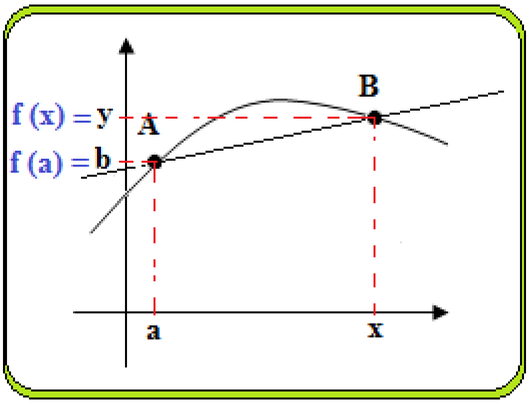
مشتق و کاربـــــــرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

آهنگ تغییرات تابع :

اگر تغییرات تابع را با Δy و تغییرات متغیر را با Δx نمایش دهیم ، آهنگ تغییرات تابع به صورت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تعریف می شود .



در شکل روبــــــرو می خواهیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را بین دو نقطه A و B به دست آوریم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-b}{x-a}$$

و یا اگر بر حسب تابع $y = f(x)$ بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

توجه :

می دانیم شیب خطی که از دو نقطه A و B می گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{y-b}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

این خط را قاطع (وتر) منحنی $y = f(x)$ می نامند .

نکته :

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چــون رنده ز کــار خـویش بی‌بهـره مباش
تعلیـــم ز اره گیـــــر در عقــل معــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

چنانچه در روابط بالا قرار دهیم : $\Delta x = x - a$ که در اینصورت : $x = a + \Delta x$ و آهنگ تغییرات تابع به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

تعریف مشتق:

فرض کنیم تابع f در یک بازه شامل a تعریف شده باشد اگر حدهای زیر موجود و عدد حقیقی باشد

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{و یا} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

آنها را مشتق متناهی تابع f و یا مشتق تابع f در نقطه ی x = a می نامیم . و با $f'(x)$ و $f'(a)$ نشان می دهیم .

مثال : مشتق تابع $y = ۳x + ۵$ را در نقطه $x = ۲$ به دست آورید :

حـــــــل : تعریف مشتق در نقطه ی معلوم x = ۲ عبارتست از :

$$f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'\ ۲ = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x + ۵ - ۱۱}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x - ۶}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳\cancel{(x-۲)}}{\cancel{x-۲}} = ۳$$

مثال : مشتق تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ را با استفاده از تعریف بیابید .

حـل :

ابتدا تعریف مشتق را در حالت کلی می نویسیم :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(x+\Delta x)^۲ - ۲(x+\Delta x) - x^۲ + ۲x}{\Delta x} =$$

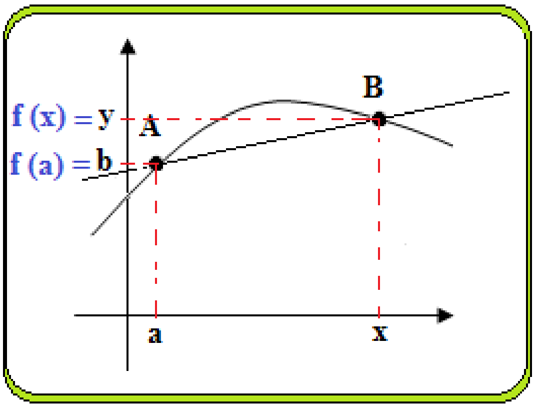
$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{x^۲ + ۲x\Delta x + \Delta x^۲ - ۲x - \Delta x - x^۲ + ۲x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta x(۲x - \Delta x - ۲)}{\Delta x} = ۲x - ۲$$

یعنی مشتق تابع داده شده برابر $f'(x) = ۲x - ۲$ است که برای محاسبه ی مشتق این تابع در هر نقطه ی دلخواه کافی است به جای x مقدار داده شده را قرار دهیم : مثلاً $f'(۳) = ۲(۳) - ۲ = ۴$

۲

تعبیر هندسی



اگر در شـــکل روبرو اگر نقطه B به نقطه ی A نزدیک و نزدیکتر شود و یا بــه عبارتی $x \to a$ خط قاطع AB به صورت مماس بر منحنی تبدیل می شود و شیب آن بصورت زیر محاسبه می شود :

$$m_{AB} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته ۱ : از تعبیر هنـــــدسی خط مماس و تعریف مشتق در نقطه ی a نتیجه می گیریم که شیب خط مماس بر یک منحنی برابر است با اندازه ی مشتق در نقطه تماس . $\boxed{m = f'(a)}$

نکته ۲ : مشتق تابع $y = f(x)$ را با نمادهای زیر نیز نشان می دهند .

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$$

مثال معادله ی خط مماس بر منحنی $y = x^۲$ را در نقطه ی به طول $x_۰ = ۳$ واقع بر آن را بنویسید .

حل :

$$x_۰ = ۳ \xrightarrow{y=x^۲} y_۰ = ۹$$

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}} = ۶$$

$$\left| \begin{array}{l} A(۳,۹) \\ m = f'(۳) = ۶ \end{array} \right. \Rightarrow y - f(x_۰) = f'(x_۰)(x - x_۰) \Rightarrow y - ۹ = ۶(x - ۳) = y = ۶x - ۹$$

مشتق به عنوان آهنگ تغییر لحظه ای و متوسط (مشتق در فیزیک)

اگر در تابع $y = f(x)$ متغیر x از $x_۱$ به $x_۲$ تغییر کند آهنگ متوسط تغییر f وقتی x از مقدار $x_۱$ به مقدار $x_۲$ تغییر کند را به صورت $\frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$ تعریف می کنند .

و اگر $x_۲ - x_۱ = \Delta x$ آهنگ متوسط تغییر f به صورت زیر تعریف می شود :

$$\frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x}$$

اگر میزان تغییر x یعنی Δx به سمت صفر میل کند ، در صورتی که حد کسر فوق وقتی Δx به صفر میل کند وجود داشته باشد ، آن را آهنگ لحظه ای تغییر y در واحد تغییر x در نقطه ی $x_۱$ گویند :

$$x_۱ \text{ آهنگ لحظه ای تغییر در } = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x} = f'(x)$$

نتیجه : در تابع $y=f(x)$ آهنگ لحظه ای تغییر y در نقطه ی $x_۱$ برابر مشتق تابع در $x_۱$ یعنی $f'(x_۱)$ است .

مثال : معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = -۵t^۲ + ۲۰t$ می باشد . سرعت لحظه ای این متحرک هنگامی که از مبدأ می گذرد را بیابید .

حــــــل : زمانی که متحرک از مبدأ می گذرد $f(t)=۰$ لذا داریم :

$$f(t)=۰ \Rightarrow -۵t^۲+۲۰t=۰ \to t(-۵t+۲۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۴ \end{cases}$$

t = ۰ همان لحظه شروع حرکت است . بنابراین در t = ۴ دوباره از مبدأ می گذرد .

$$v=f'(x)=-۱۰x+۲۰ \to f'(۴)=-۴۰+۲۰=-۲۰$$

نکته : در بازه ای که سرعت مثبت باشد متحرک به سمت راست حرکت می کند و برعکس .

$$x=-۱ \quad \Rightarrow y=-۱ \quad \Rightarrow A(-۱,-۱) \quad , \quad f'(x)=۷x^۶$$

$$m=۷(-۱)^۶=۷ \Rightarrow \qquad m'_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۷} \quad \Rightarrow \quad y-(-۱)=-\frac{۱}{۷}(x-(-۱))$$

مشتق در علم اقتصاد

در اقتصاد مقدار نهایی تابع را مشتق تابع می گیرند ، به عبارتی اگر در یک شرکت ، برای تولید x واحد از یک کالا تابع C (x) هزینه شود ؛ افزایش متوسط هزینه از x به $x+\Delta x$ برابر $\dfrac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$ تعریف می شود و حد این نسبت وقتی Δx به صفر میل می کند ، هزینه نهایی تولید x واحد کالا می نامند ، یعنی :

$$C'(x)=\lim_{\Delta x \to ۰}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

و این بدان معناست که اگر شرکتی در حال حاضر x واحد کالا تولید می کند ، میزان تولید را یک واحد افزایش دهد هزینه این یک واحد افزایش داده شده تقریباً برابر با $C'(x)$ است .

مثال : هزینه ساخت x تلویزیون از تابع $C(x)=۶۰۰۰۰۰۰+۳۰۰۰۰۰x-۳۰۰x^۲$ بر حسب تومان محاسبه می شود . هزینه تولید ۱۰۱اُمین یخچال چقدر است ؟ و معنی آن را توضیح دهید .

حــــــل :

هزینه نهایی xاُمین کالا $\quad C'(x)=۳۰۰۰۰۰-۶۰۰x$

تومان $\quad C'(۱۰۰)=۳۰۰۰۰۰-۶۰۰۰۰=۲۴۰۰۰۰$

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ تلویزیون تولید کرده و بخواهد ۱۰۱اُمین تلویزیون را تولید کند تقریباً ۲۴۰۰۰۰تومان باید هزینه کند .

مثال هزینه ساخت x یخچال از تابع $C(x)=800000+400000x-500x^2$ بر حسب تومان محاسبه می شود . هزینه تولید ۱۰۱اُمین یخچال چقدر است ؟

حـــــــل :

هزینه نهایی xاُمین کالا $C'(x)=400000-1000x$

تومان $C'(100)=400000-100000=300000$

مشتق های یک طرفه

از آنجایی که مشتق به صورت نوعی حد تعریف شده است ؛ با توجه به حد های چپ و راست تابع می توان مشتق های چپ و راست را نیز به صورت زیر معرفی کرد .

مشتق راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست x تعریف شده باشد در این صورت حد زیر در صورت وجود و متناهی بودن مشتق راست تابع نامیده می شود : $f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مشتق چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ x تعریف شده باشد در این صورت حد زیر در صورت وجود و متناهی بودن مشتق چپ تابع نامیده می شود : $f'_-(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

قضیه : تابع $y=f(x)$ در نقطه ی x = a مشتق پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و برابر باشد . $\boxed{f'_+(a)=f'_-(a)}$

مثال تابع با ضابطه ی $y=x\sin\frac{1}{x}$ مفروض است مشتق های چپ و راست تابع را در نقطه x = 0 به دست آورید .

حـــــــل : ز ندارد

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\sin\frac{1}{x}-0}{\cancel{x}-0}=\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$$

مشتق راست نیز به همین صورت وجود ندارد .

مثال تابع f با ضابطه ی $f(x)=x^2[x]$ تعریف شده است ، آیا تابع f در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر است ؟

حـــل :

$$\left.\begin{aligned} f'_+(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2[x]}{x}=0\\ f'_-(a)&=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2[x]-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x[x]=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}x[x]=0$$

پس تابع f در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر است .

ارتباط مشتق با پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه ی x = a مشتق پذیر باشد ، آن گاه تابع در نقطه ی x = a پیوسته می باشد .

نکته : عکس این مطلب درست نیست .

f در a پیوسته است . $\Leftarrow$ f در a مشتقپذیر باشد .
f در a مشتق ناپذیر است . $\Leftarrow$ f در a نا پیوسته باشد .

