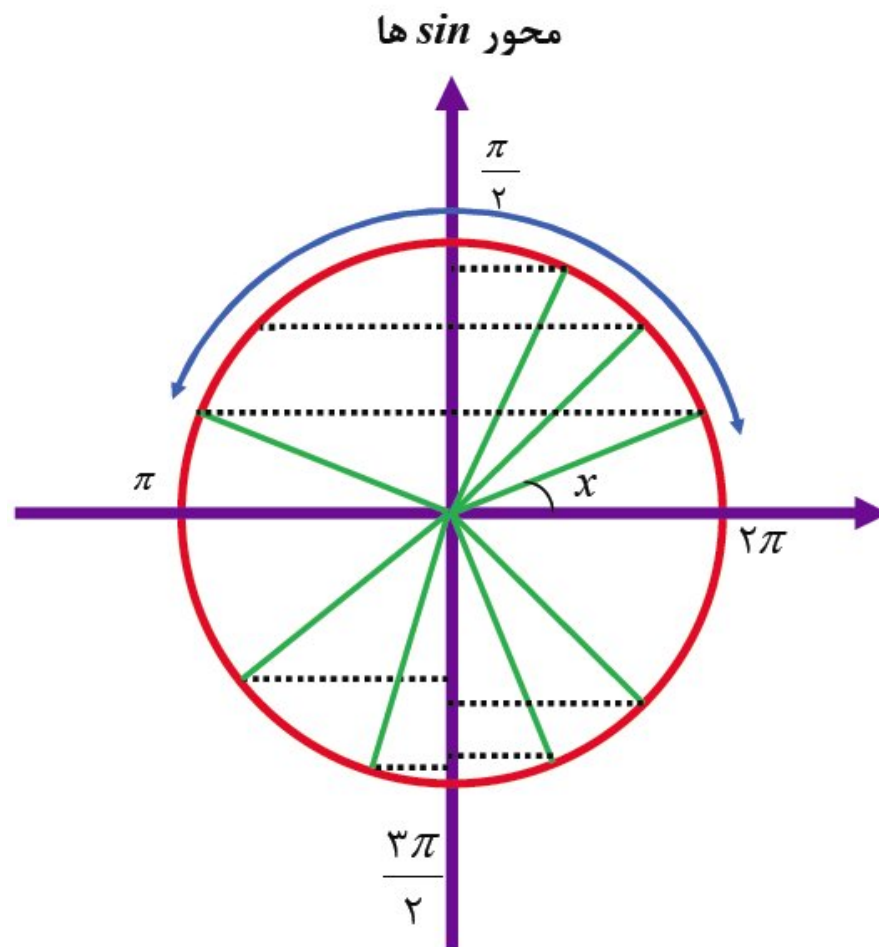


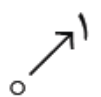
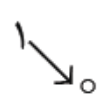
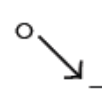
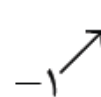
(@riazisara)

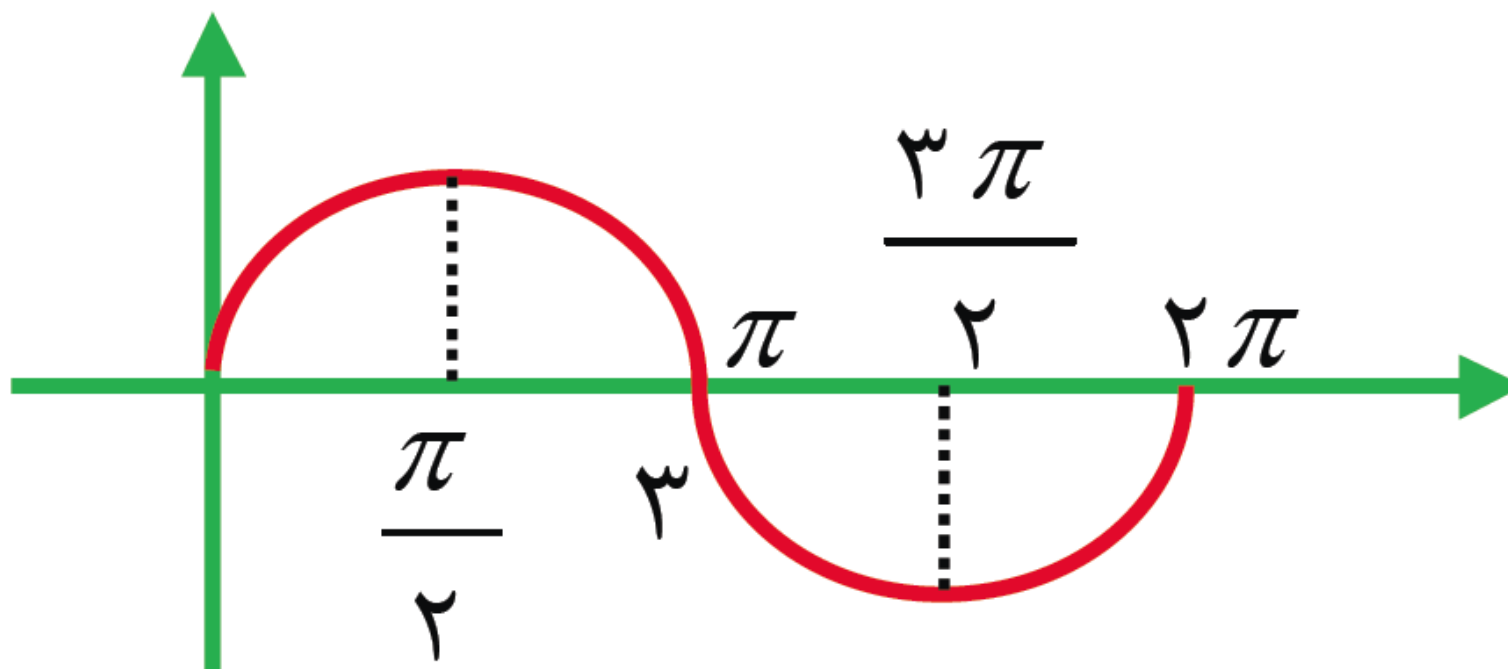
نمودار توابع مثلثاتی

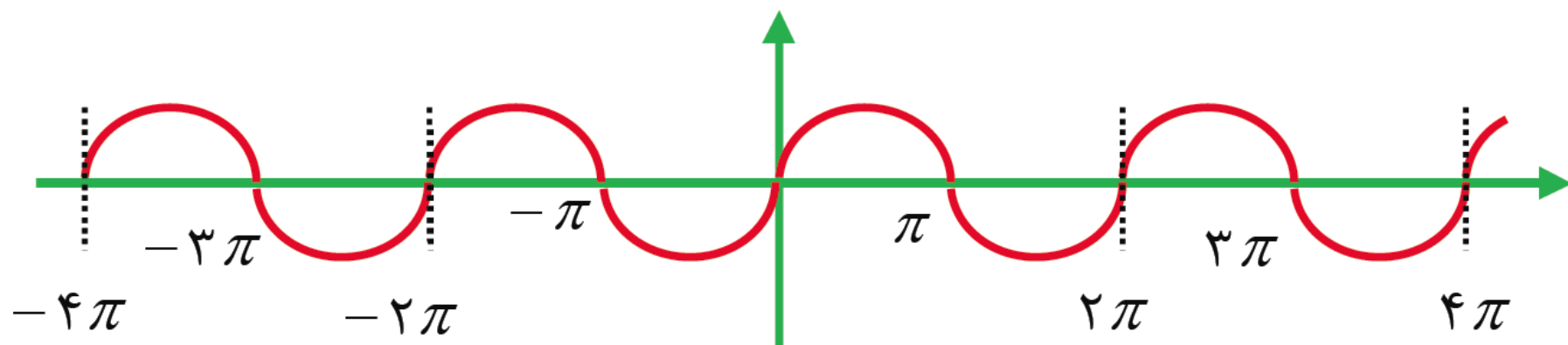
مدرس : ایمان نخستین

www.riazisara.ir



	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
x	$\circ - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \pi$	$\pi - \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} - 2\pi$
$\sin x$				
	صعودی اکید	نزولی اکید	نزولی اکید	صعودی اکید





ویژگی های مهم تابع $y = \sin x$

۱. در مضارب صحیح π ، این تابع صفر می شود.

۲. همانطور که در بازه $[0, 2\pi]$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ به حداکثر مقدار خود می رسد و یک می شود این اتفاق هر 2π یک بار

رخ خواهد داد یعنی در نقاط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

۳. در نقطه $x = \frac{3\pi}{2}$ تابع سینوس مقدارش -1 است، یعنی کمترین مقدار ممکن برای سینوس به صورت کلی در

$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ تابع سینوس در کمترین مقدار قرار می گیرد.

۴. دامنه این تابع شامل تمام اعداد حقیقی است پس به جای x هر عددی می توانیم قرار دهیم و بردش $[-1, 1]$ است.

$$\sin(-x) = -\sin x \quad ۵.$$

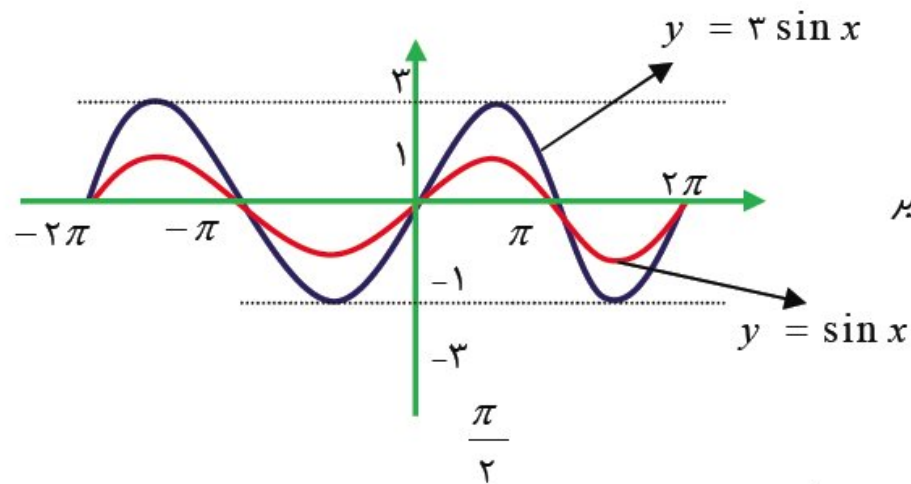
📖 **سؤال ۱:** تابع $y = 3\sin x + 1$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) تابع در چه بازه هایی اکیداً صعودی است؟

ب) تابع در چه نقاطی صفر می شود؟

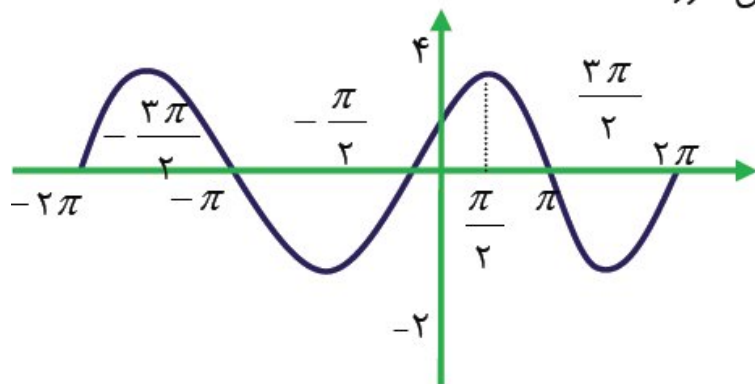
پ) در چند نقطه به حداکثر مقدار خود می رسد؟

ت) برد تابع را تعیین کنید.



👉 پاسخ: ابتدا تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم سپس تابع $y = 3 \sin x$ را می‌کشیم. برای این کار کافی است که مقادیر این تابع را ۳ برابر کنیم.

در آفر هم باید عرض همه نقاط را یک واحد افزایش بدهیم که تابع این شکلی می‌شود:



حالا سوال ها را جواب بدهیم:

الف) این تابع در بازه $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ اکیدا صعودی است. $\frac{\pi}{2}$

ب) این تابع در نقاطی که $3\sin x + 1 = 0$ برابر صفر شود مقدارش صفر است! یعنی باید معادله $3\sin x + 1 = 0$ را حل کنیم. از

این معادله $\sin x = \frac{-1}{3}$ به دست می آید که قبلاً ما x های این جوری را فو مان بلد نیستیم و باید از ماشین حساب استفاده کنیم!

