



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



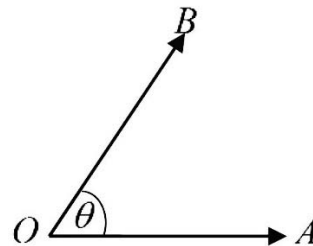
## فصل اول

## مثلثات :

علم است که از اضلاع و زوایای یک مثلث و ارتباط بین اضلاع و زوایای یک مثلث بحث میکند.

## زاویه :

شکلی است که از اتحاد دو نیم خط که دارای مبداء مشترک است تشکیل شده است نقطه مشترک را بنام راس و دو قطعه خط را بنام اضلاع زاویه یاد میکنند. و آله اندازه گیری زاویه را نقاله میگویند.

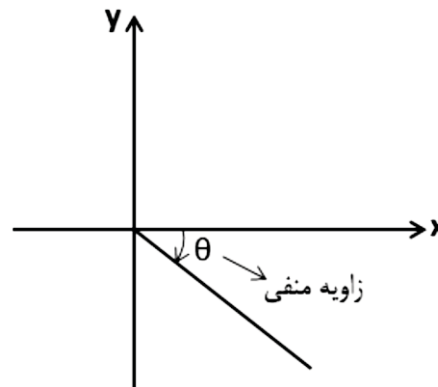
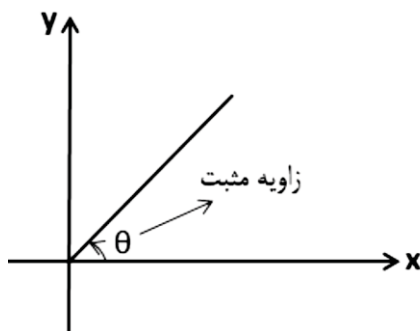


## زاویه استاندارد:

به زاویه گفته میشود که راس آن در مبداء کمیات وضعیه و یک ضلع آن محور مثبت  $x$  باشد.

## زاویه مثبت و منفی :

هرگاه جهت دوران ضلع دوم یک زاویه استاندارد موافق دوران عقربه ساعت باشد آن زاویه منفی است و هرگاه جهت دوران ضلع دوم مخالف دوران عقربه ساعت باشد آن زاویه مثبت است.

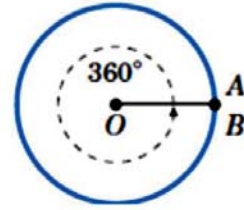
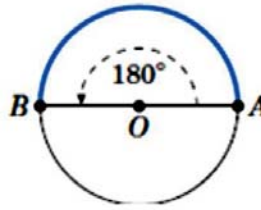
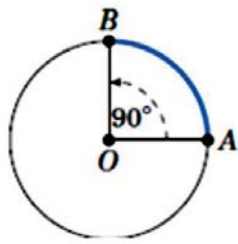


## سیستم های اندازه گیری زاویه :

وسعت یک زاویه را توسط سه سیستم ذیل اندازه گیری میکنند.

- 1- سیستم شصتی (درجه)
  - 2- سیستم صدی (گراد)
  - 3- سیستم دایروی (رادیان)
- 1- سیستم شصتی (درجه):

واحد اندازه گیری وسعت زاویه در این سیستم  $^{\circ}$  (درجه) بوده و یک دوران مکمل یک زاویه استاندارد را به 360 حصه مساوی تقسیم نموده و هر حصه آن را بنام درجه می نامند. و همچنان بعضی واحداث دیگری نیز دارد تحت نام ' (دقیقه درجه) و  $''$  (ثانیه درجه)



$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ ام حصه یک دوران مکمل}$$

$$1^\circ = 60' \text{ دقیقه درجه}$$

$$1' = 60'' \text{ ثانیه درجه}$$

$$1^\circ = 3600'' \text{ ثانیه درجه}$$

تبدیل درجه ، دقیقه ، ثانیه (DMS) به صورت اعشاری :

برای تبدیل کردن آن قسمت دقیقه را تقسیم 60 نموده و قسمت ثانیه را تقسیم 3600 نموده و حاصل آن را با درجه جمع می نماییم.

$$D^\circ, M', S' = D^\circ + \left(\frac{M}{60}\right)^\circ + \left(\frac{S}{3600}\right)^\circ$$

مثالها

مثال 1: زاویه  $35^\circ, 15', 27''$  را بصورت اعشاری بنویسید؟

$$35^\circ, 15', 27'' = 35^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{27}{3600}\right)^\circ = 35^\circ + 0,25^\circ + 0,0075^\circ = 35,2575^\circ$$

مثال 2: زاویه  $48^\circ, 21', 45''$  را بصورت اعشاری بنویسید؟

$$48^\circ, 21', 45'' = 48^\circ + \left(\frac{21}{60}\right)^\circ + \left(\frac{45}{3600}\right)^\circ = 48^\circ, (0,35)^\circ, 0,0125^\circ = 48,3625^\circ$$

تبدیل اعشاری به درجه ، دقیقه درجه و ثانیه درجه (DMS):

برای تبدیل اعشاریه به درجه ، دقیقه و ثانیه مراحل ذیل را انجام میدهیم.

- 1- قسمت عدد صحیح را در قسمت درجه بدون هیچ تغییری می نویسیم.
- 2- قسمت اعشاری را ضرب 60 نموده و قسمت صحیح آن را در قسمت دقیقه می نویسیم.
- 3- و قسمت اعشاری آن را در 60 ضرب میکنیم و در قسمت ثانیه می نویسیم.

مثالها

مثال 1: زاویه  $42,5125^\circ$  را به صورت DMS بنویسید؟

$$42,5125^\circ = 42^\circ, 30', 45''$$

$$(0,5125).60 = 30,75$$

$$(0,75).60 = 45$$

مثال 2: زاویه  $220,7442^\circ$  را به صورت DMS بنویسید؟



$$220,7442^\circ = 220^\circ, 44', 39,12''$$

$$(0,7442).60 = 44,652$$

$$(0,652).60 = 39,12$$

**نکته 1:** عقربه ساعت گرد در مدت 12 ساعت یک دوران مکمل زاویه ستندرد را طی میکند.

**نکته 2:** عقربه دقیقه گرد در مدت 60 دقیقه یک دوران مکمل زاویه ستندرد را طی میکند.

**نکته 3:** عقربه ثانیه گرد در مدت 60 ثانیه یک دوران مکمل زاویه ستندرد را طی میکند.

مثال 3: پس از گذشت 45 ثانیه عقربه ثانیه گرد کدام زاویه را دوران خواهد کرد؟

$$\left[ \begin{array}{cc} 60\text{sec} & 360^\circ \\ 45\text{sec} & x \end{array} \right] \rightarrow \frac{60}{45} = \frac{360}{x} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 360}{60} = 270^\circ$$

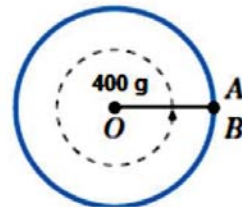
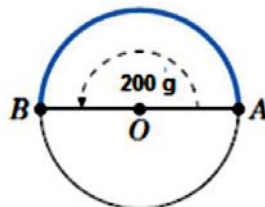
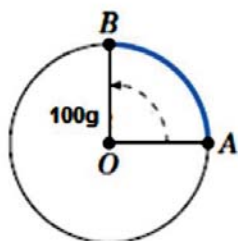
مثال 4: اگر عقربه ساعت گرد از 4 به 7 برسد کدام زاویه را دوران خواهد کرد؟

$$\left[ \begin{array}{cc} 12\text{h} & 360^\circ \\ 3\text{h} & x \end{array} \right] \rightarrow \frac{12}{3} = \frac{360}{x} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 360}{12} = 90^\circ$$

فعالیت: زوایای  $17,3250^\circ$  را بصورت DMS بنویسید.

## 2- سیستم صدی (گراد):

واحد اندازه گیری وسعت زاویه در این سیستم  $^g$  (گراد) بوده و یک دوران مکمل یک زاویه ستندرد را به 400 حصة مساوی تقسیم نموده و هر حصة آن را بنام گراد می نامند. و همچنان بعضی واحداث دیگری نیز تحت نام دقیقه گراد ( )' و ثانیه گراد ( )'' دارد.



$$1^g = \frac{1}{400} \text{ ام حصة یک دوران مکمل}$$

$$1^g = 100'$$

$$1' = 100''$$

$$1^\circ = 10000''$$

تبدیل گراد ، دقیقه گراد ، ثانیه گراد (GMS) به صورت اعشاری :

برای تبدیل کردن آن قسمت دقیقه را تقسیم 100 نموده و قسمت ثانیه را تقسیم 10000 نموده و حاصل آن را با گراد جمع می نمایم.

$$G^g, M', S'' = G^g + \left(\frac{M}{100}\right)^g + \left(\frac{S}{10000}\right)^g$$

### مثالها

مثال 1: زاویه  $125^g, 78', 56''$  را بصورت اعشاری بنویسید؟



$$125^g, 78', 56'' = 125^g + \left(\frac{78}{100}\right)^g + \left(\frac{56}{10000}\right)^g = 125^g + 0,78^g + 0,0056^g$$

$$= 125,7856^g$$

مثال 2: زاویه  $412^g, 36', 81''$  را بصورت اعشاری بنویسید؟

$$412^g, 36', 81'' = 412^g + \left(\frac{36}{100}\right)^g + \left(\frac{81}{10000}\right)^g = 412^g + 0,36^g + 0,0081^g$$

$$= 412,3681^g$$

تبدیل اعشاریه بصورت ( گراد ، دقیقه گراد و ثانیه گراد ) GMS :

برای تبدیل کردن آن مراحل ذیل را انجام میدهیم.

- 4- قسمت عدد صحیح را در قسمت گراد بدون هیچ تغییری می نویسیم.
- 5- قسمت اعشاری را ضرب 100 نموده و قسمت صحیح آن را در قسمت دقیقه می نویسیم.
- 6- و قسمت اعشاری آن را در 100 ضرب میکنیم و در قسمت ثانیه می نویسیم.

#### مثالها

مثال 1: زاویه  $125,5476^g$  را به GMS تبدیل کنید؟

$$125,5476^g = 125^g, 54', 76''$$

$$(0,5476). 100 = 54,76$$

$$(0,76). 100 = 76$$

مثال 2: زاویه  $765,324^g$  را به GMS تبدیل کنید؟

$$765,324^g = 765^g, 32'', 40''$$

$$(0,324). 100 = 32,4$$

$$(0,4). 100 = 40$$

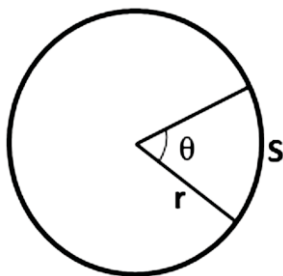
مثال 3:  $6^g$  مساوی به چند دقیقه گراد و چند ثانیه گراد میشود؟

$$6^g = (6.100)' = (600)'$$

$$6^g = (6.10000)'' = (60000)''$$

3- سیستم دایروی ، رادیان  $( )^R$  :

واحد اندازه گیری وسعت زاویه در این سیستم رادیان بوده و یک دوران مکمل یک زاویه ستندرد را به  $2\pi \sim 6,28$  حصه مساوی تقسیم نموده و هر حصه آن را یک رادیان می نامند. و یا یک رادیان وسعت زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل آن مساوی به شعاع دوران باشد.



$$if, s = r \rightarrow \theta = 1^R$$

بین زاویه مرکزی ، طول قوس مقابل و شعاع دوران رابطه ذیل وجود دارد.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

#### مثالها

مثال 1: وسعت زاویه مرکزی را دریابید که طول قوس مقابل آن  $20\pi cm$  و شعاع دوران  $40cm$  باشد؟



$$\left. \begin{array}{l} s = 20\pi \text{ cm} \\ r = 40 \text{ cm} \\ \theta = ? \end{array} \right\} \theta = \frac{s}{r} = \frac{20\pi \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = \frac{\pi}{2}$$

مثال 2: وسعت زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{6}$  را بدان است اگر شعاع دوران  $10 \text{ cm}$  باشد طول قوس مقابل این زاویه مرکزی را دریابید؟

$$\left. \begin{array}{l} s = ? \\ r = 10 \text{ cm} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} s = r \cdot \theta = 10 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ cm}$$

مثال 3: وسعت زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{4}$  رادیان است اگر طول قوس مقابل آن  $28\pi \text{ cm}$  باشد شعاع دوران را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} s = 28\pi \text{ cm} \\ r = ? \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} r = \frac{s}{\theta} = \frac{28\pi \text{ cm}}{\frac{\pi}{4}} = 116 \text{ cm}$$

مثال 4: در یک تراکتور شعاع چرخ کوچک  $30 \text{ cm}$  و شعاع چرخ بزرگ  $60 \text{ cm}$  است اگر چرخ بزرگ  $\frac{\pi}{3}$  رادیان بچرخد چرخ کوچک چند رادیان چرخش میکند؟

حل: زمانیکه دو چرخ بطور همزمان روی یک سطح چرخش کنند در زمانهای مساوی طول قوس های مساوی را طی میکند بنا براین طول قوس در هر دو چرخ باهم مساوی است.

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 30 \text{ cm} \\ r_2 = 60 \text{ cm} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \\ \theta_2 = ? \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} s_1 = r_1 \cdot \theta_1 \\ s_2 = r_2 \cdot \theta_2 \end{array} \right\} s_1 = s_2 \rightarrow r_1 \cdot \theta_1 = r_2 \cdot \theta_2 \rightarrow 30 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{3} = 60 \text{ cm} \cdot \theta_2$$

$$\rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

رابطه بین سیستم های شصتی ، صدی و دایروی:

اگر زاویه را برحسب درجه به  $D$  و زاویه را برحسب گراد به  $G$  و زاویه را برحسب رادیان به  $R$  نمایش دهیم رابطه ذیل بین آنها برقرار است.

$$\left( \frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \right) \cdot 2 \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثالها

مثال 1:  $135^\circ$  چند گراد و چند رادیان است؟

$$\left. \begin{array}{l} D = 135^\circ \\ G = ? \\ R = ? \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{D}{180} = \frac{g}{200} \rightarrow \frac{135}{180} = \frac{g}{200} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{g}{200} \rightarrow g = \frac{3 \cdot 200}{4} \rightarrow g = 150 \\ \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{135}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\}$$

مثال 2:  $250^g$  مساوی به چند درجه و چند رادیان میشود؟



$$\begin{array}{l}
 G = 250 \\
 D = ? \\
 R = ?
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{G}{200} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{250}{200} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{D}{180} \rightarrow D = \frac{5 \cdot 180}{4} \rightarrow D = 225^\circ \\
 \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{250}{200} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{5\pi}{4}
 \end{array}
 \right.$$

مثال 3:  $\frac{5\pi}{6}$  رادیان را از جنس درجه و گراد محاسبه کنید؟

$$\begin{array}{l}
 R = \frac{5\pi}{6} \\
 D = ? \\
 G = ?
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{D}{180} \rightarrow D = \frac{5 \cdot 180}{6} \rightarrow D = 150^\circ \\
 \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \rightarrow \frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{G}{200} \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{G}{200} \rightarrow G = \frac{5 \cdot 200}{6} \rightarrow G = \frac{500}{3}
 \end{array}
 \right.$$

**نکته 1:** اگر بخواهیم رادیان را به درجه تبدیل نماییم کافی است به جای  $\pi = 180^\circ$  را قیمت گذاری کنیم.

**نکته 2:** اگر بخواهیم رادیان را به گراد تبدیل نماییم کافی است به جای  $\pi = 200^g$  را قیمت گذاری کنیم.

**نکته 3:** اگر بخواهیم درجه را به رادیان تبدیل نماییم کافی است زاویه را ضرب  $\frac{\pi}{180}$  نماییم.

**نکته 4:** اگر بخواهیم گراد را به رادیان تبدیل نماییم کافی است زاویه را ضرب  $\frac{\pi}{200}$  نماییم.

**نکته 5:** اگر بخواهیم درجه را به گراد تبدیل نماییم کافی است زاویه را ضرب  $\frac{10}{9}$  نماییم زیرا.

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \rightarrow G = \frac{200 \cdot D}{180} \rightarrow G = \frac{10}{9} D$$

**نکته 6:** اگر بخواهیم گراد را به درجه تبدیل نماییم کافی است زاویه را ضرب  $\frac{9}{10}$  نماییم زیرا.

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \rightarrow D = \frac{180 \cdot G}{200} \rightarrow D = \frac{9}{10} G$$

مثال 4: زوایای ذیل برحسب رادیان داده شده است به درجه و گراد تبدیل کنید؟

$$1) \frac{3\pi}{4} = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180}{4} = 135^\circ \\ \frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 200}{4} = 150^g \end{cases} \quad 2) -\frac{7\pi}{3}$$

$$= \begin{cases} -\frac{7\pi}{3} = -\frac{7 \cdot 180}{3} = -420^\circ \\ -\frac{7\pi}{3} = -\frac{7 \cdot 200}{3} = -\frac{1400^g}{3} \end{cases}$$

$$3) \frac{0,2\pi}{2} = \frac{2}{10}\pi = \frac{\pi}{5} = \begin{cases} \frac{\pi}{5} = \frac{180}{5} = 36^\circ \\ \frac{\pi}{5} = \frac{200}{5} = 40^g \end{cases} \quad 4) \frac{7\pi}{2} = \begin{cases} \frac{7\pi}{2} = \frac{7 \cdot 180}{2} = 630^\circ \\ \frac{7\pi}{2} = \frac{7 \cdot 200}{2} = 700^g \end{cases}$$

مثال 5:  $\frac{1}{5} Rev$  مساوی به چند درجه ، گراد و رادیان است؟  $Rev$  (دوران)

$$\frac{1}{5} Rev = \begin{cases} \frac{1}{5} Rev = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ \\ \frac{1}{5} Rev = \frac{1}{5} \cdot 400^g = 80^g \\ \frac{1}{5} Rev = \frac{1}{5} \cdot 2\pi^R = \frac{2\pi^R}{5} \end{cases}$$



مثال 6: اگر اندازه قوس مقابل یک دایره که زاویه مرکزی آن  $60^\circ$  است  $12\pi cm$  باشد اندازه شعاع دایره مذکور چند است؟

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \\ s = 12\pi cm \\ r = ? \end{array} \right\} r = \frac{s}{\theta} = \frac{12\pi cm}{\frac{\pi}{3}} = 36 cm$$

مثال 7: در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  زاویه  $A = 90^\circ$  و قیمت زاویه  $C$  بر حسب درجه برابر با  $\frac{18}{5}$  وسعت زاویه  $B$  بر حسب گراد است اندازه زوایای  $B, C$  را دریابید؟

$$A + B + C = 180^\circ \dots\dots I$$

$$\begin{array}{l} A = 90^\circ \\ B + C = 90^\circ \\ C_D = \frac{18}{5} B_G \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} C_D = \frac{10}{9} \cdot \frac{18}{5} B_D \\ C = 4B \\ B = 18 \cdot \frac{\pi}{180} \rightarrow B = \frac{\pi}{10} \\ C = 72 \cdot \frac{\pi}{180} \rightarrow C = \frac{2\pi}{5} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} B + C = 90^\circ \\ B + 4B = 90^\circ \\ B = 18^\circ \\ C = 72^\circ \end{array}$$

مثال 8: مجموع دوزاویه  $18^\circ$  و تفاضل آنها 5 گراد است اندازه دو زاویه را بر حسب رادیان محاسبه کنید؟

$$\begin{cases} x + y = 18^\circ \\ x - y = 5^g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 18 \cdot \frac{\pi}{180} \\ x - y = 5 \cdot \frac{\pi}{200} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{10} \\ x - y = \frac{\pi}{40} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} \\ y = \frac{3\pi}{80} \end{cases}$$

مثال 9: کدام زاویه است که اگر بر وسعت آن بر حسب درجه عدد 15 افزوده شود اندازه آن بر حسب گراد بدست می آید؟

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \rightarrow 10D = 9G \rightarrow 10D = 9(D + 15) \rightarrow 10D = 9D + 135 \rightarrow D = 135^\circ$$

$$135^\circ = 150^g$$

مثال 10: مجموع دوزاویه  $17^\circ$  و تفاضل آنها 17 گراد است مقدار این دوزاویه را دریابید؟

$$\begin{cases} x + y = 17^\circ \\ x - y = 17^g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 17^\circ \\ x - y = 17 \cdot \frac{9}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 17^\circ \\ x - y = \frac{153}{10} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{323}{10} \rightarrow x = \frac{323}{20} \\ x - y = \frac{153}{10} \rightarrow y = \frac{846}{1000} \end{cases}$$

مثال 11: وسعت یک زاویه بر حسب درجه مفروض است اگر به این زاویه عدد 4 اضافه شود وسعت آن از جنس گراد به دست می آید قیمت این زاویه مساوی است به ؟

$$x^g = x^D + 4 \rightarrow \frac{10}{9} x^D = x^D + 4 \rightarrow 10x^D = 9x^D + 36 \rightarrow x^D = 36$$

فعالیت :

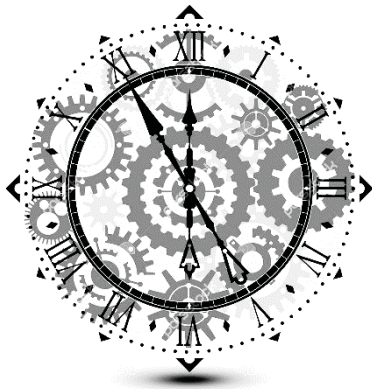




- 1: اگر مجموع دوزاویه  $100^g$  و یکی از این دوزاویه  $36$  درجه باشد زاویه دیگر چند گراد است؟
- 2: چرخ یک طیاره در هر ساعت  $3000$  دور حرکت یکنواخت می نماید در یک ثانیه چند رادیان را طی میکند.
- 3: مجموع دوزاویه  $152^\circ$  است اگر اندازه یکی از آنها برحسب درجه برابر به اندازه دیگری بر حسب گراد باشد اندازه هرکدام را برحسب رادیان محاسبه کنید؟
- 4:  $A, B, C, D$  زوایای یک چهارضلعی میباشند اگر  $A + D = 240^\circ$  و  $C + D = 200^g$  و  $B + D =$  رادیان باشند اندازه زوایای این چهارضلعی را برحسب درجه بدست آورید؟  $\frac{2\pi}{3}$
- 5: جمع سه زاویه  $240$  گراد است اگر زاویه اولی  $40$  گراد و دومی  $\frac{3\pi}{4}$  رادیان باشد زاویه سومی چند درجه است.

