



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

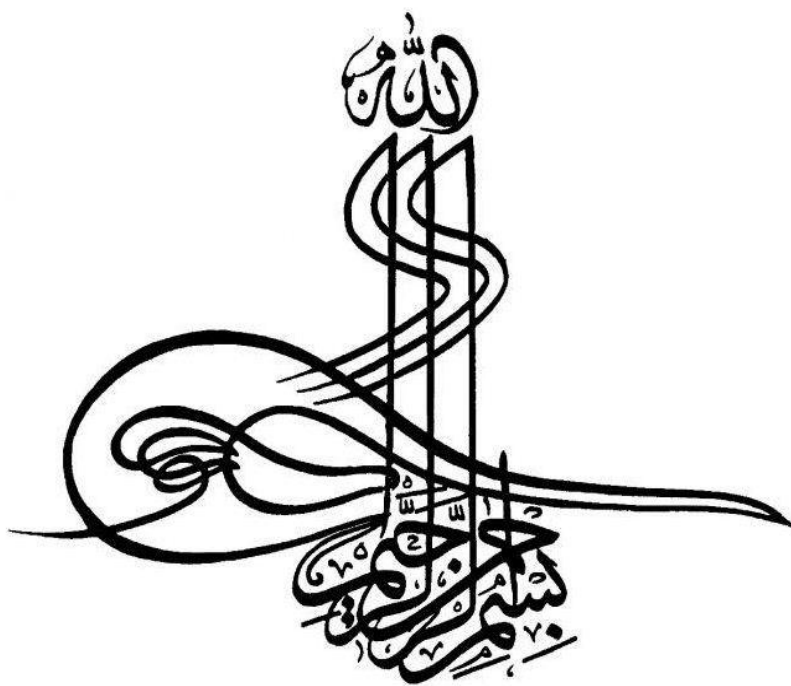
دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)



مشتق

سال سوم تجربی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فهرست

صفحه

عنوان

۱ فرمول های مشتق

۱-۱ فرمول های مقدماتی مشتق

۱-۲ مشتق توابع رادیکالی

۱-۳ مشتق توابع مثلثاتی

۱-۴ مشتق مرتبه دوم

۱-۵ شیب خط مماس بر منحنی

۲ آهنگ تغییر

۳-۱ نمو تابع و نمو متغیر

۳-۲ آهنگ متوسط تغییر

۳-۳ آهنگ لحظه ای (آنی) تغییر تابع

۳ تعریف مشتق

۳-۱ تعبیر هندسی مشتق

۳-۲ حد هایی که شبیه تعریف مشتق هستند

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف **حبیب هاشمی**
کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس
درب‌گزاری کلاس‌های کنکور و دبیر رسمی آموزش و پرورش با شماره
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

۱ فرمول های مشتق

۱-۱ فرمول های مقدماتی مشتق

$۱) \quad \boxed{y = a \rightarrow y' = 0}$ $y = 3 \rightarrow y' = 0$ $y = \sqrt{2} \rightarrow y' = 0$ $y = \frac{\pi}{3} \rightarrow y' = 0$	$۲) \quad \boxed{y = ax \rightarrow y' = a}$ $y = \sqrt{2}x \rightarrow y' = \sqrt{2}$ $y = -x \rightarrow y' = -1$ $y = \frac{1}{3}x \rightarrow y' = \frac{1}{3}$ $y = \pi x \rightarrow y' = \pi$
$۳) \quad \boxed{y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}}$ $y = x^4 \rightarrow y' = 4x^3$ $y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$۴) \quad \boxed{y = u \pm v \pm w \pm \dots \rightarrow y' = u' \pm v' \pm w'}$ $y = x^4 - 2x + 5 \rightarrow y' = 4x^3 - 2$
مشتق حاصلضرب $۵) \quad \boxed{y = (u) \times (v) \rightarrow y' = (u)' \times (v) + (v)' \times (u)}$ $y = (x^2 - 4)(x^3 - 2x + 1) \rightarrow$ $y' = (2x)(x^3 - 2x + 1) + (3x^2 - 2)(x^2 - 4)$	حالت خاص ضرب تابع $\times$ عدد $\boxed{y = au \rightarrow y' = a(u)'} \quad y = 3(x^4 - 2x) \rightarrow y' = 3(4x^3 - 2)$
مشتق تقسیم $۶) \quad \boxed{y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{(u)' \times (v) - (v)'(u)}{(v)^2}$ $y = \frac{x-4}{1-2x} \rightarrow y' = \frac{(1)(1-2x) - (-2)(x-4)}{(1-2x)^2}$	حالت خاص تقسیم ۱ $\boxed{y = \frac{u}{a} \rightarrow y' = \frac{(u)'}{a}}$ $y = \frac{x^2 - 4}{3} \rightarrow y' = \frac{2x}{3}$ $y = \frac{x}{4} \rightarrow y' = \frac{1}{4}$
حالت خاص تقسیم ۲ $y = \frac{a}{u} \rightarrow y' = \frac{-a(u)'}{(u)^2}$ $y = \frac{2}{x^3 + 2x} \rightarrow y' = -\frac{2(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x)^2}$	مشتق توان $۷) \quad \boxed{y = u^n \rightarrow y' = n(u)^{n-1} \cdot (u)'}$ $y = (x^2 - 3x)^5 \rightarrow$ $y' = 5(x^2 - 3x)^4(2x - 3)$

$$\begin{aligned} ۸) \quad y &= \frac{۳۶}{x^۲} & x &= \sqrt[۲]{۱۲} \\ y' &= \frac{-۳۶ \times (۲x)}{(x^۲)^۲} = \frac{-۷۲x}{x^۴} = \frac{-۷۲}{x^۳} \xrightarrow{x=\sqrt[۲]{۱۲}} y' = \frac{-۷۲}{(\sqrt[۲]{۱۲})^۳} = \frac{-۷۲}{۱۲} = -۶ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۹) \quad y &= \frac{(۲-x)^۲}{x} & x &= ۱ \\ y' &= \frac{(۲(۲-x)(-۱))(x) - (۱)(۲-x)^۲}{(x)^۲} \xrightarrow{x=۱} y' = -۳ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۰) \quad y &= \frac{x^۳}{x^۲+۱} & x &= -۱ \\ y' &= \frac{(۳x^۲)(x^۲+۱) - (۲x)(x^۳)}{(x^۲+۱)^۲} \xrightarrow{x=-۱} y' = +۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۱) \quad y &= (۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}} & x &= ۴ \\ y' &= -\frac{۱}{۲}(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}-۱}(۲) = -(۲x+۱)^{-\frac{۳}{۲}} \\ &\xrightarrow{x=۴} y' = -(۲(۴)+۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -(۹)^{-\frac{۳}{۲}} = -(۳^۲)^{-\frac{۳}{۲}} = -(۳)^{-۳} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۲) \quad y &= (x-۱)(x+۱)(x^۲+۱) & x &= ۲ \\ y &= (x^۲-۱)(x^۲+۱) = x^۴-۱ \rightarrow y' = ۴x^۳ \xrightarrow{x=۲} y' = ۴(۲)^۳ = ۳۲ \end{aligned}$$

$$۱۳) \quad y = \frac{۷x^۲+۶x-۴}{۹} \rightarrow y' = \frac{۱۴x+۶}{۹}$$

$$۱۴) \quad y = ۴(x^۳-۲x-۱) \rightarrow y' = ۴(۳x^۲-۲)$$

$$\begin{aligned} ۱۵) \quad y &= \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۲}{۲} - x + \sqrt{x} \\ y' &= \frac{۳x^۲}{۳} - \frac{۲x}{۲} - ۱ + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow y' = x^۲ - x - ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۶) \quad y &= (۴x^۲-۱)^۵(۲-x^۲) \\ y' &= \underbrace{(۵(۴x^۲-۱)^۴(۸x))}_{\text{مشتق اولی}} (۲-x^۲) + (-۲x)(۴x^۲-۱)^۵ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۷) \quad y &= \frac{(۲x-۱)^۲}{۲x^۲} \\ y' &= \frac{(۲(۲x-۱)(۲))(۲x^۲) - (۴x)(۲x-۱)^۲}{(۲x^۲)^۲} \end{aligned}$$

۲-۱ مشتق توابع رادیکالی

(I) بدون فرجه (فرجه ۲) : ابتدا مشتق می‌زنه تو سر رادیکال

$$1) \quad y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$$

میشه $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ بعد می‌زنه تو سر عبارت زیر رادیکال میشه u'

$$y = \sqrt{2x^2 - 1} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 1}} \times 4x$$