پ) در نقاط $x = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ به حداکثر مقدارش می رسد.

ت) برد تابع هم که مطابق شکل $[-2, 4]$ است.

📖 سؤال ۲: تابع $y = 2|\sin x|$ در بازه هایی به طول T عیناً تکرار می شود، کمترین مقدار T کدام است؟

۴π (۴)

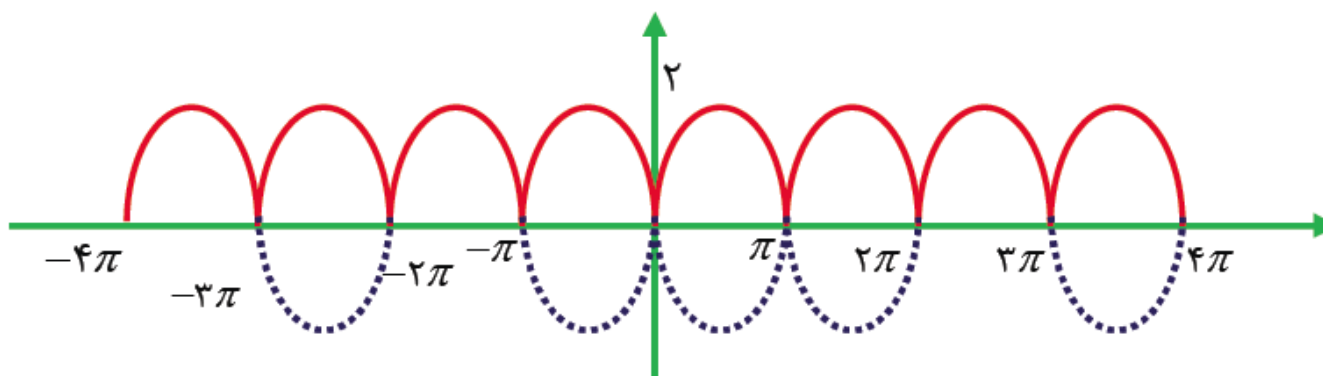
۲π (۳)

π (۲)

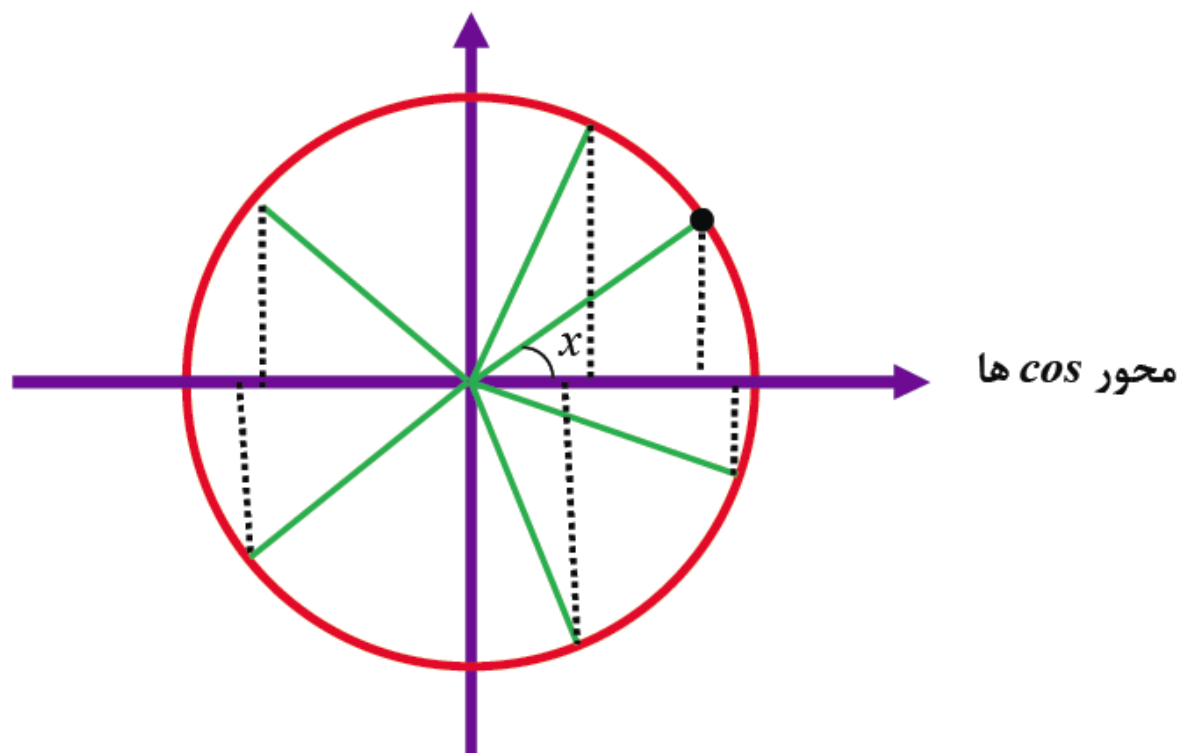
$\frac{\pi}{2}$ (۱)

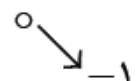
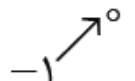
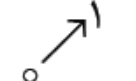
👉 پاسخ: گزینه ۲

تابع $y = |\sin x|$ این جوری رسم می شود که ابتدا $y = \sin x$ را می کشیم و هر جایی که تابع پایین محور x ها بود قرینه اش را در بالای محور x رسم می کنیم و بعدش هم همه y ها را ۲ برابر می کنیم تا $y = 2|\sin x|$ به دست بیاید و نهایتاً شکلش این می شود نگاه کنید:

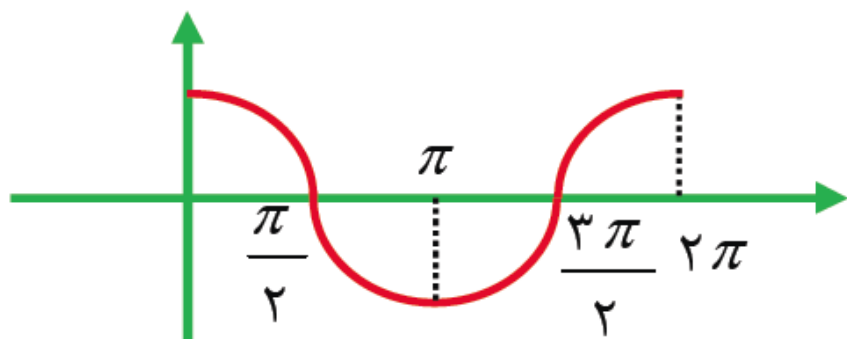


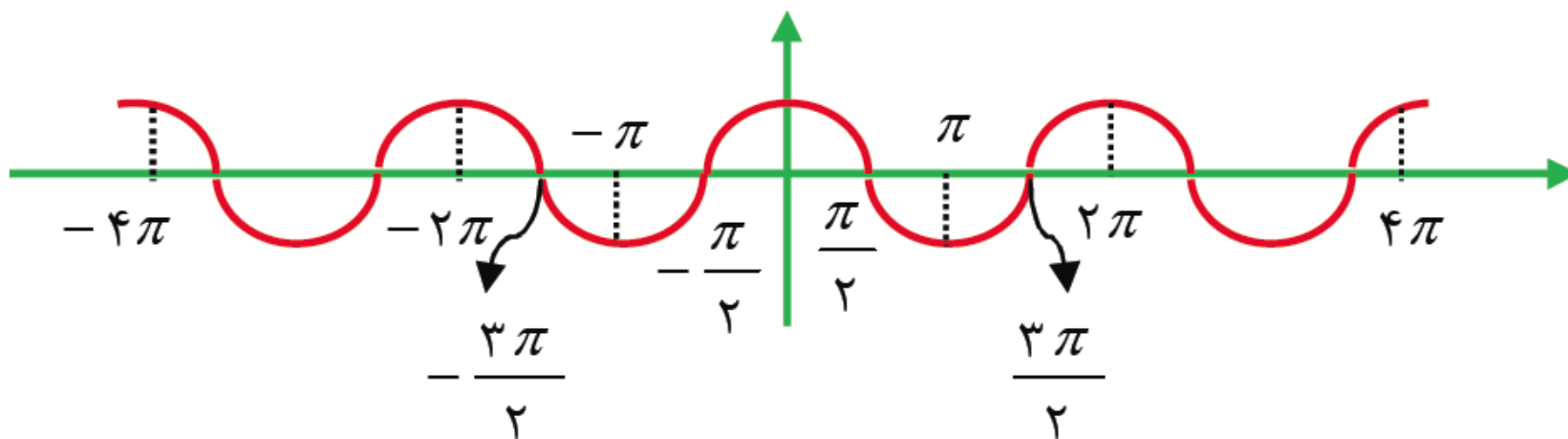
همانطور که مشخص است این تابع در بازه $[0, \pi]$ یک شکلی دارد که این شکل دائماً تکرار می شود.



	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
x	$\circ - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \pi$	$\pi - \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} - 2\pi$
$\cos x$				
	نزولی اکید	نزولی اکید	صعودی اکید	صعودی اکید

نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ این شکلی است نگاه کنید:





ویژگی های مهم تابع $y = \cos x$

۱. در مضارب زوج π به حداکثر مقدار خود می رسد. $(..., -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...)$

۲. در مضارب فرد π به حداقل مقدار خود می رسد. $(..., -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, ...)$

۳. در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ صفر می شود. $\left(..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ... \right)$

۴. دامنه تابع شامل تمام اعداد حقیقی است و بردش $[-1, 1]$ است.

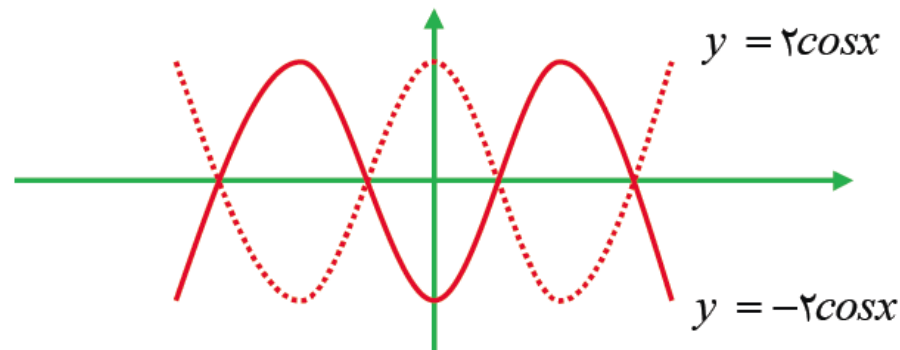
$$\cos x = \cos(-x) \quad ۵.$$

📖 سؤال ۳: تابع $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

👉 پاسخ: $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ را می شود ساده تر کرد نگاه کنید:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

پس می خواهیم تابع $y = -2\cos x$ را رسم کنیم برای این کار ابتدا تابع $y = \cos x$ را رسم کرده همه y ها را ۲ برابر می کنیم و برای منفی پشت $2\cos x$ نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم:



📖 **سؤال ۴:** تابع $y = 5 \cos x$ در بازه $[-4\pi, 3\pi]$ در چند نقطه به حداکثر مقدار خود می رسد؟

۶ (۴)

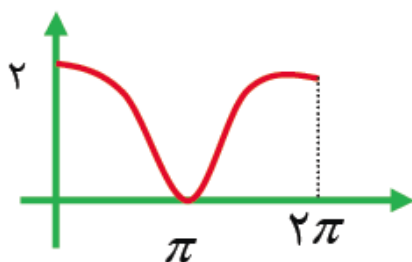
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۲

تابع $y = \cos x$ در مضارب زوج π یک می شود پس نقاط مطلوب عبارتند از: $2\pi, 0, -2\pi, -4\pi$
پس در این بازه در ۴ نقطه تابع به حداکثر مقدار خود می رسد.



📖 **سؤال ۵:** نمودار مقابل مربوط به کدامیک از توابع زیر است؟

(۱) $y = 2\cos x - 1$

(۲) $y = -\cos x + 2$

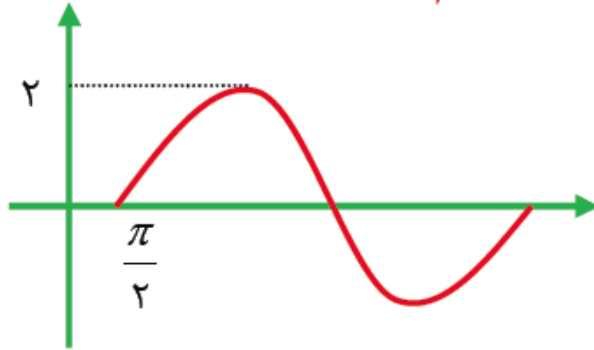
(۳) $y = \cos x + 1$

(۴) $y = -2\cos x + 1$

👉 پاسخ: گزینه ۳

تابع باید در $x = \pi$ صفر شود که در بین گزینه ها فقط در (۳) مقدار تابع صفر می شود.