مثال به ازای چه مقدار از a و b تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}(x^2bx)([x]-2) & x\geq 3\\ x^2[x]+a & x<3\end{cases}$ مشتق پذیر است ؟

حـــــــل : اولاً : باید پیوسته باشد :

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 3^+}(x^2bx)([x]-2)=9-3b=f(3)\\ &\lim_{x\to 3^-}x^2[x]+a=18+a\end{aligned}\right\}\Rightarrow 18+a=9-3b\Rightarrow a+3b=-9\qquad(1)$$

ثانیاً : باید مشتق چپ و راست برابر باشند :

$$\left.\begin{aligned} f'_+(3)&=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x^2bx)([x]-2)-(9-3b)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-bx+3b-9}{x-3}=6-b\\ f'_-(3)&=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2[x]+a-(9-3b)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2+\overbrace{a+3b}^{(1)}-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-18}{x-3}=12\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$6-b=12\Rightarrow b=-6\xrightarrow{(1)}a=9$$

مشتق عامل صفرشونده

اگر تابع $f(x)=(x-a)g(x)$ باشد و g(x) در نقطه ی x = a پیوسته باشد برای محاسبه مشتق f در x = a داریم :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)$$

که با توجه به اینکه g(x) در نقطه ی x = a پیوسته است $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$ و لذا $f'(a)=g(a)$

توجه :

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

در این حالت می توانیم از عامل صفر شونده مشتق گرفته و در بقیه عبارت ها ضرب کرده و نهایتاً به جای x مقدار a را قرار می دهیم .

مثال

مشتق تابع باضابطه ی $y=(x^3-1)(x^3-2)\dots(x^3-28)$ در $y=3$ کدام است ؟ (آزاد – ۸۹)

۱) $27!$ ۲) $26!$ ۳) $-27!$ ۴) $-26!$

حـــــــــــل :

در این تابع $y=(x^3-1)(x^3-2)\dots(x^3-27)(x^3-28)$ عامل صفر شونده x^3-27 است که فقط از آن مشتق می گیریم : $f'(x)=(x^3-1)(x^3-2)\dots(3x^2)(x^3-28)$

بنابراین : $f'(3)=(26)(25)\dots(1)(3\times 3^2)(-1)=-27!$

مثال

مشتق تابع با ضابطه ی $f(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x=1$ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۳)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{40}$ ۴) $\frac{5}{16}$.

حـــــــــــل :

عامل صفر شونده $(x-1)$ است که مشتق آن ۱ است .

$$f'(x)=\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{16}$$

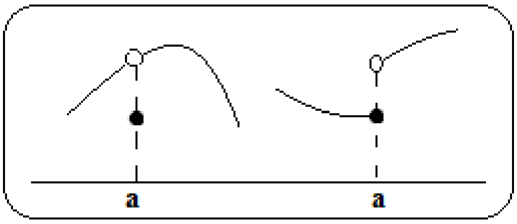
توجه : در این مسائل می توان از تعریف نیز استفاده کرد .

نقاط مشتق ناپذیر

اگر در تابعی $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود نباشد تابع در نقطه ی a مشتق ناپذیر است که ممکن است یکی از حالت های زیر اتفاق بیفتد :

حالت اول – <u>نقطه ی ناپیوستگی :</u>

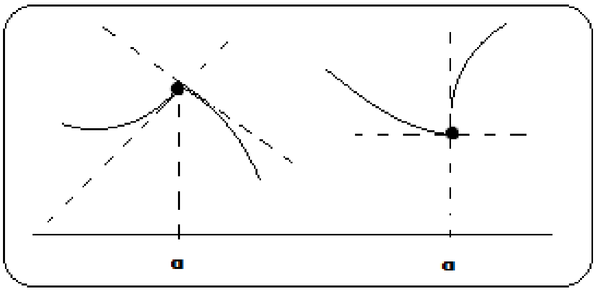
اگر تابع f در نقطه ی a پیوسته نباشد در این نقطه مشتق ناپذیر است . که ممکن است یکی از دو حالت ناپیوستگی (رفع شدنی و رفع ناشدنی) را داشته باشد



مثال

تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 2x & x\le 0\end{cases}$ در $x=0$ ناپیوسته است و در این نقطه مشتق ناپذیر است ، اما در این نقطه مشتق چپ وجود دارد و مقدار آن مساوی ۲ است .

حالت دوم – <u>نقطه ی زاویه دار یا گوشه</u>



اگر تابع **f** در نقطه ی درونی **a** پیوسته باشد ، ولی مماس های چپ و راست در آن نقطه نابرابر و حداقل یکی از آنها قائم نباشد تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است (زیرا مشتق های جزئی در این نقطه نابرابرند) و این نقطه را نقطه ی زاویه دار یا گوشه می نامیم به عبارت دیگر در این نقطه خط مماس وجود ندارد .)

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^3-1|$ را در نقطه ی $x=1$ را بررسی کنید .

حـــــــــــل :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|x^3-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}\times(x^2+x+1)=\begin{cases} f'_-(1)=-3 \\ f'_+(1)=3 \end{cases}$$

با توجه به اینکه مشتق های چپ و راست موجود ولی برابر نیستند تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است و تابع در این نقطه زاویه دار است .

بهتر است بدانیم :

تابع با ضابطه ی $f(x)=\left|(x-\alpha)(x-\beta)^n\right|$ به ازای ریشه های ساده ی داخل قدرمطلق یعنی $x=\alpha$ مشتق ناپذیر و به ازای ریشه های مکرر مرتبه زوج یا فرد مانند $x=\beta$ مشتق پذیر است .

حالت سوم – وجود مماس قائم

اگر تابع **f** در نقطه ی **a** پیوسته اما مشتق در این نقطه $\pm\infty$ شود آنگاه خط $x=a$ خط مماس قائم بر نمودار تابع **f** تعریف می شود که خود دو حالت دارد :

۱ – اگر شیب خطوط قاطع از چپ به راست هر دو به $-\infty$ یا هر دو به $+\infty$ میل کنند ، این نقطه را **عطف قائم** می نامیم

۲ – اگر این شیب یکی به $+\infty$ و دیگری به $-\infty$ میل کند ، این نقطه را **نقطه ی بازگشتی** می نامند .

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه ی $x=0$ را بررسی کنید .

حـــــــــــل :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\begin{cases} f'_-(0)=+\infty \\ f'_+(0)=+\infty \end{cases}$$

چون مشتق های جزئی از چپ و راست به $+\infty$ میل کرده اند پس تابع درنقطه $x=0$ مشتق ناپذیر است و این نقطه برای تابع عطف قائم است .

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نقطه ی $x=0$ را بررسی کنید .

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چــون رنده ز کــار خــویش بی‌بهــره مباش
تعلیــم ز اره گیـــــر در عقــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

حـــــــــــــــــل :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\begin{cases}f'_-(0)=-\infty\\ f'_+(0)=+\infty\end{cases}$$

چون مشتق های جزئی از چپ و راست به $-\infty$ و $+\infty$ میل کرده اند پس تابع درنقطه $x=0$ مشتق ناپذیر است و این نقطه برای تابع نقطه ی بازگشتی است .

دستورات و قواعد مشتق گیری

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=a$	$y'=0$	
۲	$y=ax+b$	$y'=a$	
۳	$y=ax^n$	$y'=nax^{n-1}$	$y=5x^3\Rightarrow y'=3\ 5\ x^{3-1}=15x^2$
۴	$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=3x^4-18x^5\Rightarrow y'=12x^3-90x^4$
۵	$y=u.v$	$y'=u'.v+v'.u$	$y=(x^2-3x)(3x-1)\Rightarrow$ $y'=(2x-3)(3x-1)+3(x^2-3x)$
۶	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$y=\frac{x^2+2x}{3x+4}\Rightarrow y'=\frac{(2x+2)(3x+4)-3(x^2+2x)}{(3x+4)^2}$
۷	$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(x^2-3x)^7\Rightarrow y'=7(2x-3)(x^2-3x)^6$
۸	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^2+5x}\Rightarrow y'=\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$
۹	$y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y=\sqrt[5]{x^3-x^2}\Rightarrow y'=\frac{3x^2-2x}{5\sqrt[5]{(x^3-x^2)^4}}$
۱۰	$y=\sqrt[n]{u^m}$	$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y=\sqrt[7]{(x^2-4x+1)^3}\Rightarrow y'=\frac{3(2x-4)}{7\sqrt[7]{(x^2-4x+1)^4}}$
۱۱	$y=\sin x$	$y'=\cos x$	
۱۲	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	
۱۳	$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x$	
۱۴	$y=\mathrm{Cot}x$	$y'=-(1+\mathrm{Cot}^2x)$	
۱۵	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	

۱۶	$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$
۱۷	$y=\tan u$	$y'=u'\left(1+\tan^2 u\right)$	$y=\tan x^2\Rightarrow y'=2x\left(1+\tan^2 x^2\right)$
۱۸	$y=\mathrm{Cot}u$	$y'=-u'\left(1+\mathrm{Cot}^2u\right)$	
۱۹	$y=\sin^n u$	$y'=nu'\cos u\sin^{n-1}u$	
۲۰	$y=\cos^n u$	$y'=-nu'\sin u\cos^{n-1}u$	
۲۱	$y=\tan^n u$	$y'=nu'\left(1+\tan^2 u\right)\tan^{n-1}u$	
۲۲	$y=\mathrm{Cot}^n u$	$y'=-nu'\left(1+\mathrm{Cot}^2u\right)\cot^{n-1}u$	

مثال

مشتق توابع زیر را بدست آورید :

الف) $f(x)=\dfrac{\left(3x^2-1\right)^3}{x+1}$ (خرداد ۹۰)

$$f'(x)=\frac{3(6x)\left(3x^2-1\right)^2(x+1)-1\times\left(3x^2-1\right)^3}{(x+1)^2}$$

ب) $g(x)=\sqrt{1-2\cos 3x}$ (خرداد ۹۰)

$$g'(x)=\frac{6\sin x}{2\sqrt{1-2\cos 3x}}$$

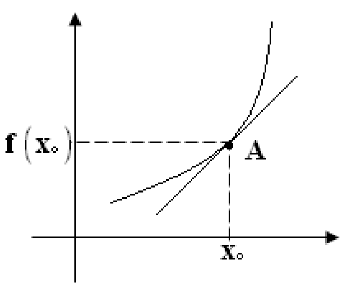
ج) $y=\sin^2(\cos\pi x)$

$$y'=2(-\pi\sin\pi x)\cos(\cos\pi x)$$

د) $y=\cos^3 2x+\sqrt[3]{x^2}$

$$y'=-3(2\sin n2x)\cos^2 2x+\frac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

معادله‌ی خطوط مماس و قائم بر منحنی



الف ـ از نقطه‌ای روی منحنی

برای نوشتن معادله خط به شیب آن و یک نقطه از آن نیاز داریم .

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه ی x_0 برابر است با شیب خط مماسی که در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ بر منحنی تابع رسم می شود. بنابراین معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

مثال: معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه ی به طول ۱ واقع بر منحنی بیابید.

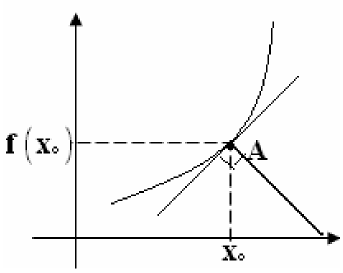
حل:

$$x_0=1 \rightarrow y_0=1 \Rightarrow A(1,1)$$

$$f'(x)=3x^2 \quad \Rightarrow \quad \text{شیب خط مماس}\; m=f'(x_0)=f'(1)=3$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y-1=3(x-1) \Rightarrow y=3x-2$$

خط قائم بر منحنی:



در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ واقع بر منحنی $y=f(x)$ خط مماسی بر منحنی رسم می کنیم اگر در نقطه ی تماس خطی بر خط مماس عمود کنیم خط حاصل را عمود بر منحنی در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ می گویند.

شیب خط قائم بر منحنی، عکس و قرینه ی شیب خط مماس است.

$$\text{شیب خط قائم}\; m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{f'(x_0)}$$

مثال: معادله ی خط قائم بر منحنی نمایش تابع $y=x^7$ در نقطه متناظر $x=-1$ را بیابید.