## زاویه بین عقربه ساعت گرد و دقیقه گرد:

اگر ساعت را به  $h$  و دقیقه را به  $m$  نشان دهیم دوزاویه بین دو عقربه در ساعت  $h:m$  تشکیل خواهد شد که اندازه آن از فرمول ذیل بدست می آید.



$$\theta_1 = \frac{|60h - 11m|}{2} = |30h - 5,5m|$$

$$\theta_2 = 360 - \frac{|60h - 11m|}{2} = 360 - \theta_1$$

## مثالها

مثال 1: در ساعت  $2:30$  زاویه بین عقربه ساعت گرد و دقیقه گرد را محاسبه کنید؟

$$h = 2 \quad m = 30 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} h \\ m \end{matrix}} \right\} \theta_1 = \frac{|60h - 11m|}{2} = \frac{|60 \cdot 2 - 11 \cdot 30|}{2} = \frac{|120 - 330|}{2} = 105^\circ$$

مثال 2: بین ساعت  $3$  و  $4$  کدام وقت عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار برهم منطبق میگردند.

$$\theta = \frac{|60h - 11m|}{2} \rightarrow \theta = 0^\circ$$

$$0 = \frac{60h - 11m}{2} \rightarrow 0 = \frac{60 \cdot 3 - 11m}{2} \rightarrow 180 - 11m = 0 \rightarrow m = 16,36$$

در ساعت  $3:16$  عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار بالای هم منطبق میگردند.

مثال 3: بین ساعت  $4$  و  $5$  در کدام دقایق عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار برهم عمود میباشند.

$$\theta = \frac{|60h - 11m|}{2} \rightarrow \theta = 90^\circ$$



$$90 = \frac{60.4 - 11m}{2} \rightarrow 240 - 11m = 180 \rightarrow 240 - 180 = 11m \rightarrow m = 38,18$$

در ساعت 38:4 عقربه ساعت شمار دقیقه شمار بالای هم عمود اند.

### زوایای کوترمینل:

تمامی زوایای که در حالت معیاری ضلع دوم آنها برهم منطبق باشند به نام زوایای کوترمینل یاد میشوند. و هر زوایای دارای بینهایت زوایای کوترمینل میباشد و برای دریافت زوایای کوترمینل برحسب درجه کافی است آن را با 360 جمع و تفریق نماییم

### مثالها

مثال 1: زوایای کوترمینل  $60^\circ$  را بنویسید؟

$$x = k \cdot 360^\circ + \theta \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.360 + 60 = 420 \\ x_2 = 2.360 + 60 = 780 \\ x_3 = 3.360 + 60 = 1140 \\ \vdots \\ x_n = k \cdot 360^\circ + 60 \\ x_{n+1} = 60 - 1.360 = -300 \\ x_{n+2} = 60 - 2.360 = -660 \\ \vdots \\ x_k = 60 - k \cdot 360 \end{cases}$$

مثال 2: کوچکترین زوایای کوترمینل مثبت  $1100^\circ$  را محاسبه کنید؟

حل: برای دریافت آن زوایای را تقسیم 360 می نماییم.

$$1100^\circ = 3.360 + 20$$

کوچکترین زوایای کوترمینل  $1100^\circ$  زوایای  $20^\circ$  میباشد.

مثال 3: 4 زوایای کوترمینل برای  $\frac{\pi}{6}$  رادیان بنویسید.

$$\frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, 6\pi + \frac{\pi}{6}, 8\pi + \frac{\pi}{6}$$

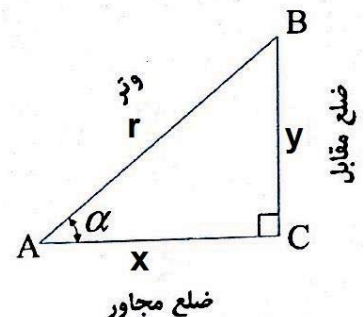
### نسبت های مثلثاتی:

بعضی ارتباطات بین اضلاع و زوایای یک مثلث وجود دارد که بنام نسبت های مثلثاتی یاد میشود و بصورت عموم شش نوع نسبت های مثلثاتی وجود دارد.

$$1) \sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$$

$$2) \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$3) \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{y}{x}$$





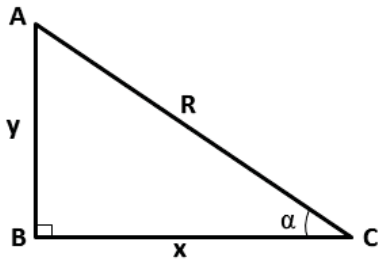
$$4) \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{x}{y}$$

$$5) \sec \alpha = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}} = \frac{r}{x}$$

$$6) \csc \alpha = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}} = \frac{r}{y}$$

## روابط اساسی در مثلثات :

بین نسبت های مثلثاتی ارتباطات ذیل وجود دارد که بنام روابط اصلی یاد میشوند.



$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{1}{\csc \alpha} \\ \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \end{array} \right\} \rightarrow \sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \end{array} \right\} \rightarrow \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$4) \left. \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{array} \right\} \rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$6) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$7) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$8) 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

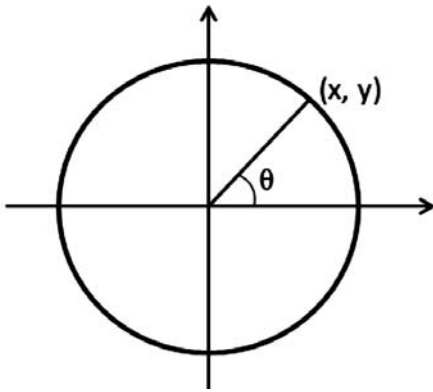
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \div \cos^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$9) 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

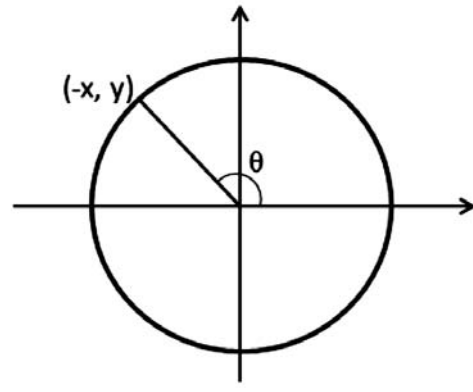
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \div \sin^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

## علامه نسبت های مثلثاتی در چهار ناحیه :

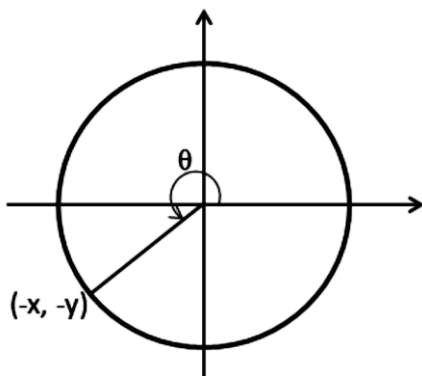
طوری که میدانیم سیستم کمیات وضعیه قائم سطح مستوی را به چهار ناحیه تقسیم می نماید طوری که ناحیه اول  $(+, +)$  ، ناحیه دوم  $(-, +)$  ، ناحیه سوم  $(-, -)$  و ناحیه چهارم  $(+, -)$  میباشد



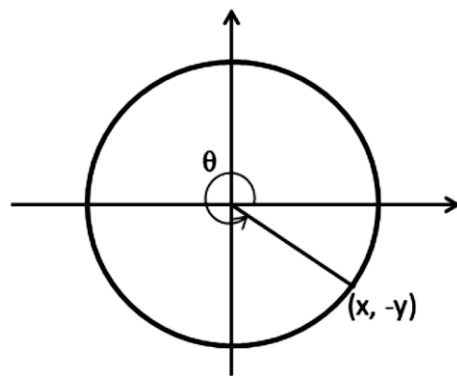
ضلع دوم زاویه در ربع اول قرار دارد بناء همه نسبت مثلثاتی مثبت است.



ضلع دوم زاویه در ربع دوم قرار دارد بناء نسبت مثلثاتی  $\sin \theta$  و  $\csc \theta$  مثبت بوده و متباقی منفی است.



ضلع دوم زاویه در ربع سوم قرار دارد، نسبت های مثلثاتی  $\tan \theta$  و  $\cot \theta$  مثبت است و بقیه نسبت های مثلثاتی منفی است.

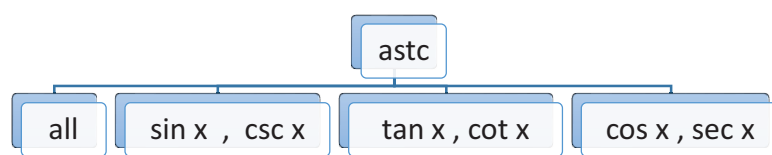


ضلع دوم زاویه در ربع چهارم قرار دارد، نسبت های مثلثاتی  $\cos \theta$  و  $\sec \theta$  مثبت و بقیه نسبت های مثلثاتی منفی

$\sin \theta > 0$	$\sin \theta > 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta < 0$	$\tan \theta > 0$
$\cot \theta < 0$	$\cot \theta > 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta > 0$	$\csc \theta > 0$
$\sin \theta < 0$	$\sin \theta < 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta > 0$	$\tan \theta < 0$
$\cot \theta > 0$	$\cot \theta < 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta < 0$	$\csc \theta < 0$

$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	نسبت های مثلثاتی
+	+	+	+	+	+	ربع اول
+	-	-	-	-	+	دوم
-	-	+	+	-	-	سوم
-	+	-	-	+	-	چهارم

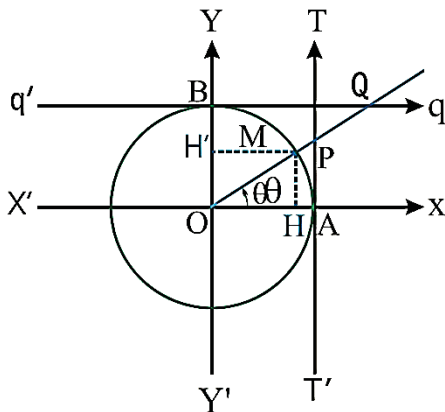
یادداشت: برای یادگیری آسانتر می توان از کلمه (astc) استک و یا هستک استفاده نمود.





## محورهای نسبت مثلثاتی :

بنابر قرارداد محور  $x$  را بنام محور  $\cos x$  و محور  $y$  را بنام محور  $\sin x$  یاد میکند و متباقی محور قرار ذیل تعریف شده است.



$$(r = OM = OA = OB = 1)$$

$$\sin \theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}} = \overline{OH'} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$$

$$= \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

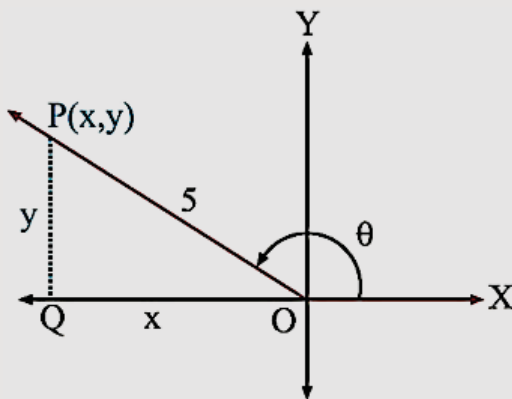
$$\tan \theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \overline{AP} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\overline{OH}}{HM}$$

$$= \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \overline{BQ}$$

$$\sec \theta = \frac{OM}{OH} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \overline{BQ} \quad , \quad \csc \theta = \frac{OM}{HM} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = \overline{OQ}$$

## مثالها

مثال 1: اگر در حالت معیاری ضلع دوم زاویه در ربع دوم واقع و  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  باشد متباقی های مثلثاتی  $\theta$  را دریابید؟



$$x = -3 \quad , \quad r = 5$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow (-3)^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow y = 4$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \quad , \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$$

مثال 2: اگر  $\theta$  یک زاویه در حالت معیاری و ضلع دوم آن در نقطه  $(3, -5)$  قرار داشته باشد تمام نسبت های مثلثاتی این زاویه را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -5 \\ r = \sqrt{34} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow 3^2 + (-5)^2 = r^2 \rightarrow 9 + 25 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{34} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{\sqrt{34}} \quad , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{34}} \quad , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{5}{3} \\ \cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{5} \quad , \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{3} \quad , \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{\sqrt{34}}{5} \end{array}$$

مثال 3: علامه نسبت های مثلثاتی ذیل را بطور شفاهی بگویید؟

$$1) \sin 34 = + \quad , \quad 2) \cos 231 = - \quad , \quad 3) \tan 345 = - \quad , \quad 4) \cot 125 = -$$



5)  $\sec 225 = -$  , 6)  $\csc 179 = +$  , 7)  $\cos 340 = +$  , 8)  $\tan 321 = -$   
 مثال 4: اگر  $\sin \theta > 0$  و  $\cos \theta < 0$  باشد زاویه  $\theta$  در کدام ربع قرار دارد؟

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta > 0 \rightarrow I, II \\ \cos \theta < 0 \rightarrow II, III \end{array} \right\} \rightarrow II$$

در ناحیه دوم قرار دارد زیرا ناحیه دوم در هر دو مشترک است.

مثال 5: اگر  $\tan \theta < 0$  ,  $\cos \theta > 0$  باشد زاویه در کدام ناحیه قرار دارد؟

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta > 0 \rightarrow I, IV \\ \tan \theta < 0 \rightarrow II, IV \end{array} \right\} \rightarrow IV$$

در ناحیه چهارم قرار دارد زیرا ناحیه چهارم در هر دو مشترک است.

مثال 6: اگر  $\sin x = \frac{1}{2}$  و  $\pi > \theta > \frac{\pi}{2}$  باشد متباقی نسبت های مثلثاتی آن را محاسبه کنید؟

حل: ضلع دوم زاویه در ناحیه دوم سیستم کمیات وضعیه قرار دارد فقط نسبت های مثلثاتی  $\sin \theta$  و  $\csc \theta$  مثبت و متباقی منفی میباشد.

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} = \frac{y}{r} \\ y = 1 \\ r = 2 \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 = 2^2 - 1^2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot \theta = \frac{x}{y} = -\sqrt{3} , \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}} , \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = 2 \end{array}$$

مثال 7: اگر  $\cos \theta = -\frac{1}{4}$  و  $\frac{3\pi}{2} > \theta > \pi$  باشد متباقی نسبت های مثلثاتی آن را محاسبه کنید؟

حل: ضلع دوم زاویه در ناحیه سوم قرار دارد بناء نسبت های مثلثاتی  $\cot \theta$  ,  $\tan \theta$  مثبت بوده و متباقی آن منفی میباشد.

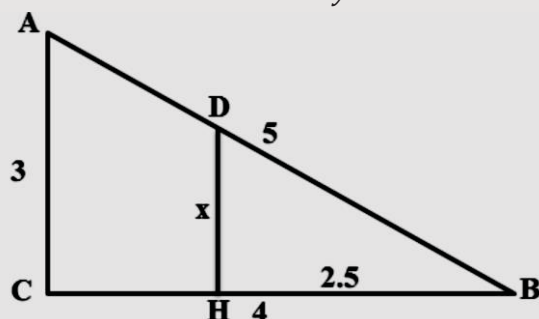
$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = -\frac{1}{4} = \frac{x}{r} \\ x = -1 \\ r = 4 \\ y = -\sqrt{15} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y^2 = 4^2 + (-1)^2 \rightarrow y^2 = 15 \rightarrow y = -\sqrt{15} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{15}}{4} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{4} , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{15}}{-1} = \sqrt{15} \\ \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} , \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{4}{-1} = -4 , \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{4}{-\sqrt{15}} \end{array}$$

مثال 8: اگر  $\tan \theta = -2$  و  $\frac{3\pi}{2} > \theta > 2\pi$  باشد متباقی نسبت های مثلثاتی آن را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} \tan \theta = -\frac{2}{1} = \frac{y}{x} \\ y = -2 \\ x = 1 \\ r = \sqrt{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow 1^2 + (-2)^2 = r^2 \rightarrow 5 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{5} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{2}{\sqrt{5}} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}} , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{2}{1} = -2 \\ \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} , \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} , \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{5}}{-2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

مثال 9: در شکل ذیل نسبت های مثلثاتی زاویه A و

قیمت x را دریابید؟



$$\begin{array}{l} \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} , \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \\ \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3} , \quad \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \\ \sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} , \quad \csc A = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{4} \end{array}$$

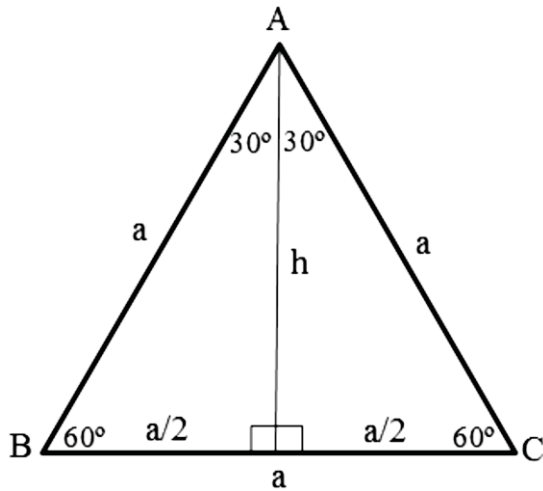
$$\Delta ABC \rightarrow \tan B = \frac{3}{4} , \quad \Delta BHD \rightarrow \tan B = \frac{x}{2,5} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x}{2,5} \rightarrow 4x = 7,4 \rightarrow x = 1,8$$



نسبت های مثلثاتی زوایای مشهور:

### 1- نسبت مثلثاتی زاویه $30^\circ$ ، $60^\circ$ :

برای دریافت نسبت های مثلثاتی زوایای  $30^\circ$  درجه و  $60^\circ$  درجه از مثلث متساوی الاضلاع استفاده میکنیم. طوری که در این مثلث ناصف عمودی ناصف الزاویه ، ارتفاع و میانه برهم منطبق است.