(II) فرجه‌دار : ابتدا به صورت توان می‌نویسیم

$$2) \quad y = \sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}$$

$$y' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} \times u' = \frac{nu'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

سپس از قانون مشتق توان استفاده می‌کنیم

$$y = \sqrt[2]{(vx+1)^2} \rightarrow y = \frac{2}{2} \rightarrow y' = \frac{2}{2} (vx+1)^{\frac{2}{2}-1} \times (v)$$

مشتق توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

۱) $y = \sqrt{4-x^2} \quad x = \sqrt{3}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \times (-2x) \xrightarrow{x=\sqrt{3}} y' = \frac{1}{2\sqrt{4-3}} \times (-2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

۲) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x = 4$

$$y' = \frac{1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1}{(\sqrt{x})^2} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{-1}{16}$$

۳) $y = \frac{x}{\sqrt{x}+2} \quad x = 1$

$$y' = \frac{(1)(\sqrt{x}+2) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(x)}{(\sqrt{x}+2)^2} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{5}{18}$$

۴) $y = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad x = 1$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \times \left(\frac{(2x)(1+x^2) - (x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} \right) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$۵) \quad y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} \quad x = \sqrt{3}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \times 2x \right) \xrightarrow{x=\sqrt{3}} y' = \frac{1}{4}$$

$$۶) \quad y = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad x = ۴$$

$$y' = \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(x - \sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{4}$$

$$۷) \quad y = x\sqrt{۴ - x^2} \quad x = \sqrt{3}$$

$$y' = (1)\sqrt{4 - x^2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \times (-2x) \right) \times x \xrightarrow{x=\sqrt{3}} y' = -2$$

$$۸) \quad y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \quad x = ۵$$

$$y' = \frac{(2x)(\sqrt{x-1}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times 1 \right) (x^2)}{(\sqrt{x-1})^2} \xrightarrow{x=5} y' = \frac{۵۵}{۱۶}$$

$$۹) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x \quad x = ۹$$

$$y' = \frac{-1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1}{(\sqrt{x})^2} + 1 \xrightarrow{x=9} y' = \frac{۵۳}{۵۴}$$

$$۱۰) \quad y = x\sqrt{x} + x - 1 \quad x = 1$$

$$y' = (1)(\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \right) (x) + 1 \xrightarrow{x=1} y' = \frac{۵}{2}$$

$$۱۱) \quad y = \sqrt[3]{x} + ۴\sqrt[5]{x^2} \quad x = -1$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{2}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 4 \times \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} \xrightarrow{x=-1} y' = -\frac{19}{15}$$

$$۱۲) \quad y = \sqrt[3]{vx^2} + \sqrt[5]{2x^2}$$

$$y = (vx^2)^{\frac{1}{3}} + (2x^2)^{\frac{1}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{3}(vx^2)^{\frac{1}{3}-1} \times 14x + \frac{1}{5}(2x^2)^{\frac{1}{5}-1}(2x)$$

$$۱۳) \quad y = \sqrt[۴]{x\sqrt{x}} \quad x = 1$$

$$y = \sqrt[۴]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[۴]{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{8}} = x^{\frac{3}{8}} \rightarrow y' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{8}} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{3}{8}$$

$$۱۴) \quad y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 2} \quad x = 64$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(\sqrt[3]{x} + 2) - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} x^{-\frac{1}{3}}\right)(\sqrt{x})}{(\sqrt[3]{x} + 2)^2} \xrightarrow{x=64} y' = \frac{5}{864}$$

$$۱۵) \quad y = \frac{\sqrt[5]{1-x^2}}{6} \quad x = \sqrt{2}$$

$$y' = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{5}}}{6} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{5}(1-x^2)^{-\frac{4}{5}} \times (-2x)}{6} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} y' = \frac{-\sqrt{2}}{15}$$

$$۱۶) \quad y = \sqrt{3x-1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \times 3$$

$$۱۷) \quad y = \sqrt[5]{(x^2+x)^2}$$

$$y = (x^2+x)^{\frac{2}{5}} \rightarrow y' = \frac{2}{5}(x^2+x)^{\frac{2}{5}-1}(2x+1) \rightarrow y' = \frac{2}{5}(x^2+x)^{-\frac{3}{5}}(2x+1)$$

$$۱۸) \quad y = \sqrt{\frac{1}{x}} \quad x = 4$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \times \left(\frac{1}{x}\right)' \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \times \left(-\frac{1 \times 1}{x^2}\right) \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \times \left(-\frac{1}{4^2}\right) = -\frac{1}{16}$$

$$۱۹) \quad y = x\sqrt{x}$$

$$y' = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \times x$$

$$۲۰) \quad y = \sqrt{2x} \quad x = 2$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \times 2 \xrightarrow{x=2} y' = \frac{1}{2}$$

$$۲۱) \quad y = \sqrt[3]{4x} \quad x = 2$$

$$y = (4x)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{3}(4x)^{-\frac{2}{3}} \times 4 \xrightarrow{x=2} y' = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \times 4$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3} \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{3}$$

$$۲۲) \quad y = (\sqrt{x} + 1)^2 \quad x = 4$$

$$y' = 2(\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right) \xrightarrow{x=4} y' = 2(2) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{2}$$

۳-۱ مشتق توابع مثلثاتی

(I) بدون توان (توان یک): مشتق می‌زنه تو سر سینوس میشه کسینوس بعد مشتق می‌زنه تو سر کمان

$$۱) \quad y = \sin u \rightarrow y' = (\cos u) \times (u)'$$

$$y = \sin(\Delta x^r - ۱) \rightarrow y' = \cos(\Delta x^r - ۱) \times (۱ \cdot x)$$

$$۲) \quad y = \cos u \rightarrow y' = (-\sin u) \times (u)'$$

$$y = r \cos(x^r - x) \rightarrow y' = r \times (-\sin(x^r - x)) \times (rx^r - ۱)$$

$$۳) \quad y = \tan u \rightarrow y' = (۱ + \tan^2 u) \times (u)'$$

$$y = r \tan \sqrt{x} \rightarrow y' = r \times (۱ + \tan^2 \sqrt{x}) \times \left(\frac{1}{r\sqrt{x}} \times ۱ \right)$$

$$۴) \quad y = \cot u \rightarrow y' = -(۱ + \cot^2 u) \times (u)'$$

$$y = r \cot \left(rx^r - \frac{\pi}{r} \right) \rightarrow y' = r \times - \left(۱ + \cot^2 \left(rx^r - \frac{\pi}{r} \right) \right) \times (rx)$$

(II) مثلثاتی توان دار:

ضریب، توان، مشتق کمان

مشتق بگیر کم کن توان

$$۱) \quad y = a \sin^m u \rightarrow y' = \underbrace{a}_1 \cdot \underbrace{m}_2 \cdot \underbrace{u'}_3 \underbrace{\cos u}_4 \cdot \underbrace{\sin^{m-1} u}_5$$

$$y = r \sin^{\Delta} rx^r \rightarrow y' = r \times \Delta (\Delta x) \cos rx^r \cdot \sin^{\Delta-1} rx^r$$

$$۲) \quad y = a \cos^m u \rightarrow y' = a \cdot mu' (-\sin u) \cos^{m-1} u$$

$$y = -r \cos^r \sqrt{x} \rightarrow y' = (-r) \times r \left(\frac{1}{r\sqrt{x}} \right) (-\sin \sqrt{x}) \cos^{r-1} \sqrt{x}$$

$$۳) \quad y = a \tan^m u \rightarrow y' = am u' (۱ + \tan^2 u) \tan^{m-1} u$$

$$y = r \tan^r (\pi - x^r) \rightarrow y' = r \times r (-rx) (۱ + \tan^2 (\pi - x^r)) \tan^{r-1} (\pi - x^r)$$

$$۴) \quad y = a \cot^m u \rightarrow y' = am u' (- (1 + \cot^r u)) \cot^{m-1} u$$

$$y = r \tan^s \left(\frac{1}{x} \right) \rightarrow y' = r \times s \left(\frac{-1}{x^2} \right) \left(- \left(1 + \cot^r \left(\frac{1}{x} \right) \right) \right) \cot^s \left(\frac{1}{x} \right)$$

مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$۱) \quad y = \tan^r x + \sin \sqrt{x}$$

$$y' = (1 + \tan^r x) \times r + (\cos \sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1$$

$$۲) \quad y = \frac{r \cos x}{\sin x + r} \rightarrow y' = \frac{(r \cos x)' (\sin x + r) - (\sin x + r)' (r \cos x)}{(\sin x + r)^2}$$

$$y' = \frac{r(-\sin x) \cdot (\sin x + r) - ((\cos x)(r \cos x))}{(\sin x + r)^2}$$

$$۳) \quad y = \tan^{\frac{x}{r}} \rightarrow y' = 1 \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{x} \times \left(1 + \tan^r \frac{x}{r} \right) \left(\tan^r \frac{x}{r} \right)$$

$$۴) \quad y = \sin^r x + \cos^r x$$

$$y' = 1 \times r \times 1 (\cos x) (\sin^r x) + 1 \times r \times 1 \times (-\sin x) (\cos^r x)$$

$$۵) \quad y = \sqrt[r]{1 + \cos^r x} \rightarrow y = (1 + \cos^r x)^{\frac{1}{r}}$$

$$y' = \frac{1}{r} (1 + \cos^r x)^{\frac{1}{r}-1} (1 + \cos^r x)' \rightarrow y' = \frac{1}{r} (1 + \cos^r x)^{\frac{1-r}{r}} (1 \times r \times 1 (-\sin x) (\cos^r x))$$

$$۶) \quad y = \frac{\sin x - \cos x}{r \cos x + r} \rightarrow y' = \frac{(\sin x - \cos x)' (r \cos x + r) - (r \cos x + r)' (\sin x - \cos x)}{(r \cos x + r)^2}$$

$$y' = \frac{(\cos x - (-\sin x))(r \cos x + r) - (r(-\sin x))(\sin x - \cos x)}{(r \cos x + r)^2}$$

$۷) \quad y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$ $y' = \frac{((1 + \tan^r x) \times (1))(1 + \tan x) - ((1 + \tan^r x)(1))(\tan x)}{(1 + \tan x)^2}$ جایگذاری $x = \frac{\pi}{r}$	$x = \frac{\pi}{r}$ جواب: $4 - 2\sqrt{3}$
$۸) \quad y = \frac{x^r - \sin^r x}{1 + \cos^r x}$ $y' = \frac{(rx - 1 \times r \times 1 (\cos x) \times (\sin x))(1 + \cos^r x) - (1 + \cos^r x)' (x^r - \sin^r x)}{(1 + \cos^r x)^2}$ جایگذاری $x = \pi$	$x = \pi$ جواب: π

$9) \quad y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \times (1 \times 2 \times 1 \times \cos x \times \sin x) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{3} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{21}}{14} : \text{جواب}$
$10) \quad y = \sin \sqrt{1 + x^2}$ $y' = (\cos \sqrt{1 + x^2}) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \times 2x \right) \xrightarrow{x = \sqrt{3} \text{ جایگذاری}}$	$x = \sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2 : \text{جواب}$
$11) \quad y = \cos \sqrt[3]{t} = \cos \left(t^{\frac{1}{3}} \right)$ $y' = \left(-\sin t^{\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \right) \xrightarrow{x = \frac{\pi^3}{8} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi^3}{8}$ $-\frac{4}{3\pi^2} : \text{جواب}$
$12) \quad y = \sqrt[5]{1 + \tan x} = (1 + \tan x)^{\frac{1}{5}}$ $y' = \frac{1}{5} (1 + \tan x)^{-\frac{4}{5}} (1 + \tan^2 x) \xrightarrow{x = 0 \text{ جایگذاری}}$	$x = 0$ $\frac{1}{5} : \text{جواب}$
$13) \quad y = \tan^2(\pi x)$ $y' = 1 \times 2 \times \pi \times (1 + \tan^2 \pi x)(\tan \pi x) \xrightarrow{x = \frac{3}{4} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{3}{4}$ $-4\pi : \text{جواب}$
$14) \quad y = \sin \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) + \cos \frac{x}{2}$ $y' = \cos \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\sin \frac{x}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} : \text{جواب}$
$15) \quad y = \sqrt[3]{\pi} \sin^2 \sqrt{t}$ ضریب، توان، مشتق کمان مشتق بگیر کم کن توان $y' = \sqrt[3]{\pi} \times 2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \times 1 \right) (\cos \sqrt{t})(\sin^2 \sqrt{t}) \xrightarrow{x = \frac{\pi^2}{36} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi^2}{36}$ $\frac{27}{8} : \text{جواب}$
$16) \quad y = \sqrt[3]{x} \sin^2 x + 2 \cos^2 x$ $y' = \sqrt[3]{x} \times 2 \times 1 \times (\cos x)(\sin x) + 2 \times 2 \times 1 \times (-\sin x)(\cos^2 x)$ $\xrightarrow{x = \frac{\pi}{6} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi}{6}$ $-\frac{3}{4} : \text{جواب}$
$17) \quad y = \tan^2 x - 2 \cot x$ $y' = 1 \times 2 \times 1 \times (1 + \tan^2 x)(\tan x) - (-2)(1 + \cot^2 x)(1)$ $\xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{3\pi}{4}$ $0 : \text{جواب}$

۱۸) $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$ $y' = \frac{(1 \times 2 \times 1 \times \cos x \times \sin x)(1 + \cos^2 x) - (1 + \cos^2 x)^2}{(1 + \cos^2 x)^2}$ $\xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4} \text{ جایگذاری}} \frac{(1 \times 2 \times 1 \times (-\sin x)(\cos x))(\sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$	$x = \frac{3\pi}{4}$ جواب: $-\frac{8}{9}$
--	--

$$۱۹) \quad y = \frac{\sin x}{1+x} \quad x = .$$

$$y' = \frac{((\cos x)(1))(1+x) - (1)(\sin x)}{(1+x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=.} y' = \frac{(\cos .)(1+.) - (1)(\sin .)}{(1+.)^2} = ۱$$

$$۲۰) \quad y = 4 \sin x \cos 3x \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$y' = 4(\cos x \cdot \cos 3x + (-\sin 3x) \times (3) \times (\sin x))$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} y' = 4 \left(\frac{1}{3} \times (-1) + (-.) \times (3) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$y' = 4 \times \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{3}$$

$$۲۱) \quad y = x + \sin \sqrt{x} \quad x = \pi^2$$

$$y' = 1 + (\cos \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \right)$$

$$\xrightarrow{x=\pi^2} y' = 1 + \left((-1) \left(\frac{1}{2\pi} \right) \right) = \frac{2\pi - 1}{2\pi}$$

$$۲۲) \quad y = 3 \cos x \sin 2x \quad x = \pi$$

جواب: -6

$$۲۳) \quad y = \sqrt{1 + \sin x} \quad x = .$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin x}} \times (. + \cos x)$$

$$\xrightarrow{x=.} y' = \frac{1}{2\sqrt{1+.}} \times (. + ۱) = \frac{1}{2}$$

$$۲۴) \quad y = \sin x \cdot \tan x \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

$$y' = (\cos x)(\tan x) + (1 + \tan^2 x)(\sin x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} y' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) + (1 + (-1)^2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$۲۵) \quad y = \frac{2}{\cos 2x} \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

$$y' = \frac{-2(-\sin 2x)(2)}{(\cos 2x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} y' = \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$۲۶) \quad y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x \quad x = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$y' = (-\sin \sqrt{2}x)(\sqrt{2}) + (\cos \sqrt{2}x)(\sqrt{2})$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}} y' = (-(-1))(\sqrt{2}) + (0)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$۲۷) \quad y = \frac{1}{\cos x + \sin x} \quad x = 3\pi$$

$$y' = -\frac{1 \times (-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3\pi} y' = -\frac{1 \times (-(-1) + (-1))}{(-1 + 0)^2} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$۲۸) \quad y = \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \sin^2 x} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$y' = \frac{(0 - (1 \times 2 \times 1)(-\sin x)(\cos x))(2 + \sin^2 x) - (0 + 1 \times 2 \times 1 \cos x \sin x)(1 - \cos^2 x)}{(2 + \sin^2 x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = \frac{-\left(2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{12}{49}$$