📖 سؤال ۶: نمودار تابع $y = a \sin(x - b)$ به شکل مقابل است. $a \times b$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۴) π

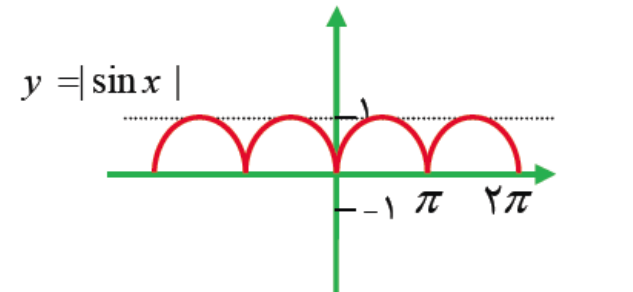
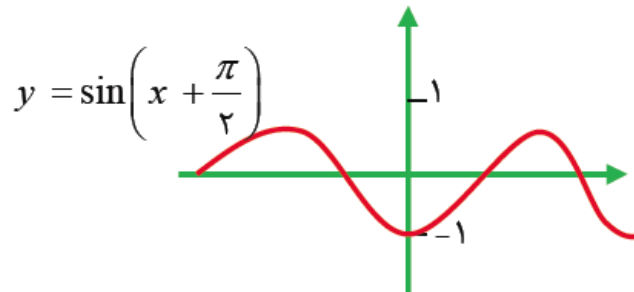
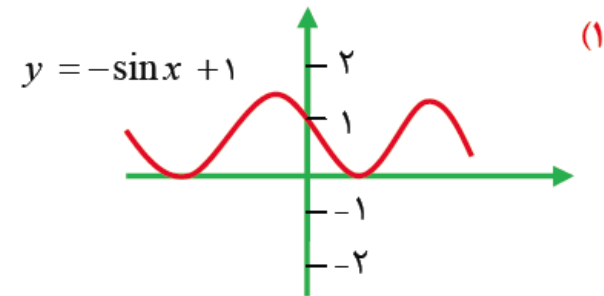
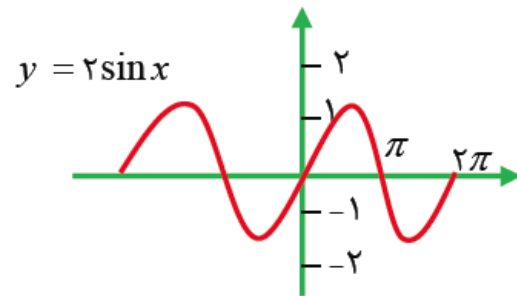
👉 پاسخ: گزینه ۴

تابع، $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست رفته است پس $b = \frac{\pi}{2}$ حداکثر تابع سینوس در حالت عادی یک است ولی این با ضریب a کاری

کرده که حداکثر تابع ۲ شده است پس $a = 2$ بوده است در نتیجه:

$$a \times b = 2 \times \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

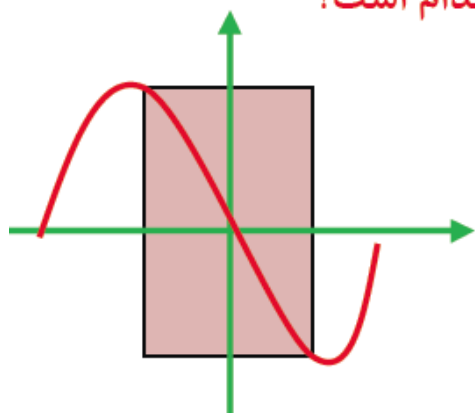
سؤال ۷: ضابطه کدام نمودار درست نیست؟



پاسخ: گزینه ۴

در (۴) نمودار تابع، $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست حرکت کرده است پس $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ است.

سؤال ۸: اگر شکل مقابل نمودار تابع $y = -2\sin x$ باشد مساحت مستطیل رنگی کدام است؟



(۱) 16π

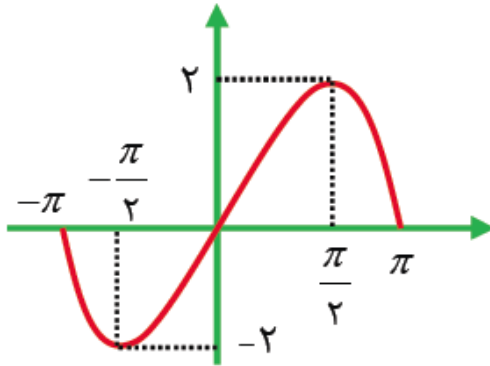
(۲) 8π

(۳) 2π

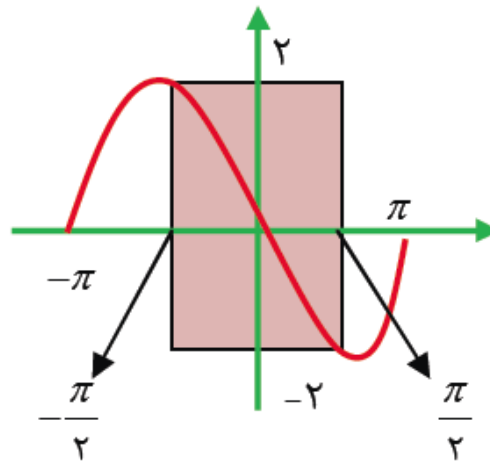
(۴) 4π

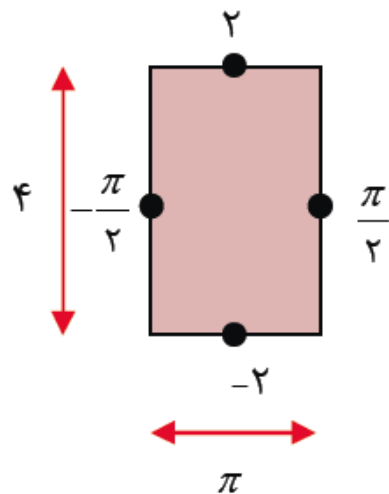
👉 پاسخ: گزینه ۴

اول نمودار تابع $y = -2\sin x$ را با تمام اعدادش رسم کنیم و بعد ابعاد مستطیل را بیابیم: $y = 2\sin x$ که فقط کشیده تر از $\sin x$ است این جوری:



حالا نسبت به محور x ها قرینه اش کنیم تا تبدیل به $y = 2\sin x$ بشود.

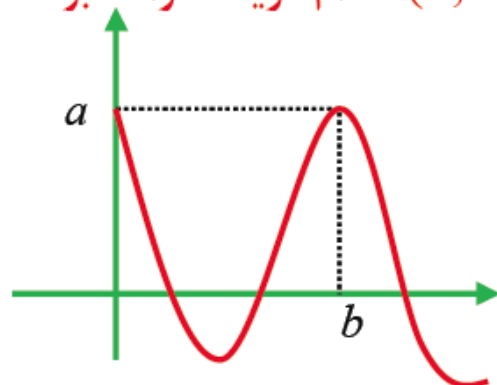




معلوم است که مستطیل ما این شکلی است:

پس مساحتش می شود: $S = 4 \times \pi = 4\pi$

سؤال ۹: اگر نمودار تابع $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ به شکل زیر باشد دوتایی (a, b) کدام گزینه خواهد بود؟ 



(۱) $(2, 2\pi)$

(۲) $(1, 2\pi)$

(۳) $(2, \pi)$

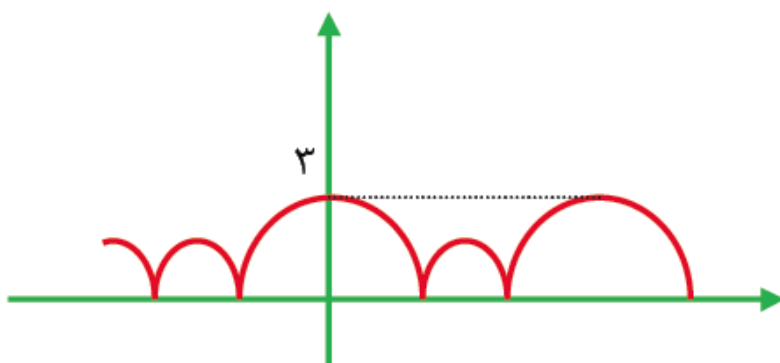
(۴) $(1, \pi)$

پاسخ: گزینه ۴ 

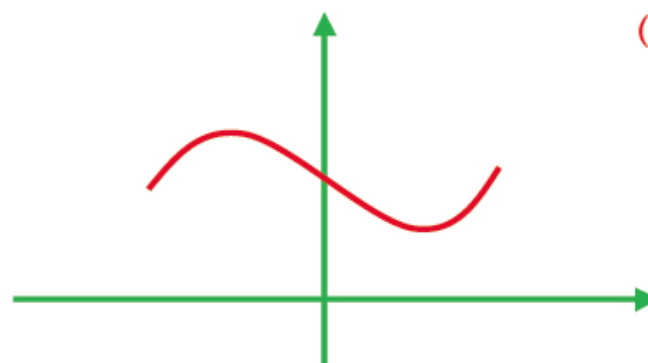
به ازای $x = 0$ مقدار تابع را که به دست بیاوریم مقدار a به دست می آید: $f(0) = \cos^2(0) - \sin^2(0) = 1 \Rightarrow a = 1$
در نتیجه b هم باید عدد باشد که $f(b) = 1$ در گزینه ها b را 2π یا π در نظر گرفته است که به راحتی معلوم است هم $f(\pi)$ و هم $f(2\pi)$ برابر یک هستند ولی چون در b برای اولین بار بعد از صفر مقدار تابع یک شده است پس b برابر π است.

سؤال ۱۰: نمودار تابع $y = |1 - 2\sin x|$ کدام است؟

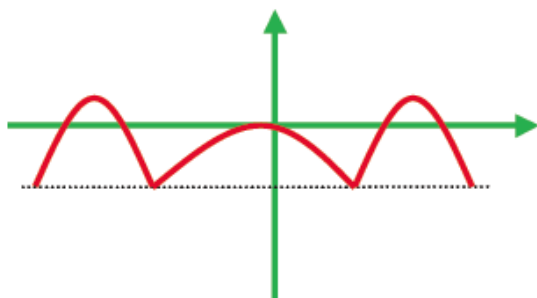
(۲)



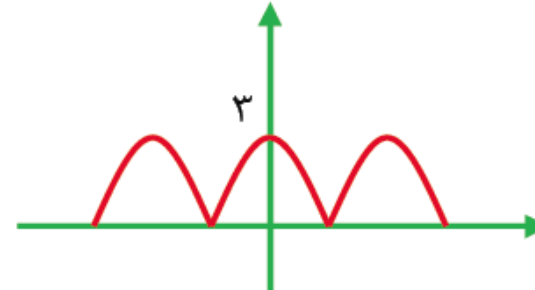
(۱)



(۴)

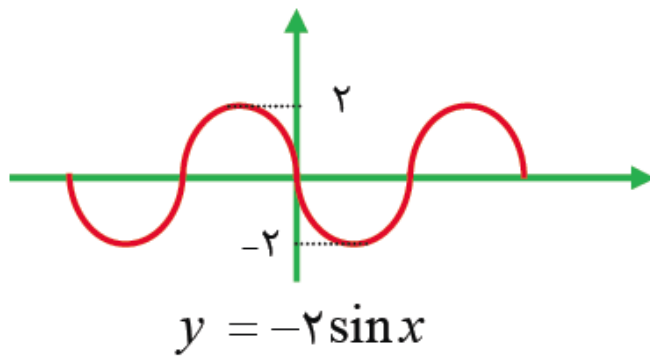
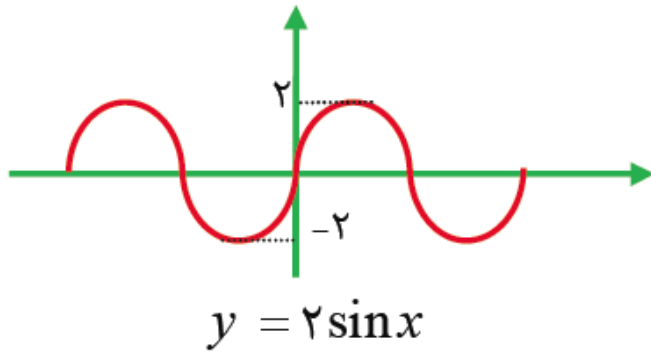