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

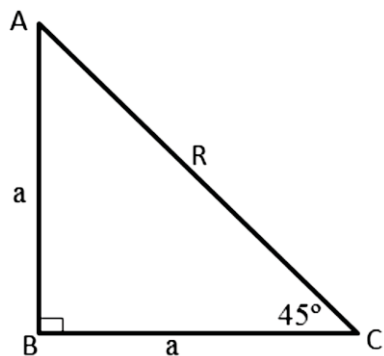
$$\csc 60^\circ = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

نسبت های مثلثاتی  $45^\circ$ :

برای دریافت نسبت های مثلثاتی  $45^\circ$  از مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین استفاده می نمایم.

طبق قضیه فیثاغورث:

$$R^2 = a^2 + a^2 \rightarrow R^2 = 2a^2 \rightarrow R = \sqrt{2}a$$



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

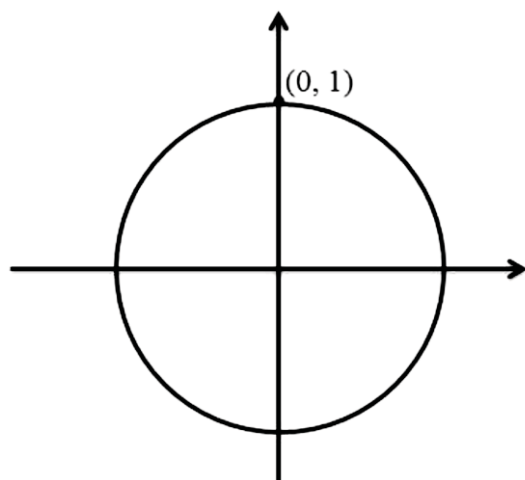
$$\csc 45^\circ = \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

## نسبت های مثلثاتی زوایای سرحدی :

زوایای که ضلع دوم آنها در سرحد جدایی دو ربع قرار گرفته اند زاویه های سرحدی نامیده میشود و این زاویه های عبارت اند از  $270, 180, 90, 0$  و  $360$  درجه است.

دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه  $90$  درجه  $(\frac{\pi}{2})$ :

برای دریافت نسبت های مثلثاتی این زاویه از دایره مثلثاتی استفاده میکنیم ، ضلع دوم این زاویه منطبق بر جهت مثبت محور  $y$  است و نقطه  $p(0,1)$  روی دایره مثلثاتی بالای ضلع دوم زاویه  $90$  درجه واقع میشود.



$$x = 0 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad r = 1$$

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

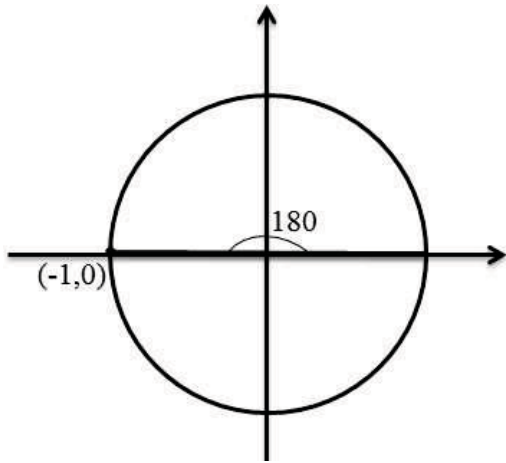
$$\csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$





دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه  $180^\circ$  درجه  $(\pi)$ :

در حالت معیاری ضلع دوم زاویه  $180^\circ$  درجه برجهت منفی محور  $x$  منطبق است و نقطه  $p(-1,0)$  بالای ضلع دوم این زاویه واقع میشود.



$$x = -1 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad r = 1$$

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

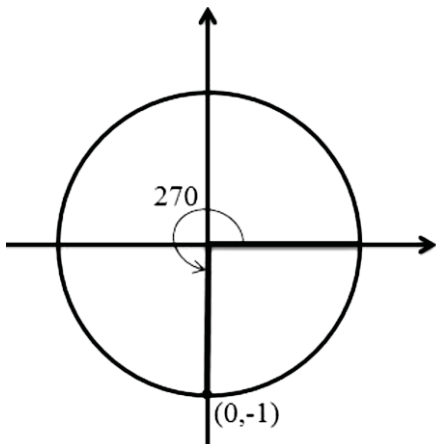
$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$\sec 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\csc 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه  $270^\circ$  درجه  $(\frac{3\pi}{2})$ :

در حالت معیاری ضلع دوم زاویه  $270^\circ$  درجه برجهت منفی محور  $y$  منطبق است و نقطه  $p(0,-1)$  بالای ضلع دوم این زاویه واقع میشود.



$$x = 0 \quad , \quad y = -1 \quad , \quad r = 1$$

$$\sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$\cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

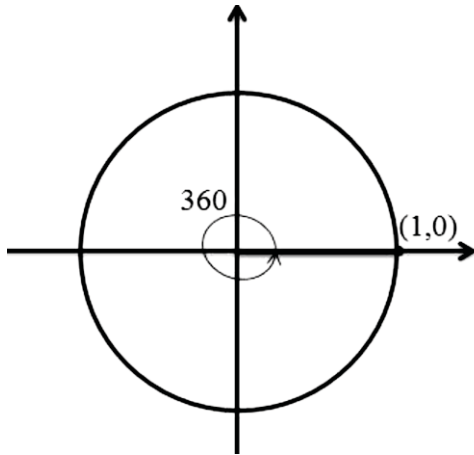
$$\sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه صفر  $360^\circ = 2\pi$  درجه :



زوایای 0 درجه و 360 درجه کوترمینل هم اند و ضلع دوم آن ها بالای هم منطبق اند و تمام نسبت های مثلثاتی آنها باهم مساوی اند ، ضلع دوم زاویه 360 درجه درحالت معیاری منطبق بر جهت مثبت محور  $x$  است و نقطه  $p(1,0)$  روی ضلع دوم این زاویه قرار دارد.



$$x = 1 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad r = 1$$

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\sec 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

جدول نسبت های مثلثاتی زاویه های خاص

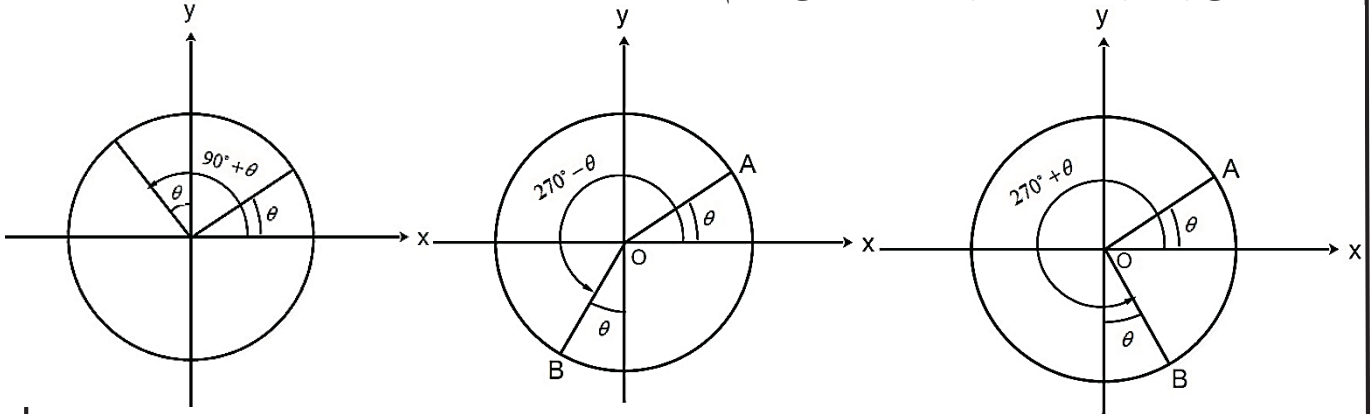
زاویه $\theta$	زاویه $\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
بر حسب درجه	بر حسب رادیان						
0	0	0	1	0	تعریف نشده	1	تعریف نشده
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	1
180	$\pi$	0	-1	0	تعریف نشده	-1	تعریف نشده
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	-1



رابطه بین نسبت های مثلثاتی زاویه حاده و زوایای دیگر :

نسبت های های مثلثاتی زوایای  $(\frac{\pi}{2} \pm \theta)$  و  $(\frac{3\pi}{2} \pm \theta)$ :

برای دریافت نسبت های مثلثاتی زوایای که در این حالت قرار دارند نسبت های مثلثاتی را تغییر داده یعنی  $\sin \theta$  تبدیل به  $\cos \theta$  ،  $\tan \theta$  تبدیل به  $\cot \theta$  و  $\sec \theta$  تبدیل به  $\csc \theta$  و برعکس آن شده و علامه نسبت مثلثاتی را نظر به موقعیت زاویه انتخاب می نماییم.



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = +\cos \theta$$

$$= -\cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$= +\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$= -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

$$= -\tan \theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\csc \theta$$

$$= +\csc \theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = +\sec \theta$$

$$= -\sec \theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = +\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = +\tan \theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\csc \theta$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sec \theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$$

مثالها

مثال 1: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $120^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right)$$



$$\tan 120^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 120^\circ = \sec\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\csc 30^\circ = -2$$

$$\csc 120^\circ = \csc\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) = +\sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

مثال 2: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $225^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$225^\circ = \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} - 45^\circ$$

$$\sin 225^\circ = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 45^\circ\right) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225^\circ = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 45^\circ\right) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - 45^\circ\right) = +\cot 45^\circ = 1$$

$$\cot 225^\circ = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 45^\circ\right) = +\tan 45^\circ = 1$$

$$\sec 225^\circ = \sec\left(\frac{3\pi}{2} - 45^\circ\right) = -\csc 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\csc 225^\circ = \csc\left(\frac{3\pi}{2} - 45^\circ\right) = -\sec 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال 3: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $330^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$330^\circ = \frac{11\pi}{6} = \left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right)$$

$$\sin 330^\circ = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right) = +\sin 60^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^\circ = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right) = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 330^\circ = \cot\left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 330^\circ = \sec\left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right) = +\csc 60^\circ = +\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 330^\circ = \csc\left(\frac{3\pi}{2} + 60^\circ\right) = -\sec 60^\circ = -2$$

مثال 4: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $300^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$300^\circ = \frac{5\pi}{3} = \left(\frac{3\pi}{2} + 30^\circ\right)$$



$$\cos 300^\circ = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 30^\circ\right) = +\sin 30^\circ = +\frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 300^\circ = \cot\left(\frac{3\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

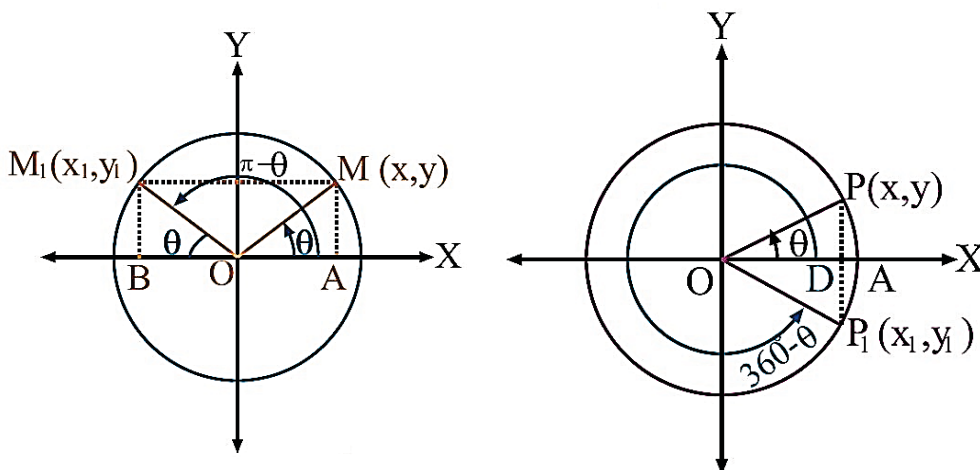
$$\sec 300^\circ = \sec\left(\frac{3\pi}{2} + 30^\circ\right) = +\csc 30^\circ = +2$$

$$\csc 300^\circ = \csc\left(\frac{3\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

فعالیت : نسبت های مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  ,  $150^\circ$  ,  $210^\circ$  ,  $240^\circ$  ,  $315^\circ$  را محاسبه کنید؟

نسبت های مثلثاتی زوایای  $(\pi \pm \theta)$  ,  $(2\pi \pm \theta)$  :

برای دریافت نسبت های مثلثاتی زوایای که در این حالت قرار دارند نسبت های مثلثاتی را تغییر نداده و فقط علامه نسبت مثلثاتی را نظر به موقعیت زاویه انتخاب می نماییم.



$$\sin(\pi - \theta) = +\sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$= -\tan \theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$$

$$= -\cot \theta$$

$$\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$$

$$= +\sec \theta$$

$$\csc(\pi - \theta) = +\csc \theta$$

$$= -\csc \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = +\tan \theta$$

$$\cot(\pi + \theta) = +\cot \theta$$

$$\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$$

$$\csc(\pi + \theta) = -\csc \theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2\pi - \theta)$$

$$\cot(2\pi - \theta)$$

$$\sec(2\pi - \theta)$$

$$\csc(2\pi - \theta)$$

مثالها

مثال 1: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $150^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$150^\circ = \frac{5\pi}{6} = (\pi - 30^\circ)$$



$$\sin 150^\circ = \sin(\pi - 30^\circ) = + \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(\pi - 30^\circ) = - \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(\pi - 30^\circ) = - \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(\pi - 30^\circ) = - \cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \sec(\pi - 30^\circ) = - \sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 150^\circ = \csc(\pi - 30^\circ) = + \csc 30^\circ = 2$$

مثال 2: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $225^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$225^\circ = \frac{5\pi}{4} = (\pi + 45^\circ)$$

$$\sin 225^\circ = \sin(\pi + 45^\circ) = - \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225^\circ = \cos(\pi + 45^\circ) = - \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \tan(\pi + 45^\circ) = + \tan 45^\circ = +1$$

$$\cot 225^\circ = \cot(\pi + 45^\circ) = + \cot 45^\circ = +1$$

$$\sec 225^\circ = \sec(\pi + 45^\circ) = - \sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$

$$\csc 225^\circ = \csc(\pi + 45^\circ) = - \csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

مثال 3: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $330^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$330^\circ = \frac{11\pi}{6} = (2\pi - 30^\circ)$$

$$\sin 330^\circ = \sin(2\pi - 30^\circ) = - \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos(2\pi - 30^\circ) = + \cos 30^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^\circ = \tan(2\pi - 30^\circ) = - \tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 330^\circ = \cot(2\pi - 30^\circ) = - \cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

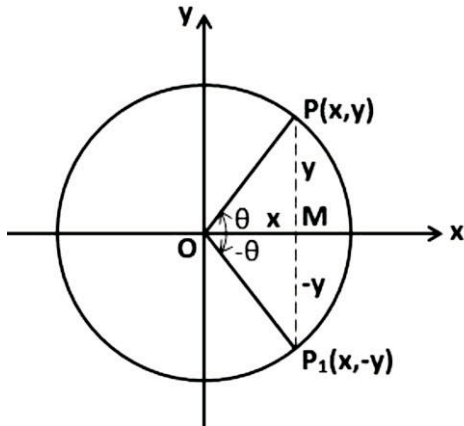
$$\sec 330^\circ = \sec(2\pi - 30^\circ) = + \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 330^\circ = \csc(2\pi - 30^\circ) = - \csc 30^\circ = -2$$

**فعالیت:** تمام نسبت های مثلثاتی زوایای  $120^\circ$  ,  $135^\circ$  ,  $210^\circ$  ,  $240^\circ$  ,  $300^\circ$  ,  $315^\circ$  را محاسبه کنید؟

نسبت های مثلثاتی زاویه  $(-\theta)$ :

برای دریافت نسبت های مثلثاتی  $(-\theta)$  نسبت مثلثاتی را تغییر نداده و علامه آن را نظر به ناحیه چهارم انتخاب میکنیم.



$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= +\cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta \\ \sec(-\theta) &= +\sec \theta \\ \csc(-\theta) &= -\csc \theta\end{aligned}$$

مثالها

مثال 1: تمام نسبت های مثلثاتی  $(-\frac{\pi}{6})$  را دریابید؟

$$\begin{aligned}\sin(-\frac{\pi}{6}) &= -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} & \cos(-\frac{\pi}{6}) &= +\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan(-\frac{\pi}{6}) &= -\tan(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} & \cot(-\frac{\pi}{6}) &= -\cot(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} \\ \sec(-\frac{\pi}{6}) &= +\sec(\frac{\pi}{6}) = \frac{2\sqrt{3}}{3} & \csc(-\frac{\pi}{6}) &= -\csc(\frac{\pi}{6}) = -2\end{aligned}$$

مثال 2: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $(-\frac{3\pi}{4})$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}-\frac{3\pi}{4} &= -135^\circ \\ \sin(-\frac{3\pi}{4}) &= -\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos(-\frac{3\pi}{4}) &= +\cos(\frac{3\pi}{4}) = +\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan(-\frac{3\pi}{4}) &= -\tan(\frac{3\pi}{4}) = -(-1) = 1 & \cot(-\frac{3\pi}{4}) &= -\cot(\frac{3\pi}{4}) = -(-1) = +1 \\ \sec(-\frac{3\pi}{4}) &= \sec(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} & \csc(-\frac{3\pi}{4}) &= -\csc(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

مثال 3: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $(-\frac{5\pi}{3})$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}-\frac{5\pi}{3} &= -300^\circ \\ \sin(-\frac{5\pi}{3}) &= -\sin(\frac{5\pi}{3}) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} & \cos(-\frac{5\pi}{3}) &= +\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan(-\frac{5\pi}{3}) &= -\tan(\frac{5\pi}{3}) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} & \cot(-\frac{5\pi}{3}) &= -\cot(\frac{5\pi}{3}) = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} \\ \sec(-\frac{5\pi}{3}) &= +\sec(\frac{5\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3} & \csc(-\frac{5\pi}{3}) &= -\csc(\frac{5\pi}{3}) = -(-2) = 2\end{aligned}$$



## روابط زوایای تکمیل کننده:

بصورت عموم آن زاویه که با زاویه دیگر مجموع شان  $90^\circ$  شود نسبت های مثلثاتی آن یعنی سین زاویه اول با کوساین زاویه دوم ، تانجانت زاویه اول با کوتانجانت زاویه دوم ، سیکنت زاویه اول با کوسیکنت زاویه دوم و برعکس آن مساوی است.

$$x + y = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \cos y$$

$$\cot x = \tan y$$

$$1) \sin 20^\circ = \cos 70^\circ$$

$$4) \cot 20^\circ = \tan 70^\circ$$

$$\cos x = \sin y$$

$$\sec x = \csc y$$

$$2) \cos 20^\circ = \sin 70^\circ$$

$$5) \sec 20^\circ = \csc 70^\circ$$

$$\tan x = \cot y$$

$$\csc x = \sec y$$

$$3) \tan 20^\circ = \cot 70^\circ$$

$$6) \csc 20^\circ = \sec 70^\circ$$

$$1) \sin 37^\circ = \cos 53^\circ$$

$$4) \cot 37^\circ = \tan 53^\circ$$

$$2) \cos 37^\circ = \sin 53^\circ$$

$$5) \sec 37^\circ = \csc 53^\circ$$

$$3) \tan 37^\circ = \cot 53^\circ$$

$$6) \csc 37^\circ = \sec 53^\circ$$

$$1) \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$4) \cot \frac{\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$2) \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$5) \sec \frac{\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{3}$$

$$3) \tan \frac{\pi}{6} = \cot \frac{\pi}{3}$$

$$6) \csc \frac{\pi}{6} = \sec \frac{\pi}{3}$$

## نسبت های مثلثاتی زوایای کوترمینل :

چون ضلع دوم زوایای کوترمینل در حالت استاندارد برهم منطبق هستند بنابراین تمام نسبت های مثلثاتی این زاویه ها بایکدیگر مساوی هستند.