حل:

$$\text{معادله ی خط قائم}\; y=-\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$$

ب- از نقطه ای خارج از منحنی

برای یافتن خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ از نقطه ی $B(x_0,y_0)$ واقع در خارج از منحنی تابع f به دو روش زیر عمل می کنیم:

روش اول)

نقطه ی تماس را به صورت $T(\alpha,f(\alpha))$ فرض می کنیم و معادله ی خط مماس را مانند قبل به صورت $\boxed{y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)}$ می نویسیم چون این خط از نقطه ی معلوم B می گذرد، باجایگذاری مختصات این نقطه در معاده ی مماس مقدار α و نهایتاً خط مماس مشخص می شود.

روش دوم)

ابتدا معادله ی تمامی خطوطی که از نقطه $B(x_0,y_0)$ واقع در خارج از منحنی میگذرد را به صورت زیر می نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

سپس محل تلاقی این خط با منحنی داده شده را تشکیل می دهیم :

معادله ی تلاقی :
$$\begin{cases} y-y_0=m(x-x_0) \\ y=f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x)-y_0=m(x-x_0)$$

حال m را چنان تعیین می کنیم که معادله ی اخیر ریشه ی مضاعف داشته باشد .

مثال

به ازای کدام مقدار k ، زاویه ی بین مماس های رسم شده از مبدأ مختصات بر نمودار تابع $y=x^2+x+k$ برابر 90° است ؟

حـــل :

معادله ی خطوط گذرنده از مبدأ به صورت $y = mx$ است . این معادله را با تابع داده شده قطع می دهیم :

$$\begin{cases} y=mx \\ y=x^2+x+k \end{cases} \Rightarrow x^2+x+k=mx \Rightarrow x^2+(1-x)x+k=0$$

این معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد یعنی :

$$\Delta=b^2-4ac=(1-m)^2-4k=0 \Rightarrow m^2-2m+(1-4k)=0$$

ریشه های این معادله شیب مماس های رسم شده بر منحنی اند که طبق فرض سئوال باید بر هم عمود باشند لذا :

$$m_1m_2=-1 \Rightarrow p=\frac{c}{a}=1-4k=-1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

مشتق تابع مرکب

اگر تابع u در x مشتق پذیر و f تابعی باشد که در u (x) مشتق پذیر باشد خواهیم داشت :

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'.f'(u)$$

یا می توان نوشت :

$$y=fog(x)=f(g(x)) \Rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$$

و یا اگر y تابعی بر حسب u باشد $(y=f(u))$ و u تابعی بر حسب x باشد $(y=g(u))$ آنگاه خواهیم داشت :

$$y'_x=y'_u \times u'_x$$

مثال

اگر $y=u^2-2u$ و $u=Cosx$ باشد . y'_x را بنویسید .

$$y'_x=(2u-2)(-Sin\,x)=(2Cosx-2)(-Sinx)$$

مشتق توابع معکوس

تعریف : تابع f بر بازه $[a,b]$ معکوس پذیر است هرگاه یک به یک باشد .

در صورتی که $y = f(x)$ تابع معکوس آن به صورت $y=f^{-1}(x)$ خواهد بود که اگر $(a,b)\in f$ آن گاه $(a,b)\in f^{-1}$.

برای یافتن مشتق تابع $y = f^{-1}(x)$ در x = b واقع بر این تابع باید مشتق تابع f را را در x = a به دست آوریم و :

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

مثال

تابع $f(x) = x^2 - 4x + 7$ با دامنه ی $[4, +\infty)$ مفروض است ، مقدار مشتق تابع معکوس تابع f را در $b = 7$ $(b \in D_{f^{-1}})$ را پیدا کنید .

حل :

چون عدد ۷ متعلق به دامنه ی f^{-1} است این عدد متعلق به برد f است پس :

$$x^2 - 4x + 7 = 7 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin D_f \\ x = 4 \end{cases}$$

ق

$$f(4) = 7 \quad , \quad f'(x) = 2x - 4$$

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{4}$$

مثال

تابع $f(x) = 2x^3 + x + 1$ مفروض است ، معادله خط مماس بر منحنی f^{-1} را در نقطه ی به طول ۴ واقع بر آن بنویسید .

حل :

می دانیم : $4 \in D_{f^{-1}}$ در اینصورت $4 \in R_f$ و لذا می توان نوشت :

$$2x^3 + x + 1 = 4 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 + x - 2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^3 - 1) + (x - 1) = 0 \Rightarrow 2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

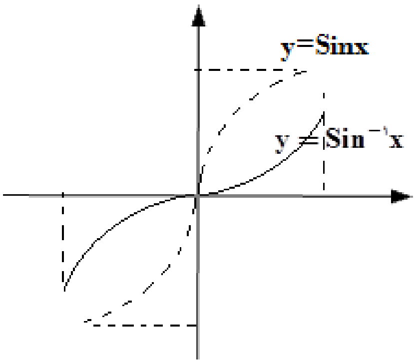
برای نوشتن معادله ی خط مماس باید شیب خط مماس را در نقطه $(4,1) \in f^{-1}$ به دست آوریم :

$$f(x) = 2x^3 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 7$$

$$m = (f^{-1})' \;\; 4 \;\; = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$$

و معادله ی خط مماس عبارتست از :

$$\begin{cases}(4,1)\\ m=\frac{1}{7}\end{cases}\Rightarrow y-1=\frac{1}{7}(x-4)\Rightarrow x-7y+3=0$$



مشتق توابع معکوس مثلثاتی

در توابع معکوس مثلثاتی می توان نوشت :

$$y=\sin^{-1}x \quad\Rightarrow\quad x=\sin y$$

با توجه به مشتق توابع معکوس داریم :

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}\Rightarrow y'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\xrightarrow{x=\sin y}\boxed{y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

برای بقیه نسبتهای مثلثاتی معکوس خواهیم داشت :

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=\sin^{-1}x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
۲	$y=\cos^{-1}x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
۳	$y=\tan^{-1}x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	
۴	$y=\cot^{-1}x$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$	
۵	$y=\sin^{-1}u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y=\sin^{-1}x^2\Rightarrow y'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
۶	$y=\cos^{-1}u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y=\cos^{-1}\lvert x\rvert\Rightarrow y'=\frac{-\frac{x}{\lvert x\rvert}}{\sqrt{1-x^2}}$
۷	$y=\tan^{-1}u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$	$y=\tan^{-1}\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\lvert x\rvert}$
۸	$y=\cot^{-1}u$	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$	$y=\cot^{-1}\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow y'=-\frac{\frac{2\times 1}{3\sqrt[3]{x}}}{1+x\sqrt[3]{x}}\Rightarrow y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}\,(1+x\sqrt[3]{x})}$

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش

چـون رنده ز کـار خـویش بی‌بهـره مباش

تعلیــم ز اره گیـــر در عقــل معــاش

چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

خواص و نکات توابع معکوس مثلثاتی

۱ – در تابع $y=\sin^{-1}x$ دامنه برابر بازه ی $[-1,1]$ و برد آن بازه ی $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\sin x$ نسبت به خط $y=x$ است .

۲ – در تابع $y=\cos^{-1}x$ دامنه برابر بازه ی $[-1,1]$ و برد آن بازه ی $[0,\pi]$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\cos x$ نسبت به خط $y=x$ است .

۳ – در تابع $y=\tan^{-1}x$ دامنه مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن بازه ی $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\tan x$ نسبت به خط $y=x$ است .

۴ – در تابع $y=\cot^{-1}x$ دامنه مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن بازه ی $(0,\pi)$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\cot x$ نسبت به خط $y=x$ است .

مشتق تابع نمایی و لگاریتمی

عدد نپر : با حرف e نمایش داده می شود و مقدار آن حدوداً ... ۲/ ۷۱۸۲ می باشد .

برای محاسبه مشتق توابع نمایی از دستورات زیر استفاده می کنیم :

۱) $y=a^x \Rightarrow \boxed{y'=a^x\ln a}$

۲) $y=a^u \Rightarrow \boxed{y'=u'a^u\ln a}$

۳) $y=e^x \Rightarrow \boxed{y'=e^x}$

۴) $y=e^u \Rightarrow \boxed{y'=u'e^u}$

۵) $y=u^v \xrightarrow{\ln} \ln y=v\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{vu'}{u} \Rightarrow \boxed{y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)}$

مشتق توابع لگاریتمی:

۱) $y=\log_a x \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e}$

۲) $y=\log_a u \Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{u\ln a}=\frac{u'}{u}\log_a e}$

۳) $y=\ln x \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x}}$

۴) $y=\ln|u| \Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{u}}$

تذکر : لگاریتم x در پایه ی e را با lnx نمایش می دهیم .

مثال :

۱) $y=۵^{x} \Rightarrow y'=۵^{x}\ln ۵$

۲) $y=۲^{x^{۲}-۳x} \Rightarrow y'=(۲x-۳)۲^{x^{۲}-۳x}\ln ۲$

۳) $y=x^{۳}e^{x} \Rightarrow y'=۳x^{۲}e^{x}+x^{۳}e^{x}$

۴) $y=e^{x^{۲}-\sin x} \Rightarrow y'=(۲x-Cosx)e^{x^{۲}-\sin x}$

۵) $y=\ln|x^{۲}-\sin x| \Rightarrow y'=\frac{۲x-Cosx}{x^{۲}-\sin x}$

توابع ضمنی:

توابعی که در آنها ضابطه ی تابع برحسب هیچ کدام از متغییرها نوشته نشده و به صورت $F(x,y)=۰$ باشد . که ممکن است نتوانیم این رابطه را به صورت $y=f\ x$ بنویسیم .

برای محاسبه ی مشتق این توابع از دستور زیر استفاده می کنیم : $\boxed{F'(x,y)=y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}}$

F'_x : یعنی مشتق F نسبت به متغییر x با فرض اینکه y عدد ثابت فرض شود .

F'_y : یعنی مشتق F نسبت به متغییر y با فرض اینکه x عدد ثابت فرض شود .

مثال مشتق y نسبت به x را در رابطه ی ضمنی $x^{۲}+۲xy-۳y^{۲}+۵x=۷y$ را بیابید .

حـــل :

$$x^{۲}+۲xy-۳y^{۲}+۵x-۷y=۰ \Rightarrow y'_x=-\frac{۲x+۲y+۵}{۲x-۶y-۷}$$

روش دیگر برای مشتق گیری ضمنی :

از دو طرف معادله نسبت به x مشتق می گیریم و از معادله ی حاصل y' را به دست می آوریم ، با این فرض که همواره معادله ی داده شده y را تابعی از x در نظر می گیریم که مشتق پذیر باشد . (همه جا مشتق y را y' می نویسیم .)

مثال اگر $x+y^{۴}+۱=y+x^{۲}+xy^{۲}$ ، حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بنویسید .

حــــــــل :

از دو طرف معادله مشتق می گیریم :

$$x+y^{4}+1=y+x^{2}+xy^{2}\Rightarrow 1+4y'y^{3}=y'+2x+\left(1\times y^{2}+2yy'x\right)$$

$$\Rightarrow y'\left(4y^{3}-1-2xy\right)=2x+y^{2}-1\Rightarrow y'=\frac{2x+y^{2}-1}{4y^{3}-2xy-1}$$

تمرین وتکلیف

ردیف	سئوالات
۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x\le 3\\ 4x-1 & x>3\end{cases}$ را در نقطه ی $x_0=3$ بررسی کنید .
۲	در تابع $f(x)=\begin{cases}x^{2}+2x & x>2\\ 6x & x<2\end{cases}$ الف) مقدار $f'_{-}(-1)$ را به دست آورید . ب) مشتق پذیری تابع را در نقطه x = ۲ بررسی کنـــــــید .
۳	هرگاه $f(x,y)=e^{x}+e^{y}+x^{2}+y^{2}-2=0$ ؛ الف) مشتق ضمنی y نسبت به x را به دست آورید . ب) معادله خط مماس بر منحنی این معادله را در نقطه $O(0,0)$ بنویسید .
۴	مشتق تابع $y=\ln\left\|x^{2}-\cos x\right\|$ را به دست آورید .
۵	مشتق تابع ضمنی $x\cos y-x^{2}y=4y$ را به دست آورید
۶	معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x)=e^{x^{2}-4x}-5$ را در نقطه ی برخورد منحنی با محور عرض ها را بنویسید .