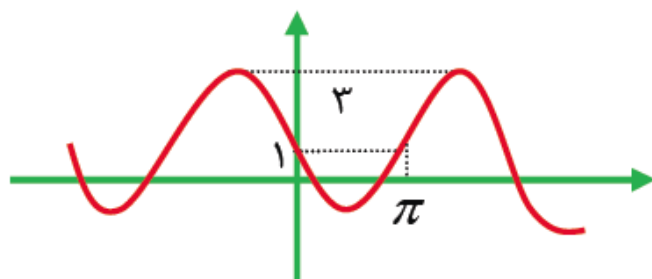
(۳)



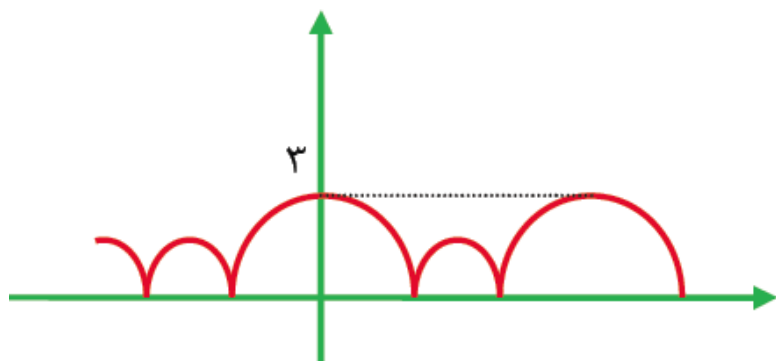
پاسخ: گزینه ۲

مرحله به مرحله تابع را رسم می کنیم:





$$y = 1 - 2 \sin x$$



$$y = |1 - 2 \sin x|$$

راستش (۴) خیلی غلطه! چون $|f(x)|$ هیچ وقت
زیر محور x ها نمی ره!

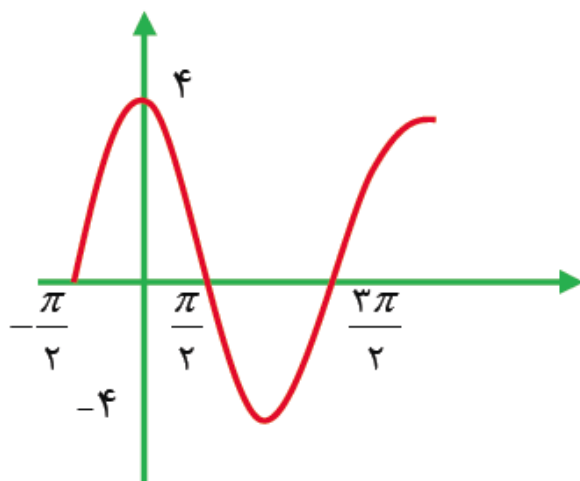
📖 **سؤال ۱۱:** نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ در فاصله $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ از کدام ناحیه عبور نمی کند؟

(۱) فقط ناحیه دوم

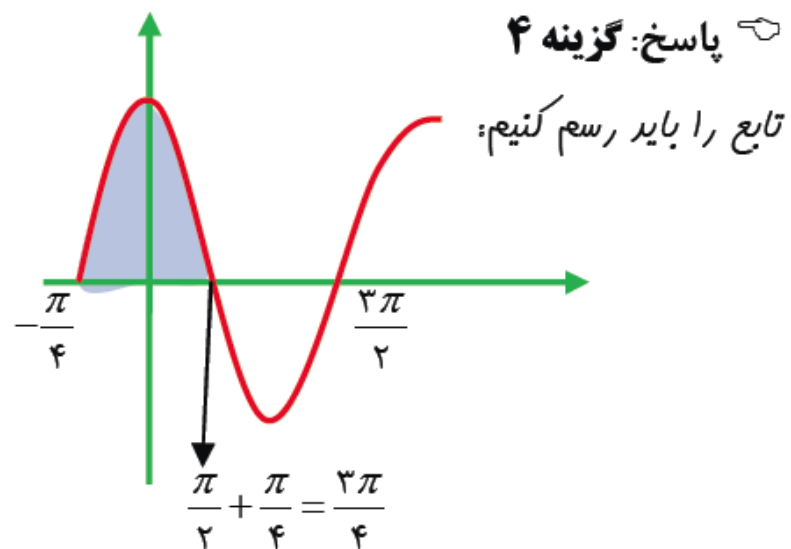
(۳) ناحیه های دوم و چهارم

(۲) فقط ناحیه سوم

(۴) ناحیه های سوم و چهارم

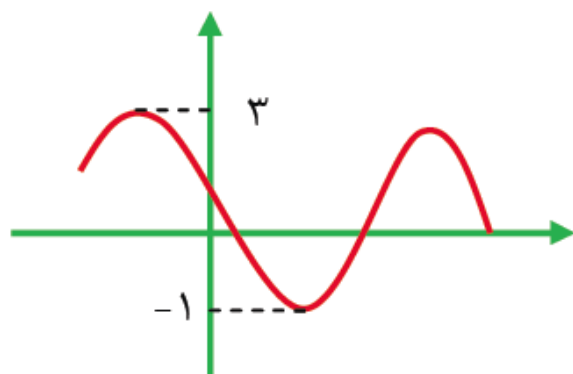


به سمت راست $\frac{\pi}{4}$



ابتدا ۴ برابر تابع $\cos x$ را می کشیم و $\frac{\pi}{4}$ هم به سمت راست می کشیم.

از $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ تابع فقط در ناحیه های اول و دوم محورهای مختصات قرار دارد.



سؤال ۱۲: شکل مقابل مربوط به کدام تابع است؟

$$y = -2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad (3) \quad y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad (1)$$

$$y = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad (4) \quad y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \quad (2)$$

👉 پاسخ: گزینه ۳

برد تابع باید از ۱- تا ۳ باشد پس عدد ثابت تابع در گزینه ها باید یک باشد. پس (۲) نادرست است.
از طرفی $f(0)$ باید عددی مثبت باشد در گزینه ها به جای x صفر می گذاریم:

$$۱) f(0) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0 \quad \text{قابل قبول نیست!}$$

$$۳) f(0) = -2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \quad \text{قابل قبول}$$

$$۴) f(0) = -2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = -\sqrt{3} + 1 < 0 \quad \text{قابل قبول نیست!}$$

اما دقت کنید که اگر شکل صورت سوال یک شکل سینوسی باشد حتماً ضربش منفی بوده است.

📖 سؤال ۱۳: تابع $f(x) = \sqrt{\cos x}$ در تمامی نقاط بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, b\right)$ تعریف شده است. b کدامیک از اعداد زیر

نمی تواند باشد؟

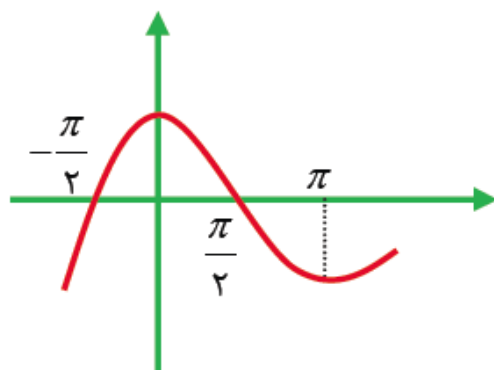
(۱) $-\frac{\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $-\frac{\pi}{4}$

(۴) π

👉 پاسخ: گزینه ۴



تابع f در بازه هایی که $\cos x$ منفی نشود تعریف شده است. پس نمودار تابع $\cos x$

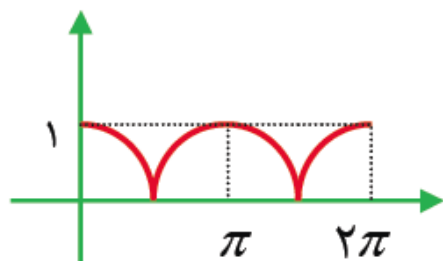
را می کشیم تا ببینیم از $-\frac{\pi}{2}$ تا کجا مقدار کسینوس مثبت است و یا به عبارتی نمودار

تابع $\cos x$ بالای محور x ها قرار دارد:

فوب که نگاه کنیم به راحت می شود که مقادیر $\cos x$ در بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ مثبت هستند پس b نباید عددی بزرگتر از

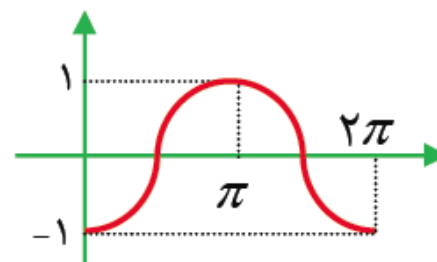
$\frac{\pi}{2}$ باشد پس اعداد $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ قابل قبول و عدد π غیر قابل قبول است.

سؤال ۱۴: نمودار کدامیک از توابع زیر در بازه $[0, 2\pi]$ به طور صحیح رسم شده است؟



$$y = |\cos x|$$

(الف)



$$y = \cos(x - \pi) - 1$$

(ب)

(۴) هیچکدام

(۳) الف و ب

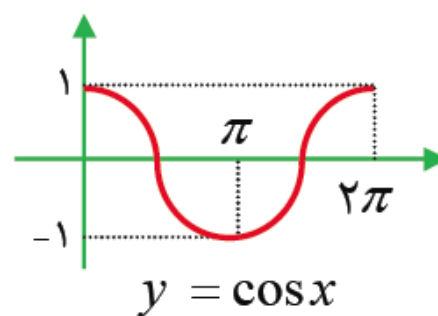
(۲) فقط ب

(۱) فقط الف

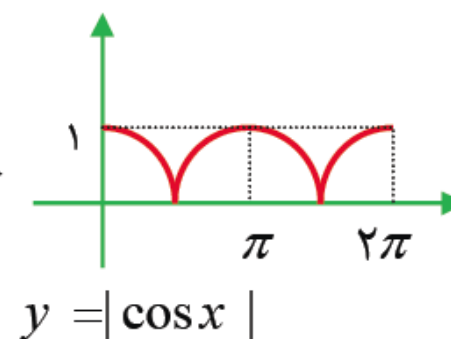
👉 پاسخ: گزینه ۱

به نمودارهای زیر دقت کنید:

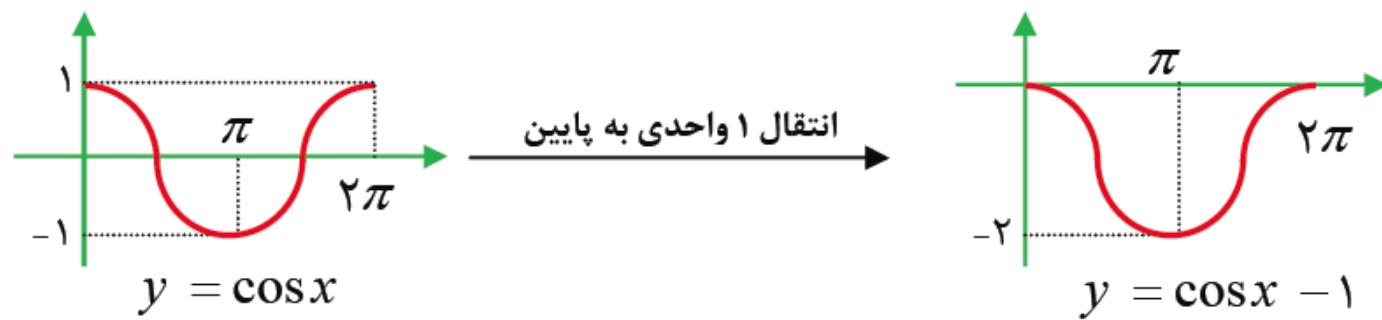
الف) $y = |\cos x|$



قرینه کردن قسمت های منفی
نمودار نسبت به محور x ها

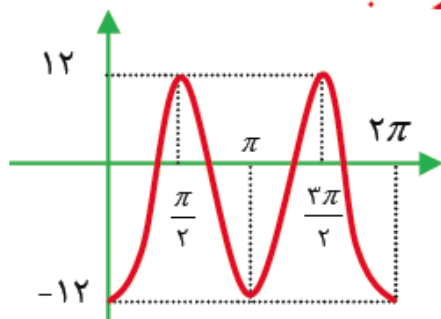


ب) $y = \cos x (-x) - 1$



همانطور که می بینید فقط نمودار تابع در مورد (الف) به طور صحیح رسم شده است.