$$\begin{aligned} ۲۹) \quad y &= \sin wt + \cos wt & t &= \frac{\pi}{۲w} \\ y' &= (\cos wt)(w) + (-\sin wt)(w) \\ t &= \frac{\pi}{۲w} \rightarrow y' = (0 \times w + (-1) \times w) = -w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۰) \quad y &= \sin^۲ ۲x & x &= \frac{۲\pi}{۳} \\ y' &= ۱ \times ۲ \times ۲ \times \cos ۲x \times \sin^۲ ۲x \\ \xrightarrow{x=\frac{۲\pi}{۳}} y' &= ۱ \times ۲ \times ۲ \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = -\frac{۹}{۴} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۱) \quad y &= x \tan \frac{x}{۲} & x &= \frac{۳\pi}{۲} \\ y' &= ۱ \times \left(\tan \frac{x}{۲}\right) + \left(۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}\right) \left(\frac{۱}{۲}\right) \times x \\ \xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۲}} y' &= ۱(-۱) + (۱ + (-۱)^۲) \left(\frac{۱}{۲}\right) \left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = \frac{-۲ + ۳\pi}{۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۲) \quad y &= \sin(\pi + \cos x) & x &= \frac{\pi}{۲} \\ y' &= (\cos(\pi + \cos x))(0 + (-\sin x)) \\ x &= \frac{\pi}{۲} \rightarrow y' = (\cos(\pi + 0)) \left(-\sin \frac{\pi}{۲}\right) = (-1)(-1) = ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۳) \quad y &= \frac{x \sin x}{\sin x + \cos x} & x &= \frac{۳\pi}{۲} \\ y' &= \frac{((1) \sin x + \cos x \times x)(\sin x + \cos x) - (\cos x + (-\sin x))(x \sin x)}{(\sin x + \cos x)^۲} \\ x &= \frac{۳\pi}{۲} \rightarrow y' = \frac{(-۱ + 0 \times \frac{۳\pi}{۲})(-۱ + 0) - (0 + (-(-1))) \left(\frac{۳\pi}{۲} \times -۱\right)}{(-۱ + 0)^۲} = \frac{۲ + ۳\pi}{۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۴) \quad y &= \tan^۲ \frac{x}{۲} & x &= \frac{\pi}{۳} \\ y' &= ۱ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} \left(۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}\right) \tan^۲ \frac{x}{۲} \\ x &= \frac{\pi}{۳} \rightarrow y' = ۱ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} \left(۱ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲\right) \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲ = \frac{۲}{۳} \left(\frac{۴}{۳}\right) \left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۲}{۳} \end{aligned}$$

$$۳۵) \quad y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos 2x} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = \frac{(1 \times 2 \times 1 \times \cos x \sin x)(1 + \cos 2x) - (1 + (-\sin 2x)(2))(\sin^2 x)}{(1 + \cos 2x)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$۳۶) \quad y = \sin^2 2x + \tan \frac{3x}{2} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = (1 \times 2 \times 2 \times \cos 2x \cdot \sin 2x) + \left(1 + \tan^2 \frac{3x}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y' = \left(1 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + (1 + (1)^2) \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

$$۳۷) \quad y = \sin^2 x \cos 2x$$

$$y' = (1 \times 2 \times 1 \times \cos x \cdot \sin x) \times \cos 2x + ((-\sin 2x) \times 2) \times \sin^2 x$$

تمرین: مقدار مشتق $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\frac{4}{9} (۱) \quad \frac{5}{9} (۲) \quad \frac{7}{9} (۳) \quad \frac{8}{9} (۴)$$

مثال: مقدار مشتق تابع $y = \tan^2 x - \cot 2x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

$$\frac{4}{3} (۱) \quad ۲ (۲) \quad \frac{8}{3} (۳) \quad ۴ (۴)$$

$$y = \tan^2 x - \cot 2x \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = 1 \times 2 \times 1 \times (1 + \tan^2 x)(\tan^2 x) - (-(1 + \cot^2 2x))(2)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = 2 \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) (2)$$

$$= 2 \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) (2) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

مثال: مقدار مشتق $\sin^2 \sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{9}$ چقدر است؟

$$\frac{27}{16\pi} (۴) \quad \frac{27}{16\pi} (۳) \quad \frac{9}{16\pi} (۲) \quad \frac{9}{16\pi} (۱)$$

$$y' = 1 \times 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \times \cos \sqrt{x} \times \sin^2 \sqrt{x}$$

$$x = \frac{\pi^2}{9} \rightarrow y' = 1 \times 3 \times \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{2\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{16\pi}$$

مثال: اگر $y = \sqrt{2} \sin \pi x^2$ آن گاه $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

$$\pi\sqrt{2} \quad (4) \quad \pi\sqrt{2} \quad (3) \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \pi x^2} \times (2 \sin \pi x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \pi x^2} \times (2(\cos \pi x^2) \times 2\pi x)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{2 \sin 2x}{\sin x + 2}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4) \quad -\frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad -\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$y' = \frac{(2(\cos 2x)(2))(\sin x + 2) - (\cos x + 2)(2 \sin 2x)}{(\sin x + 2)^2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y' = \frac{2(-1)(2)(1+2) - (0+2)(2(0))}{(1+2)^2} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$$

مثال اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟ (سراسری ۸۵ خ تجربی)

$$\frac{1}{6} \quad (4) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{9} \quad (2) \quad \frac{1}{12} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}} \times \left(0 + 2 \times \left(-\sin \frac{\pi}{x}\right) \times \left(-\frac{\pi \times 1}{x^2}\right)\right)$$

$$x = 3 \rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right) \left(0 + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{4}\right) (-\sqrt{3}) \left(-\frac{\pi}{9}\right) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

نکته: برای محاسبه مشتق تابع در نقطه‌ای که آن نقطه تابع را قبل از مشتق‌گیری صفر می‌کند فقط از عبارتی که باعث صفر شدن تابع شده مشتق می‌گیریم و در بقیه عبارات (بدون گرفتن مشتق) ضرب می‌کنیم.

مثال: مشتق تابع $y = (x - 2) \frac{\sqrt{2x}}{x^2 + 1}$ در نقطه‌ی $x = 2$ کدام است؟

$x = 2$ تابع را صفر می‌کند (قبل از مشتق‌گیری)

$$y = \underbrace{(x - 2)}_{\text{عامل صفر کننده}} \overbrace{\frac{\sqrt{2x}}{x^2 + 1}}^{\text{بقیه عبارت}} \xrightarrow{x=2} y = (2 - 2) \frac{\sqrt{2(2)}}{2^2 + 1} = 0 \times \frac{2}{5} = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{بقیه عبارت را بدون} \\ &\text{مشتق‌گیری می‌نویسیم} \\ \rightarrow y' = \underbrace{(x - 2)'}_{\text{از عامل صفر کننده}} \overbrace{\frac{\sqrt{2x}}{x^2 + 1}}^{\text{مشتق می‌گیریم}} &\rightarrow y' = 1 \left(\frac{\sqrt{2x}}{x^2 + 1} \right) = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

مثال: با فرض $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sin \frac{\pi}{x}$ حاصل $f'(1)$ کدام است؟

$$\sqrt{2}\pi \quad (1) \quad -\sqrt{2}\pi \quad (2) \quad 2\sqrt{2}\pi \quad (3) \quad -2\sqrt{2}\pi \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sin \frac{\pi}{x} \xrightarrow{x=1} f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \times \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)'$$

عامل

صفر کننده

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \times \left(\cos \frac{\pi}{x} \right) \times \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \xrightarrow{x=1} f'(x) = \sqrt{2} \times (-1) \times (-\pi) = \sqrt{2}\pi$$

مثال مشتق تابع $y = \sin x \cos^x x$ در $x = \pi$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۸ (۳) -۱ (۴) ۱

$$y = \underbrace{\sin x}_{\text{عامل صفر کننده}} \cos^4 x \xrightarrow{x=\pi} y' = \sin x \underbrace{\cos^4 x}_{\text{بقیه عبارت}} \rightarrow y' = (\cos x)(\cos^4 x) = \cos^5 x$$

$$x = \pi \rightarrow y' = (-1)^5 = -1$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \sin x \cos x \sin 3x \cos 3x$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (۳) $\frac{-3\sqrt{3}}{8}$ (۴) $\frac{-3\sqrt{3}}{4}$

$$f(x) = \underbrace{\sin x \cos x \sin 3x}_{\text{بقیه عبارت}} \underbrace{\cos 3x}_{\text{عامل صفر کننده}} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'(x) = \sin x \cos x \sin 3x (\cos 3x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sin x \cos x \sin 3x ((-\sin 3x) \times 3) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1(-1 \times 3) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{\sin^4 x}{1 + 3 \sin^2 x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ مقدار $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