$$\sin(2k + \theta) = \sin \theta$$

$$\cot(2k + \theta) = \cot \theta$$

$$\cos(2k + \theta) = \cos \theta$$

$$\sec(2k + \theta) = \sec \theta$$

$$\tan(2k + \theta) = \tan \theta$$

$$\csc(2k + \theta) = \csc \theta$$

## مثالها

مثال 1: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $1920^\circ$  را محاسبه کنید؟

حل : برای دریافت کوچکترین زاویه کوترمینل این زاویه را تقسیم 360 نموده و باقیمانده آن میباشد.

$$1920^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 120^\circ$$

$$\sin 1920^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 1920^\circ = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 1920^\circ = \sec 120^\circ = -2$$

$$\cos 1920^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot 1920^\circ = \cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 1920^\circ = \csc 120^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

مثال 2: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $\left(\frac{25\pi}{4}\right)$  را محاسبه کنید؟





$$\frac{25\pi}{4} = \frac{25 \cdot 180^\circ}{4} = 25 \cdot 45^\circ = 1125^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 45^\circ$$

$$\sin \frac{25\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{25\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{25\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = +1$$

$$\cot \frac{25\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = +1$$

$$\sec \frac{25\pi}{4} = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\csc \frac{25\pi}{4} = \csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

مثال 3: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $(-\frac{29\pi}{3})$  را محاسبه کنید؟

$$-\frac{29\pi}{3} = -\frac{29 \cdot 180^\circ}{3} = -29 \cdot 60^\circ = -1740^\circ = -5 \cdot 360^\circ + 60^\circ$$

$$\sin(-\frac{29\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{29\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-\frac{29\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(-\frac{29\pi}{3}) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec(-\frac{29\pi}{3}) = \sec \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\csc(-\frac{29\pi}{3}) = \csc \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

مثال 4: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $(20\pi + \frac{\pi}{6})$  را محاسبه کنید؟

$$\sin(20\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(20\pi + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(20\pi + \frac{\pi}{6}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(20\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec(20\pi + \frac{\pi}{6}) = \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(20\pi + \frac{\pi}{6}) = \csc \frac{\pi}{6} = 2$$

مثال 5: حاصل افاده  $\frac{\sin 300}{1 - \cos 240}$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{\sin 300}{1 - \cos 240} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال 6: حاصل افاده  $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{4})(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{4})$  را محاسبه کنید؟

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

مثال 7: حاصل  $\tan x + \frac{1}{\tan x}$  را محاسبه کنید؟

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cot x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$



مثال 8: حاصل  $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) - \sin(2\pi - x) = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) - \sin(2\pi - x) = \sin x - (-\sin x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$$

مثال 9: افاده مثلثاتی  $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \tan x \cdot \cot x = ?$  را ساده سازید؟

$$\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \tan x \cdot \cot x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \tan x \cdot \frac{1}{\tan x} = 1 + 1 = 2$$

مثال 10: حاصل افاده  $1 + \sin \frac{\pi}{7} + \sin(-\frac{\pi}{7}) = ?$  را محاسبه کنید؟

$$1 + \sin \frac{\pi}{7} + \sin(-\frac{\pi}{7}) = 1 + \sin \frac{\pi}{7} - \sin(\frac{\pi}{7}) = 1$$

مثال 11: حاصل افاده  $4 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} = ?$  را محاسبه کنید؟

$$4 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

مثال 12: افاده مثلثاتی  $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = ?$  را ساده سازید؟

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} &= \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x \end{aligned}$$

مثال 13: حاصل افاده  $\sin x + \tan x \cdot \cot x - \sin^2 x - \cos^2 x = ?$  را ساده سازید؟

$$\begin{aligned} \sin x + \tan x \cdot \cot x - \sin^2 x - \cos^2 x &= \sin x + \tan x \cdot \cot x - (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin x + 1 - 1 = \sin x \end{aligned}$$

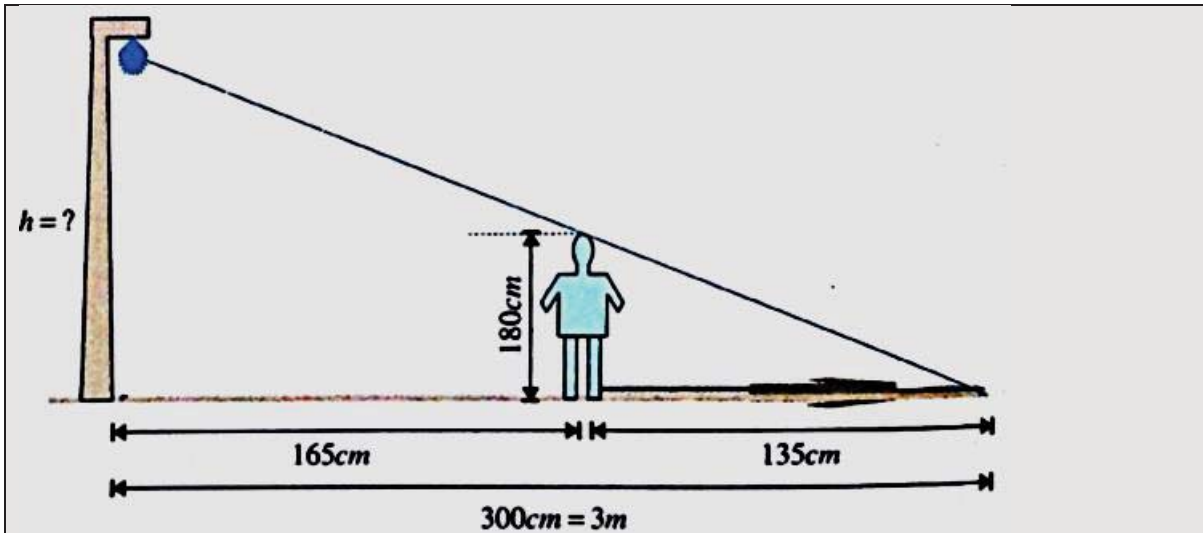
مثال 14: افاده مثلثاتی  $\sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)}} = ?$  را ساده سازید؟

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)}} &= \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}} = \sqrt{1 + 2 \sin x \cdot \cos x} \\ &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \sin x + \cos x \end{aligned}$$

مثال 15: حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{11} + \cos^2 \frac{\pi}{11}} = ?$  را بدست آورید؟

$$\frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{11} + \cos^2 \frac{\pi}{11}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 16: قد یک شخص  $180 \text{ cm}$  است این شخص در فاصله  $165 \text{ cm}$  از یک برج چراغ دار واقع است اگر طول سایه آن شخص  $135 \text{ cm}$  باشد ارتفاع برج چراغ دار را محاسبه کنید؟



$$\tan x = \frac{180}{135} = \frac{h}{300}$$

$$h = \frac{180 \cdot 300}{135} = 400$$

$$h = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$$

مثال 17: حاصل افاده  $\frac{\cos 210 - \sin 420}{\sin(-240) + \cos(-30)}$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{\cos 210 - \sin 420}{\sin(-240) + \cos(-30)} = \frac{\cos(\pi + 30) - \sin(2\pi + 60)}{-\sin(240) + \cos(30)}$$

$$= \frac{-\cos 30 - \sin 60}{-\sin(\pi + 60) + \cos 30} = \frac{-\cos 30 - \sin 60}{+\sin(60) + \cos 30} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{+\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{+2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -1$$

مثال 18: حاصل  $\frac{\tan(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} + x) - \sin^3(\frac{7\pi}{2} - x)}{\cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x)}$  را ساده سازید؟



$$\frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

$$= \frac{\tan\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

$$= \frac{-\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

$$= \frac{-\cot x \cdot \sin x - (-\cos^3 x)}{\sin x \cdot (-\cot x)} = \frac{-\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x + \cos^3 x}{-\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{-\cos x + \cos^3 x}{-\cos x} = \frac{-\cos x (1 - \cos^2 x)}{-\cos x} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

مثال 19: حاصل عبارت  $\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x} = ?$  را ساده سازید؟

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\csc^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

مثال 20: اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد مقدار  $\sin x \cdot \cos x = ?$  و  $\sin^3 x + \cos^3 x = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} \sin x + \cos x = \frac{1}{3} \\ \sin x \cdot \cos x = ? \\ \sin^3 x + \cos^3 x = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \rightarrow \frac{1}{9} - 1 = 2 \sin x \cdot \cos x \\ -\frac{8}{9} = 2 \sin x \cdot \cos x \rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{4}{9} \end{array}$$

$$(\sin x + \cos x)^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + 2 \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + 2 \left(-\frac{4}{9}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{27} + \frac{8}{27}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

مثال 21: اگر  $\cos x = \frac{2m-3}{7}$  باشد و  $x$  در ناحیه سوم قرار داشته باشد حدود تغییرات  $m$  را دریابید؟  
حل: در ناحیه سوم  $-1 < \cos x < 0$  می‌باشد.

$$-1 < \frac{2m-3}{7} < 0 \rightarrow -1.7 < 7 \cdot \frac{2m-3}{7} < 7.0 \rightarrow -7 < 2m-3 < 0 \rightarrow$$

$$-7+3 < 2m-3+3 < 0+3 \rightarrow -4 < 2m < +3 \rightarrow -\frac{4}{2} < \frac{2m}{2} < +\frac{3}{2}$$

$$-2 < m < +\frac{3}{2}$$

مثال 22: اگر  $\cos(x - 5\pi) = \frac{3}{5}$  باشد و  $x$  در ناحیه دوم قرار داشته باشد  $\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = ?$  را محاسبه کنید؟



$$\left. \begin{array}{l} \cos(x - 5\pi) = \frac{3}{5} \\ \cos(x - \frac{7\pi}{2}) = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos(x - 5\pi) = \frac{3}{5} \rightarrow \cos(5\pi - x) = \frac{3}{5} \rightarrow -\cos x = \frac{3}{5} \rightarrow \cos x = -\frac{3}{5} \\ \cos(x - \frac{7\pi}{2}) = \cos(\frac{7\pi}{2} - x) = -\sin x = -\frac{4}{5} \end{array}$$

$$\cos x = -\frac{3}{5} \rightarrow x = -3, r = 5, y = 4 \rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$



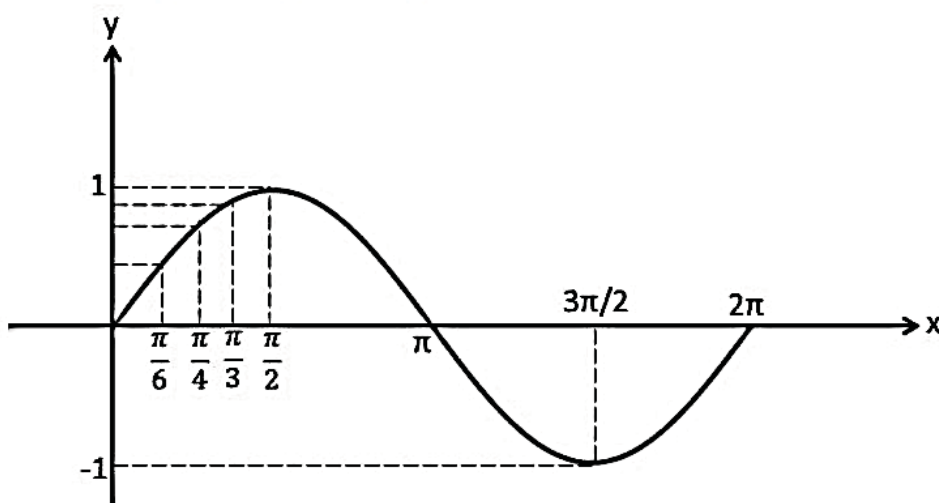
## فصل دوم

## گراف توابع مثلثاتی :

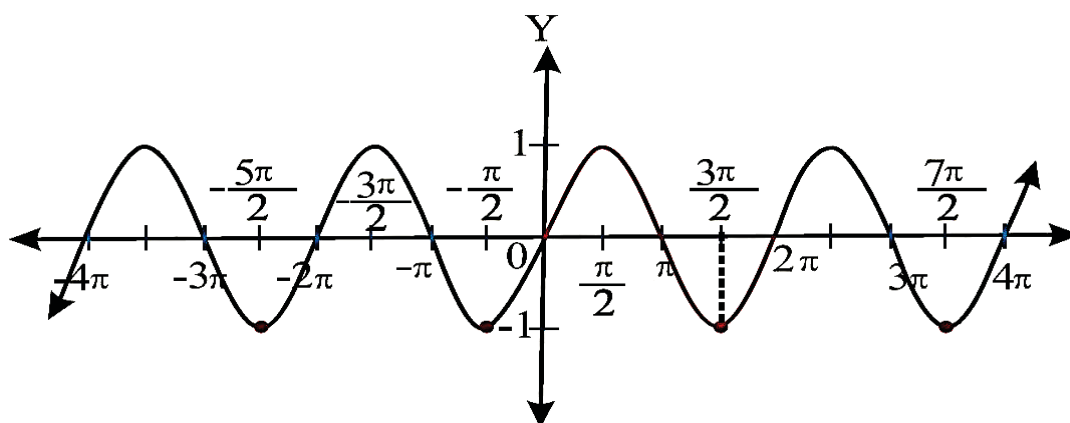
1- گراف تابع  $y = \sin x$ 

یک تابع پریودیک (دورانی) بوده و پریود آن  $2\pi$  میباشد. ناحیه تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی بوده و ناحیه قیمت آن  $[-1, +1]$  میباشد و برای رسم گراف آن ابتداء به متحول  $x$  قیمت داده و قیمت های تابع  $(y)$  را دریافت میکنیم. جوره های مرتب  $(x, y)$  تعیین شده را در سیستم کمیات وضعیه مشخص و سپس نقاط را به هم وصل میکنیم و گراف تابع مثلثاتی را رسم میکنیم.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



$x$	$-4\pi$	$-\frac{7\pi}{2}$	$-3\pi$	$-\frac{5\pi}{2}$	$-2\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	...
$y$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	...



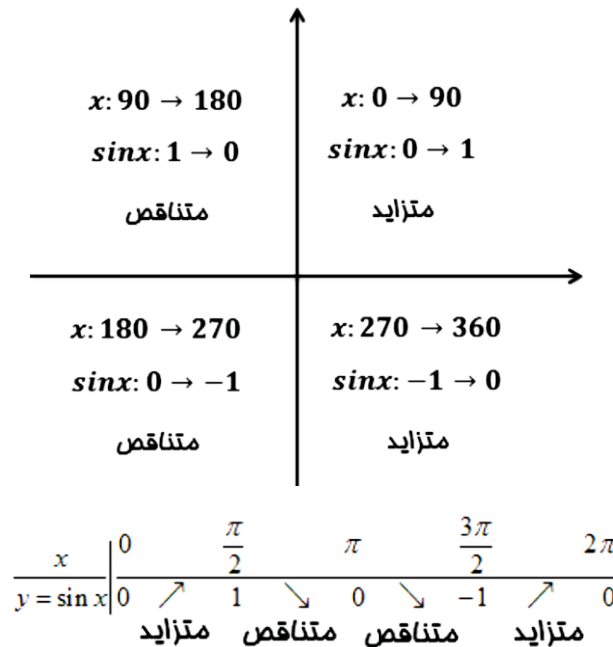
از بررسی گراف تابع  $y = \sin x$  به نتایج مهم ذیل میرسیم.

1- ناحیه تعریف تابع  $y = \sin x$  تمام اعداد حقیقی و ناحیه قیمت آن  $[-1, +1]$  میباشد.

2- تابع  $y = \sin x$  در تمام ساحه تعریف خود متمادی میباشد.



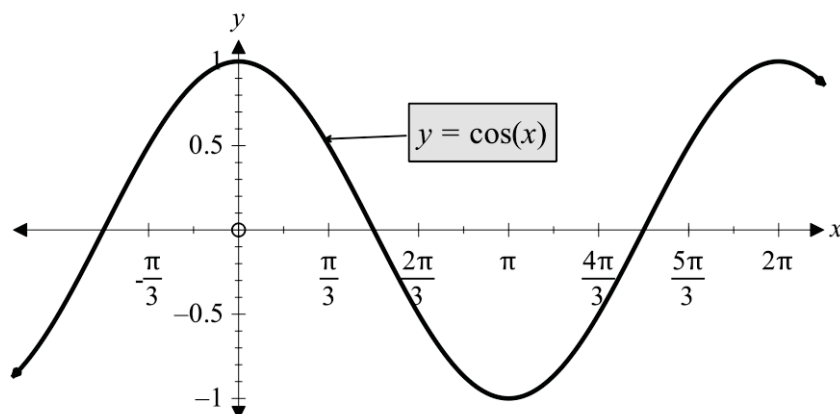
- 3- دوره تناوب تناوب این تابع  $2\pi$  میباشد.
- 4- تابع  $y = \sin x$  در تمام زاویه هاییکه مضرب تام از  $\pi$  باشند صفر است  $\sin(k\pi) = 0$
- 5- این تابع در تمام نقاط  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  دارای قیمت اعظمی و در نقاط  $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$  دارای قیمت اصغری است.
- 6- تحولات تابع  $y = \sin x$  در چهار ناحیه مثلثاتی به صورت ذیل است.



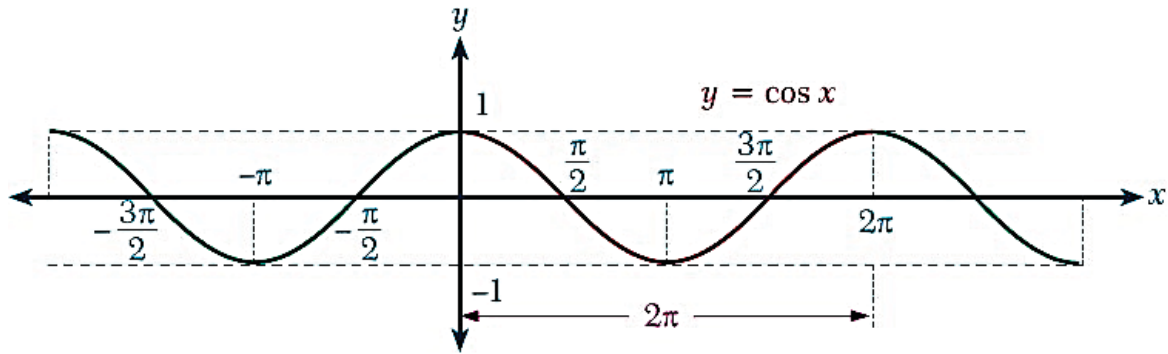
## 2- گراف تابع $y = \cos x$

یک تابع پیریودیک (دورانی) بوده و پیریود آن  $2\pi$  میباشد. ناحیه تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی بوده و ناحیه قیمت آن  $[-1, +1]$  میباشد و برای رسم گراف آن ابتداء به متحول  $x$  قیمت داده و قیمت های تابع ( $y$ ) را دریافت میکنیم. جوره های مرتب ( $x, y$ ) تعیین شده را در سیستم کمیات وضعیه مشخص و سپس نقاط را به هم وصل میکنیم و گراف تابع مثلثاتی را رسم میکنیم.