سؤال ۱۵: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $a \cos bx$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام می تواند باشد؟



$$\pm \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\pm 12 \quad (4)$$

$$\pm \frac{1}{12} \quad (1)$$

$$\pm 6 \quad (2)$$

👉 پاسخ: گزینه ۳

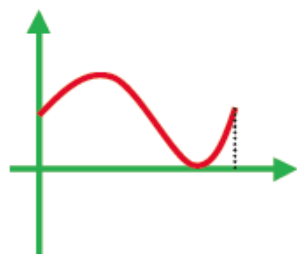
نمودار تابع از نقطه $(0, -12)$ می‌گذرد پس:

$$f(a) = -12 \Rightarrow -12 = a \cos 0 \Rightarrow a = -12 \xrightarrow{(\pi, -12) \in f} f(\pi) = -12 \cos b \pi = -12 \Rightarrow \cos b \pi = 1$$

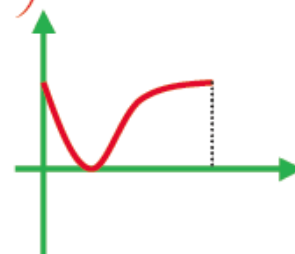
در نقاط به طول $x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ مقدار کسینوس به بیشترین مقدار خود (یعنی ۱) می‌رسد در نتیجه $b = \pm 2$ می‌تواند قابل

$$\frac{b}{a} = \frac{\pm 2}{-12} = \pm \frac{1}{6} \text{ قبول باشد و داریم:}$$

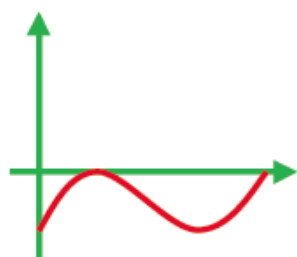
سؤال ۱۶: نمودار تابع $y = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



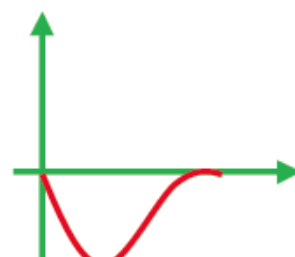
(۱)



(۲)



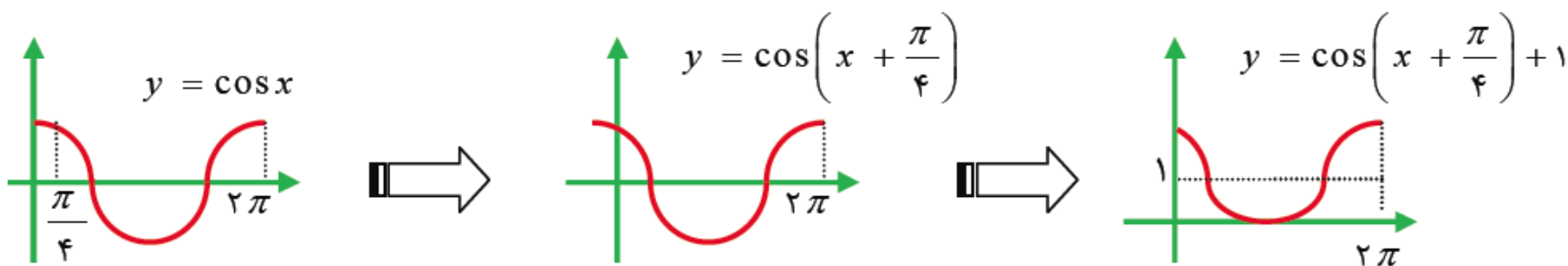
(۳)



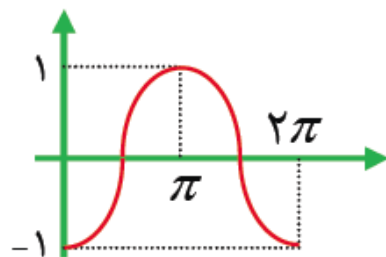
(۴)

👉 پاسخ: گزینه ۱

برای رسم نمودار تابع $y = a + b \sin(x + c)$ ابتدا مقادیر تابع $y = \sin x$ را b برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = b \sin x$ به دست آید اگر $c > 0$ نمودار را c واحد به سمت چپ و اگر $c < 0$ نمودار را c واحد به راست انتقال می‌دهیم سپس اگر $a > 0$ نمودار را a واحد به سمت بالا و اگر $a < 0$ نمودار را a واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. برای رسم نمودار $y = a + b \cos(x + c)$ نیز می‌توان به طور مشابه عمل کرد.



سؤال ۱۷: نمودار زیر مربوط به کدامیک از توابع زیر در فاصله $[0, 2\pi]$ می تواند باشد؟ 



(۳) $y = \cos x - ۲$

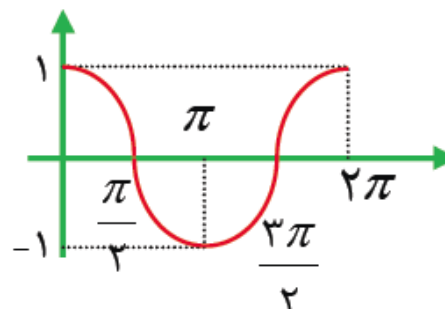
(۱) $y = -\cos x$

(۴) $y = \sin x - ۱$

(۲) $y = \cos(-x)$

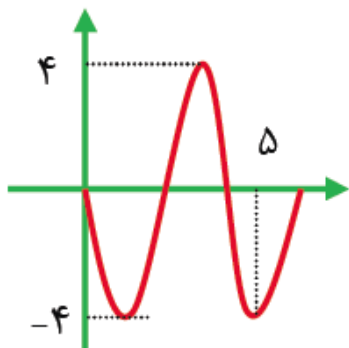
👉 پاسخ: گزینه ۱

نمودار $y = \cos x$ به صورت زیر است:



اگر این نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنیم نمودار موجود در صورت سوال به دست می آید بنابراین نمودار صورت سوال می تواند مربوط به تابع $y = -\cos x$ باشد.
توجه: $\cos(-x) = \cos x$

📖 سؤال ۱۸: اگر بخشی از نمودار تابع $y = a \cos\left(\frac{1}{2} + bx\right)\pi$ به شکل مقابل باشد مقدار $b - a$ چه عددی است:



$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\frac{7}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{7}{2} \quad (2)$$

👉 پاسخ: گزینه ۱

$$y = a \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = -a \sin b\pi x \quad \text{ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:}$$

با توجه به نمودار داریم:

$$-a = -4 \Rightarrow a = 4$$

$$f(5) = -4 \Rightarrow f(5) = -4 \sin 5b\pi = -4 \Rightarrow \sin 5b\pi = 1 \Rightarrow 5b\pi = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{5\pi}{2}$$

$$5b\pi = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \text{با توجه به اینکه } x = 5 \text{ دومین نقطه با طول مثبت می باشد که تابع دارای } \min \text{ است پس:}$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \xrightarrow{b > 0} |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{f(5) < 0} b = \frac{1}{2}$$

$$b - a = -\frac{7}{2} \quad \text{البته با دوره تناوب هم می توانستیم مقدار } b \text{ را به دست آوریم به این صورت که بدین ترتیب}$$

$$\text{حال اگر } -a > 0 \text{ باشد و } b \text{ منفی داریم: } b - a = \frac{7}{2}, a = -4, b = -\frac{1}{2}$$

که در بین گزینه ها وجود ندارد.

$$\text{تذکر: } k \sin mx = -k \sin(-mx)$$

📖 سؤال ۱۹: شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b \pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

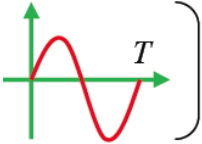
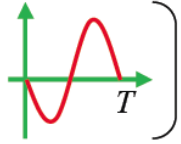
$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

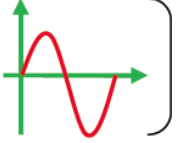
$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

☞ پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر ۶ است: $T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$

اگر a و b هم علامت باشند نمودار تابع $y = a \sin bx$ در یک دوره تناوب $\left[0, \frac{2\pi}{|b|}\right]$ به صورت  صورت می‌گیرد و اگر a و b ناهم علامت باشند این نمودار به صورت  است.

پس چون در یک دوره تناوب $[0, 6]$ نمودار تابع $y = a \sin b \pi x$ به صورت  است پس a و b هم

علامت اند. پس با توجه به اینکه بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است، پس $a = 2$ و در این صورت $b = \frac{1}{3}$ است. اگر a و b هم

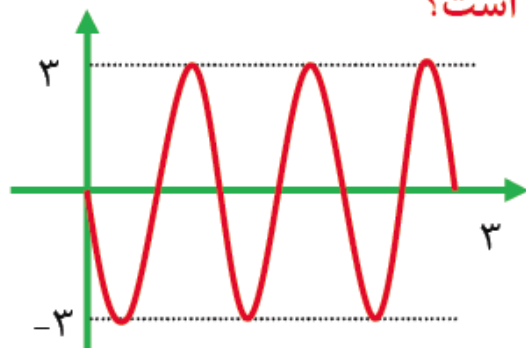
منفی باشند $a = -2$ و $b = -\frac{1}{3}$.

تذکر: اگر a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند تابع بدون تغییر است؛ زیرا $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ است. پس:

$$-a \sin(-b \pi x) = a \sin b \pi x$$

با توجه به گزینه ها $a + b = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ است.

سؤال ۲۰: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b \pi x)$ است. کدام ab است؟



(۱) -۶

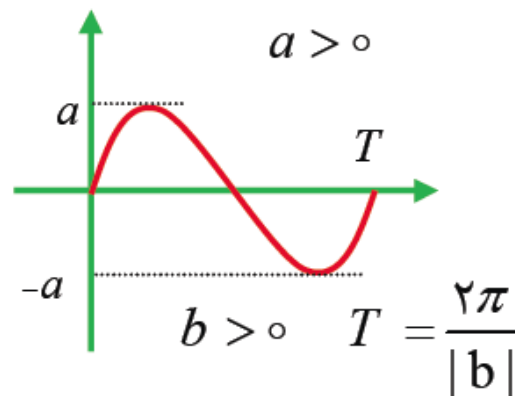
(۲) -۳

(۳) ۴/۵

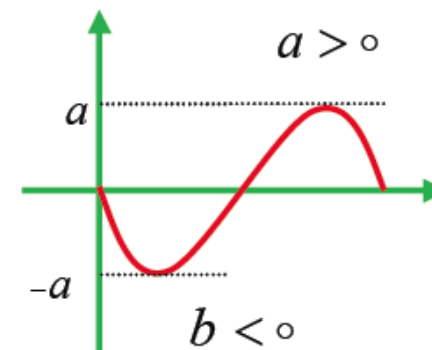
(۴) ۶

👉 پاسخ: گزینه ۱

می دانیم در هر تابع به صورت $y = a \sin bx$ نمودار تابع در یک بازه $[0, T]$ که در آن $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است به صورت یکی از حالات زیر است:



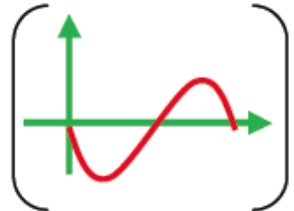
(البته اگر a و b هر دو منفی هم باشند نمودار تابع به همین صورت است.)