(۱) $-0/4$ (۲) $-0/3$ (۳) $-0/2$ (۴) $-0/1$

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{\sin^4 x}{1 + 3 \sin^2 x}\right)}_{\text{بقیه عبارت}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{\text{عامل صفر کننده}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin^4 x}{1 + 3 \sin^2 x}\right)' \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin^4 x}{1 + 3 \sin^2 x}\right)' \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)(-1)\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{1 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \times (1)(-1) = \frac{\frac{4}{16}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \times -1 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} \times -1 = -\frac{2}{20} = -0/1$$

مثال: اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد حاصل $f'(-1)$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۳ (۳) $-\frac{۳}{۲}$ (۴) $-\frac{۳}{۴}$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{عامل صفر کننده}} \underbrace{(\sqrt[3]{x^2 - 7x})}_{\text{بقیه عبارت}}$$

$$f'(x) = (x^2 - x - 2)'(\sqrt[3]{x^2 - 7x}) \rightarrow f'(x) = (2x - 1)(\sqrt[3]{x^2 - 7x})$$

$$x = -1 \rightarrow f'(x) = (-3)(\sqrt[3]{8}) = (-3)(2) = -6$$

مثال: با فرض $f(x) = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{1 + \tan^2 x}$ حاصل $f'(0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) 2

$$f(x) = \frac{\underbrace{(\sin x)}_{\text{عامل}} \underbrace{(1 + \cos^2 x)}_{\text{بقیه عبارت}}}{\underbrace{1 + \tan^2 x}_{\text{بقیه عبارت}}} \rightarrow f'(x) = \frac{(\sin x)'(1 + \cos^2 x)}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(1 + \cos^2 x)}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{x=0} f'(x) = \frac{(1)(1 + 1^2)}{1 + 0^2} = 2$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

(۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{16}$

$$f(x) = \frac{\underbrace{(x-1)}_{\text{عامل}} \underbrace{\sqrt[5]{3x-2}}_{\text{بقیه عبارت}}}{\underbrace{(\Delta x - 3)^4}_{\text{بقیه عبارت}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)'\sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)(\sqrt[5]{3x-2})}{(\Delta x - 3)^4} \xrightarrow{x=1} f'(x) = \frac{\sqrt[5]{1}}{2^4} = \frac{1}{16}$$

تمرین: اگر $f(x) = \frac{\sin x (1 + \tan^2 x)}{1 + \cos^2 x}$ آن گاه $f'(\pi)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

نکته: اگر تابع قابل ساده کردن یا گویا کردن است قبل از مشتق گیری آن را ساده و یا گویا کنید.

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$\text{گویا کردن: } \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{x + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x}{1 - x} = \frac{\sqrt{x}(x - 1)}{1 - x} = -\sqrt{x}$$

$$y = -\sqrt{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} y' = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = -1$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan \frac{x}{4}}$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.

$$\frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)$$

$$y = \frac{1 - \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan \frac{x}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow y' = \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y'$$

$$= (1 + \tan^2 0) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید؟

$$\frac{\sin u}{1 + \cos u} = \tan \frac{u}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\tan \frac{x}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan \frac{x}{2}}} \times \left(\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1}} \times (1 + 1^2) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید؟

تذکر: وقتی یک صورت و مخرج یک کسر فقط بر حسب $\sin$ و $\cos$ است با تقسیم همه‌ی عبارت‌ها بر $\sin$ یا $\cos$

آن را به $\tan$ یا $\cot$ تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{1 + \tan u}{1 - \tan u} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + u \right)$$

$$\xrightarrow{\div \cos x} y = \frac{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}} \rightarrow y' = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \rightarrow y'$$

$$= \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right) \times 1 \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} y' = (1 + (-1)^2) \Rightarrow y' = 2$$

مثال: مشتق تابع $y = \cos^2 x (\tan^2 x - 1)$ کدام است؟ $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$

$$-2 \cos^2 x \quad (4)$$

$$-2 \sin^2 x \quad (3)$$

$$2 \sin^2 x \quad (2)$$

$$2 \cos^2 x \quad (1)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$y = \cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \Rightarrow y' = -(-\sin 2x) \times 2 = 2 \sin 2x$$

مثال: مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (1) \quad 2\sqrt{2} \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad -\sqrt{2} \quad (4)$$

ابتدا ساده می کنیم

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x \Rightarrow f'(x) \\ = -\sin x - \cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

مثال: اندازه‌ی مشتق تابع $y = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری ۸۹ تجربی)

$$-2 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

$$\boxed{\frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)}$$

$$y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \rightarrow y' = \dots$$

مثال: مقدار مشتق $y = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{2}{\pi}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خ)

$$\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9} \quad (4) \quad \frac{2\pi^2}{9} \quad (3) \quad -\frac{2\pi^2}{9} \quad (2) \quad -\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9} \quad (1)$$

$$\boxed{1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}}$$

$$y = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\left|\cos \frac{1}{x}\right|} \xrightarrow{x=\frac{2}{\pi} \text{ ناحیه اول}} y = \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \rightarrow$$

$$y' = -\frac{1 \times \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\cos \frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi^2}{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x}$ به ازای $x = \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

-۲ (۴

۲ (۳

۱ (۲

-۱ (۱

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x$$

$$\rightarrow y' = -\sin x + \cos x \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{2}} y' = -(-1) + 0 = 1$$

مثال : مشتق تابع $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{5\pi}{6}$ کدام است؟

نکته : در محاسبه توابع مثلثاتی اگر بعد از مشتق گیری و قرار دادن زاویه داده شده به جای x به یکی از زاویه‌های

$$\frac{3\pi}{8} = 67.5^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ \text{ یا } \frac{11\pi}{12} = 165^\circ \text{ یا } \frac{7\pi}{12} = 105^\circ \text{ یا } \frac{5\pi}{12} = 75^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{12} = 15^\circ \text{ مانند } \left(\frac{k\pi}{24} \text{ یا } \frac{k\pi}{8} \text{ یا } \frac{k\pi}{12}\right)$$

$$\frac{5\pi}{8} = 112.5^\circ \text{ یا } \frac{7\pi}{8} = 157.5^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ \text{ یا } \frac{9\pi}{8} = 202.5^\circ \text{ رسیدیم مجبوریم از فرمول‌های زیر (بالا بردن شخصیت) استفاده کنیم.}$$

(زوایایی که با دو برابر کردن به یک زاویه آشنا تبدیل می‌شوند)

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$y = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \rightarrow y' = -\sin x \xrightarrow{x=\frac{5\pi}{6}} y' = -\frac{1}{2}$$

$$\text{بر کاربرد} \begin{cases} \sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2u \\ \cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u} \\ \cot u - \tan u = 2 \cot 2u \end{cases}$$

مثال : مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{4x}$ را در نقطه‌ی $x = 2$ به دست آورید؟

$$y' = 1 \times 2 \times \left(-\frac{\pi \times 4}{(4x)^3} \right) \left(-\sin \frac{\pi}{4x} \right) \left(\cos \frac{\pi}{4x} \right)$$

$$\xrightarrow{x=2} y' = 2 \times \left(-\frac{\pi \times 4}{64} \right) \left(-\sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{8} \right)$$

$$y' = -\frac{\pi}{8} \times -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{16} \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{32}$$

مثال :

۱) $y = \sqrt{\tan x + \cot x}$

$$\boxed{\cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u}}$$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$y = \sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}} \times \left(\frac{-2 \times ((\cos 2x) \times 2)}{(\sin 2x)^2} \right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}}}} \times \left(-\frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = -2\sqrt{3}$$

۲) $y = \sin^2(x^2)$

$x = \sqrt{\frac{\pi}{12}}$

$$y' = 1 \times 2 \times (2x)(\cos x^2)(\sin x^2) = 4\sqrt{\frac{\pi}{12}} \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = 4 \times \sqrt{\frac{\pi}{12}} \times \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{\pi}{12}}$$

۳) $y = \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$y = \sin 2x \cos 2x \cos 4x \rightarrow y = \frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 8x \rightarrow y' = \frac{1}{4} \times (\cos 8x) \times 8 = (\cos 8x) \times 2$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} y' = \cos 8 \left(\frac{\pi}{12} \right) \times 2 = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \times 2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

$$۴) \quad y = \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u}$$

$$y' = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right)$$

$$y' = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\sin\frac{3\pi}{24}\right) \left(\cos\frac{3\pi}{24}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\sin\frac{\pi}{8}\right) \left(\cos\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$۵) \quad y = \sin^2(x + 1) \quad x = \frac{\pi}{8} - 1$$

$$\boxed{\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u}$$

$$y' = 1 \times 2 \times 1 \times \cos(x + 1) (\sin(x + 1))$$

$$y' = 1 \times 2 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{8} = 2 \times \frac{1}{2} \sin\frac{2\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال : مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$\frac{1}{4} (۴) \quad \frac{1}{8} (۳) \quad -\frac{1}{8} (۲) \quad -\frac{1}{4} (۱)$$

$$y' = 1 \times 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \times \sin\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u} y' = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) \rightarrow y' = -\frac{1}{4} \times \sin\frac{5\pi}{6} \rightarrow y' = -\frac{1}{4} \times \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