کاربرد مشتق

۱ـ جهت تغییرات تابع (صعودی یا نزولی) (یکنوایی تابع)

به عنوان اولین کاربرد مشتق ، تعیین می کنیم که تابع در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی و در چه نقاطی ثابت است .

الف : تابع صعـــــــــــودی

تابع $y=f(x)$ را در دامنه ی خود صعودی گوییم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه ی تابع داشته باشیم :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 \le x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز افزایش یابد .

صعودی اکید (اکیداً صعودی) : $\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

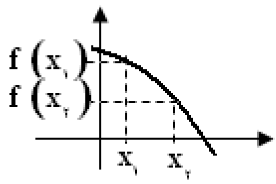
ب : تابع نـــــــــــزولی

تابع $y=f(x)$ را در دامنه ی خود نزولی گوییم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه ی تابع داشته باشیم :

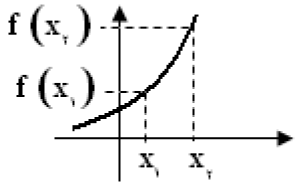
$$\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 \le x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز کاهش یابد .

نزولی اکید (اکیداً نزولی) : $\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$



تابــــع نزولی



تابع صعودی

نکته :

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع

۱. مشتق تابع را می گیریم .
۲. مشتق را برابر صفر قرار می دهیم و ریشه های آن را تعیین می کنیم .
۳. مشتق را تعیین علامت می کنیم و در هر فاصله ای که مشتق مثبت باشد تابع اکیداً صعودی است و برعکس .

مثال

جهت تغییرات تابع $f(x)=2x^3-9x^2+12x+30$ را بررسی کنید .

حــــل :

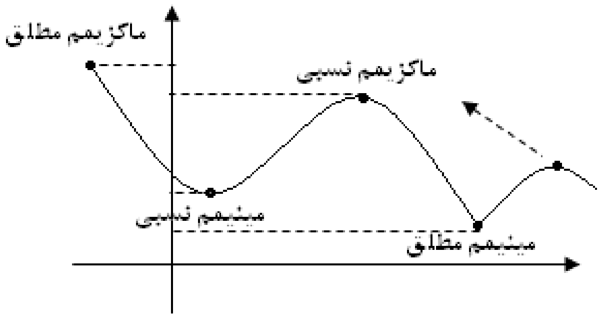
$$f(x)=2x^3-9x^2+12x+30 \Rightarrow f'(x)=6x^2-18x+12=0$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \to y=35 \\ x=2 \to y=34 \end{cases}$$

x		۱		۲	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+
$f(x)$	↗	۳۵ Max	↘	۳۴ Min	↗

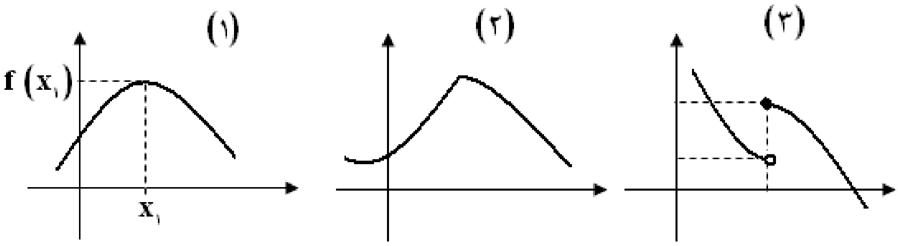
۲- تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع (اکسترمم نسبی)

قبل از تعریف دقیق و علمی ماکزیمم و مینیمم یک تابع ، به شکل زیر توجه کنید :



الف: ماکزیمم نسبی:

نقطه ای به طول x_1 را ماکزیمم نسبی تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک همسایگی در اطراف x_1 وجود داشته باشد که $f(x_1)$ بالاترین نقطه باشد یعنی به ازای هر x از آن همسایگی داشته باشیم : $f(x)\le f(x_1)$



ب) مینیمم نسبی :

نقطه ای به طول x_1 را مینیمم نسبی تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک همسایگی در اطراف x_1 وجود داشته باشد که $f(x_1)$ پایین ترین نقطه باشد یعنی به ازای هر x از آن همسایگی داشته باشیم : $f(x)\ge f(x_1)$

نکات :

۱. به نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی اصطلاحاً اکسترمم نسبی می گویند .
۲. ممکن است تابعی در نقطه ای اکسترمم نسبی داشته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد . (شکل ۲)
۳. ممکن است تابعی در نقطه ای اکسترمم نسبی داشته باشد ولی در آن نقطه پیوسته نباشد (شکل ۳)
۴. اگر تابعی در نقطه ای اکسترمم نسبی داشته باشد و در آن نقطه مشتق پذیر باشد ، آنگاه مشتق در آن نقطه صفر است : $\boxed{f'(x_1)=0}$
۵. در یک فاصله بسته $[a,b]$ نقاط ابتدا و انتها نمی توانند اکسترمم نسبی باشند . زیرا در نقطه ی a همسایگی چپ ندارد و در نقطه ی b همسایگی راست ندارد .

۶. تابع ثابت در تمام نقاط دامنه خود هم ماکزیمم و هم مینیمم است .

توجه : برای بدست آوردن نقاط اکسترمم

۱. مشتق تابع را حساب می کنیم
۲. ریشه های مشتق را به دست می آوریم .
۳. تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم و مطابق جدول زیر :

ریشه های مشتق

x		x_1		x_2		x_3	
$f'(x)$	+	$\cdot$	-	$\cdot$	+	$\cdot$	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_1)$ ماکزیمم نسبی	$\searrow$	$f(x_2)$ می نیمم نسبی	$\nearrow$	$f(x_3)$ ماکزیمم نسبی	$\searrow$

۳- تعیین ماکزیمم و مینیمم مطلق:

- ماکزیمم مطلق : نقطه ای به طول x_1 را ماکزیمم مطلق تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک به ازای هر x از دامنه ی تابع داشته باشیم : $f(x)\le f(x_1)$
- مینیمم مطلق : نقطه ای به طول x_1 را مینیمم مطلق تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک به ازای هر x از دامنه ی تابع داشته باشیم : $f(x)\ge f(x_1)$

نکته : اگر تابع $y=f(x)$ در فا صله ی $[a,b]$ پیو سته با شد آن گاه تابع حتماً در این فا صله یک ماکزیمم مطلق و یک مینیمم مطلق دارد .

برای تعیین اکسترمم های مطلق در فاصله ی $[a,b]$ ابتدا اکسترمم های نسبی را به دست آورده و $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می کنیم از بین این مقادیر، بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق و
کمترین مقدار مینیمم مطلق است .

مثال ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2$ را در فاصله ی $[-3,2]$ بیابید .

$$f(x)=x^3-3x^2$$

حـــــل :

$$f'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=0\\ x=2\Rightarrow y=-4\end{cases}$$

x		۰		۲	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+
$f(x)$	↗	۰ Max	↘	−۴ Min	↗

$$[-۳,۲]\rightarrow \begin{cases} f(۳)=-۴ \\ f(-۳)=-۵۴ \end{cases}$$

از بین مقادیر $\{-۵۴,-۴,۰\}$ بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق است .

و لذا : $(-۳,-۵۴)$ مینیمم مطلق و $(۰,۰)$ ماکزیمم مطلق تابع در فاصله ی $[-۳و۲]$ است .

نقاط Max یا Min یک تابع را نقاط اکسترمم تابع می نامند که دو ویژگی مهم دارند :

در معادله صدق می کنند
ولی این نقاط مشتق را صفر می کنند

۴-نقاط بحرانی:

نقطه ای به طول $x_۱$ متعلق به دامنه ی تابع ، نقطه ی بحرانی گفته می شود ، اگر مشتق در $x_۱$ برابر صفر باشد ویا مشتق درآن نقطه موجود نباشد .

نکته : تمام نقاط اکسترمم نسبی نقطه ی بحرانی هستند (ولی نقاط بحرانی ممکن است اکسترمم نسبی نباشد.)

نکته : نقاط ناپیوستگی جزو نقاط بحرانی هستند .

مثال نقاط بحرانی تابع به معادله ی $f(x)=\sqrt[۳]{۳x^۲+x-۴}$ را تعیین کنید .

حـــل :

$$f(x)=\sqrt[۳]{۳x^۲+x-۴}\Rightarrow f'(x)=\frac{۶x+۱}{۳\sqrt[۳]{(۳x^۲+x-۴)^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۶x+۱=۰\rightarrow x=-\frac{۱}{۶}$$

برای تعیین نقاط مشتق ناپذیر : $۳x^۲+x-۴=۰$

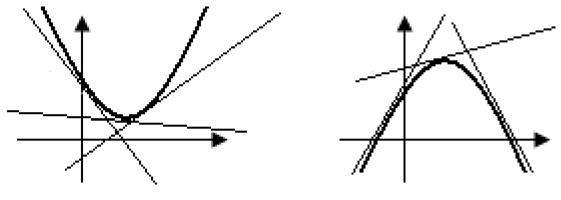
$$\Delta=۱-۴(۳)(-۴)=۴۹\rightarrow x=\frac{-۱\pm ۷}{۳}\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

و نقاط بحرانی عبارتند از : $\left(-\frac{۱}{۶},-\sqrt[۳]{\frac{۴۹}{۱۲}}\right)$ و $(۱,۰)$ و $\left(-\frac{۴}{۳},۰\right)$.

۲۱

۵- تقعر منحنی و نقطه ی عطف

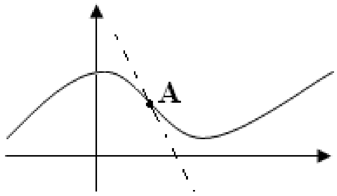
جهت تقعر یک منحنی در بازه ی $[a,b]$ رو به بالا است اگر آن تابع در این بازه مشتق پذیر بوده و هر مماس دلخواه بر منحنی در این بازه رسم کنیم زیر منحنی قرار گیرد . و برعکس .



جهت تقعر رو به پایین　　　جهت تقعر رو به بالا

نقطه عطف :

نقطه ی A نقطه ی عطف تابع نامیده می شود اگر خط مماس بر منحنی در نقطه ی A موجود باشد و منحنی را قطع کند (در این نقطه جهت تقعر عوض می شود .)



برای تعیین تقعر و نقطه عطف :

۱. مشتق تابع و مشتق دوم تابع را به دست می آوریم .
۲. ریشه های مشتق دوم را تعیین می کنیم . $(y''=0)$
۳. مشتق دوم را تعیین علامت می کنیم . و در هر فاصله ای که مشتق دوم مثبت باشد جهت تقعر منحنی روبه بالاست و برعکس .
۴. نقطه ای که مشتق دوم تابع صفر است و تغییر علامت می دهد آن نقطه نقطه ی عطف تابع نامیده می شود .

نتیجه : طول نقطه ی عطف یک تابع از حل معادله ی $f''(x)=0$ به دست می آیند . (xهایی که در آنها مشتق دوم تغییر علامت می دهد .)

نقطـــــــــــه عطف هر تابع دو خاصیت مهم دارد :
در معادله صدق می کنند
طول نقطه ی عطف مشتق دوم را صفر می کند .

مثال

مقادیر a ، b و c را چنان تعیین کنید که (۳- ، ۱) نقطه ی عطف منحنی $y=ax^3+bx^2+c$ بوده و منحنی از نقطه ی (۱- ، ۰) بگذرد .