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1

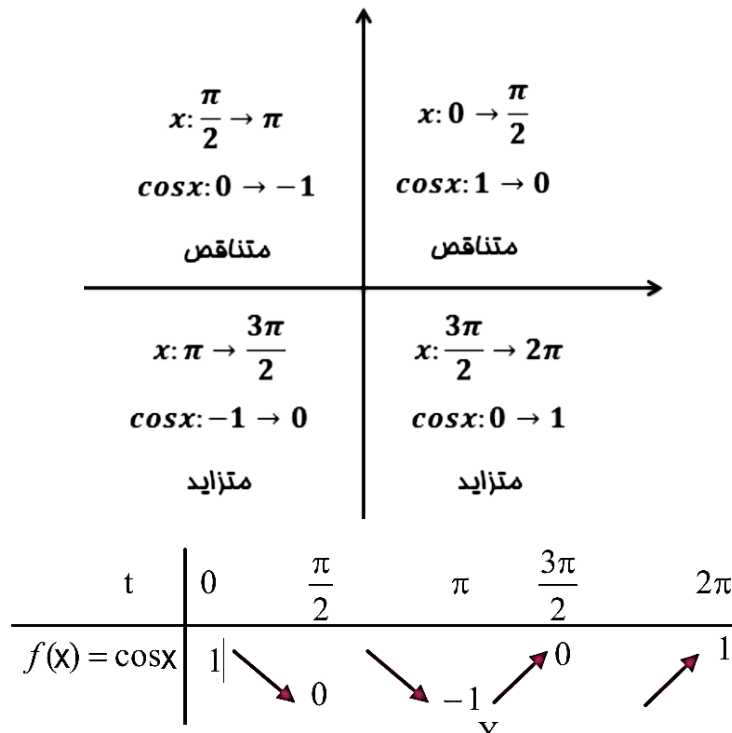


اگر همین گراف را برای دورهای بعدی تکرار کنیم گراف  $y = \cos x$  برای تمام زاویه ها حاصل میشود.



از بررسی گراف تابع  $y = \cos x$  به نتایج مهم ذیل میرسیم.

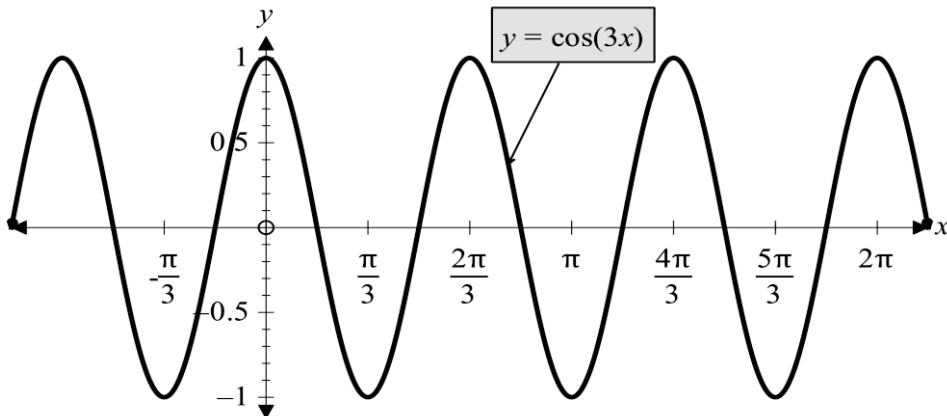
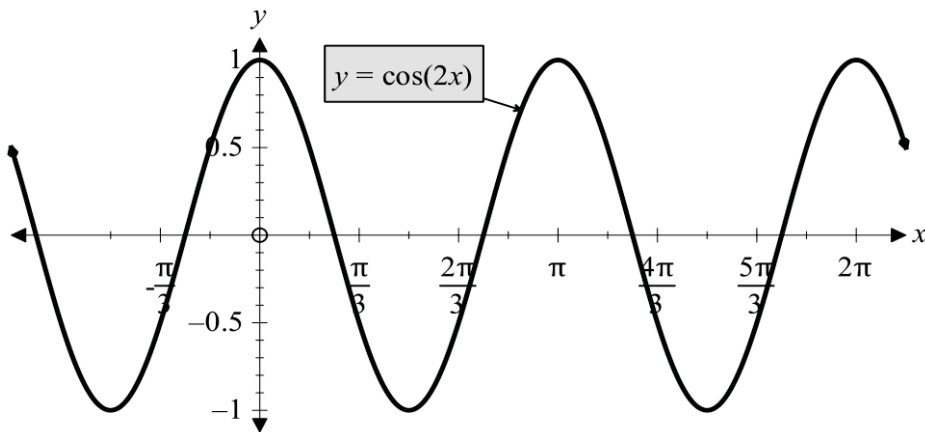
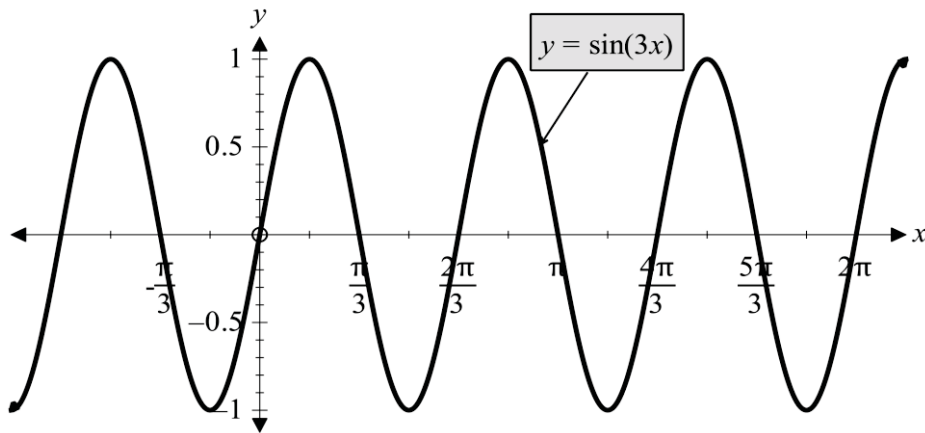
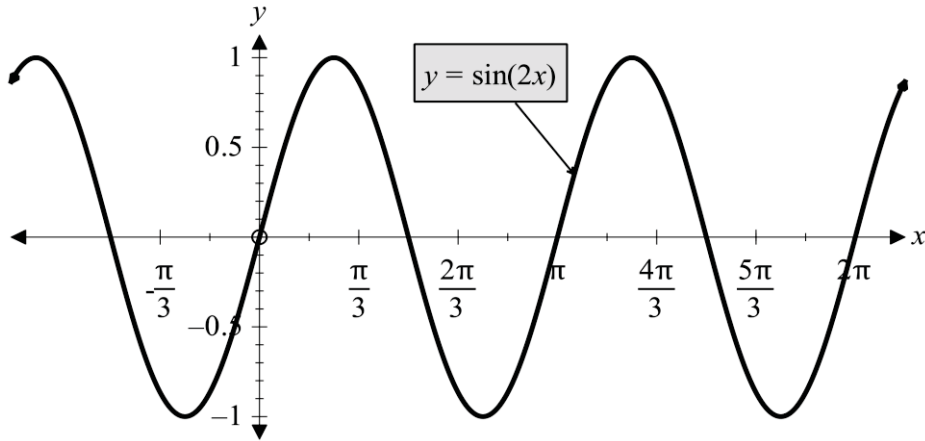
1. ناحیه تعریف تابع  $y = \cos x$  تمام اعداد حقیقی و ناحیه قیمت آن  $[-1, +1]$  میباشد.
2. تابع  $y = \cos x$  در تمام ساحه تعریف خود متممادی میباشد.
3. دوره تناوب این تابع  $2\pi$  میباشد.
4. تابع  $y = \cos x$  در تمام زاویه هاییکه مضرب تاقی از  $\frac{\pi}{2}$  باشند صفر است  $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$
5. این تابع در تمام نقاط  $x = 2k\pi$  دارای قیمت اعظمی و در نقاط  $x = (2k+1)\pi$  دارای قیمت اصغری است.
6. تحولات تابع  $y = \sin x$  در چهار ناحیه مثلثاتی به صورت ذیل است.

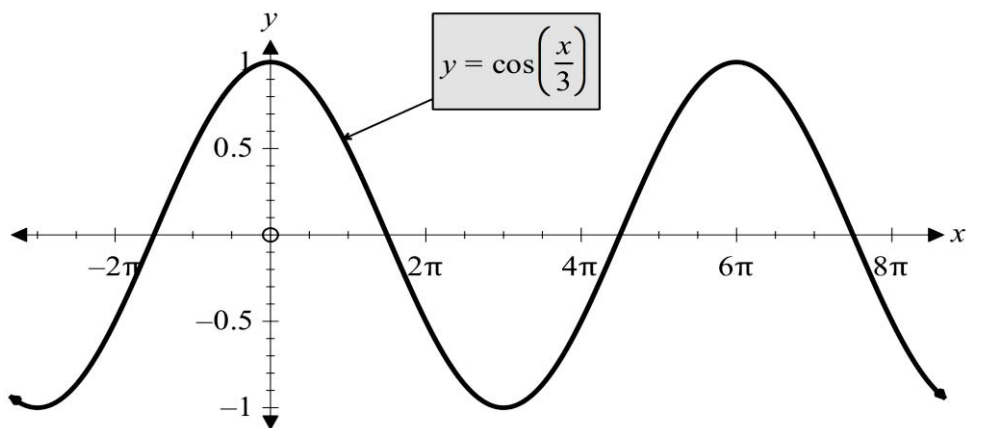
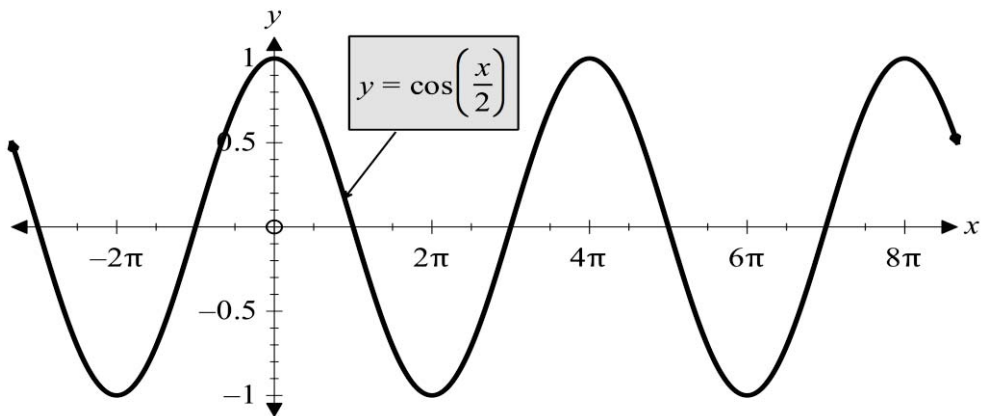
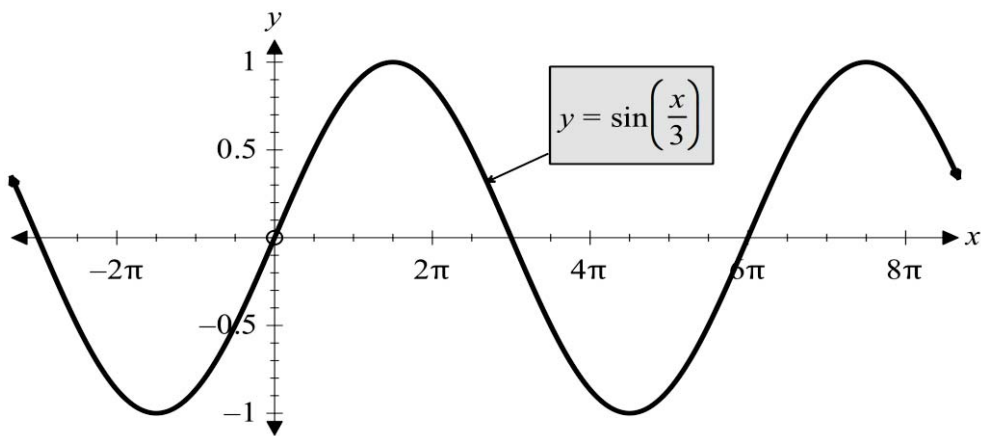
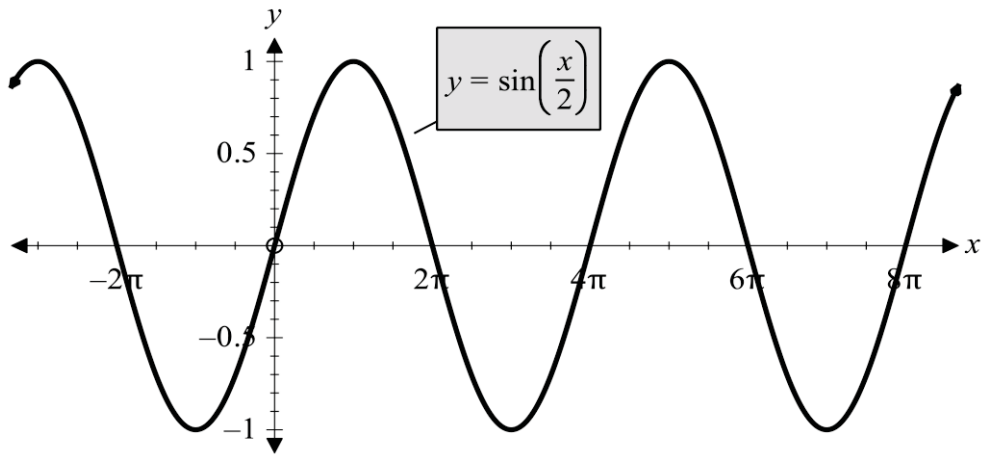


### انقباض و انبساط $y = \cos x$ و $y = \sin x$ :

- 1- انقباض و انبساط در مسیر محور  $x$ : بخاطر داشته باشید هرگاه تابع  $y = \sin nx$  ،  $y = \cos nx$  داده شده باشد در فاصله  $[0, 2\pi]$  تعداد دوران آن  $n$  خواهد بود یعنی بطور واضح میتوان گفت که تابع  $y = \sin 2x$  ،  $y = \cos 2x$  ،  $y = \sin 3x$  ،  $y = \cos 3x$  مقدار دوران آن در  $[0, 2\pi]$  به ترتیب دو دور و سه دور میباشد. و به همین ترتیب  $y = \sin \frac{x}{2}$  ،  $y = \cos \frac{x}{3}$  ... مقدار دوران آن در  $[0, 2\pi]$  نیم دور و ثلث دوران میباشد.





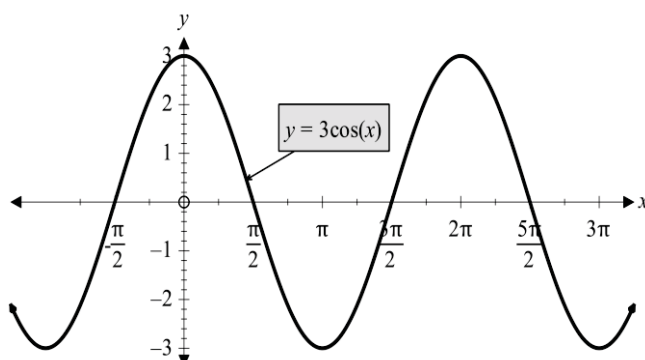
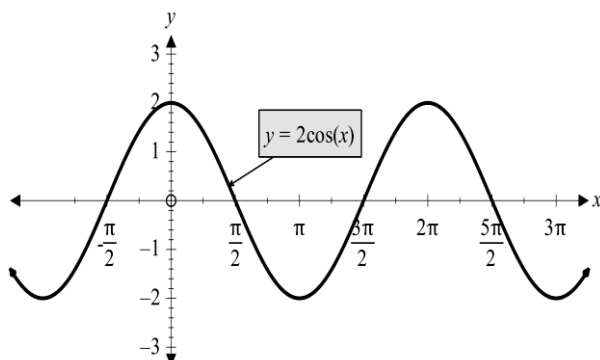
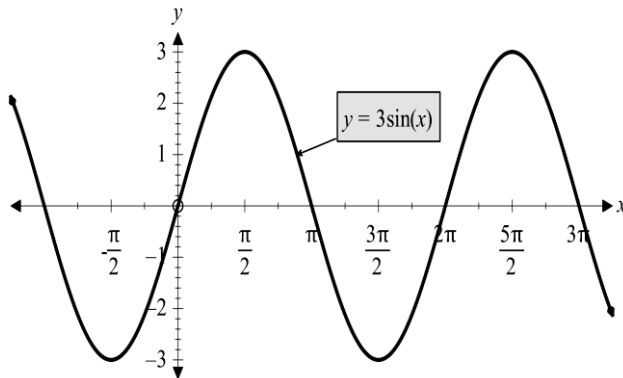
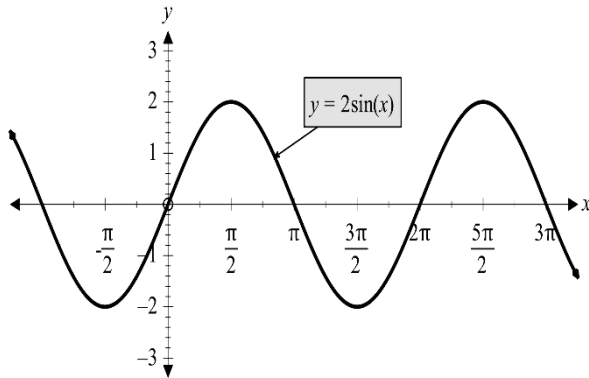


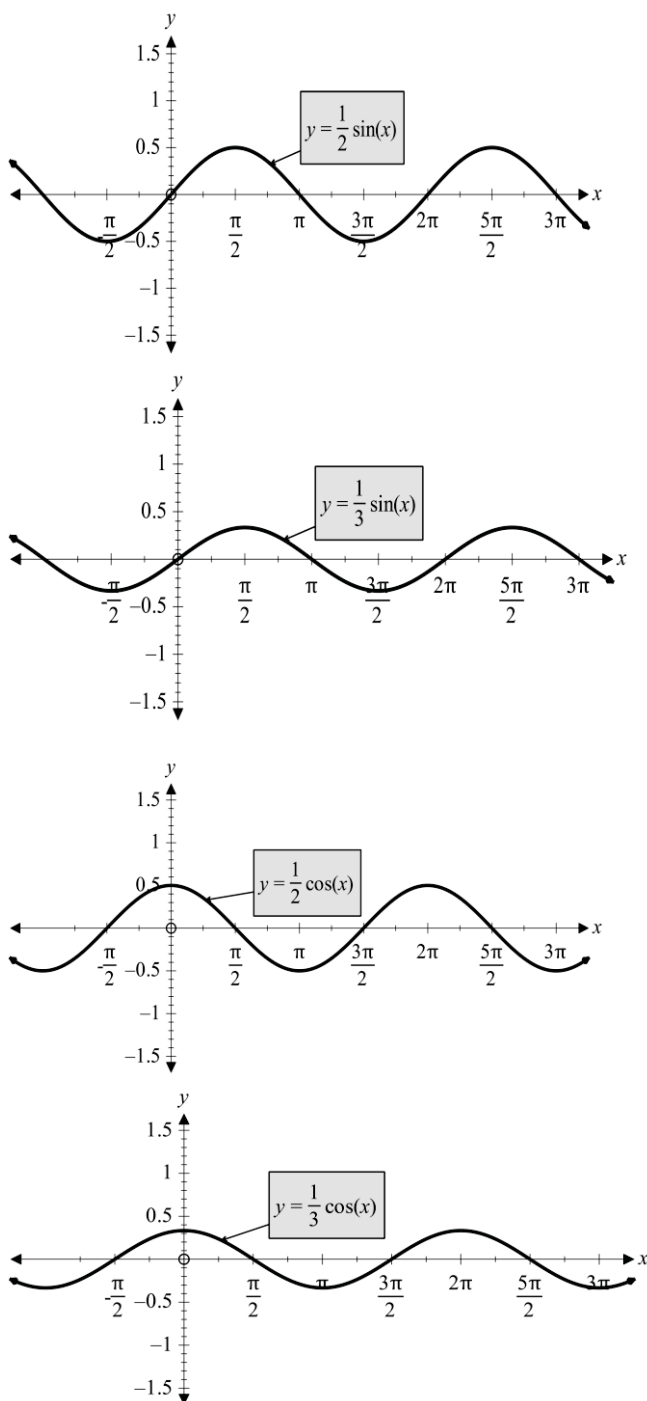


2- انقباض و انبساط در مسیر محور  $y$ : اگر گراف تابع  $y = \sin x$  ،  $y = \cos x$  را داشته باشیم در اینصورت می توان گراف توابع  $y = n \sin x$  ،  $y = n \cos x$  را به سادگی ترسیم نمود یعنی گراف مذکور در مسیر محور  $y$  به اندازه  $n$  نقاط بحرانی آن تحول می نماید. هرگاه  $n > 1$  باشد تابع در مسیر محور  $y$  انبساط نموده و اگر  $1 > n > 0$  باشد تابع در مسیر محور  $y$  انقباض می نماید.