مثال : مقدار مشتق تابع $y = \cos^2\frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰ خ)

$$\frac{\pi}{32} \text{ (۴)} \quad \frac{\pi}{48} \text{ (۳)} \quad \frac{\pi}{72} \text{ (۲)} \quad \frac{\pi}{96} \text{ (۱)}$$

$$y' = 1 \times 2 \times \frac{-\pi \times 3}{(3x)^2} \left(-\sin \frac{\pi}{3x}\right) \left(\cos \frac{\pi}{3x}\right) \rightarrow y' = -2 \times \frac{-3\pi}{9x^2} \sin \frac{\pi}{3x} \cdot \cos \frac{\pi}{3x} \rightarrow$$

$$y' = 2 \times \frac{\pi}{3x^2} \sin \frac{\pi}{3x} \cdot \cos \frac{\pi}{3x} \xrightarrow{x=4} y' = 2 \times \frac{\pi}{48} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \xrightarrow{\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u}$$

$$y' = \frac{\pi}{24} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin \left(2 \times \frac{\pi}{12}\right)\right) \rightarrow y' = \frac{\pi}{24} \times \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y' = \frac{\pi}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{96}$$

تمرین : مشتق تابع $y = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$-\frac{1}{8} \text{ (۴)} \quad -\frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

نکته : همانند حد اگر کمان صفر شد ابتدا $\sin$ و $\tan$ را حذف می کنیم و به جای $\cos u$ عبارت $1 - \frac{u^2}{2}$ را قرار می دهیم سپس مشتق می گیریم.

مثال : مشتق تابع $y = \sin(\cos x)$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید چون کمان سینوس یعنی $\cos x$ به ازای

$x = \frac{\pi}{4}$ صفر می شود پس $\sin$ حذف می شود.

$$y = \cos x \rightarrow y' = (-\sin x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال : مشتق تابع $y = \tan(\sin 2x)$ را در نقطه‌ی $x = 0$ به دست آورید؟

کمان $\tan$ و $\sin$ صفر

می شود پس حذف می شوند

$$y = \tan(\sin 2x) \rightarrow y = 2x \rightarrow y' = 2$$

مثال : مشتق تابع $y = \sin(\sin x)$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

$$y = \sin(\sin x) \xrightarrow{x=0} y = x \rightarrow y' = 1$$

مثال: مقدار مشتق تابع $y = \tan(\cos x)$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) π (۴) ۰

$$y = \tan(\cos x) \rightarrow y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x \rightarrow y' = -1$$

۴-امشتق مرتبه دوم

مثال: اگر مقدار مشتق مرتبه دوم تابع $y = a \cos 2x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر ۲ باشد a کدام است؟

$$(1) -2 \quad (2) -\frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) 2$$

$$y' = a(-\sin 2x \cdot 2) = -2a \sin 2x \rightarrow y = -2a(\cos 2x \times 2) = -4a \cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \\ y = -4a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = -4a \cos \pi = -4a(-1) = 4a \xrightarrow{y''=2} 4a = 2 \rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x$ حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی)

$$(1) -2 \quad (2) -\sqrt{2} \quad (3) \sqrt{2} \quad (4) 2$$

$$y' = -\sin \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2} + \cos \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \Rightarrow y'' = -\cos \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} + (-\sin \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2} \times \sqrt{2}) \\ = -2 \cos \sqrt{2}x - 2 \sin \sqrt{2}x = -2(\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x) \Rightarrow \frac{y''}{y} \\ = \frac{-2(\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x)}{\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x} = -2$$

۵-۱-۱ حالت‌های بدست آوردن شیب خط (m)

۱- داشتن دو نقطه از خط: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از یک خط باشند آنگاه شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

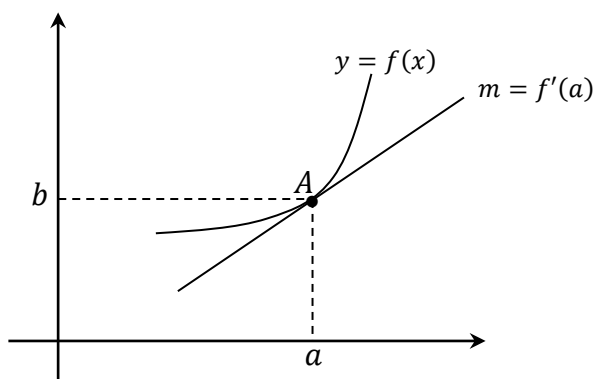
۲- داشتن زاویه بین خط و جهت مثبت محور x : شیب یک خط با تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت

محور x هاست برابر است.

$$\tan \alpha = m$$

۳- به کمک مشتق گیری

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x = a$ واقع بر منحنی:



نکته: برای به دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی از تابع مشتق گرفته و طول نقطه را در مشتق قرار می‌دهیم تا شیب خط مماس به دست آید.

مثال: شیب خط مماس بر منحنی $y = 1 + \sqrt{x}$ در نقطه‌ای به طول $x = 4$ واقع بر آن را بنویسید؟

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{m = \frac{1}{4}}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه‌ی $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

$$(1) -\frac{3}{5} \quad (2) \frac{5}{4} \quad (3) \frac{3}{2} \quad (4) 2$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x}} \times (2x + 3) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{2\sqrt{4}} \times (5) = y' = \frac{5}{4} \rightarrow m = \frac{5}{4}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - x^3$ در نقطه‌ی $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

$$(1) -3 \quad (2) -2 \quad (3) 1 \quad (4) 3$$

$$y' = 2x^2 - 3x^2 \xrightarrow{x=1} y' = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه‌ی $x = 2$ کدام است؟

$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) -\frac{1}{12} \quad (3) \frac{7}{6} \quad (4) \frac{4}{3}$$

$$y = (4x)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y' = -\frac{1}{3}(4x)^{-\frac{4}{3}}(4)$$

$$x = 2 \rightarrow y' = -\frac{1}{3}(8)^{-\frac{4}{3}}(4) = -\frac{1}{3}(2^3)^{-\frac{4}{3}} \times 4 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2^4} \times 4 = -\frac{1}{12}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{1+\sqrt{3}\sin x}{\sin x}$ را در نقطه‌ی $\left(\frac{\pi}{6}, 4\right)$ بدست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}\sin x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} + \sqrt{3} \rightarrow f'(x) = -\frac{1 \times \cos x}{(\sin x)^2} + 0 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$-\frac{1 \times \cos \frac{\pi}{6}}{\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = -2\sqrt{3} \rightarrow m = -2\sqrt{3}$$

۲ آهنگ تغییر

۲-۱ نمو تابع و نمو متغیر

تعریف: در تابع $y = f(x)$ اگر متغیر x از مقدار اولیه x_1 به مقدار ثانویه x_2 تغییر کند می‌گوییم نمو متغیر x به اندازه $x_2 - x_1$ است این نمو را با Δx یا h نشان می‌دهیم

$$\boxed{x \text{ نمو متغیر} = \Delta x = h = x_2 - x_1}$$

تعریف: در تابع $y = f(x)$ اگر متغیر x از مقدار اولیه x_1 به مقدار ثانویه x_2 تغییر کند می‌گوییم نمو تابع f به اندازه $f(x_2) - f(x_1)$ است این نمو را با Δy نشان می‌دهیم.