۲۲

$$y=ax^{۳}+bx^{۲}+c\Rightarrow y'=۳ax^{۲}+۲bx\Rightarrow f''(x)=۶ax+۲b$$

نقطه عطف $(۱,-۳)$ $\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=۳\Rightarrow a+b+c=-۳ \\ f''(۱)=۰\Rightarrow f''(۱)=۶a+۲b=۰ \end{cases}$ (۱)

نقطه ی معمولی $(۰,-۱)$ $\Rightarrow f(۰)=-۱\Rightarrow ۰+۰+c=-۱\Rightarrow \boxed{c=-۱}$ (۲)

$$(۱),(۲)\Rightarrow \begin{cases} a+b=-۴ \\ ۳a+b=۰ \end{cases}\Rightarrow a=۲ \quad , \quad b=-۶$$

مشتق مراتب بالاتر:

اگر تابع $y=f(x)$ مشتق پذیر باشد . مشتق مرتبه ی اول را با $y'=f'(x)$ نشان می دهند . اگر تابع $y'=f'(x)$ نیز مشتق پذیر باشد ، مشتق آن را با $y''=f''(x)$ نشان می دهند و به آن مشتق مرتبه ی دوم تابع می گویند. به همین ترتیب اگر $y''=f''(x)$ باز هم مشتق پذیر باشند مشتق مرتبه سوم و . . . تعریف می شوند .

در حالت کلی مشتق مرتبه nام تابع $y=f(x)$ را با $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ نشان می دهند .

مشتق n ام بعضی توابع خاص :

۱) $f(x)=\dfrac{۱}{ax+b} \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(x)=\dfrac{(-۱)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+۱}}}$

۲) $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots \Rightarrow \boxed{\begin{cases} f^{(n)}(x)=n!a_n \\ f^{(n-۱)}(x)=n!a_n+(n-۱)!a_{n-۱} \\ f^{(m)}(x)=۰ \quad m>n \end{cases}}$

۳) $f(x)=K\sin(ax+b) \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(x)=Ka^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{۲}+(ax+b)\right)}$

۳) $f(x)=K\cos(ax+b) \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(x)=Ka^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}+(ax+b)\right)}$

۵) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(x)=\dfrac{n!(-c)^{n-۱}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+۱}}}$

۶) $f(x)=($ a عامل صفر کننده به ازای $)^n g(x) \Rightarrow$

$f^{(n)}(x)=($ a به ازای صفر کننده n ام عامل مشتق $)\times g(a)$

یعنی برای یافتن مشتق n ام تابع بالا ، کافی است n بار از عامل صفرکننده مشتق بگیریم و در بقیه ی ضابطه ی تابع فقط عامل صفر کننده را قرار دهیم .

مثال: اگر $y = x^{10} + x^{9} + x^{8}$ حاصل $f^{(9)}(-1)$ را به دست آورید .

$$f^{(9)}(x) = 10!x + 9! \xrightarrow{x=-1} f^{(9)}(-1) = 10!(-1) + 9! = -10! + 9!$$

مثال: اگر $f(x) = (x-5)^{2}(x-3)^{4}(x-2)^{3}(x-1)^{5}$ باشد . مقدار $f'''(2)$ کدام است ؟

حل :

$$f(x) = (x-5)^{2}(x-3)^{4}\underbrace{(x-2)^{3}}_{\text{عامل صفر شونده}}(x-1)^{5}$$

$$y = (x-2)^{3} \Rightarrow y' = 3(x-2)^{2} \Rightarrow y'' = 6(x-2) \Rightarrow y''' = \boxed{6}$$

$$f'''(2) = (2-5)^{2}(2-3)^{4}\left(\boxed{6}\right)(2-1)^{5} = 54$$

۶-رسم نمودار یک تابع :

مهمترین کاربرد مشتق در رسم نمودار یک تابع است که برای این کار :

۱. تعیین دامنه تابع .
۲. تعیین مجانب های تابع در صورت وجود .
۳. یافتن مشتق و ریشه های آن (جدول تغییرات و تعیین اکسترمم ها).
۴. یافتن تقعر منحنی و نقاط عطف در صورت وجود .
۵. رسم نمودار به کمک جدول تغییرات .

مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{x^{2}-1}$ را رسم کنید .

حل :

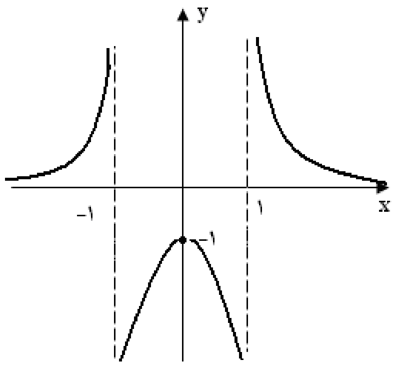
$$1)\quad D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \Rightarrow \quad 2)\quad x^{2} - 1 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$ مجانبهای قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2}-1} = 0 \Rightarrow y = 0$$ مجانب افقی

$$3)\quad y' = \frac{0 - 2x}{(x^{2}-1)} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0 \rightarrow y = -1}$$

$$4)\quad y'' = \frac{-2(x^{2}-1)^{2} - 4x(x^{2}-1)(-2x)}{(x^{2}-1)^{4}} = \frac{6x^{2}+1}{(x^{2}-1)^{3}} = 0$$ ریشه ندارد

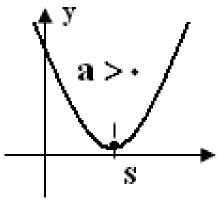
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$-$	
$f''(x)$		$+$	∞	$-$		$-$	∞	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\; -\infty$	$\nearrow$	-1 Max	$\searrow$	$-\infty \;\; +\infty$	$\searrow$	0

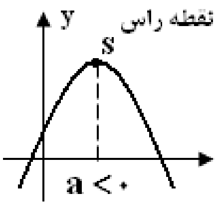


نکات نمودار توابع خاص

الف : تابع درجه ۲ :

شکل استاندارد تابع درجه ۲ به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که نمودار این توابع به یکی از دو صورت زیر است :





در هر دو حالت طول نقطه ی راس که در یکی ماکزیمم و در دیگری مینیمم تابع است ریشه مشتق

است . $y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{-b}{2a}}$

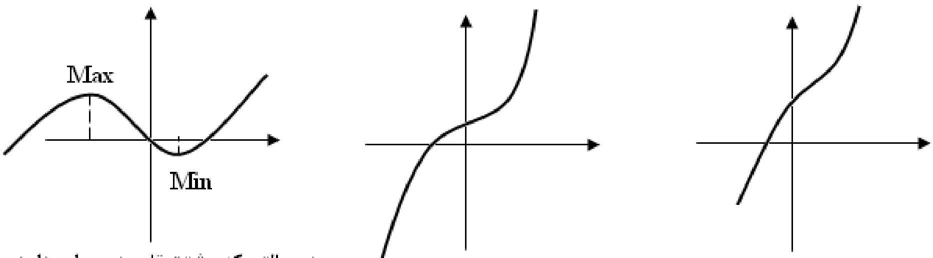
و لذا مختصات نقطه ی راس

$$S \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{-b}{2a} \\ y = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{array} \right.$$

ب : نمودار تابع درجه ۳

شکل ا ستاندارد تابع به صورت $y = ax^3 + ba^2 + cx + d$ ا ست که : $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ م شتق تابع خود یک تابع درجه ۲ است ، که این تابع می تواند ریشه حقیقی داشته باشد و یا نداشته باشد . در هر یک از این حالات نمودار به صورت های زیر است :

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور



در حالتی که مشتق تابع دو جواب دارد
دو مماس افقی

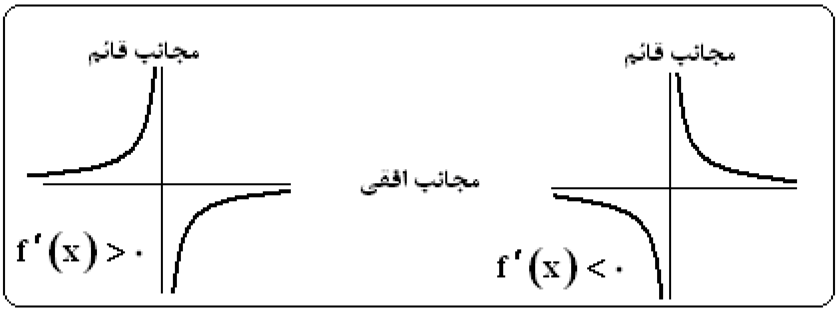
در حالتی که مشتق یک جواب دارد
یک مماس افقی

در حالتی که مشتق جواب ندارد
بدون مماس افقی

نکته ۱ : در حالتی که مشتق دو ریشه ی متمایز داشته باشد ، نقطه ی عطف وسط پاره خطی است که ماکزیمم و مینیمم را به هم وصل می کند .

نکته ۲ : در حالتی که مشتق ریشه ی مضاعف داشته باشد ، مماس بر منحنی در نقطه ی عطف ، خطی افقی موازی محور xها است .

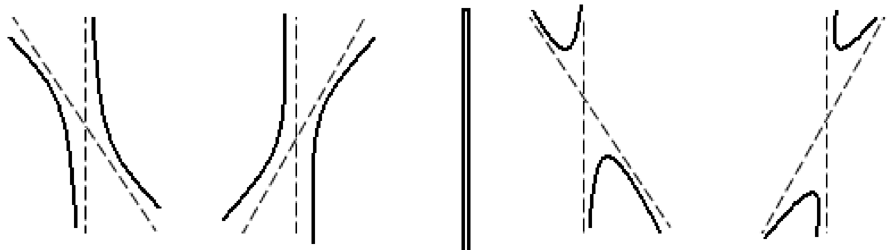
ج - توابع به صورت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq ۰$ و $ad\neq bc$) هموگرافیک نام دارد . این توابع همواره یک مجانب قائم به صورت $x=\dfrac{-d}{c}$ و یک مجانب افقی به صورت $y=\dfrac{a}{c}$ دارد . که حل برخورد دو مجانب نقطه ی $\left(\dfrac{-d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ مرکز تقارن نمودار است . و نمودار به یکی از دو صورت زیر است .



نکته : در توابع هموگرافیک مشتق به صورت $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$ است که مخرج این کسر همواره مثبت و صورت این کسری عددی حقیقی است که اگر این عدد مثبت باشد تابع همواره صعودی و اگر منفی باشد همواره نزولی است .

د – توابع به شکل : $y=\dfrac{ax^۲+bx+c}{b'x+c'}$

این توابع یک مجانب قائم ($x=\dfrac{-c'}{b'}$)و یک مجانب مایل دارند. محل برخورد این دو مجانب مرکز تقارن نمودار است . نمودار این به یکی از صورت های زیر است :



در این دو حالت مشتق دو ریشه دارد
تابع دارای دو اکسترمم نسبی است

در حالتی که مشتق ریشه ندارد
تابع اکسترمم نسبی ندارد

مثال منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2}{x-1}$ را رسم کنید .

حـــــــل : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

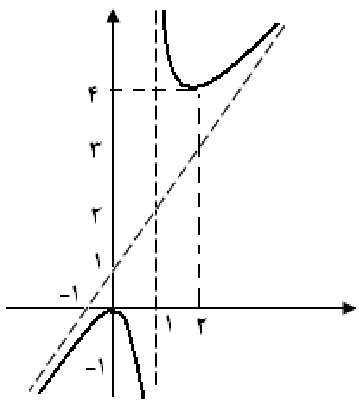
ب قائم $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\pm\infty \Rightarrow x=1$

این تابع مجانب افقی ندارد زیرا درجه صورت بزرگتر است لذا دارای مجانب مایل است :

ب مایل $y=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\boxed{x+1}+\frac{1}{x-1}\Rightarrow y=x+1$ جدول تغییرات و مشتق :

$$y=\frac{x^2}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x^2-2x=0\rightarrow \begin{cases}x=0\rightarrow y=0\\ x=2\rightarrow y=4\end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		∞
y'		+	۰	−	‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰ Max	↘	∞ ‖ ∞	↘	۴ Min	↗	∞

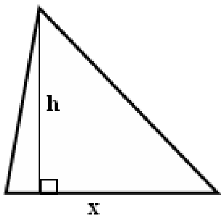


۷-مسائل بهینه سازی

در بعضی مسائل کاربردی می توان با استفاده از مشتق و محاسبه اکسترمم ها حالت مطلوب مسئله را به دست آوریم برای این کار مراحل زیر را طی می کنیم :

۱. در صورت لزوم شکلی از مسئله رسم می کنیم .