نکته: اگر  $n < 0$  باشد نقاط  $max$  و  $min$  جاهای خود را عوض می نماید.

مثال: گراف های ذیل را رسم کنید؟



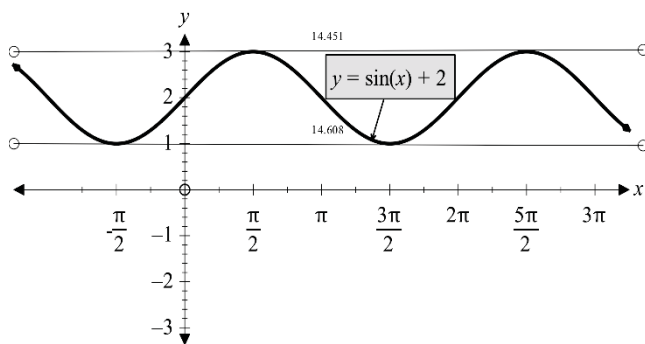
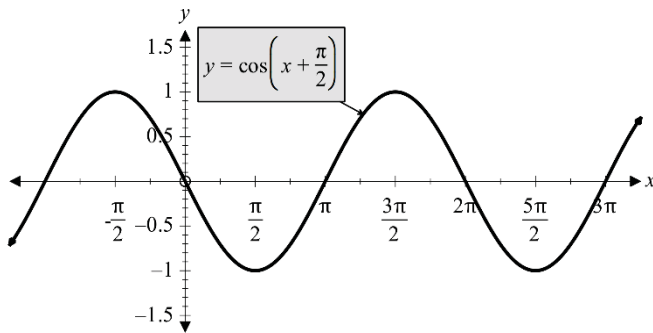
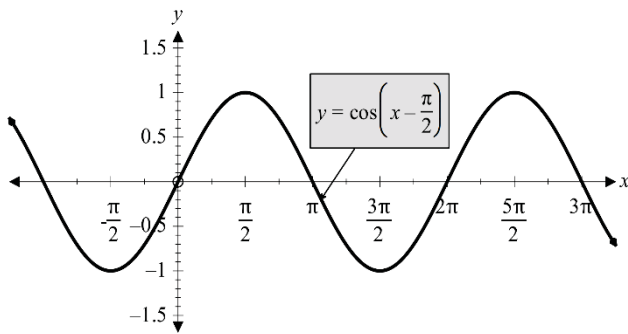
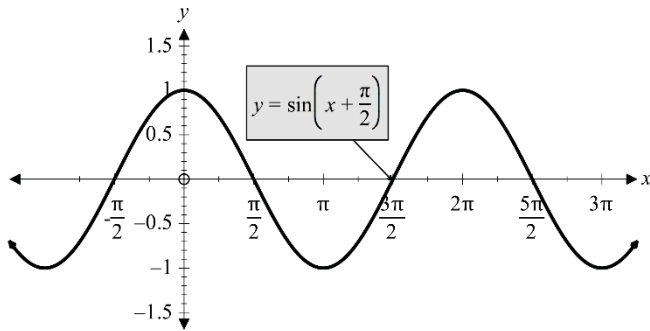
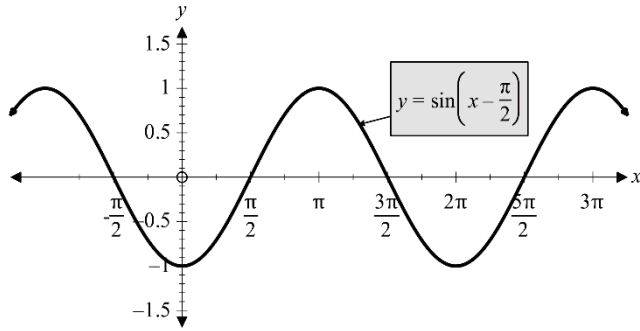


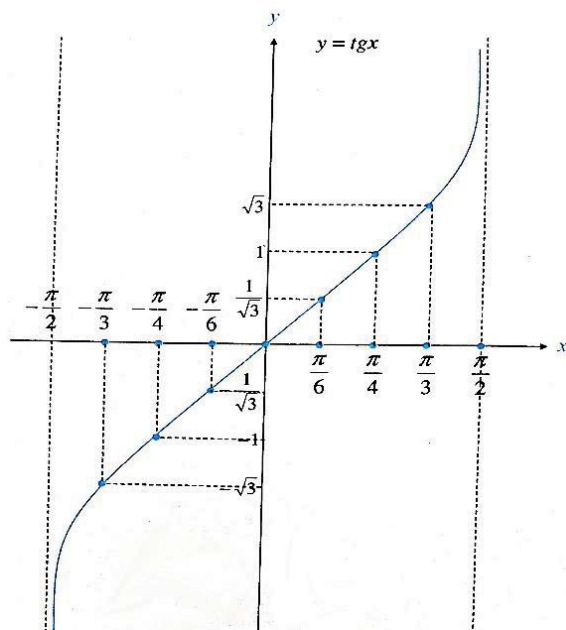
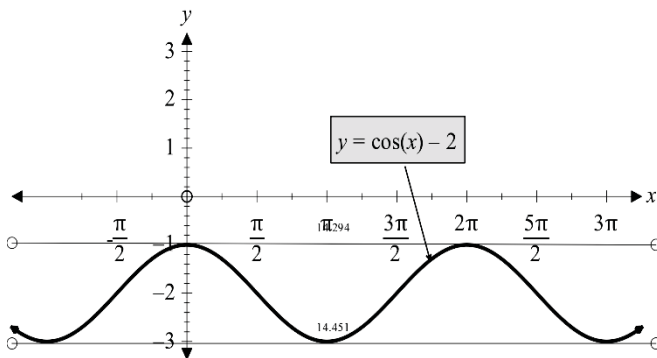
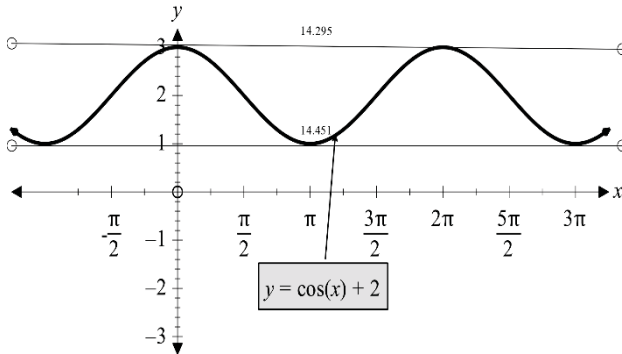
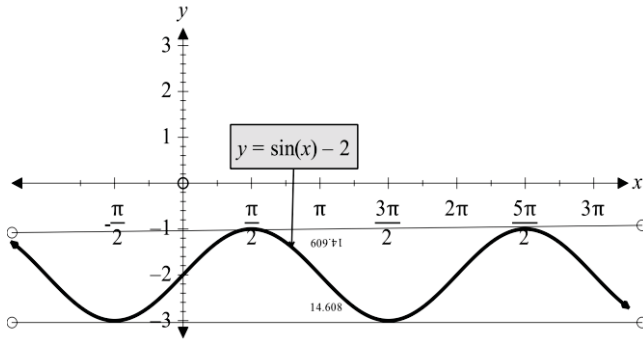
انتقال افقی و عمودی تابع  $y = \sin x$  ،  $y = \cos x$

در این بخش گراف توابع مانند  $y = \sin x + 2$  ،  $y = \sin(x \pm \frac{\pi}{3})$  و  $y = \cos(x \pm \frac{\pi}{3})$  را ترسیم می‌نماییم.

انتقال افقی توابع  $y = \sin x$  ،  $y = \cos x$ :

اگر تابع  $y = f(x)$  را داشته باشیم برای ترسیم گراف  $y = f(x \pm h)$  که در آن  $h$  مثبت است کافی است گراف را به اندازه  $k$  واحد به سمت چپ انتقال دهیم و اگر  $k$  منفی باشد گراف را به اندازه  $|k|$  واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

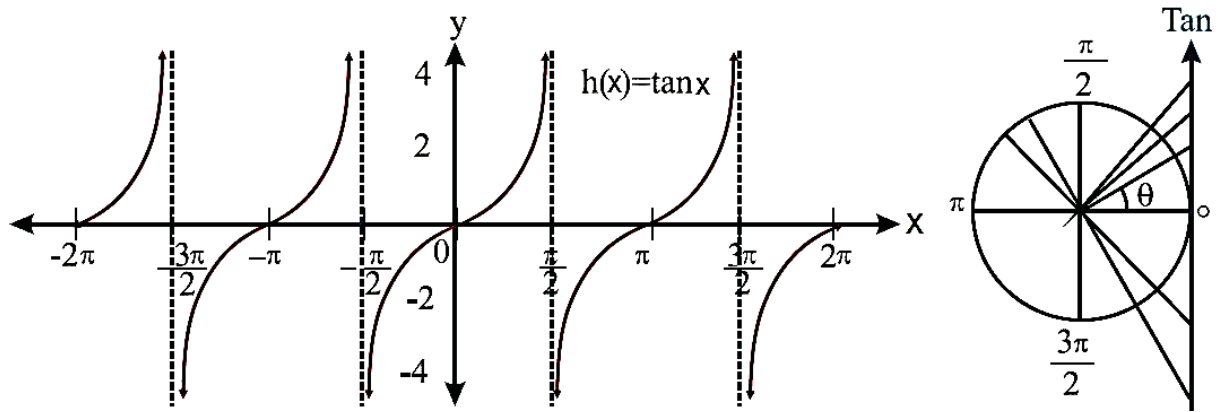




گراف تابع  $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

یک تابع پیریودیک (دورانی) بوده و پریود آن  $\pi$  میباشد. ناحیه تعریف این تابع  $\{ \cos x = 0 \} - IR$  بوده و ناحیه قیمت آن  $IR$  میباشد این تابع دارای مجانب عمودی بوده برای رسم گراف آن ابتداء مجانب های آن را دریافت نموده سپس به متحول  $x$  قیمت داده و قیمت های تابع  $(y)$  را دریافت میکنیم. جوره های مرتب  $(x, y)$  تعیین شده را در سیستم کمیات وضعیه مشخص و سپس نقاط را به هم وصل میکنیم و گراف تابع مثلثاتی را رسم میکنیم.

$x$ به رادیان	$0^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$ به درجه	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$y = \text{tg}x$	$0^\circ$	$+\infty$	$0^\circ$	$+\infty$	$0^\circ$
		$-\infty$		$-\infty$	
	↗	↗	↗	↗	↗

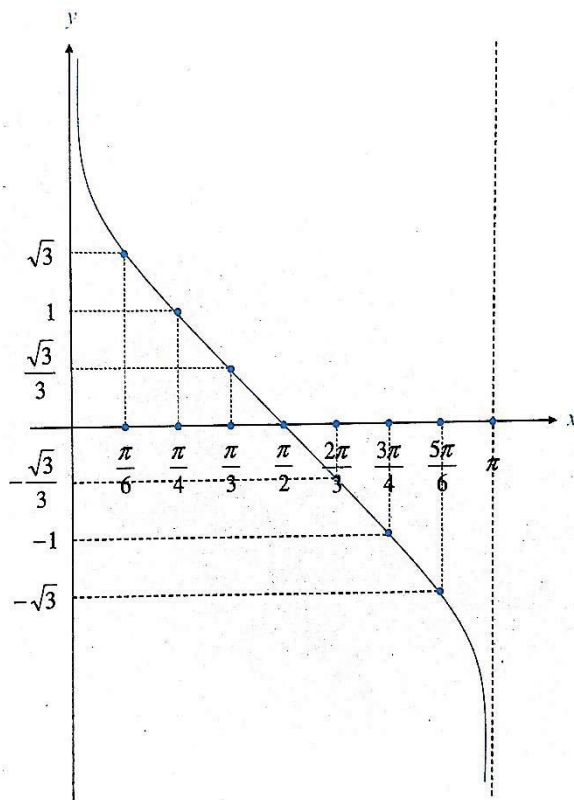


نتایجی که از گراف تابع  $y = \tan x$  بدست می آید قرار ذیل است.

- 1- ناحیه تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی بوده به غیر از زوایای که مخرج  $(\cos x = 0)$  را صفر میسازد.  
 $Dom = IR - \{\cos x = 0\}$
- 2- ناحیه قیمت این تابع تمام اعداد حقیقی میباشد.
- 3- دوره تناوب تابع  $y = \tan x$  مساوی به  $\pi$  یا  $180^\circ$  میباشد یعنی از هر یک  $\pi$  قیمت های تابع تکرار میشود.
- 4- تابع  $y = \tan x$  در تمام نقاط که مضربی تام از  $\pi$  باشد مساوی به صفر است.  
 $Tan(k\pi) = 0$
- 5- این تابع در تمام نقاطی که  $\cos x = 0$  آن صفر است دارای مجانب عمودی است و معادلات مجانب عمودی قرار ذیل است.

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

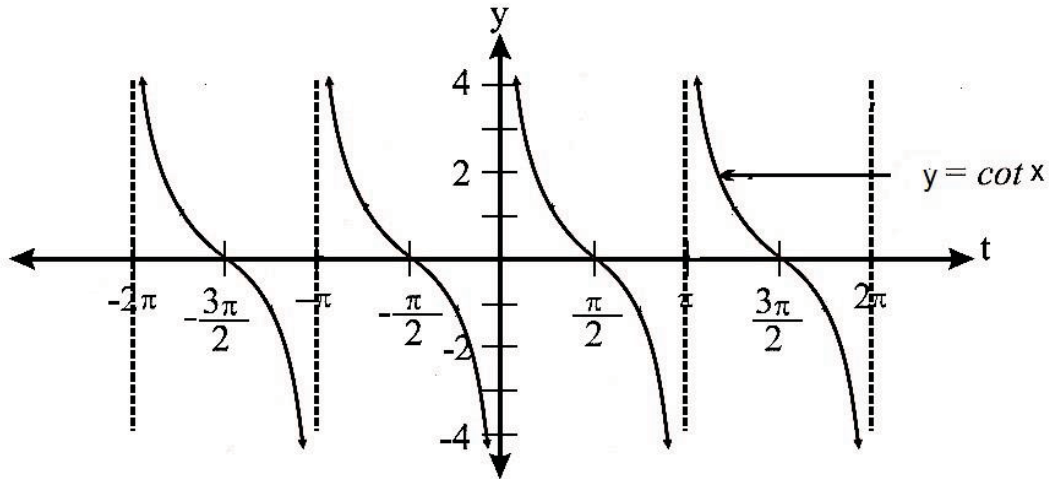
- 6- تابع  $y = \tan x$  همواره متزايد است بنابر این دارای نقطه اعظمی مشخص نمیشود.



گراف تابع  $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

یک تابع پیریودیک (دورانی) بوده و پریود آن  $\pi$  میباشد. ناحیه تعریف این تابع  $IR - \{\sin x = 0\}$  بوده و ناحیه قیمت آن  $IR$  میباشد این تابع دارای مجانب عمودی بوده برای رسم گراف آن ابتداء مجانب های آن را دریافت نموده سپس به متحول  $x$  قیمت داده و قیمت های تابع  $(y)$  را دریافت میکنیم. جوره های مرتب  $(x, y)$  تعیین شده را در سیستم کمیات وضعیه مشخص و سپس نقاط را به هم وصل میکنیم و گراف تابع مثلثاتی را رسم میکنیم.

$x$ به رادیان	$0^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$ به درجه	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$y = \text{Cot}x$	$+\infty$	$0^\circ$	$-\infty$	$0^\circ$	$-\infty$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$



نتایجی که از گراف تابع  $y = \cot x$  بدست می آید قرار ذیل است.

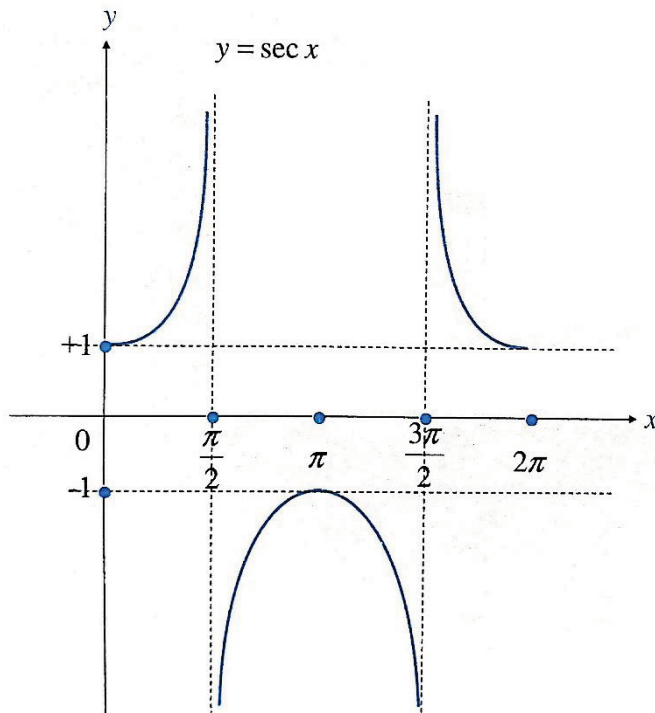
1. ناحیه تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی بوده به غیر از زوایای که مخرج  $(\sin x = 0)$  را صفر میسازد.  
 $Dom = IR - \{\sin x = 0\}$
2. ناحیه قیمت این تابع تمام اعداد حقیقی میباشد.
3. دوره تناوب تابع  $y = \cot x$  مساوی به  $\pi$  یا  $180^\circ$  میباشد یعنی از هر یک  $\pi$  قیمت های تابع تکرار میشود.
4. تابع  $y = \cot x$  در تمام نقاط که مضربی تاق از  $\frac{\pi}{2}$  باشد مساوی به صفر است.
5. این تابع در تمام نقاطی که  $\sin x = 0$  آن صفر است دارای مجانب عمودی است و معادلات مجانب عمودی قرار ذیل است.

$$\cot(2k + 1)\frac{\pi}{2} = 0$$

$$x = k\pi$$

6. تابع  $y = \tan x$  همواره متزايد است بنابر این دارای نقطه اعظمی مشخص نمیشود.

### گراف تابع $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$



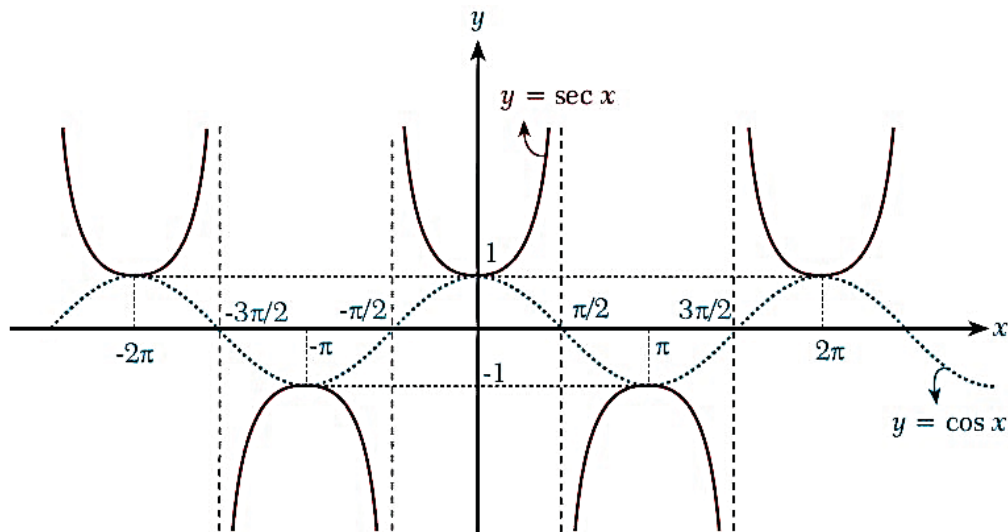
یک تابع پیریودیک بوده و پیریود آن  $2\pi$  میباشد ، تابع  $y = \sec x$  را می توانیم بصورت  $\frac{1}{\cos x}$  بنویسیم بنابر این تابع  $y = \sec x$  در تمام نقاط که  $\cos x = 0$  است تعریف نشده است و در این نقاط تابع  $y = \sec x$  دارای مجانب عمودی میباشد و گراف تابع را در یک دوران مکمل رسم میکنیم.