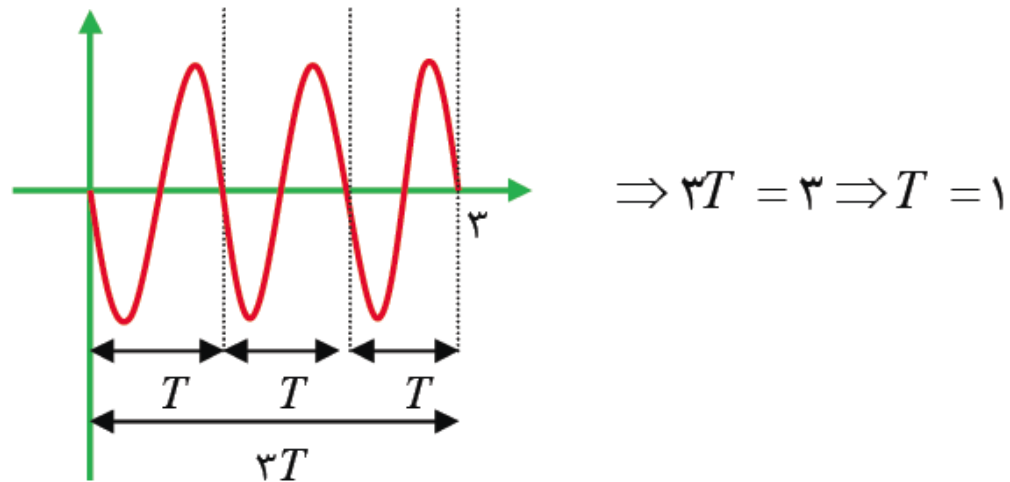
(البته اگر $a < 0$ و $b > 0$ باشد نیز نمودار تابع به همین صورت است.)

پس با توجه به آن که نمودار تابع رسم شده در بازه $[0, T]$ به صورت

است پس a و b ناهم علامت



اند. با توجه به دوره تناوب تابع داریم:



می دانیم دوره تناوب هر تابع به صورت $y = a \sin bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است پس در تابع $y = a \sin(b\pi x)$ داریم:

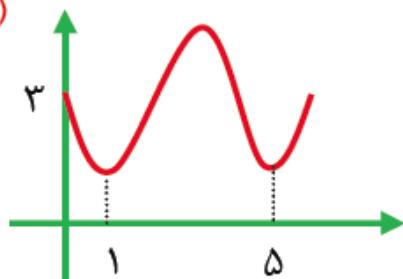
$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

پس a و b ناهم علامت اند و مقدار ماکزیمم تابع ۳ است پس اگر $a = 3$ باشد پس $b = -2$ و اگر $a = -3$ باشد $b = 2$ است پس $ab = -6$ است.

$$4 \sin(-2\pi x) = -3 \sin(2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = -6 \text{ تذکر:}$$

📖 سؤال ۱۱: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟

(سراسری ۹۳)



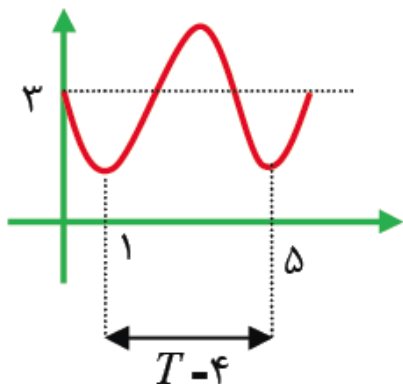
۳ (۳)

۲ (۱)

۳/۵ (۴)

۲/۵ (۲)

👉 پاسخ: گزینه ۲



در هر تابع سینوسی فاصله بین دو نقطهٔ ماکزیمم (بیشینه) از هم یا دو نقطهٔ مینیمم از هم برابر یک دورهٔ تناوب است. با توجه به شکل دورهٔ تناوب این تابع برابر ۴ است؛ از طرفی می‌دانیم در هر

تابع به صورت $y = n + m \sin(kx + c)$ دورهٔ تناوب برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است پس در تابع

$y = a + \sin(b\pi x)$ دورهٔ تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ است پس: $\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

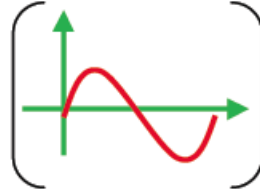
از طرفی در این تابع $f(0) = 3 \Rightarrow a + \sin 0 = 3 \Rightarrow a = 3$ پس:

با توجه به آنکه تابع در $x = 1$ دارای مینیمم است پس $b = -\frac{1}{2}$ است:

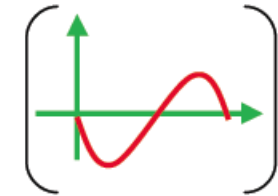
$$f(x) = 3 + \sin(b\pi x) \Rightarrow f(1) = 3 + \sin(b\pi) = 2$$

$$f(1) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

تذکره: البته می توان به سادگی متوجه شد که هتماً b مقداری منفی است زیرا نمودار تابع $y = a \sin bx$ در صورتی که a و b هم

علامت باشند به صورت  است. اما با توجه به آن که نمودار تابع داده شده در یک دوره تناوب به صورت

است، پس هتماً ضریب x و ضریب سینوس نا هم علامت اند. چون ضریب سینوس برابر ۱ است.

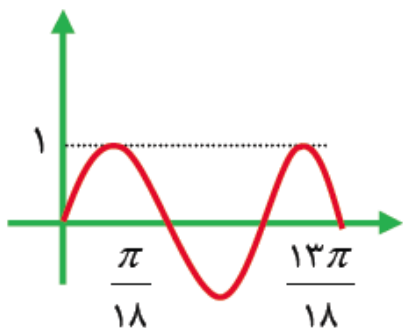


پس لازم است b منفی باشد و در نتیجه $b = -\frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow f(x) = 3 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f\left(\frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

سؤال ۲۲: بخشی از نمودار $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ شکل زیر است. $a + b$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)



$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

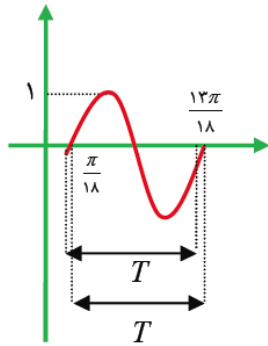
$$2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

👉 پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل می توان دوره تناوب تابع را به دست آورد.



$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

می دانیم $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ پس:

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin bx$$

با توجه به دوره تناوب که برابر $\frac{2\pi}{3}$ است داریم: $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3$

اگر $b = 3$ باشد داریم: $f(x) = a + 2 \sin 3x$

در این صورت چون $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$ است داریم: $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = a + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow a = -1$

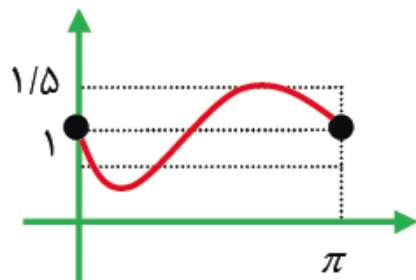
اگر $b = -3$ باشد آنگاه داریم: $f(x) = a + 2 \sin(-3x) = a - 2 \sin 3x$

چون باید $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$ باشد پس: $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = a - 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow a = 1$

اما اگر $f(x) = 1 - 2 \sin 3x$ باشد حداکثر مقدار آن ۳ خواهد بود زیرا هرگاه $\sin 3x = -1$ باشد $f(x) = 3$ خواهد بود

اما با توجه به شکل پیشینه تابع ۱ است پس $b = -3$ و $a = 1$ غیر قابل قبول اند. پس $b = 3$ و $a = -1$ است و $a + b = 2$ است.

سؤال ۲۳: بخشی از نمودار $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ شکل زیر است. $a + b$ چه عددی است؟ (سراسری ۹۵)



$\frac{3}{2}$ (۳)
۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۱)
۱ (۲)

👉 پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر π است از طرفی می دانیم دوره تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است پس:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

اگر $b = 2$ باشد داریم: $y = 1 + a \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

از طرفی با توجه به شکل $y(0) > 1$ است: $y(0) = 1 + a \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow a < 0$

پس a یک عدد منفی است چون بیشترین مقدار تابع برابر $1/5$ است پس $a = -\frac{1}{2}$ است. $y = 1 - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

پس $a = -\frac{1}{2}, b = 2$ است در نتیجه $a + b = \frac{3}{2}$. اگر $b = -2$ باشد داریم:

$$y = 1 + a \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - a \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

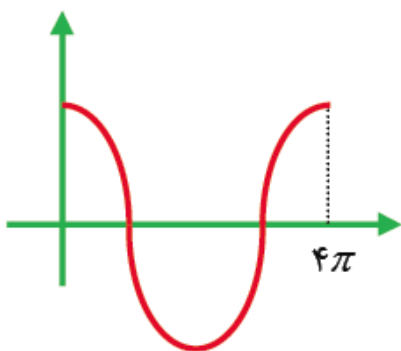
چون $y(0) > 1$ است پس: $y(0) = 1 - a \sin \frac{\pi}{6} > 1 \Rightarrow a < 0$

و چون بیشترین مقدار تابع برابر $1/5$ است $a = -\frac{1}{2}$ است پس: $a = 1 - \frac{1}{2} \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

اما این معادله نمی تواند معادله تابع باشد زیرا به ازای $x > 0$ تا اولین نقطه ای که تابع به کمترین مقدار خود می رسد تابع در حال کاهش است و مقادیر تابع از $f(0)$ کمتر خواهند بود اما این تابع به ازای $x > 0$ در حال افزایش است.

📖 سؤال ۲۴: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟

(سراسری ۹۶)



۱ (۳)

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

👉 پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر 4π است. از طرفی می دانیم دوره تناوب هر تابع به صورت $y = a + b \cos mx$

برابر $\frac{2\pi}{|m|}$ است پس:

$$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x \Rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

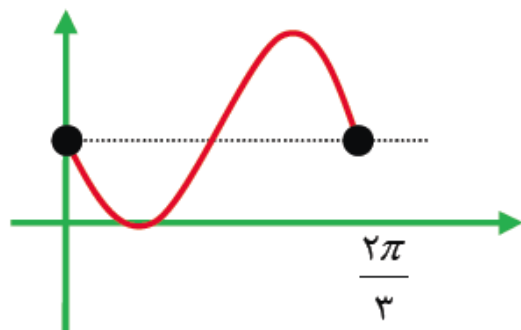
$$= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

تذکر: با توجه به آنکه $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ است پس به ازای $m = -\frac{1}{2}$ نیز پاسخ یکسان است.

تذکر: $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

سؤال ۲۵: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟

(سراسری ۹۶)



۱ (۳)

۱) صفر

۲ (۴)

۲) $\frac{1}{2}$

👉 پاسخ: گزینه ۴

دوره تناوب هر تابع به صورت $y = a + b \sin mx$ برابر $\frac{2\pi}{|m|}$ است. با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است

پس:

$$\frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

با توجه به شکل مقدار تابع در $x = \frac{T}{4} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} = \frac{\pi}{6}$ برابر صفر است پس $m = 3$ است زیرا به ازای $m = -3$ مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ برابر ۲ است:

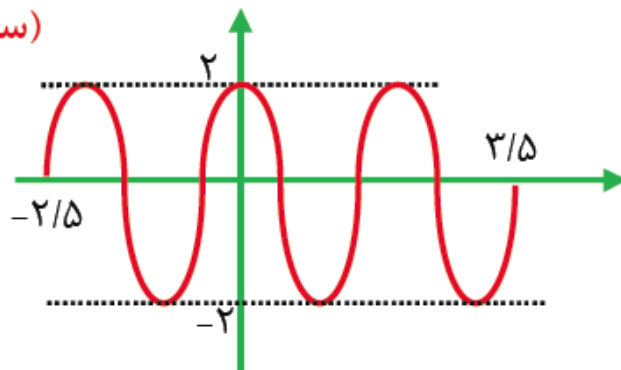
$$m = 3 \Rightarrow y = 1 - \sin 3x \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

$$m = -3 \Rightarrow y = 1 - \sin(-3x) = 1 + \sin 3x \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

پس معادله تابع به صورت $y = 1 - \sin 3x$ است پس: $y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} = 1 + 1 = 2$

سؤال ۲۶: شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx \right)$ است. a و b کدام است.