۲. با ترجمه دقیق ریاضی به زبان ریاضی ، تابعی از متغییرهای x و y و... می نویسیم .
۳. اگر رابطه ی به دست آمده یک متغیره نباشد به کمک فرضهای مسئله یک معادله ی یک متغییره به دست می آوریم .
۴. از تابع به دست آمده مشتق گرفته و نقاط ماکزیمم ویا مینیمم رادر صورت وجود به دست می آوریم .



مثال از میان مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است ، مساحت مثلث را به دست آورید که بیشترین مساحت را داشته باشد .

حـــــل :

$$x+h=۱۶ \quad \Rightarrow \quad h=۱۶-h$$

$$\text{مساحت}\,S=\frac{۱}{۲}xh=\frac{۱}{۲}x(۱۶-x)=۸x-\frac{۱}{۲}x^{۲}$$

$$S'=۸-x=۰ \Rightarrow x=۸ \quad \rightarrow \quad h=۸ \quad \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۸)(۸)=۳۲$$

چند نکته مهم

قاعده هوپیتال

در محاسبه ی حد یک تابع در حالتی که به ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می رسیم برای رفع ابهام می توان از دستور که به نوعی کاربرد مشتق در حد است استفاده کنیم .

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\dots$$

مثال حد تابع $\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-\operatorname{Sin}x}{x}$ را به د ست آورید .

حـــــل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-\operatorname{Sin}x}{x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۳-\cos x}{۱}=\frac{۳-\operatorname{Cos}۰}{۱}=۳-۱=۲$$

نقاط مشتق ناپذیر

الف – نقاط زاویه دار : نقطه ی به طول a را نقطه ی زاویه دار برای منحنی f می گوییم هرگاه :

- f در نقطه ی a پیوسته باشد .
- مشتق های چپ و راست در a برابر نباشند .
- حداقل یکی از آنها مقداری متناهی باشد (عددی باشد .)

۲۸

مثال مشتق پذیری تابع $f(x)=\sin\pi\left(x-[x]\right)$ را در نقاط صحیح بررسی کنید .

حـــــل :

این تابع در تمام نقاط صحیح و در نتیجه در R پیوسته است زیرا :

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=0=f(n) \quad , \quad \lim_{x\to n^-} f(x)=\sin\pi=0$$

$$f'_+(n)=\lim_{x\to n^+}\frac{\sin\pi\left(x-[x]\right)-0}{x-n}=\lim_{x\to n^+}\frac{\sin\pi\left(\overset{t}{x-n}\right)}{x-n}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\pi t}{t}=\pi$$

$$f'_-(n)=\lim_{x\to n^-}\frac{\sin\pi\left(x-[x]\right)-0}{x-n}=\lim_{x\to n^-}\frac{\sin\pi\left(\overset{t}{x-n+1}\right)}{x-n}=$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin(t+1)t}{t}\overset{HOP}{=}\lim_{T\to 0^-}\frac{\pi\cos\pi(t+1)}{1}=-\pi$$

تابع در $x=n$ به صورت نقاط زاویه دار است .

ب – نقاط بازگشت : نقطه ی به طول a را نقطه ی بازگشت برای منحنی f می گوییم هرگاه :

- f در نقطه ی a پیوسته باشد .
- مشتق های چپ و راست در a بی نهایت هایی با علامت های مختلف شوند . $(+\infty,-\infty)$

نکته : اگر مشتق های چپ و راست در a بی نهایت هایی هم علامت شوند آن نقطه ، نقطه ی عطف قائم خواهد بود .

مثال نقطه ی به طول ۲ برای منحنی $y=\sqrt[3]{(x-2)^2(x-3)}$ چگونه نقطه ای است ؟

حـــــل :

$$y'=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x-3)}-0}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x-2}}=\sqrt[3]{\dfrac{-1}{0^+}}=-\infty\\[2ex]\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x-2}}=\sqrt[3]{\dfrac{-1}{0^-}}=+\infty\end{cases}$$

با توجه به اینکه مشتق های چپ و راست تابع $+\infty$ و $-\infty$ شده است f در a بازگشتی است .

زاویه ی بین دو منحنی - (بین خط و منحنی)

می دانیم زاویه ی بین دو خط با شیب های m و m' از دستور $\tan\alpha=\left|\dfrac{m-m'}{1+mm'}\right|$ به دست می آید .

منظور از زاویه ی بین دو منحنی ، زاویه ی بین خطوط مماس بر آن دو منحنی در نقطه ی برخورد آنها است . پس برای به دست آوردن این زاویه ، ابتدا باید دو منحنی را با هم تلاقی داده و طول نقاط برخورد آنها را به دست آوریم . سپس شیب خطوط مماس در این نقاط را یافته و از دستور زاویه ی بین دو خط ، زاویه را پیدا می کنیم .

مثال دو منحنی $y=x^2$ و $y=x^2+x$ با هم چه زاویه ای می سازند ؟

حـــــل :

طول نقاط تلاقی : $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^2+x \end{cases} \Rightarrow x^2=x^2+x \Rightarrow x=0$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \Rightarrow y'=2x \xrightarrow{x=0} m=y'(0)=0 \\ y=x^2+x \Rightarrow y'=2x+1 \xrightarrow{x=0} m'=y'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{0-1}{1+0}\right|=1 \Rightarrow \alpha=45^\circ$$

مشتق توابع شامل قدر مطلق:

اگر بخواهیم از توابع شامل قدر مطلق مشتق بگیریم :

$$f(x)=|u| \quad \Rightarrow \quad f(x)=|u|=\sqrt{u^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2uu'}{2\sqrt{u^2}} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{uu'}{|u|}}$$

مشتق توابع جزء صحیح:

در تابع $f(x)=[g(x)]$ اگر g تابعی پیوسته در یک فاصله باشد نقاط مشتق پذیری همان نقاط پیوستگی است . در هر فاصله که $[g(x)]$ پیوسته باشد مشتق پذیر نیز بوده و مشتق آن برابر صفر است .

الف- هنگام مشتق گیری از توابعی به فرم کلی $f(x)=g(x)[h(x)]$ در نقطه ای به طول a (به شرطی که h (a) صحیح نباشد .) دو را ه وجود دارد :

1. از همان ابتدا $[h(a)]$ را که عدد صحیح می باشد ، حساب کرده ، و تابع را ساده می کنیم ومشتق می گیریم و a را در آن قرار می دهیم .
2. با مقدار جزء صحیح مثل یک ضریب عددی برخورد می کنیم و از تابع مشتق می گیریم ، سپس a را در جواب قرار می دهیم .

ب – توابع به فرم $f(x)=[g(x)]$ در نقاطی به طول a که g(x) صحیح می باشد حد ندارد ، پس پیوسته نیستند در نتیجه مشتق پذیر نمی باشند ، مگر در نقاطی که a طول نقطه مینیمم نسبی g(x) باشد .

مثال مشتق تابع $y=\sqrt[3]{x}[x]$ را در نقطه ی $x=\frac{28}{8}$ به دست آورید .

حـــــل : روش اول :

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چـون رنده ز کـار خـویش بی‌بهـره مباش
تعلیـــم ز اره گیـــر در عقـــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش
راه زندگی

$$[x]=\left[\frac{28}{8}\right]=3 \quad \Rightarrow f(x)=3\sqrt[3]{x} \to f'(x)=3\times\frac{1}{3y=\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{28}{8}\right)=\frac{4}{9}$$

روش دوم :

$$y=\sqrt[3]{x}[x] \Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}[x] \xrightarrow{x=\frac{27}{8}} y'=\frac{1}{3\times\frac{9}{4}}\times 3=\frac{4}{9}$$

تمرین و تکلیف

ردیف	سئوالات
۱	نقاط بحرانی تابع f با ضابطه ی $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ بر بـــــــازه ی [۱ ، ۱-] را به دست آورید ؟
۲	معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x)=e^{x^2-4x}-5$ را در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور عرض‌ها را بنویسید .
۳	معادله ی خط مماس بر منحنی $e^x+e^y-x^2-y^2-2=0$ کدام است ؟
۴	اگر $g(x)=x^2+1$, $f(x)=\sqrt{x}$ باشد آنگاه $(fog)'(0)$ کدام است ؟
۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x+3}$ را رسم کنید
۶	جهت تغییرات و نمودار تابع به معادله $y=\frac{2x}{1+x^2}$ را رسم کنید .
۷	در تابع $f(x)=x^3+ax^2+c$ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که نقطه ی (۳، ۲)A اکسترمم نسبی تابع باشد.
۸	ضرایب A و B را چنان بیابید که نقطه ی $A(1,2)$ مرکز تقارن تابع $y=ax^3+bx^2$ باشد .
۹	تقعر نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\frac{1}{x^2+12}$ در بازه ی $(-a,a)$ رو به پایین است ، بیشترین مقدار مقدار a کدام است ؟
۱۰	اگر $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}$ و $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}}$ باشد حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ را به دست آوید .

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چـون رنده ز کـار خـویش بی‌بهـره مباش
تعلیـــم ز اره گیـــــر در عقـــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

مشتق و کاربرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

ردیف	سؤالات چهار گزینه ای از کنکور سراسری
۱	مقدار مشتق تابع $y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است ؟ (تجربی– ۹۱) ۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$
جواب	$y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}\Rightarrow$ $y'=\frac{2\sin x\cos x\left(2-\sin^2 x\right)-\left(-2\sin x\cos x\right)\left(1-\cos^2 x\right)}{\left(2-\sin^2 x\right)^2}$ $\Rightarrow y'_{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{8}{9}$
۲	مشتق تابع $y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$ به ازای $x=\frac{\pi}{3}$ ، کدام است ؟ (تجربی– ۹۳) ۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$
جواب	با استفاده از دستور مشتق گیری مقابل داریم : $y=a\sin^n u\Rightarrow y'=nau'\cos u\sin^{n-1}u$ $y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\Rightarrow y'=2(2)\left(\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\sin^{n-1}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$ با توجه به اینکه : $\sin 2x=2\sin x\cos x$ $y'=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow y'_{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}$
۳	خط مماس بر منحنی به معادله ی $\mathrm{Ln}\left(x^2-y\right)=\sqrt{y+1}-x$ در نقطه ی $(2,3)$ ، نیمساز ناحیه ی اول را با کدام طول قطع می کند ؟ (تجربی– ۹۰) ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$
جواب	تابع داده شده یک تابع ضمنی است که :

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چــون رنده ز کــار خــویش بی‌بهــره مباش
تعلیـــم ز اره گیـــــر در عقــــل معــــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

$$f(x,y)=\sqrt{y+1}-x-\operatorname{Ln}(x^2-y)$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-1-\dfrac{2x}{x^2-y}}{\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}+\dfrac{1}{x^2-y}}\Rightarrow m=-\frac{-1-\dfrac{2(2)}{4-3}}{\dfrac{1}{2(2)}+\dfrac{1}{4-3}}=\frac{5}{\frac{1}{4}+1}=4$$

معادله ی خط مماس: $y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-3=4(x-2)\Rightarrow y=4x-5$

$$\left.\begin{aligned}y&=4x-5\\ y&=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4x-5=x\Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

۴) آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به متغیر x روی بازه ی $[0,3]$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر است ؟ (تجربی – ۸۸)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{9}$

جواب

می دانیم آهنگ متوسط تابع $y=f(x)$ نسبت به متغیر x روی بازه ی $[a,b]$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ لحظه ای تغییر آن در $x=c$ برابر $f'(c)$ است .

$$f(x)=\sqrt{x^2+16}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$$

$$f'(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}^2+16}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