$x$ به رادیان	$0^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$ به درجه	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$y = \sec x$	1	$+\infty$	-1	$-\infty$	1
	↗	↗	↘	↘	





به همین ترتیب اگر این گراف را در نقاط دیگر گسترش دهیم در اینصورت بصورت ذیل خواهد بود.



نتایج مهم که از گراف فوق بدست می آید قرار ذیل است.

1- اگر تحولات این تابع را در یک دوران مکمل بررسی کنیم چنین نوشته میشود که این تابع در انتروال  $(0, \frac{\pi}{2})$  و

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$  متزايد و در انتروال  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ،  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$  متناقص است.

2- ناحیه تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی است بغیر از قیمت های که  $\cos$  آنها صفر است.

$$Dom = IR - \{\cos x = 0\}$$

3- ناحیه قیمت این تابع تمام اعداد حقیقی بغیر از انتروال  $(-1, 1)$  است.

$$Range = IR - (-1, 1)$$

4- این تابع در تمام قیمت های که  $\cos$  آنها صفر است دارای مجانب عمودی میباشد و معادله مجانب عمودی آن قرار ذیل است.

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

5- پریود و یا دوره تناوب این تابع  $2\pi$  است.

6- این تابع یک تابع جفت است زیرا.

$$f(x) = \sec x \rightarrow f(-x) = \sec(-x) \\ = \sec x = f(x)$$

**گراف تابع  $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$**

یک تابع پیریودیک بوده و پریود آن  $2\pi$  میباشد، تابع  $y =$

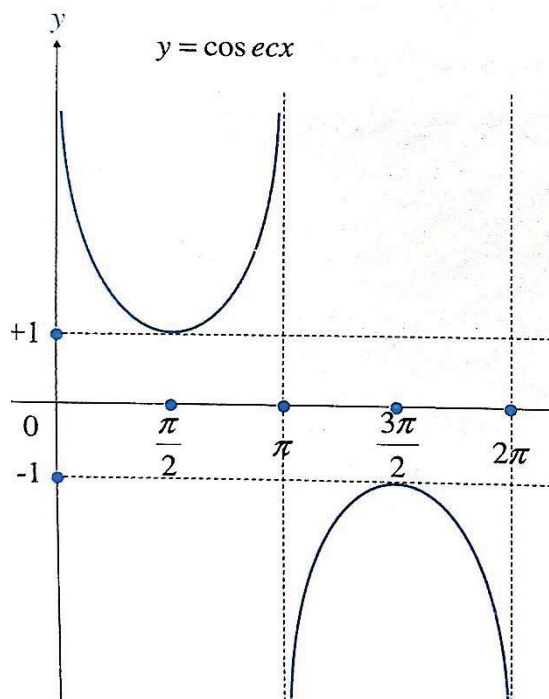
$\csc x$  را می توانیم بصورت  $y = \frac{1}{\sin x}$  بنویسیم بنابر این تابع

$y = \csc x$  در تمام نقاط که  $\sin x = 0$  است تعریف نشده

است و در این نقاط تابع  $y = \csc x$  دارای مجانب عمودی

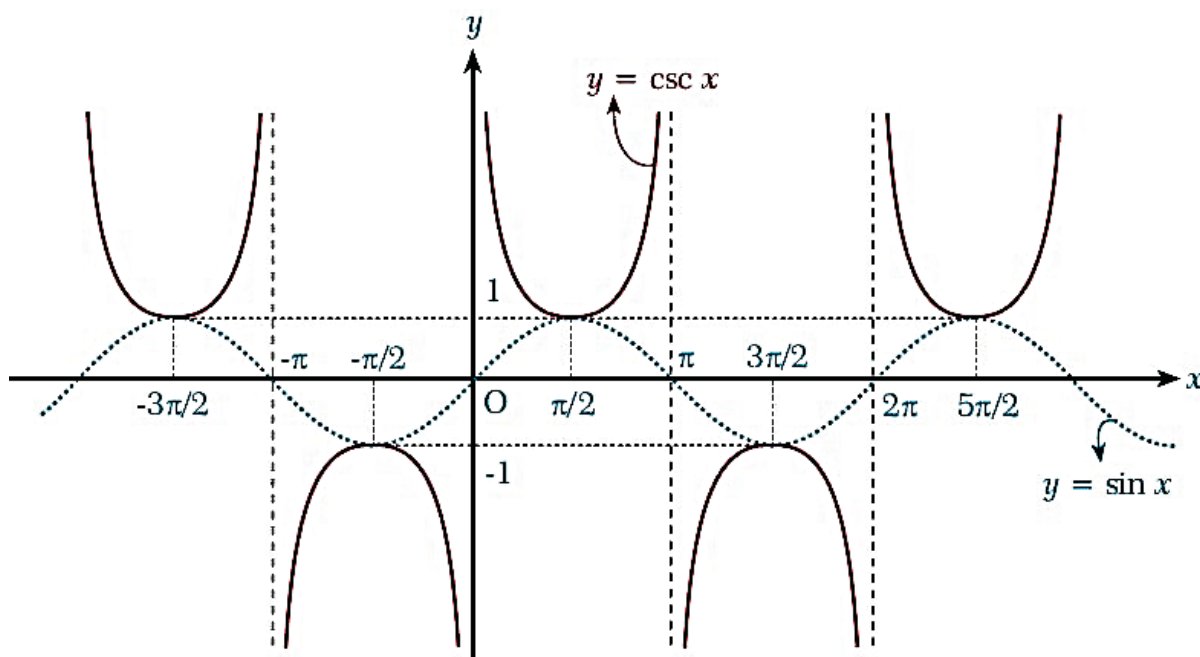
میباشد و گراف تابع را در یک دوران مکمل رسم میکنیم.

$x$ به رادیان	$0^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$ به درجه	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$y = \cos ecx$	$+\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$





به همین ترتیب اگر این گراف را در نقاط دیگر گسترش دهیم در اینصورت بصورت ذیل خواهد بود.



نتایج مهم که از گراف فوق بدست می آید قرار ذیل است.

1. اگر تحولات این تابع را در یک دوران مکمل بررسی کنیم چنین نوشته میشود که این تابع در انتروال  $(0, \frac{\pi}{2})$  و  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  متناقص و در انتروال  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  و  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$  متزاید است.
2. ناحیه تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی است بغیر از قیمت های که  $\sin$  آنها صفر است.  
 $Dom = IR - \{\sin x = 0\}$
3. ناحیه قیمت این تابع تمام اعداد حقیقی بغیر از انتروال  $(-1, 1)$  است.  
 $Range = IR - (-1, 1)$
4. این تابع در تمام قیمت های که  $\sin$  آنها صفر است دارای مجانب عمودی میباشد و معادله مجانب عمودی آن قرار ذیل است.  
 $x = k\pi$
5. پیریود و یا دوره تناوب این تابع  $2\pi$  است.
6. این تابع یک تابع طاق است زیرا.  
 $f(x) = \csc x \rightarrow f(-x) = \csc(-x) = -\csc x = -f(x)$

### نکات در مورد توابع مثلثاتی:

- 1- توابع متناوب توابعی هستند که قیمت آنها بعد از یک مقدار مشخص دوباره تکرار میشوند و به این مقدار مشخص دوره تناوب و یا پیریود تابع میگویند. در توابع متناوب هرگاه به متحول تابع دوره تناوب آن را اضافه کنیم در مقدار تابع  $(f(x))$  تغییری ایجاد نمیشود.

$$f(x + T) = f(x)$$

به طور مثال هرگاه به متحول تابع  $f(x) = \sin x$  که پیریود آن  $2\pi$  است آن را اضافه کنیم چندان تغییری ایجاد نمیشود.

$$f(x) = \sin x \rightarrow \begin{cases} f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x \\ f(x + 4\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin x \\ f(x + 6\pi) = \sin(x + 6\pi) = \sin x \end{cases}$$



2- دوره تناوب تابع  $\sin$  و  $\cos$  برابر به  $2\pi$  است هرگاه متحول  $x$  دارای ضریب باشد  $(\sin bx, \cos bx)$  دوره تناوب آنها از رابطه  $\frac{2\pi}{|b|}$  حاصل میشود.

$$y = \sin 3x \rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = \cos \frac{x}{4} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

3- دوره تناوب تابع  $\tan x, \cot x$  برابر به  $\pi$  میباشد و دوره تناوب  $(\tan bx, \cot bx)$  برابر به  $\frac{\pi}{|b|}$  میباشد.

4- دوره تناوب طاقت های نسبت های مثلثاتی قرار ذیل است.

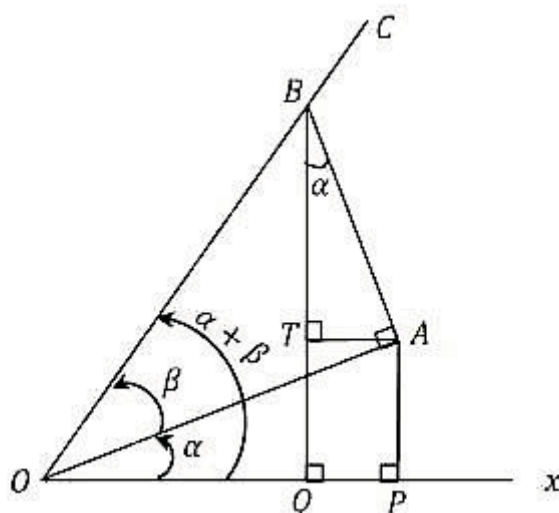
جدول ذیل دوره تناوب چند تابع آمده است	
دوره تناوب $T$	تابع
$T = \frac{\pi}{ a }$	$\begin{cases} y = \sin^{2k} ax \\ y = \cos^{2k} ax \end{cases}$ توان جفت
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$\begin{cases} y = \sin^{2k+1} ax \\ y = \cos^{2k+1} ax \end{cases}$ توان ناق
$T = \frac{\pi}{ a }$	$\begin{cases} y = \tan^k ax \\ y = \cot^k ax \end{cases}$ توان هم جفت و هم ناق

5- در توابع  $y = a \sin bx, y = a \cos bx$  دامنه و یا امپلیتود آن  $|a|$  میباشد.

6- برای دریافت دوره تناوب توابع  $f \pm g$  ابتدا دوره تناوب هر کدام را جدا گانه بدست آورید و سپس کوچکترین مضرب مشترک آنها را بدست می آوریم.



## فصل سوم

دریافت نسبت های مثلثاتی مجموعه و تفاضل زوایا  $(\alpha \pm \beta)$ :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{QB}{OB} = \frac{QT + TB}{OB} = \frac{QT}{OB} + \frac{TB}{OB}$$

$$QT = PA$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{PA}{OB} + \frac{TB}{OB}$$

حال کسر اول را ضرب  $\frac{OA}{OA}$  و کسر دوم را ضرب  $\frac{AB}{AB}$  می نماییم.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{PA}{OB} \cdot \frac{OA}{OA} + \frac{TB}{OB} \cdot \frac{AB}{AB} \rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{PA}{OA} \cdot \frac{OA}{OB} + \frac{TB}{AB} \cdot \frac{AB}{OB}$$

$$\sin \alpha = \frac{PA}{OA}, \quad \cos \beta = \frac{OA}{OB}, \quad \cos \alpha = \frac{TB}{AB}, \quad \sin \beta = \frac{AB}{OB}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OQ}{OB} = \frac{OP - QP}{OB} = \frac{OP}{OB} - \frac{QP}{OB}$$

$$QP = AT$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{OB} - \frac{AT}{OB}$$

حال به کسر اول  $\frac{OA}{OA}$  و به کسر دوم  $\frac{AB}{AB}$  را ضرب میکنیم.



$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{OB} \cdot \frac{OA}{OA} - \frac{AT}{OB} \cdot \frac{AB}{AB}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{OA} \cdot \frac{OA}{OB} - \frac{AT}{AB} \cdot \frac{AB}{OB}$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OA}, \quad \cos \beta = \frac{OA}{OB}, \quad \sin \alpha = \frac{AT}{AB}, \quad \sin \beta = \frac{AB}{OB}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

## مثالها

مثال 1: تمام نسبت های مثلثاتی  $75^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$



$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

مثال 2: تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $115^\circ$  را محاسبه کنید؟

$$115^\circ = 45^\circ + 60^\circ$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\begin{aligned}\sin 115^\circ &= \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \rightarrow \sin 115^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\begin{aligned}\cos 115^\circ &= \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \rightarrow \cos 115^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\tan 115^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

مثال 3: مقدار  $\sqrt{2} \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4}) = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{2} \left[ \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \left[ \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \cos x \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \cos x \cdot \frac{\sqrt{4}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{4}}{2} \\ &= \cos x - \sin x\end{aligned}$$

مثال 4: مقدار  $\sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4}) = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{2} \left[ \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \left[ \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \sin x \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sin x \cdot \frac{\sqrt{4}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{4}}{2} \\ &= \sin x + \cos x\end{aligned}$$

مثال 5: افاده  $\sin 105 + \cos 105 = ?$  را ساده سازید؟



$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال 6: افاده  $\sin 42 \cdot \cos 18 + \cos 42 \cdot \sin 18 = ?$  را ساده سازید؟

$$\sin 42 \cdot \cos 18 + \cos 42 \cdot \sin 18 = \sin(42 + 18) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 7: در افاده  $A = \tan 25 + \tan 20 + \tan 25 \cdot \tan 20$  را محاسب کنید؟

$$\tan 45 = \tan(25 + 20)$$

$$1 = \frac{\tan 25 + \tan 20}{1 - \tan 25 \cdot \tan 20} \rightarrow \tan 25 + \tan 20 = 1 - \tan 25 \cdot \tan 20$$

$$1 = \tan 25 + \tan 20 + \tan 25 \cdot \tan 20 \rightarrow A = 1$$

مثال 8: افاده  $\sin(x + 30) + \cos(x + 60) = ?$  مساوی است به؟

$$\sin(x + 30) + \cos(x + 60)$$

$$= \sin x \cdot \cos 30 + \cos x \cdot \sin 30 + \cos x \cdot \cos 60 - \sin x \cdot \sin 60$$

$$= \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

مثال 9: افاده  $(\tan 35 + \tan 20) \cdot \sin 20 = ?$  مساوی است به؟

$$(\tan 35 + \tan 20) \cdot \sin 20 = \left( \frac{\sin 35}{\cos 35} + \frac{\sin 20}{\cos 20} \right) \cdot \sin 20$$

$$= \left( \frac{\sin 35 \cdot \cos 20 + \cos 35 \cdot \sin 20}{\cos 35 \cdot \cos 20} \right) \sin 20 = \frac{\sin(35 + 20)}{\cos 35 \cdot \cos 20} \cdot \sin 20$$

$$= \frac{\sin(55)}{\cos 35 \cdot \cos 20} \cdot \sin 20 \xrightarrow{\sin 55 = \cos 35} \frac{\cos 35}{\cos 35 \cdot \cos 20} \cdot \sin 20 = \frac{\sin 20}{\cos 20} = \tan 20$$

مثال 10: افاده  $\frac{1 - \tan 20}{1 + \tan 20} = ?$  را ساده سازید؟

$$\frac{1 - \tan 20}{1 + 1 \cdot \tan 20} = \frac{\tan 45 - \tan 20}{1 + \tan 45 \cdot \tan 20} = \tan(45 - 20) = \tan 25$$

مثال 11: حاصل  $\frac{1}{\sin 10} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10} = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{1}{\sin 10} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10} = \frac{\cos 10 - \sqrt{3} \sin 10}{\sin 10 \cdot \cos 10} = \frac{\cos 10 - \tan 60 \cdot \sin 10}{\frac{2 \sin 10 \cdot \cos 10}{2}}$$

$$= \frac{\cos 10 - \frac{\sin 60}{\cos 60} \sin 10}{\frac{1}{2} \sin 20} = \frac{\cos 10 \cdot \cos 60 - \sin 10 \cdot \sin 60}{\frac{1}{2} \sin 20}$$

$$= \frac{\frac{\cos 70}{1}}{\frac{1}{2} \cos 70} = 4$$

### نسبت های مثلثاتی $2\alpha$ :

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$



$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{array} \right\} \cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \end{array} \right\} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

نکته: روابط ذیل برای دریافت نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه از جنس نصف زاویه استفاده میشود.

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad \cos \alpha = \begin{cases} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \end{cases} \quad \tan \alpha = \frac{2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} \\ 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{4} \\ 2\cos^2 \frac{\alpha}{4} - 1 \end{cases} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \tan \frac{\alpha}{4}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{4}}$$

$$\sin 6\alpha = 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha \quad \cos 6\alpha = \begin{cases} \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha \\ 1 - 2\sin^2 3\alpha \\ 2\cos^2 3\alpha - 1 \end{cases} \quad \tan 6\alpha = \frac{2 \cdot \tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha}$$





$$\sin 2\alpha = 2 \sin 10\alpha \cdot \cos 10\alpha \quad \cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 10\alpha - \sin^2 10\alpha \\ 1 - 2\sin^2 10\alpha \\ 2\cos^2 10\alpha - 1 \end{cases} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan 10\alpha}{1 - \tan^2 10\alpha}$$

## مثالها

مثال 1: اگر  $\sin x = \frac{4}{5}$  و  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  باشد تمام نسبت های مثلثاتی  $2x$  را محاسبه کنید؟

$$\sin x = \frac{4}{5} \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{4}{5} = \frac{y}{r} \rightarrow y = 4, \quad r = 5, \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \\ \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}, \quad \cos x = \frac{3}{5}, \quad \tan x = \frac{4}{3} \\ \sin 2x = ? \\ \cos 2x = ? \\ \tan 2x = ? \end{array} \right. \begin{array}{l} \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \end{array}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{8}{3} \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{24}{7}$$

$$\cot x = -\frac{7}{24}, \quad \sec x = -\frac{25}{7}, \quad \csc x = \frac{55}{24}$$

مثال 2: اگر  $\cos x = -\frac{3}{5}$  باشد و  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد تمام نسبت های مثلثات  $2x$  را دریابید؟

$$\cos x = -\frac{3}{5} = \frac{x}{r} \rightarrow x = -3, \quad r = 5, \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - (-3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin x = -\frac{4}{5}, \quad \cos x = -\frac{3}{5}, \quad \tan x = \frac{4}{3}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{8}{3} \left(-\frac{9}{7}\right) = \frac{24}{7}$$

مثال 3: افاده  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = ?$  را ساده سازید؟

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = 2$$

مثال 4: اگر  $\tan x + \cot x = 6$  باشد آنگاه  $\sin 2x = ?$  را محاسبه کنید؟



$$\begin{aligned} \tan x + \cot x = 6 &\rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 6 \rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = 6 \rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \\ &= 6 \rightarrow \frac{1}{2 \sin x \cdot \cos x} = 12 \rightarrow \frac{1}{\sin 2x} = 12 \rightarrow 12 \sin 2x = 2 \\ &\rightarrow \sin 2x = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

مثال 5: حاصل  $\frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x} + \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \cos x} = ?$  مساوی است به :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x} + \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \\ &= \frac{\sqrt{2}[\cos^2 x - \sin^2 x]}{\cos x - \sin x} - \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 - \sqrt{2} \sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}[(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)]}{\cos x - \sin x} - \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{1 - \sqrt{2} \sin x} \\ &\quad - \frac{(\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1)}{\sqrt{2} \cos x - 1} = \\ &= \sqrt{2}(\cos x + \sin x) - (1 + \sqrt{2} \sin x) - (\sqrt{2} \cos x + 1) \\ &= \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x - 1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x - 1 = -2 \end{aligned}$$