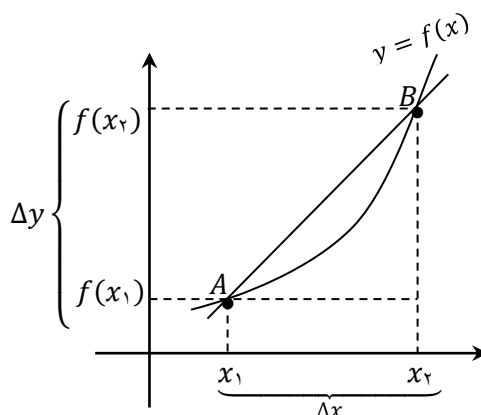
$$\boxed{f \text{ نمو تابع} = \Delta y = \Delta f = f(x_2) - f(x_1)}$$

۲-۲ آهنگ متوسط تغییر:

در تابع $y = f(x)$ آهنگ متوسط تغییر تابع f در فاصله x_1 تا x_2 یعنی بازه $[x_1, x_2]$ برابر نسبت نمو تابع به نمو متغیر است.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر } f \text{ از } x_1 \text{ تا } x_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x \rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$



مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x = 5$ تا $x = 9$

کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

- (۱) $0/4$ (۲) $0/5$ (۳) $0/6$ (۴) $0/7$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{2}{4} = 0/5$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 144} \rightarrow f(9) = \sqrt{9^2 + 144} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

$$\rightarrow f(5) = \sqrt{5^2 + 144} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{484} = 22$
$\sqrt[3]{\pm 8} = \pm 2$	$\sqrt[3]{\pm 27} = \pm 3$	$\sqrt[3]{\pm 64} = \pm 4$	$\sqrt[3]{\pm 125} = \pm 5$	$\sqrt[3]{\pm 216} = \pm 6$	$\sqrt[3]{\pm 343} = \pm 7$
$\sqrt[3]{\pm 512} = \pm 8$	$\sqrt[3]{\pm 729} = \pm 9$	$\sqrt[3]{\pm 1000} = \pm 10$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{16} = 2$	$\sqrt[3]{64} = 4$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{1}{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد ۲ به $2 + h$ تغییر کند برابر $\frac{h}{9}$

است h کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{h}{9} \Rightarrow \frac{\frac{(2+h)^2 + 1}{2+h} - \frac{5}{2}}{h} = \frac{h}{9} \Rightarrow \frac{\frac{5+4h+h^2}{2+h} - \frac{5}{2}}{h} = \frac{h}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{10+8h+2h^2-10-5h}{2(2+h)}}{h} = \frac{h}{9} \Rightarrow \frac{3h+2h^2}{4h+2h^2} = \frac{h}{9} \Rightarrow 27h+18h^2=32h+16h^2$$

$$h = 0$$

$$\Rightarrow 2h^2 - 5h = 0 \rightarrow h = \frac{5}{2} = 2/5$$

۳-۲ آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع

در تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ آهنگ لحظه‌ای تغییر y در واحد تغییر x در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

مثال: در تابعی با ضابطه‌ی $f(t) = \frac{240}{t}$ ، آهنگ آنی تغییر f در لحظه‌ی $t = 4$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه‌ی $t = 3$ تا $t = 5$ بیشتر است؟ (سراسری ریاضی)

$$\frac{3}{2}(4) \quad 2(3) \quad \frac{1}{2}(2) \quad 1(1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(t) = \frac{-240 \times 1}{t^2} \xrightarrow{t=4} f'(4) = \frac{-240}{4^2} = \frac{-240}{16} = -15 \end{aligned} \right\} -15 - (-16) = 1$$

مثال: تابع $f(t) = \frac{240}{t}$ را در نظر بگیرید. آهنگ متوسط تغییر f از $t = 2$ تا $t = 5$ با آهنگ آنی f در کدام زمان برابر است؟ (جواب $t = \sqrt{10}$)

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{48 - 120}{3} = \frac{-72}{3} = -24 \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(t) = \frac{-240 \times 1}{t^2} = \frac{-240}{t^2} \\ \text{آهنگ متوسط} = \text{آهنگ لحظه‌ای} &\Rightarrow -24 = \frac{-240}{t^2} \rightarrow t^2 = 10 \rightarrow t = \pm\sqrt{10} \\ &\downarrow \\ &\text{غرق (چون زمان منفی نمی‌شود)} \end{aligned}$$

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ی $[0, 3]$ از آهنگ لحظه‌ای تابع در

$x = \sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

$$(۱) \text{ صفر} \quad (۲) \frac{1}{18} \quad (۳) \frac{1}{12} \quad (۴) \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{آهنک متوسط} &= \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3} \\ \text{آهنک لحظه‌ای} &= f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 16}} \times 2x \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{18}} \times 2\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{9} \times 2} \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

مثال: در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ روی بازه $[2, 2/0.2]$ آهنک متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x از آهنک لحظه‌ای

تغییر تابع در $x = 2$ چقدر بیشتر است؟ (سراسری تجربی ۸۸ خ)

$$(۱) \frac{1}{2.2} \quad (۲) \frac{1}{1.1} \quad (۳) \frac{1}{51} \quad (۴) \frac{2}{51}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنک متوسط} &= \frac{f(2/0.2) - f(2)}{2/0.2 - 2} = \frac{\frac{1.1}{51} - \frac{2}{1}}{0.2} = \frac{\frac{1.1 - 1.02}{51}}{0.2} = \frac{-\frac{1}{51}}{\frac{2}{100}} = -\frac{100}{102} = -\frac{50}{51} \\ \left\{ \begin{aligned} f(2/0.2) &= \frac{2/0.2}{2/0.2 - 1} = \frac{2/0.2}{1/0.2} = \frac{2.2}{1.2} = \frac{1.1}{0.6} = \frac{1.1}{0.6} \\ f(2) &= \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} -\frac{50}{51} - (-1) \\ &= \frac{1}{51} \end{aligned} \right. \\ \text{آهنک لحظه‌ای} &= f'(x) = \frac{(1)(x-1) - (1)(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \\ &\xrightarrow{x=2} f'(-2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1 \end{aligned} \right\}$$

مثال: در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ آهنک متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه $[2/25, 2/56]$ از آهنک آنی

در شروع این بازه چقدر کمتر است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

$$(۱) \frac{1}{93} \quad (۲) \frac{2}{93} \quad (۳) \frac{1}{62} \quad (۴) \frac{1}{31}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنك متوسط} &= \frac{f(2/56) - f(2/25)}{2/56 - 2/25} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{1}{\frac{31}{100}} = \frac{100}{310} = \frac{10}{31} \\ \begin{cases} f(2/56) = \sqrt{2/56} = \sqrt{\frac{256}{100}} = \frac{16}{10} = 1/6 \\ f(2/25) = \sqrt{2/25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{15}{10} = 1/5 \end{cases} \\ \text{آهنك لحظه‌ای} &= f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \xrightarrow{x=2/25} f'(2/25) = \frac{1}{2\sqrt{2/25}} = \frac{1}{2 \times 1/5} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \\ \frac{31 - 30}{93} = \frac{1}{93} \end{cases}$$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{36}{x^2}$ آهنك متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنك لحظه‌ای آن در

$x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$1 \quad (1) \quad 2/5 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 2/5 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{آهنك متوسط} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5 \\ \text{آهنك لحظه‌ای} &= f'(x) = \frac{-36 \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-72x}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \xrightarrow{x=\sqrt[3]{12}} \text{لحظه‌ای} = \frac{-72}{(\sqrt[3]{12})^3} = \frac{-72}{12} = -6 \end{aligned}$$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{x-1}$ آهنك متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ برابر آهنك لحظه‌ای آن در $x = \alpha$

است α کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰ خ)

$$2/5 \quad (1) \quad 1 + \sqrt{3} \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{آهنك متوسط} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{1}}{3} = \frac{\frac{5-8}{4}}{3} = \frac{-3/4}{3} = -\frac{1}{4} \\ \text{آهنك لحظه‌ای} &= f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=\alpha} \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \\ \text{آهنك متوسط} &= \text{آهنك لحظه‌ای} \Rightarrow \frac{-1}{(\alpha-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 4 \Rightarrow \alpha-1 = \pm 2 \rightarrow \alpha = 3 \rightarrow \alpha = -1 \end{aligned}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ

لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$(1) \frac{7}{540} \quad (2) \frac{11}{540} \quad (3) \frac{7}{270} \quad (4) \frac{11}{270}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-5}{15}}{8} = \frac{\frac{-2}{15}}{8} = \frac{-2}{120} = \frac{-1}{60}$$

$$\begin{cases} f(12) = (2(12) + 1)^{-\frac{1}{2}} = (25)^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{2 \times (-\frac{1}{2})} = 5^{-1} = \frac{1}{5} \\ f(4) = (2(4) + 1)^{-\frac{1}{2}} = (9)^{-\frac{1}{2}} = (3^2)^{-\frac{1}{2}} = 3^{2 \times (-\frac{1}{2})} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{لحظه‌ای آهنگ} = f'(x) = -\frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}-1} \times (2) = -\frac{1}{27}$$