۵) در تابع با ضابطه ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$ مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ ، کدام است ؟ (تجربی– ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چــون رنده ز کــار خــویش بی‌بهــره مباش
تعلیــم ز اره گیــــر در عقــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

جواب	$f(x)=x\sqrt{x}+\lvert x-1\rvert \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}+x-1 & x\ge 1\\ x\sqrt{x}-x+1 & x<1\end{cases}$ $\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}+x-1 & x\ge 1\\ x^{\frac{3}{2}}-x+1 & x<1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+1 & x\ge 1\\ \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-1 & x<1\end{cases}$ $\Rightarrow f'_{+}(1)+3f'_{-}(1)=\frac{5}{2}+3\left(\frac{1}{2}\right)=4$
۶	اگر $f(x)=\sqrt{2\sin \pi x^2}$ ، آنگاه $f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ کدام است ؟ (تجربی – ۸۵) ۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\pi\sqrt{2}$ ۴) $\pi\sqrt{3}$
جواب	$f'(x)=\frac{\cancel{2}(2\pi x)\cos \pi x^2}{\cancel{2}\sqrt{2\sin \pi x^2}} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
۷	مقدار مشتق تابع $y=tg^3x-\cot 2x$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است ؟ (تجربی – ۸۶) ۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۴
جواب	$y=tg^3x-\cot 2x \Rightarrow y'=3\left(1+tg^2x\right)tg^2x+2\left(1+\cot^2 x\right)$ $y'_{\frac{\pi}{6}}=3\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$
۸	در تابع با ضابطه ی $f(x)=\lvert x\rvert.[x]$ مقدار $f'(0^-)-f'(0^+)$ کدام است ؟ (تجربی – ۹۰) ۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲
جواب	$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\begin{cases} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(-1)-0}{x-0}=-1\\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(0)-0}{x-0}=0\end{cases}$ $\Rightarrow f'(0^-)-f'(0^+)=-1$
۹	اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $x<\frac{\pi}{2}$ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۵)

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چـون رنده ز کـار خـویش بی‌بهـره مباش
تعلیـم ز اره گیـــر در عقـــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

۱) $\frac{۱}{\sin x}$　۲) $\frac{۱}{\cos x}$　۳) $\sin x$　۴) $\cos x$

جواب

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

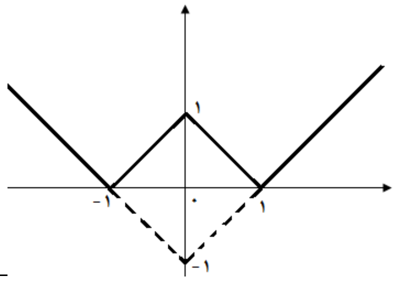
$$\begin{cases}(f(\tan x))'=(\tan x)'\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}\right)=\frac{۱}{\cos^۲ x}\times|\cos x|=\frac{۱}{\cos x}\\ |x|<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۱۰ تعداد نقاط مشتق پذیری تابع $f(x)=\big||x|-۱\big|$ بر روی R کدام است ؟ (ریاضی – ۸۵)

۱) ۰　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

جواب

ابتدا تابع $y=|x|-۱$ و سپس تابع $f(x)=\big||x|-۱\big|$ را رسم می کنیم ، داریم :



که با توجه به شکل نقاط $x=۱$ ، $x=۰$ ، $x=-۱$ نقاط مشتق ناپذیر هستند .

۱۱ مشتق تابع $y=f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$ در نقطه ی $x=۱$ برابر -۲ است ، شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه ی به طول ۲ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۴}$　۲) $\frac{۱}{۳}$　۳) ۳　۴) ۴

جواب

طبق قاعده زنجیره ای می توان نوشت :

$$y=fog(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

$$y=f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)\Rightarrow y'=\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{(۶x+۲)^۲}}f'\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$$

$$\Rightarrow y'_{(۱)}=\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}f'(۲)=\frac{۱}{۲}f'(۲)=-۲\Rightarrow f'(۲)=-۴$$

شیب خط مماس در $x=۲$ 　$\Rightarrow$ شیب خط قائم در $x=۲$ $=\frac{۱}{۴}$

۱۲ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و خط به معادله ی $۴y+۵y=a$ قائم بر نمودار تابع $f^{-۱}$ باشد ، آن گاه a کدام است ؟ (ریاضی – ۸۶)

۱) ۳۴　۲) ۳۶　۳) ۴۶　۴) ۴۸

جواب

« اگر داشته باشیم : $f(a)=b$ آن گاه $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ در این حالت توجه کنید که وقتی $(a,b)\in f$ بنابراین $(b,a)\in f^{-1}$ خواهد بود . »

خط با شیب $\dfrac{-5}{4}$ قائم بر نمودار $f^{-1}(x)$ می باشد بنابراین شیب خط مماس یا همان $\left(f^{-1}\right)'(x)$ برابر می باشد . اگر فرض کنیم $(x,y)\in f$ خواهیم داشت :

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{4}{5}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{4}\Rightarrow 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x=4\rightarrow y=6$$

بنابراین نقطه ی $(4,6)$ روی f و یا نقطه ی $(6,4)$ روی f^{-1} شرایط مسئله برقرار است . حال چون خط $4y+5x=a$ بر f^{-1} قائم است باید نقطه ی $(6,4)$ را در آن قرار می دهیم :

$$4(4)+5(6)=a\Rightarrow a=46$$

۱۳

اگر $x>1$ ، $f(x)=x^3-2x$ و خط به معادله ی $10y=x+m$ مماس بر نمودار f^{-1} باشد ، آنگاه m کدام است ؟ (ریاضی – ۸۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

جواب

می توان نوشت : $10y=x+m\Rightarrow y=\dfrac{1}{10}x+\dfrac{m}{10}\Rightarrow$ شیب $=\dfrac{1}{10}$

در اینصورت با توجه به مشتق تابع معکوس داریم :

$$\frac{1}{10}=\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{3a^2-2}$$

$$\Rightarrow 3a^2=12\Rightarrow a^2=4\Rightarrow\begin{cases}a=-2 & \text{(غیر قابل قبول)}\\ a=2 & \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=2}y=2^3-2(2)=4\Rightarrow A'(4,2)\in f^{-1}$$

با توجه به معادله ی خط مماس و نقطه ی بدست آمده :

$$10\times 2=4+m\Rightarrow m=16$$

۱۴

تابع با ضابطه ی $y=x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در صفــــــــر چگونه است ؟ (ریاضی – ۸۷)

۱) پیوسته و مشتق پذیر است . ۲) پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست .

۳) نه پیوسته و نه مشتق پذیر است . ۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق پذیر است .

جواب

با توجه به دامنه تابع $\left(D_f=\mathbb{R}\right)$ در نقطه ی $x=0$ پیوسته است .

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x & x<0\end{cases}$$

۳۶

پس تابع در $x=0$ پیوسته است .
$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(0)=0 \\ f'_-(0)=0 \end{cases}$$

۱۵ تابع با ضابطه ی $f(x)\begin{cases} x^2 & x \text{ گویا} \\ 0 & x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد ؟ (ریاضی – ۸۸)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) بی شمار   ۴) هیچ نقطه

جواب
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$$

این تابع فقط در $x=0$ پیوسته است .

۱۶ مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x=-8$ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۸)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱   ۴) ۲

جواب
$$y=\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^2 \Rightarrow y'=2\left(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)$$
$$y'(-8)=2\left(-\frac{16}{64}-\frac{2}{3(-2)}\right)(-2-4)=-1$$

۱۷ مشتق چپ تابع با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه ی $x=0$ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

جواب
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{\sqrt{2}x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۸ به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه های $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=ax^2+4x$ بر هم مماسند ؟ (ریاضی – ۹۰)

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

جواب
شرط آن که دو منحنی برهم مماس باشند ، آن است که معادله ی تلاقی آنها دارای ریشه مکرر (مضاعف) باشند :
$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+1=ax^2+4x\Rightarrow (a-1)x^2+4x-1=0$$
شرط ریشه ی مضاعف : $\Delta=0\Rightarrow 16-4(a-1)=0\Rightarrow a=-3$

۱۹ خطی که دو نقطه به طول های ۱ و ۱ – از منحنی به معادله ی $y=x^3+ax^2+2x$ را به هم وصل می کند ، بر این منحنی مماس است ، a کدام است ؟ (ریاضی – ۹۰)

۱) ۱، −۱ ۲) ۲، −۱ ۳) ۲،۱ ۴) ۱، −۲

جواب

گزینه ۱

ابتدا معادله ی خطی که از نقاط به طول $x=1$ و $x=-1$ می گذرد را می نویسیم :

$$A\begin{vmatrix}-1\\a-3\end{vmatrix} \quad , \quad B\begin{vmatrix}1\\a+3\end{vmatrix} \Rightarrow m_{AB}=\frac{(a+3)-(a-3)}{1-(-1)}=3$$

$$y-y_B=m_{AB}(x-x_B)\Rightarrow y-(a+3)=3(x-1)$$

$$\Rightarrow y=3x+a$$

معادله ی تلاقی این خط و تابع داده شده ، بایـــــــد ریشه ی مضاعف داشته باشد :

$$\begin{cases}y=3x+a\\y=x^3+ax^2+2x\end{cases}\Rightarrow x^3+ax^2+2x=3x+a$$

$$\Rightarrow x^3+ax^2-x-a=0\Rightarrow x^2(x+a)-(x+a)=0$$

$$\Rightarrow (x+a)(x+1)(x-1)=0$$

برای اینکه معادله ریشه ی مضاعف داشته باشد باید : $a=1$ یا $a=-1$

$$\begin{cases}a=-1\Rightarrow (x+1)^2(x-1)=0\Rightarrow \quad x=-1 & \text{ریشه ی مضاعف}\\a=1\Rightarrow (x-1)^2(x+1)=0\Rightarrow \quad x=1 & \text{ریشه ی مضاعف}\end{cases}$$

۲۰

تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(x)=|x^3-x|$ روی بازه ی $[-1,2]$ کدام است ؟ (ریاضی – ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

جواب

گزینه ۲

توجه : در توابع قدر مطلقی $y=|f(x)|$ که f چند جمله ای است نقاط بحرانی از حل معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ در نقاط درونی بازه داده شده به دست می آید .

نقاط بحرانی عبارتند از نقاطی که مشتق صفر است و یا مشتق تعریف نشده است .

$$\begin{cases}x^3-x=0\rightarrow x(x-1)(x+1)=0\rightarrow x=0,1,-1\xrightarrow{x\in(-1,2)}x=0,1\\y'=3x^2-1\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

پس تابع در چهار نقطه ۱، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، ۰ و $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ بحرانی است .

۲۱

به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه های $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=ax^2+4x$ بر هم مماسند ؟ (ریاضی – ۹۰)

۱) −۴ ۲) −۳ ۳) −۲ ۴) −۱

جواب

شرط آن که دو منحنی برهم مماس باشند ، آن است که معادله ی تلاقی آنها دارای ریشه مکرر (مضاعف) باشند :

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} f(x)=g(x)\Rightarrow x^{۲}+۱=ax^{۲}+۴x\Rightarrow (a-۱)x^{۲}+۴x-۱=۰$$

شرط ریشه ی مضاعف : $\Delta=۰\Rightarrow ۱۶-۴(a-۱)=۰\Rightarrow a=-۳$

۲۲ مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله ی $y=\dfrac{-۲}{x^{۲}+۳}$ رو به بالا باشد ، به کدام صورت است ؟ (ریاضی – ۹۰)

۱) $|x|<۱$ ۲) $|x|>\sqrt{۲}$ ۳) $|x|<۲$ ۴) $|x|>\sqrt{۳}$

جواب

$$y=\frac{-۲}{x^{۲}+۳}\Rightarrow y'=\frac{۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}\Rightarrow y''=\frac{۴(x^{۲}+۳)^{۲}-۲(۲x)(x^{۲}+۳)(۴x)}{(x^{۲}+۳)^{۴}}$$

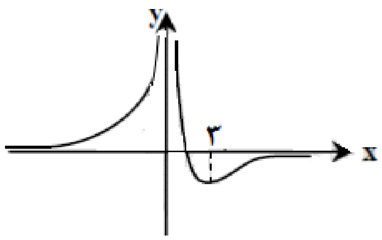
$$=\frac{\cancel{(x^{۲}+۳)}(۴x^{۲}-۱۶x^{۲}+۱۲)}{(x^{۲}+۳)^{\cancel{۴}}}=\frac{-۱۲x^{۲}+۱۲}{(x^{۲}+۳)^{۳}}$$

چون جهت تقعر باید روبه بالا باشد پس لازم است : $y''>۰$. با توجه به مثبت بودن مخرج کسر به دست آمده در y'' داریم :

$$y''>۰\Rightarrow -۱۲x^{۲}+۱۲>۰\Rightarrow x^{۲}<۱\Rightarrow |x|<۱$$

۲۳ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\dfrac{ax+۳}{x^{۲}+bx}$ است .