(سراسری ریاضی ۹۲)



(۱) ۲

(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۱ 

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

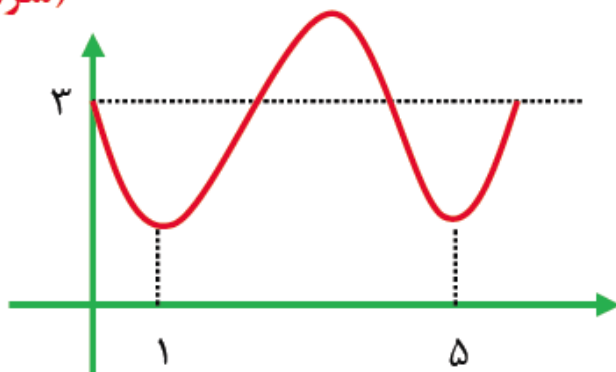
$$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \Rightarrow 3T = 6 \Rightarrow T = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{b\pi} = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = a \cos \pi x$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow a \cos 0 = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow ab = 2 \times 1 = 2$$

سؤال ۲۷: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۳)



(۱) ۲

(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۴

$$T = \frac{2\pi}{b\pi} = 4 \Rightarrow \frac{2}{b} = 4 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \text{دوره تناوب تابع } T = 5 - 1 = 4 \text{ است پس:}$$

$$\text{در ضمن } y(\circ) = a + \sin(\circ) = a = 3, \quad y(\circ) = 3$$

$$y = 3 + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \xrightarrow{x = \frac{25}{3}} 3 + \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = 3 + \sin\left(\frac{24\pi + \pi}{6}\right)$$

$$= 3 + \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 + \frac{1}{2} = 3.5$$

📖 سؤال ۲۸: برد تابع $f(x) = -3\sin x + 2$ شامل چند عدد صحیح است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۷ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۱

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3\sin x \leq 3$$

$$\Rightarrow -1 \leq -3\sin x + 2 \leq 5$$

که این بازه شامل اعداد $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ می شود.

📖 **سؤال ۲۹:** x در بازه $[0, 2\pi]$ تغییر می کند اگر $\cos x < \frac{1}{2}$ در بازه (a, b) برقرار باشد بزرگترین مقدار $b - a$

کدام است؟

(۱) $\frac{2\pi}{3}$

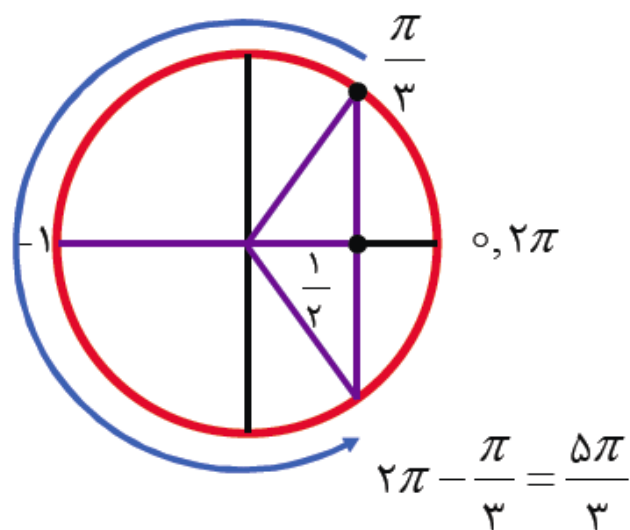
(۲) $\frac{4\pi}{3}$

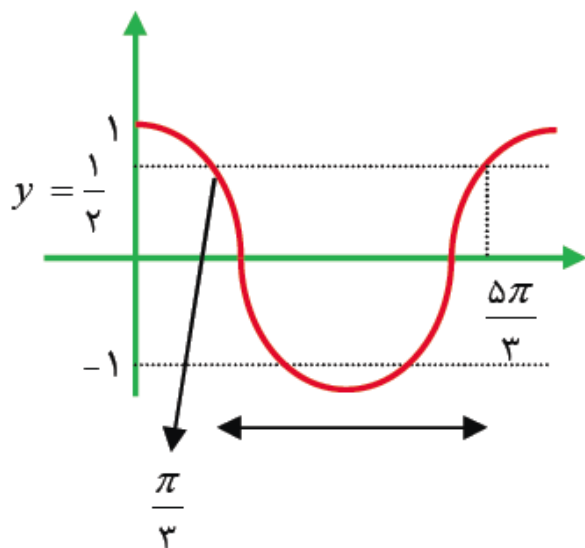
(۳) π

(۴) $\frac{5\pi}{3}$

👉 پاسخ: گزینه ۲

مطابق دایره مثلثاتی و نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ داریم:



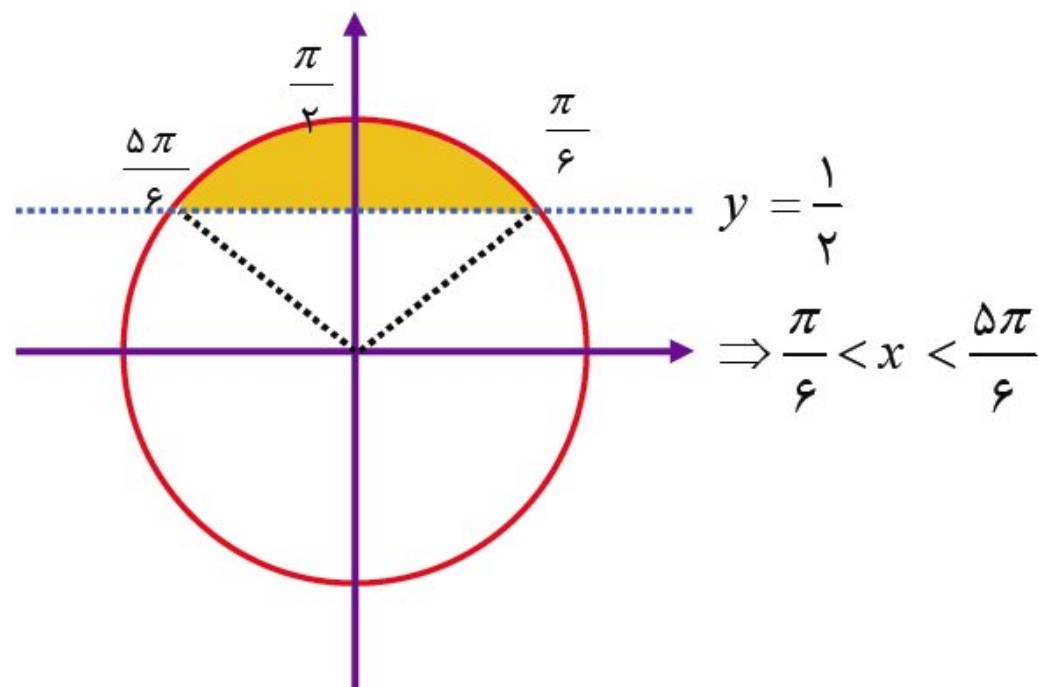


مطابق شکل تابع $y = \cos x$ در بازه $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ کمتر

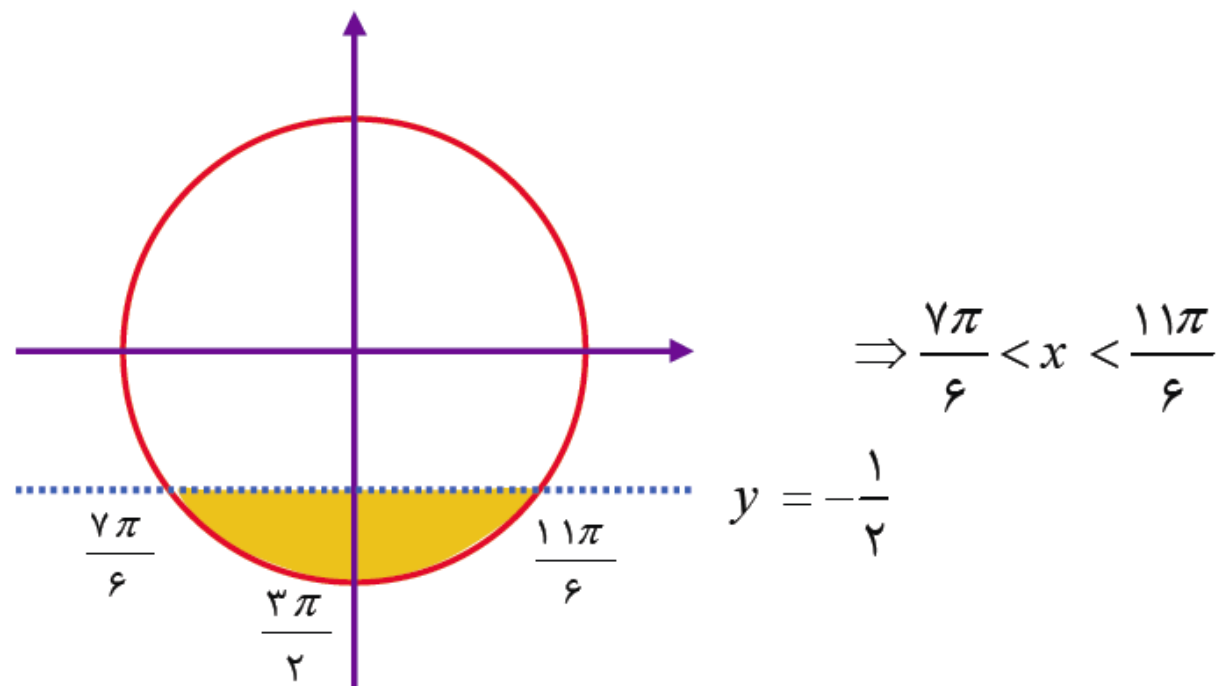
از $\frac{1}{2}$ است. در نتیجه $a = \frac{\pi}{3}$ و $b = \frac{5\pi}{3}$ است و $b - a = \frac{4\pi}{3}$.

سؤال ۳: نامساوی های زیر را حل کنید.