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ

لحظه‌ای آن در $x = 4$ چقدر کمتر است؟ (سراسری تجربی ۹۳ خ)

$$(1) \frac{1}{36} \quad (2) \frac{1}{18} \quad (3) \frac{5}{72} \quad (4) \frac{1}{12}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو

متغیر $0/21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟ (سراسری تجربی ۹۴)

$$(1) \frac{1}{42} \quad (2) \frac{1}{21} \quad (3) \frac{3}{42} \quad (4) \frac{2}{21}$$

$$\Delta x = 0/21 \text{ نمو متغیر}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1 + 0/21 = 1/21$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(1/21) - f(1)}{1/21 - 1} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{1/0}{21} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1/0}{21} = \frac{21 - 20}{42} = \frac{1}{42}$$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه‌ی $x = 1$ با نمو

۰/۴۴ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه چقدر کمتر است؟ (سراسری تجربی ۹۴ خ)

$$\frac{1}{30} (1) \quad \frac{1}{24} (2) \quad \frac{1}{12} (3) \quad \frac{1}{6} (4)$$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر

تابع در نقطه‌ی $x = 3$ چقدر بیشتر کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷ خ)

$$0/31 (1) \quad 0/42 (2) \quad 0/62 (3) \quad 0/91 (4)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x \Rightarrow x_2 = 3 + 0/1 = 3/1 \\ \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3/1) - f(3)}{3/1 - 3} = \frac{(3/1)^3 - 3^3}{0/1} \\ &= \frac{27/1000 - 27}{0/1} = \frac{27/1000}{0/1} = 27/1000 \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(x) = 3x^2 \xrightarrow{x=3} 3(3)^2 = 27 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 27/1000 - 27 = 0/91$$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $a + \frac{h}{4}$ از آهنگ متوسط تغییر

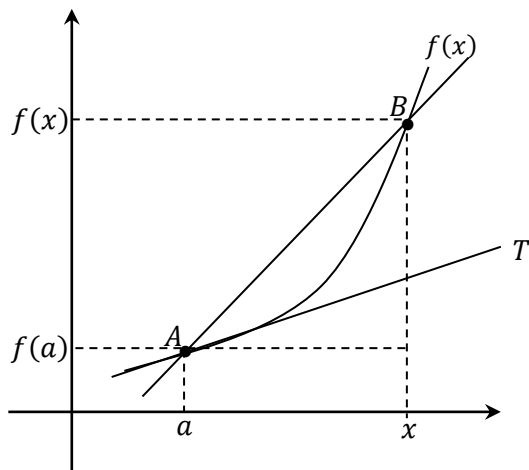
تابع وقتی x از عدد a به $a + h$ تغییر کند کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶ خ)

$$h (1) \quad 2h (2) \quad 3h (3) \quad 4 \text{ صفر} (4)$$

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h=2, a=0} \frac{f(2) - f(0)}{2-0} = \frac{18 - (-2)}{2} = 10 \\ &= \begin{cases} f(2) = 3(2)^2 + 4(2) - 2 = 18 \\ f(0) = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = 6x + 4 \xrightarrow{a=0, h=2, x=a+\frac{h}{4}=0+\frac{2}{4}=1} f'(1) = 6(1) + 4 = 10$$

۳ تعریف مشتق



۳-۱ تعبیر هندسی مشتق:

نمودار تابع f به صورت مقابل است:

شیب خط گذرنده از دو نقطه A, B از

رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\text{شیب خط } AB \text{ (ضریب زاویه خط گذرنده از دو نقطه } A, B) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

حال اگر نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A میل کند $x \rightarrow a \Rightarrow A \rightarrow B$ آن گاه خط قاطع AB به خط مماس T بر

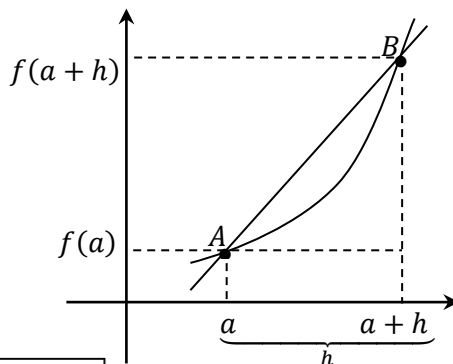
منحنی در نقطه‌ی A تبدیل می‌شود این خط مماس همان مشتق تابع است.

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی } A = m = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته: با تغییر متغیر $x - a = h = \Delta x$ می‌توان مشتق را به صورت زیر تعریف کرد

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{nh} = \frac{m}{n} f'(a) \quad \text{نکته: حالت کلی تعریف مشتق}$$

مثال: دو نقطه به طول‌های h و 2 روی منحنی $y = \sqrt{x}$ مفروض‌اند. مقدار حد ضریب زاویه خط گذرنده بر دو

نقطه، وقتی $h \rightarrow 0$ کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) \quad 2\sqrt{2} \quad (4)$$

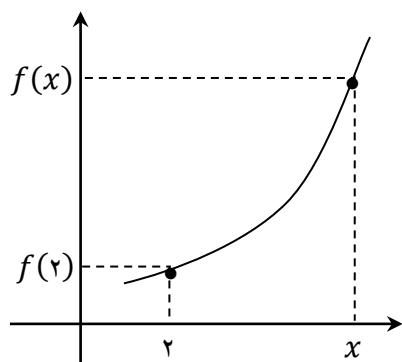
حد ضریب زاویه خط گذرنده بر دو نقطه به طول‌های a و $a+h$ بر منحنی $y = f(x)$ همان تعریف مشتق در نقطه‌ی a است یعنی $f'(a)$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \xrightarrow{x=2} y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال: شیب وتری که دو نقطه به طول‌های 2 و x را از نمودار تابع $y = f(x)$ به هم وصل می‌کند برابر $x^2 + 2x + 4$

است شیب مماس منحنی در نقطه‌ای به طول 2 کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 6 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$



$$\begin{aligned} \text{شیب} &= \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \\ \text{شیب مماس} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12 \\ &\Rightarrow f'(2) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{روش دوم} \quad m = y' &= x^2 + 2x + 4 \\ y'(2) &= (2)^2 + 2(2) + 4 = 12 \end{aligned}$$

۲-۳ حد‌هایی که شبیه تعریف مشتق هستند

مثال: فرض کنیم $f(x) = x^3 - 2x$ باشد آن گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 3(1)^2 - 2 = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(-2) - f(x)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(f(x) - f(-2))}{x + 2} = -f'(-2) = -(3(-2)^2 - 2) = -10$$

$$۳) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{1}{1} f'(3) = 3(3)^2 - 2 = 25$$

$$۴) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = -\frac{1}{1} f'(3) = -25$$

$$۵) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2)}{3h} = -\frac{3}{3} f'(2) = -\frac{3}{3} (3(2)^2 - 2) = -\frac{3}{3} \times 10 = -10$$

$$۶) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-2h)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(x-2h) - f(x))}{-h} = -\left(-\frac{2}{-1} f'(x)\right) = -2f'(x)$$

مثال: اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر f در واحد تغییر x برابر $-\frac{3}{4}$ باشد آن گاه حد عبارت $\frac{f(2)-f(2+h)}{h}$ وقتی $h \rightarrow 0$

کدام است؟

$$۱) -3 \quad ۲) -\frac{3}{4} \quad ۳) \frac{3}{4} \quad ۴) 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(2+h) - f(2))}{h} = -\frac{1}{1} f'(2) = -1 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

آهنگ لحظه‌ای همان مشتق است

مثال: اگر $f'(a) = 5$ باشد آن گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a+2h)}{h}$ چقدر است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) -۵

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a - 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(a - 2h) - f(a))}{h} = - \left(-\frac{2}{1} f'(a) \right) = 2 \times 5 = 10.$$

مثال: اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

(۹۲)

(۱) -۶ (۲) -۳ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{1}{1} f'(-1) = f'(-1)$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{عامل صفر کننده}} \sqrt[3]{x^2 - 7x} \rightarrow f'(x) = f(x) = (x^2 - x - 2)' \sqrt[3]{x^2 - 7x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= (2x - 1)(\sqrt[3]{x^2 - 7x}) \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = (2(-1) - 1) \left(\sqrt[3]{(-1)^2 - 7(-1)} \right) \\ &= (-3)(\sqrt[3]{8}) = (-3) \times 2 = -6 \end{aligned}$$