دوتایی (a,b) کدام است ؟ (ریاضی – ۹۰)



۱) $(-۲,-۲)$ ۲) $(۲,۰)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(۲,۲)$

جواب

با توجه به نمودار ، تابع در $x=0$ دارای مجانب قائم با انفصال مضاعف است ، پس باید $x=0$ ریشه ی مضاعف مخرج باشد و در نتیجه : $\boxed{b=۰}$

ضابطه تابع به صورت $f(x)=\dfrac{ax+۳}{x^{۲}}$ در می آید . چون $x=۳$ طول می نیمم نسبی تابع است و مشتق در این نقطه موجود است ، لذا $y'(۳)=۰$

$$y'=\frac{ax^{۲}-۲x(ax+۳)}{x^{۴}}=\frac{ax-۲(ax+۳)}{x^{۳}}=\frac{-ax-۶}{x^{۳}}$$

$$y'(۳)=۰\Rightarrow -a(۳)-۶=۰\Rightarrow \boxed{a=-۲}$$

۲۴ تابع با ضابطه ی $f(x)=\left[\dfrac{۱}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق پذیر است ؟ (ریاضی – ۹۱)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۳۹

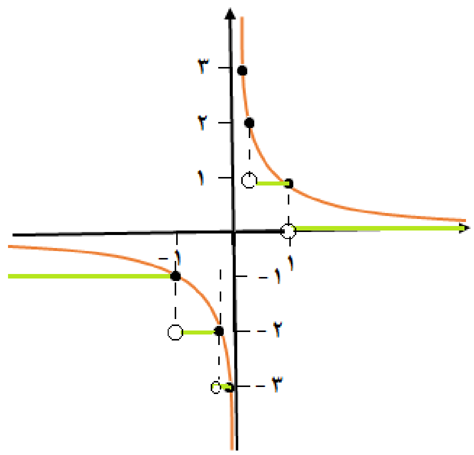
جواب

گزینه ۴

تابع $[f]$ در بازه ای مشتق پذیر است که در آن بازه پیوسته باشد .

می توان با رسم شکل در مورد پیوستگی این تابع بحث کرد .

با توجه به شکل ، تابع در فاصله $x>1$, $x<-1$ پیوسته است .



۲۵ اگر $g(x)=\frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ و $f(x)=\sin^2 \pi x$ مشتق تابع fog به ازای x = 2 کدام است ؟ (ریاضی – ۹۱)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}\pi$ ۴) $\frac{5}{8}\pi$

جواب

با توجه به تعریف مشتق تابع مرکب می توان نوشت :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))$$

چون مقدار $g(2)=\frac{1}{4}\sqrt{5(2)-9}=\frac{1}{4}$ بنابراین :

$$(fog)'(2)=g'(2)f'\left(\frac{1}{4}\right) \quad (*)$$

با مشتق گیری از توابع f و g خواهیم داشت :

$$f(x)=\sin^2 \pi x \Rightarrow f'(x)=2\pi \sin \pi x \cos \pi x$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=2\pi \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\pi$$

$$g(x)=\frac{1}{4}\sqrt{5x-9} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2\sqrt{5x-9}}\right) \Rightarrow g'(2)=\frac{5}{8}$$

با جایگذاری در رابطه $(*)$ حاصل مشتق به دست می آید :

$$(fog)'(2)=g'(2)f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}\times\pi=\frac{5}{8}\pi$$

۲۶ از رابطه ی $x^2y-y^2-2\sqrt{x}+4=0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه ی $(1,2)$ کدام است ؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{8}{6}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{13}{6}$

جواب

ابتدا از دو طرف نسبت به x و y مشتق می گیریم :

$$x^2y-y^2-2\sqrt{x}+4=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2xy+y'x^2-2yy'-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \xrightarrow{(1,2)} 4+y'-4y'-1=0 \Rightarrow y'=1$$

اکنون از تابع $2xy+y'x^2-2yy'-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ دوباره مشتق می گیریم :

$$2xy+y'x^2-2yy'-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 2(y+y'x)+2xy'+y''x^2-2(y'^2+y''y')+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=0$$

$$\xrightarrow[y'=1]{(1,2)} 2(2+1)+2+y''-2(1+2y'')-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y''=\frac{13}{6}$$

۲۷ اگر $f(x)=x^3-x^2+2x$ باشد ، معادله ی خط قائم بر منحنی f^{-1} ، در نقطه ی $x=2$ واقع بر آن کدام است ؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) $y+3x=7$ ۲) $y-3x=-5$ ۳) $3y+x=5$ ۴) $3y-x=1$

جواب

به کمک تابع معکوس داریم :

$$(2,a)\in f^{-1} \Rightarrow (a,2)\in f \Rightarrow a^3-a^2+2a=2 \Rightarrow a^2(a-1)+2(a-1)=0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a^2+2)=0 \xrightarrow{a^2+2\neq 0} a=1$$

$$(1,2)\in f \quad ; \quad f'(x)=3x^2-2x+2 \Rightarrow f'(1)=3$$

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}=m \Rightarrow m'=-3 \xrightarrow{(2,1)\in f^{-1}} y-1=-3(x-2) \Rightarrow \boxed{y+3x=7}$$

۲۸ نمودار تابع $y=|x|e^{-x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پائین است ؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(2,\infty)$

جواب

به کمک مشتق اول نزولی بودن و به کمک مشتق دوم جهت تقعر تابع معلوم می گردد :

$$y=|x|e^{-x}=\begin{cases} xe^{-x} & x\ge 0 \\ -xe^{-x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} (1-x)e^{-x} & x>0 \\ (-1+x)e^{-x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}-(0,1) \Leftrightarrow$$ (۱) نزولی

$$y'=\begin{cases} (1-x)e^{-x} & x>0 \\ (-1+x)e^{-x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y''=\begin{cases} (-2+x)e^{-x} & x>0 \\ (2-x)e^{-x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow$$ (۲) تقعر رو به پایین

$$(1),(2) \Rightarrow (1,2)$$ نزولی و رو به پایین

۲۹ اگر $f(x)=Max\{|2x|,|x+1|\}$ باشد ، کمترین مقدار تابع f (x) کدام است ؟ (ریاضی – ۹۲)

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چـون رنده ز کـار خـویش بی‌بهـره مباش
تعلیـم ز اره گیـــر در عقـــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش

راه زندگی

تهیه و تنظیم مطالب : داراب حسن پور

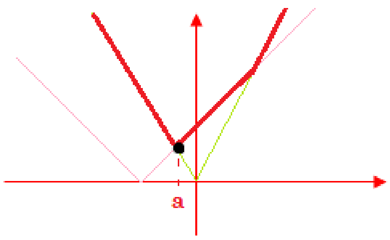
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

جواب

گزینه ۲

به مفهوم $Max\{a,b\}$ توجه کنید : $Max\{a,b\}=\begin{cases} a & , \ a\ge b \\ b & , \ a<b \end{cases}$

این موضوع را می توانیم برای دو تابع نیز تعمیم دهیم . برای رسم $f(x)=Max\{|۲x|,|x+۱|\}$ ابتدا دو تابع $y_۱=|۲x|$ و $y_۲=|x+۱|$ را رسم می کنیم سپس با توجه به تعریف Max در فاصله های یکسان تابعی که بالاتر قرار دارد را بر می گزینیم :



مطابق شکل مقابل نمودار تابع f(x) قسمت پر رنگ است که کمترین مقدار این تابع در فاصله $(۱,۰)$ و درنقطه ی a اتفاق می افتد .

$$|۲x|=|x+۱| \xrightarrow{x\in(-۱,۰)} -۲x=x+۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

$$\min f=f\left(\frac{-۱}{۳}\right)=Max\left\{\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right\}=\frac{۲}{۳}$$

۳۰

تقعر نمودار $y=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}}$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است ، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ∞

جواب

گزینه ۱

زمانی که مشتق دوم (y'') منفی باشد جهت تقعر منحنی رو به پایین است .

$$y=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y'=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{۴}{۹}x^{\frac{-۲}{۳}}+\frac{۸}{۹}x^{\frac{-۵}{۳}}=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+\frac{۲}{\sqrt[۳]{x^۵}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+\frac{۲}{x\sqrt[۳]{x^۲}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{x+۲}{x\sqrt[۳]{x^۲}}\right)$$

$$y''=\frac{۴}{۹}\left(\frac{x+۲}{x\sqrt[۳]{x^۲}}\right)=۰ \Rightarrow x=-۲$$

برای تعیین علامت مشتق دوم ریشه مخرج $(x=۰)$ نیز مورد نیاز است (که در آن مشتق ناموجود است .)

x		-۲		۰	
y''	+		$-$	‖	+
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

۴۲

	بنابراین تقعر منحنی در بازه ی $(-۲,۰)$ رو به پایین است : $(-۲,۰)=(a,b)\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\b=۰\end{cases}\to b-a=۲$
۳۱	اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx+۴ & x\ge -۲\\ x^۳-x & x<-۲\end{cases}$ ، همواره مشتق پذیر باشد $f(۱)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷) ۱) -۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲
جواب	گزینه ۲ ابتدا شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to -۲^+}(ax^۲+bx-۴)=\lim\limits_{x\to -۲^-}(x^۳-x)\Rightarrow ۴a-۲b+۴=-۸+۲\Rightarrow ۲a-b=-۵$ و حالا مشتق پذیری : $f'(x)=\begin{cases}۲ax+b\\ ۳x^۲-۱\end{cases}\xrightarrow{f'_-(۲)=f'_+(۲)}۴a+b=۱۱$ $a=-۳\quad ,\quad b=-۱$ $f(۱)=-۳(۱)^۲+(-۱)(۱)+۴=۰$
۳۲	شیب خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $\sqrt{۷x^۲-۲y}+y^۲=۱۰$ ، در نقطهٔ $(۱,۳)$ کدام است ؟ (تجربی – ۹۷) ۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$
جواب	گزینه ۱ از دو طرف معادلهٔ $\sqrt{۷x^۲-۲y}+y^۲=۱۰$ مشتق می گیریم : $\sqrt{۷x^۲-۲y}+y^۲=۱۰\Rightarrow\frac{۱۴x-y'}{\sqrt{۷x^۲-۲y}}+۲yy'=۰\xrightarrow{(۱,۳)}\frac{۱۴-۲y'}{۲}+۶y'=۰$ $\Rightarrow ۱۴-۲y'+۱۲y'=۰\Rightarrow y'=\frac{-۷}{۵}$ و لذا شیب خط قائم عکس و قرینهٔ آن یعنی $\frac{۵}{۷}$ است .

چون تیشه مباش وجمله زی خودمتراش
چــون رنده ز کــار خــویش بی‌بهــره مباش
تعلیــم ز اره گیـــــر در عقـــل معـــاش
چیزی سوی خود می‌کش و چیزی می‌پاش
راه زندگی