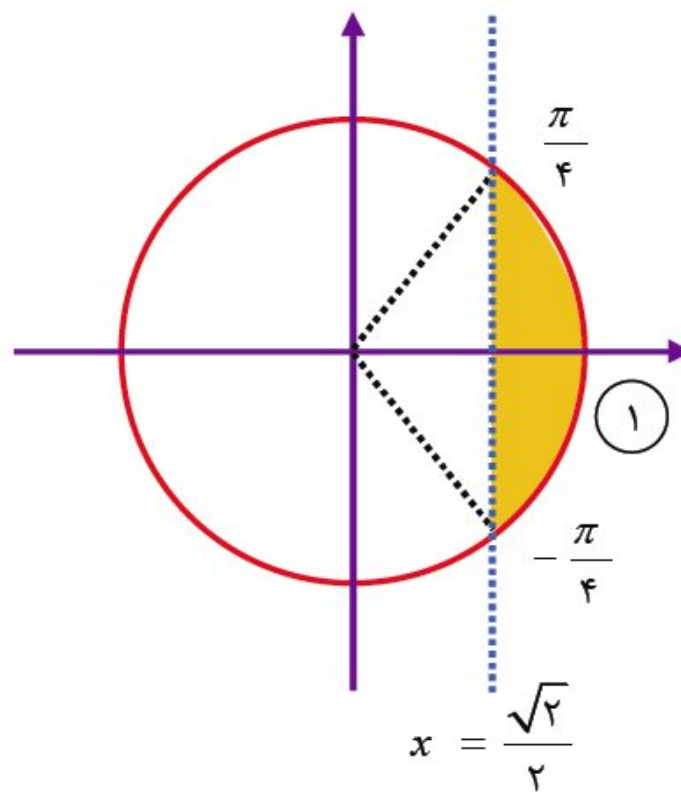
$$\sin x > \frac{1}{2}$$



$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

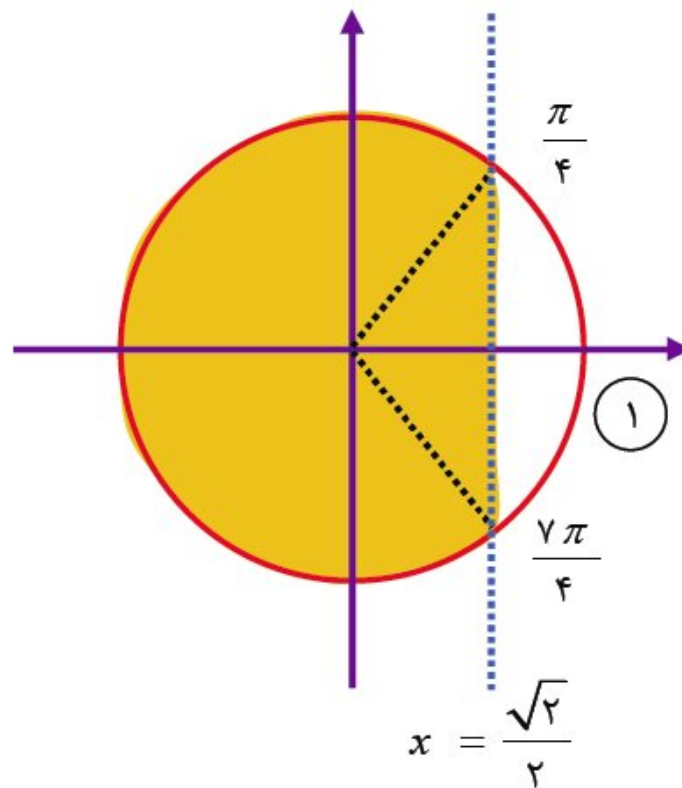


$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



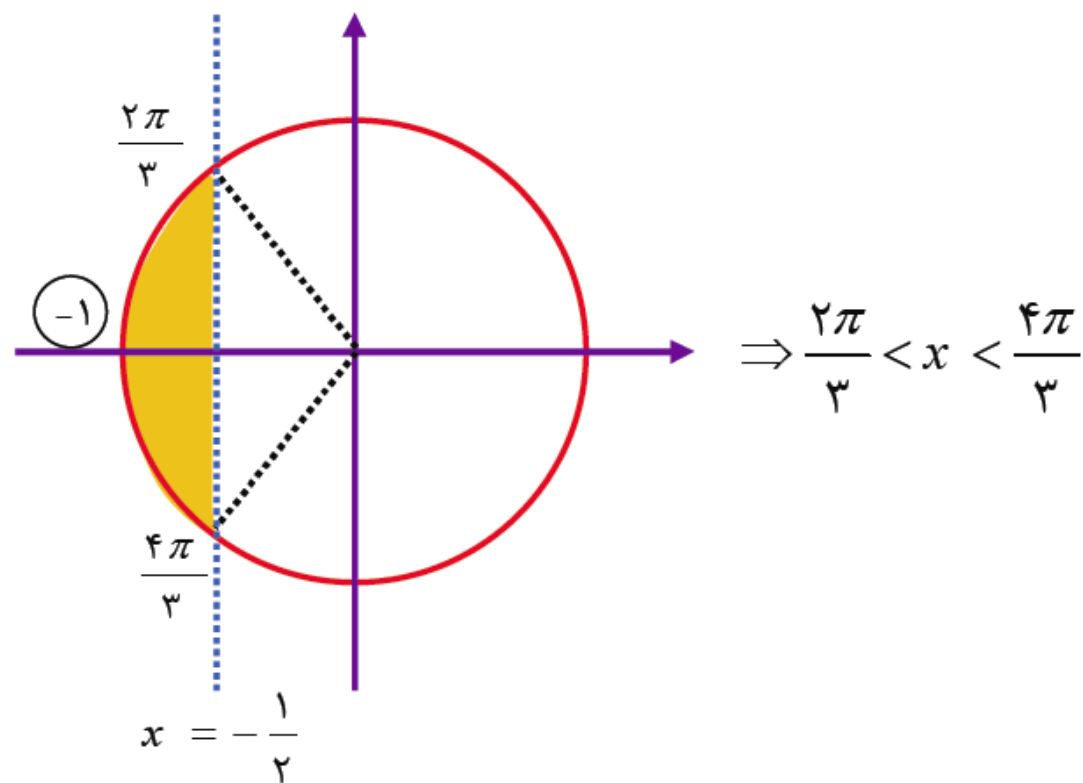
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x < -\frac{1}{2}$$



📖 **سؤال ۳۱:** در بازه هایی به طول T تابع $y = |\cos x|$ عیناً تکرار می شود کمترین مقدار T کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$

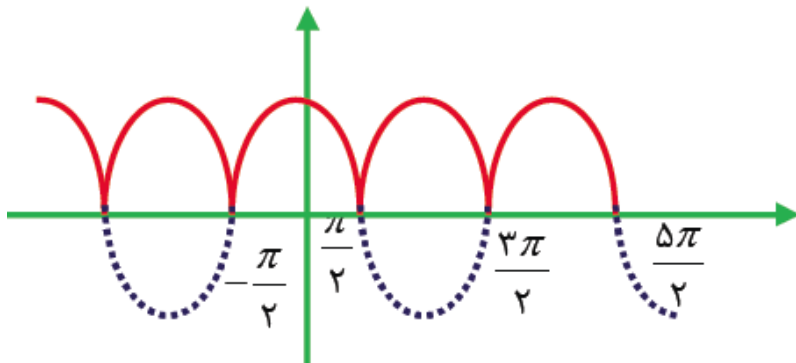
(۲) π

(۳) 2π

(۴) متناوب نیست!

👉 پاسخ: گزینه ۲

تابع را رسم می کنیم:



همان شکلی که در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ داریم در بازه های $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ و بعدی ها هم ایبار می شود پس کمترین مقدار T برابر طول بازه

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ یعنی } T = \pi \text{ است.}$$

📖 سؤال ۳۲: اگر برد تابع $y = a \sin x$ شامل سه عدد صحیح بوده و a مثبت باشد مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(0, 2]$ (۲) $[1, 2)$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $(0, 2)$

👉 پاسخ: گزینه ۲

a نباید به ۲ برسد چون تابع $y = 2 \sin x$ می شود و بردش شامل $2, 1, 0, -1, -2$ فواید شد! پس a تماماً از ۲ کوچکتر است از

طرفی a باید از یک کوچکتر هم نباشد چرا که در این صورت تابع مثلاً $y = \frac{1}{2} \sin x$ می شود و بردش $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ فواید شد و

صفرش مقدار صحیح این بازه است! ولی ما می فوایم بردمان ۳ تا عدد صحیح داشته باشد پس $1 \leq a < 2$ است.

📖 سؤال ۳۳: تابع $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ در بازه $(-4\pi, 2\pi)$ در چند نقطه تعریف نشده است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۳

تابع کسری جای تعریف نشده است که مخرجش صفر شود:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

مضرب صحیح

$$\Rightarrow x = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi$$

دیدیم که در بازه $(-4\pi, 2\pi)$ در ۵ نقطه مخرج صفر و تابع تعریف نشده می شود.

📖 سؤال ۴۳: تابع با ضابطه $y = 8 \sin x$ با بازه $(-8\pi, 8\pi)$ در چند نقطه مینیمم می شود؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

👉 پاسخ: گزینه ۳

تابع سینوس در نقاط $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ مینیمم می شود اما نمی خواهد این نقاط را بیابید. تابع سینوس در هر بازه بین دو مضرب زوج متوالی π یک بار به حداقل مقدار خود می رسد پس از 8π تا -8π که 16π فاصله است ۸ بار به کمترین مقدارش می رسد.

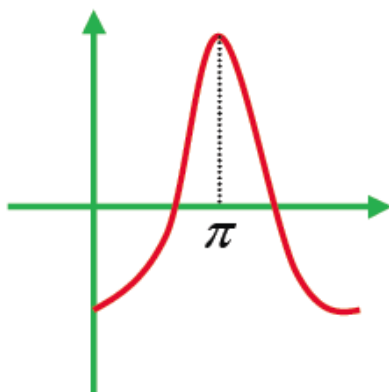
سؤال ۳۵: تابع با ضابطه $y = -4 \cos x$ در بازه $[-3\pi, 7\pi]$ در چند نقطه به حداکثر مقدار خود می رسد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



پاسخ: گزینه ۳

تابع کسینوس معمولی در بازه $[0, 2\pi]$ یک بار مینیمم می شود ولی وقتی ضریب منفی بگیرد نقاط تابع برعکس می شوند و تابع این شکلی می شود؛ یعنی در مضارب فرد π ماکسیمم می شود پس باید تعداد مضارب فرد π را از -3π تا 7π بیابیم که عبارتند از: $-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ پس می شود ۶ نقطه.

📖 سؤال ۶۳: نمودار تابع $y = 4 \cos x$ در بازه $(-4\pi, 4\pi)$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۲

تابع $\cos x$ در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ محور x ها را قطع می کند:

$$x = k \frac{\pi}{2}, k \text{ فرد}$$

$$\Rightarrow \frac{-7\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

پس تابع در این بازه هشت بار محور x ها را قطع می کند.

📖 سؤال ۳۷: نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ در بازه $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

(خارج ۹۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۲

تابع $\sin x$ محور x ها را در مضارب صمیح π قطع می کند در نتیجه داریم:

$$2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{8}$$

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
x	$-\frac{7\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$	$+\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$	$\pi + \frac{\pi}{8}$
	✗	✓	✓	✓	✗

پس در این بازه تابع ۳ بار محور x ها را قطع می کند.

📖 سؤال ۳۸: مقدار تابع $y = |\sin x| + 2 \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه برابر یک می شود؟

۳ (۴)

۲ (۳)

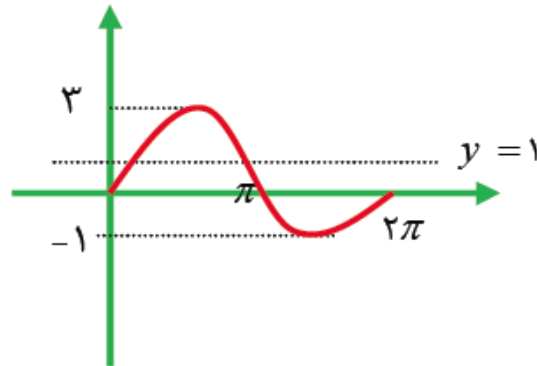
۱ (۲)

(۱) صفر

👉 پاسخ: گزینه ۳

نمودار را رسم می کنیم:

$$y = \begin{cases} 3 \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$



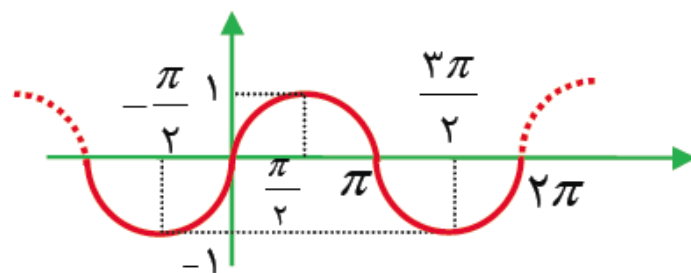
حالا فقط $y = 1$ را رسم کنیم تا ببینیم در چند نقطه تابع را قطع می کند که معلوم است در ۲ نقطه این اتفاق رخ می دهد.

📖 سؤال ۳۹: نمودار تابع $y = \sin(2k\pi - x)$ در کدام بازه روند کاهشی دارد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

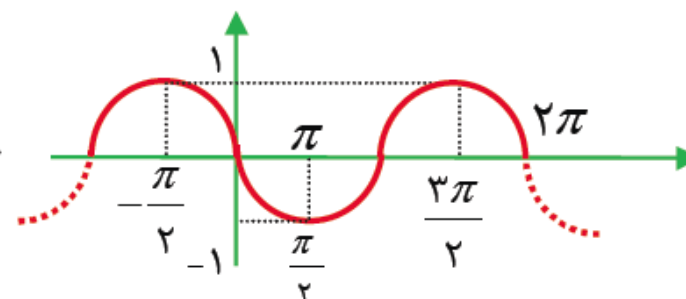
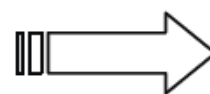
- (۱) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ (۲) $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ (۳) $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ (۴) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

👉 پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $y = \sin(2k\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$ بنابراین خواهیم داشت:



$$y = \sin x$$



$$y = -\sin x$$

همانطور که می بینید نمودار تابع داده شده در میان گزینه ها فقط در بازه $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ روند کاهشی دارد.

📖 سؤال ۴۰: اگر $x = \frac{8\pi}{3}$ طول اولین نقطه ای باشد که تابع $y = \sin(x - k)$ در سمت راست محور y ها در آن

نقطه دارای کمترین مقدار باشد k کدام است؟

$$-\frac{7\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{6} \quad (۳)$$

$$-\frac{4\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (۱)$$

👉 پاسخ: گزینه ۳

طول اولین نقطه ای که تابع $y = \sin x$ در سمت راست محور y ها دارای کمترین مقدار است برابر $x = \frac{3\pi}{2}$ است

بنابراین برای تعیین طول اولین نقطه ای که کمترین y را در تابع $y = \sin(x - k)$ دارد باید:

$$x - k = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{x = \frac{8\pi}{3}} \frac{8\pi}{3} - k = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{8\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{16\pi - 9\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

📖 سؤال ۱۴: معادله $2\sin^2 x = |\sin x|$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۳

$$2\sin^2 x = |\sin x| \Rightarrow 2|\sin x|^2 = |\sin x| \Rightarrow 2|\sin x|^2 - |\sin x| = 0$$

$$\Rightarrow |\sin x| (2|\sin x| - 1) = 0$$

$$\begin{cases} |\sin x| = 0 \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \pi \\ |\sin x| = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

لذا معادله مذکور در بازه $(0, 2\pi)$ پنج جواب دارد.

پایان

موفق باشید