مثال 6: افاده  $\frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x + \cos 2x}$  را ساده سازید؟

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x + \cos 2x} &= \frac{\sin 2x + (1 - \cos 2x)}{\sin 2x + (1 + \cos 2x)} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x} \\ &= \frac{2 \sin x (\cos x + \sin x)}{2 \cos x (\sin x + \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \end{aligned}$$

مثال 7: هرگاه  $\sin 7 = x$  باشد  $\sin 76 = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{aligned} \sin 7 = x \\ \sin 76 = \cos 14 = ? \end{aligned} \right\} \cos 14 = 1 - 2\sin^2 7 = 1 - 2x^2$$

مثال 8: اگر  $x = \frac{\pi}{8}$  باشد مقدار  $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x &= \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= -\sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right) = -\frac{1}{8} \sin 4x = -\frac{1}{8} \sin 4 \left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

مثال 9: مقدار  $\cos 20 \cdot \cos 40 \cdot \cos 80 = ?$  مساوی است به؟



$$= \frac{2 \cdot \sin 40 \cdot \cos 40 \cdot \cos 80}{2 \cdot 2 \sin 20} = \frac{\sin 80 \cdot \cos 80}{4 \sin 20} = \frac{2 \cdot \sin 80 \cdot \cos 80}{2 \cdot 4 \sin 20} = \frac{\sin 160}{8 \sin 20}$$

$$= \frac{\sin(\pi - 20)}{8 \sin 20} = \frac{\sin 20}{8 \sin 20} = \frac{1}{8}$$

مثال 10: حاصل  $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 40}} = ?$  را دریافت کنید؟

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 40}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos 40}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{40}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 20} = \sqrt{\frac{1 + \cos 20}{2}} = \sqrt{\cos^2 \frac{20}{2}} = \cos 10$$

مثال یازدهم: حاصل مقدار  $\frac{\sin 50 + \sin 100}{1 + \cos 50 + \cos 100} = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{\sin 50 + \sin 100}{1 + \cos 50 + \cos 100} = \frac{\sin 50 + 2 \sin 50 \cos 50}{1 + \cos 50 + 2 \cos^2 50 - 1} = \frac{\sin 50 (1 + 2 \cos 50)}{\cos 50 (1 + 2 \cos 50)}$$

$$= \tan 50$$

نسبت های مثلثاتی  $x$  از جنس  $\tan 2x$ :

$$\sin 2x = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{1} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x}}{\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

نکته: این رابطه برای دریافت نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه از جنس خود زاویه استفاده میشود.



$$\sin x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \tan x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan^2 \frac{x}{4}} \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{4}}{1 + \tan^2 \frac{x}{4}} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{4}}{1 - \tan^2 \frac{x}{4}}$$

$$\sin \frac{x}{10} = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{20}}{1 + \tan^2 \frac{x}{20}} \quad \cos \frac{x}{10} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{20}}{1 + \tan^2 \frac{x}{20}} \quad \tan \frac{x}{10} = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{20}}{1 - \tan^2 \frac{x}{20}}$$

## مثالها

مثال 1: اگر  $\tan x = 3$  باشد تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $2x$  را محاسبه کنید؟

$$\tan x = 3$$

$$\sin 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{6}{1 + 10} = \frac{6}{11}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - 3^2}{1 + 9} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = \frac{6}{1 - 9} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

مثال 2: اگر  $\tan \frac{x}{2} = -2$  باشد تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $x$  را دریابید؟

$$\tan \frac{x}{2} = -2$$

$$\sin x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot (-2)}{1 + (-2)^2} = \frac{-4}{1 + 4} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot (-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

مثال 3: اگر  $\tan x = \frac{3}{4}$  باشد  $\sin 2x = ?$   $\cos 2x = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\tan x = \frac{3}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$



نسبت های مثلثاتی  $x$  از جنس  $\cos 2x$ :

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$$

$$\tan x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$$

$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$	$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$	$\tan x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$
---	---	---

نکته: رابطه فوق برای دریافت نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس  $\cos$  دوچند آن زاویه استفاده میشود.

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\sin \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}}}$$

$$\sin 4x = \sqrt{\frac{1 - \cos 8x}{2}}$$

$$\cos 4x = \sqrt{\frac{1 + \cos 8x}{2}}$$

$$\tan 4x = \sqrt{\frac{1 - \cos 8x}{1 + \cos 8x}}$$



$$\sin 10x = \sqrt{\frac{1 - \cos 20x}{2}} \quad \cos 10x = \sqrt{\frac{1 + \cos 20x}{2}} \quad \tan 10x = \sqrt{\frac{1 - \cos 20x}{1 + \cos 20x}}$$

## مثالها

مثال 1: اگر  $\sin 2x = \frac{5}{13}$  باشد و  $\frac{\pi}{2} > 2x > \pi$  باشد تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $x$  را محاسبه کنید؟

$$\sin 2x = \frac{5}{13} = \frac{y}{r} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ r = 13 \end{cases}, \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\cos 2x = -\frac{12}{13}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{12}{13})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{12}{13})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\tan x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{12}{13})}{1 + (-\frac{12}{13})}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{\frac{1}{13}}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cot x = \frac{1}{5}, \quad \sec x = \sqrt{26}, \quad \csc x = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

مثال 2: اگر  $\cos x = -\frac{4}{9}$  باشد و  $\frac{3\pi}{2} > x > \pi$  در این صورت  $\cos \frac{x}{2} = ?$  ،  $\cos 2x = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{4}{9})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{9}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{9}}{2}} = \sqrt{\frac{13}{18}}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(-\frac{4}{9}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{16}{81} - 1 = \frac{32}{81} - 1 = -\frac{49}{81}$$

مثال 3: اگر  $\sin B = \frac{8}{17}$  و  $\frac{\pi}{2} > B > \pi$  باشد دریابید  $\sin 2B = ?$  ،  $\sin \frac{B}{2} = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\sin B = \frac{8}{17} \rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ r = 17 \end{cases}, \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$$

$$\cos B = -\frac{15}{17}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2B}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{15}{17})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2B = 2 \sin B \cdot \cos B = 2 \cdot \frac{8}{17} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) = -\frac{240}{289}$$

مثال 4: اگر  $\tan 4x = \frac{4}{3}$  و  $\frac{3\pi}{2} < 4x < \pi$  باشد تمام نسبت های مثلثاتی  $2x$  را محاسبه کنید؟

$$\tan 4x = \frac{4}{3} = \frac{y}{x} \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



$$\sin 4x = -\frac{4}{5}, \quad \cos 4x = -\frac{3}{5}, \quad \tan 4x = \frac{4}{3}$$

$$\sin 2x = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2x = \sqrt{\frac{1 + \cos 4x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{3}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan 2x = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{1 + (-\frac{3}{5})}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cot 2x = \frac{1}{2}, \quad \sec 2x = \sqrt{5}, \quad \csc 2x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

نسبت های مثلثاتی  $3x$ :

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + (1 - 2\sin^2 x) \cdot \sin x \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 2 \cdot \sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\ &\Rightarrow \sin 3x = 3 \sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x - \cos^3 x \\ &\Rightarrow \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 3x &= \tan(2x + x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \cdot \tan x} = \frac{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \tan x} \\ &= \frac{\frac{2 \tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x}}{\frac{1 - \tan^2 x - 2 \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}} \Rightarrow \tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \end{aligned}$$



$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

## مثالها

مثال 1: هرگاه  $\sin x = \frac{3}{5}$  و  $\frac{\pi}{2} > x > \pi$  باشد تمام نسبت های مثلثاتی زاویه  $3x$  را محاسبه کنید؟

$$\sin x = \frac{3}{5} = \frac{y}{r} \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ r = 5 \end{cases}, \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = -4$$

$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad \cos x = -\frac{4}{5}, \quad \tan x = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 3 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{9}{5} - 4 \cdot \frac{27}{125} = \frac{9}{5} - \frac{108}{125} = \frac{225 - 108}{125} \\ &= \frac{117}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^3 - 3 \left(-\frac{4}{5}\right) = 4 \left(-\frac{64}{125}\right) + \frac{12}{5} \\ &= -\frac{256}{125} + \frac{12}{5} = \frac{-256 + 300}{125} = \frac{44}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 3x &= \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} = \frac{3 \left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)^3}{1 - 3 \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{9}{4} + \frac{27}{64}}{1 - \frac{27}{4}} = \frac{\frac{-144 + 27}{64}}{-\frac{23}{4}} \\ &= \frac{-117}{64} \cdot \left(-\frac{4}{23}\right) = \frac{117}{368} \end{aligned}$$

مثال 2: افاده  $3 \sin 20 - 4 \sin^3 20 = ?$  را ساده سازید؟

$$3 \sin 20 - 4 \sin^3 20 = \sin(3 \cdot 20) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 3: حاصل عبارت  $4 \cos^3 75 - 3 \sin 15 = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 75 - 3 \sin 15 &= 4 \sin^3 15 - 3 \sin 15 = -(3 \sin 15 - 4 \cos^3 15) \\ &= -\sin 3 \cdot 15 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

مثال 4: افاده  $(4 \cos^2 9 - 3)(4 \cos^3 27 - 3) = ?$  را ساده سازید؟

$$\begin{aligned} (4 \cos^2 9 - 3)(4 \cos^3 27 - 3) &= (4 \cos^2 9 - 3) \cdot \frac{\cos 9}{\cos 9} (4 \cos^3 27 - 3) \cdot \frac{\cos 27}{\cos 27} = \\ &= \frac{4 \cos^3 9 - 3 \cos 9}{\cos 9} \cdot \frac{4 \cos^3 27 - 3 \cos 27}{\cos 27} = \frac{\cos 3 \cdot 9}{\cos 9} \cdot \frac{\cos 3 \cdot 27}{\cos 27} \\ &= \frac{\cos 27}{\cos 9} \cdot \frac{\cos 81}{\cos 27} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 9\right)}{\cos 9} = \frac{\sin 9}{\cos 9} = \tan 9 \end{aligned}$$





مثال 5: حاصل عبارت  $\cos 70 (1 + 2 \cos 40) = ?$  کدام است؟

$$\begin{aligned} \cos 70 (1 + 2 \cos 40) &= \cos 70 (1 + 2(1 - 2\sin^2 20)) \\ &= \sin 20 (1 + 2 - 4\sin^2 20) = \sin 20 (3 - 4\sin^2 20) \end{aligned}$$

$$= 3 \sin 20 - 4\sin^3 20 = \sin 3 \cdot 20 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 6: حاصل عبارت  $(8\sin^3 \frac{\pi}{36} - 6 \sin \frac{\pi}{36})(8\cos^3 \frac{\pi}{36} - 6 \cos \frac{\pi}{36}) = ?$  کدام است؟

$$\begin{aligned} (8\sin^3 \frac{\pi}{36} - 6 \sin \frac{\pi}{36})(8\cos^3 \frac{\pi}{36} - 6 \cos \frac{\pi}{36}) &= \\ &= -2 \left( 3 \sin \frac{\pi}{36} - 4\sin^3 \frac{\pi}{36} \right) (2) \left( 4\cos^3 \frac{\pi}{36} - 3 \cos \frac{\pi}{36} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -4 \sin \left( 3 \cdot \frac{\pi}{36} \right) \cos \left( 3 \cdot \frac{\pi}{36} \right) = -2 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = -2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{12} \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

مثال 7: حاصل عبارت  $4 \sin x \cdot \sin(60 - x) \cdot \sin(60 + x) = ?$  کدام است.

$$4 \sin x \cdot \sin(60 - x) \cdot \sin(60 + x)$$

$$= 4 \sin x \cdot [\sin 60 \cos x - \cos 60 \sin x][\sin 60 \cos x + \cos 60 \cdot \sin x]$$

$$= 4 \sin x \cdot \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right] \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cdot \sin x \right]$$

$$= 4 \sin x \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot \sin x \right)^2 \right] = 4 \sin x \left[ \frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 x \right]$$

$$= \sin x [3\cos^2 x - \sin^2 x] = \sin x [3(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x]$$

$$= \sin x [3 - 4\sin^2 x] = 3 \sin x - 4\sin^3 x = \cos 3x$$

### نسبت های مثلثاتی $(x + y + z)$ :

$$\sin(x + y + z) = \sin(x + y) \cos z + \cos(x + y) \cdot \sin z$$

$$= [\sin x \cos y + \cos x \sin y] \cos z + [\cos x \cos y - \sin x \cdot \sin y] \cdot \sin z$$

$$= \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \cdot \sin z - \sin x \sin y \sin z$$

$$\cos(x + y + z) = \cos(x + y) \cos z - \sin(x + y) \sin z$$

$$[\cos x \cos y - \sin x \sin y] \cos z - [\sin x \cos y + \cos x \sin y] \sin z$$

$$\cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z$$

$$\tan(x + y + z) = \frac{\tan(x + y) + \tan z}{1 - \tan(x + y) \cdot \tan z} = \frac{\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} + \tan z}{1 - \left( \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \right) \cdot \tan z}$$

$$= \frac{\frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y}}{1 - \tan x \tan y - \tan x \tan z - \tan y \tan z}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan x \tan z - \tan y \tan z}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan x \tan z - \tan y \tan z}$$



تبدیل نمودن مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی به شکل حاصل ضرب:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \dots\dots\dots I$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \dots\dots\dots II$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \dots\dots\dots III$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \dots\dots\dots IV$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \rightarrow \frac{x+y}{2} + \beta = x \rightarrow \beta = x - \frac{x+y}{2}$$

$$\frac{2\alpha = x+y}{\alpha = \frac{x+y}{2}} \quad \beta = x - \frac{2x-x-y}{2} \rightarrow \beta = \frac{x-y}{2}$$

$$I + II = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$I - II = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$III + IV = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$= \cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$III - IV = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x + \cot y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin y \cos x + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y}$$

$$\cot x + \cot y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y}$$

$$\cot x - \cot y = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin y \cos x - \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$

$$\cot x - \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$



$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$= \cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \quad \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x + \cot y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y} \quad \cot x - \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$

## مثالها

مثال 1: حاصل مقدار  $\sin 75 + \sin 15 = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned} \sin 75 + \sin 15 &= 2 \sin \frac{75+15}{2} \cdot \cos \frac{75-15}{2} = 2 \sin 45 \cdot \cos 30 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

مثال 2: حاصل مقدار  $\frac{\sin 7x + \sin 3x}{\cos 7x + \cos 3x}$  را بدست آورید؟

$$\begin{aligned} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\cos 7x + \cos 3x} &= \frac{2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2}}{2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2}} = \frac{2 \sin 5x \cos 2x}{2 \cos 5x \cdot \cos 2x} = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} \\ &= \tan 5x \end{aligned}$$

مثال 3: حاصل مقدار  $\frac{\cos 2x - \cos 2y}{\sin 2x + \sin 2y}$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2x - \cos 2y}{\sin 2x + \sin 2y} &= \frac{-2 \sin \frac{2x+2y}{2} \cdot \sin \frac{2x-2y}{2}}{2 \sin \frac{2x+2y}{2} \cdot \cos \frac{2x-2y}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{2(x+y)}{2} \cdot \sin \frac{2(x-y)}{2}}{2 \sin \frac{2(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{2(x-y)}{2}} \\ &= \frac{-2 \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)}{2 \sin(x+y) \cdot \cos(x-y)} = \frac{-\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = -\tan(x-y) \\ &= \tan(y-x) \end{aligned}$$

مثال 4: اگر  $\tan x = \frac{1}{2}$  باشد مقدار  $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos x - \cos 3x}$  را محاسبه کنید؟



$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos x - \cos 3x} = \frac{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \sin \frac{3x-x}{2}}{-2 \sin \frac{x+3x}{2} \cdot \sin \frac{x-3x}{2}} = \frac{2 \cos 2x \cdot \sin x}{-2 \sin 2x \cdot \sin(-x)}$$

$$= \frac{2 \cos 2x \cdot \sin x}{2 \sin 2x \cdot \sin(x)} = \cot 2x$$

$$\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x} = \frac{1}{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

مثال 5: حاصل  $\frac{\cos 54 + \sin 54}{\cos 54 - \sin 54}$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{\cos 54 + \sin 54}{\cos 54 - \sin 54} = \frac{\cos 54 + \cos 36}{\cos 54 - \cos 36} = \frac{2 \cos \frac{54+36}{2} \cdot \cos \frac{54-36}{2}}{-2 \sin \frac{54+36}{2} \cdot \sin \frac{54-36}{2}}$$

$$= \frac{2 \cos 45 \cdot \cos 9}{-2 \sin 45 \cdot \sin 9} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 9}{-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 9} = \frac{\cos 9}{\sin 9} = \cot 9$$

مثال 6: حاصل عبارت  $\frac{\sin 20 + \sin 40 + \cos 50}{\cos 20}$  کدام است؟

$$\frac{\sin 20 + \sin 40 + \cos 50}{\cos 20} = \frac{2 \sin \frac{20+40}{2} \cdot \cos \frac{20-40}{2} + \cos 50}{\cos 20}$$

$$= \frac{2 \sin 30 \cdot \cos(-10) + \cos 50}{\cos 20} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(10) + \cos 50}{\cos 20}$$

$$= \frac{\cos(10) + \cos 50}{\cos 20} = \frac{2 \cos \frac{10+50}{2} \cdot \cos \frac{10-50}{2}}{\cos 20}$$

$$= \frac{2 \cos 30 \cdot \cos(-20)}{\cos 20} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 20}{\cos 20} = \sqrt{3}$$

مثال 7: حاصل عبارت  $\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x}$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \frac{\sin 8x + \sin 2x + \sin 5x}{\cos 8x + \cos 2x + \cos 5x}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2 \cos \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \cos 5x} = \frac{2 \sin 5x \cos 2x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 2x + \cos 5x}$$

$$= \frac{\sin 5x (2 \cos 2x + 1)}{\cos 5x (2 \cos 2x + 1)} = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \tan 5x$$

مثال 8: حاصل عبارت  $(\tan 35 + \tan 20) \cdot \sin 20$  را دریافت کنید؟



$$\begin{aligned}
 (\tan 35 + \tan 20) \cdot \sin 20 &= \left( \frac{\sin(35 + 20)}{\cos 35 \cdot \cos 20} \right) \cdot \sin 20 = \left( \frac{\sin(55)}{\cos 35 \cdot \cos 20} \right) \cdot \sin 20 \\
 &= \left( \frac{\cos 35}{\cos 35 \cdot \cos 20} \right) \cdot \sin 20 = \frac{\sin 20}{\cos 20} = \tan 20
 \end{aligned}$$

مثال 9: اگر  $A, B, C$  زوایای داخلی یک مثلث باشند مقدار  $\sin A + \sin B + \sin C = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}
 \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\
 \therefore \left. \begin{aligned} A+B+C &= \pi \\ A+B &= \pi - C \end{aligned} \right\} \sin \frac{A+B}{2} &= \sin \frac{\pi - C}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2} \\
 \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \\
 \therefore \left. \begin{aligned} A+B+C &= \pi \\ A+B &= \pi - C \end{aligned} \right\} \cos \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{\pi - C}{2} \rightarrow \cos \frac{A+B}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \rightarrow \cos \frac{C}{2} \\
 &= \cos \frac{A+B}{2} \\
 \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \cos \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\
 &= 2 \cos \frac{C}{2} \left[ 2 \cos \frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{A-B}{2} - \frac{A+B}{2}}{2} \right] \\
 &= 4 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\
 \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

تبدیل حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی به شکل مجموعه و تفاضل :

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \dots \dots \dots I$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \dots \dots \dots II$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$



$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \dots\dots\dots III$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \dots\dots\dots IV$$

$$I + II = \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$I - II = \sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

$$III + IV = \cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cdot \cos y$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$III - IV = \cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

## مثالها

مثال 1: حاصل عبارت  $\cos 75 \cdot \cos 15 = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned} \cos 75 \cdot \cos 15 &= \frac{1}{2} [\cos(75 + 15) + \cos(75 - 15)] = \frac{1}{2} [\cos 90 + \cos 60] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 0 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال 2: حاصل عبارت  $\cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{7\pi}{24} = ?$  مساوی است به ؟

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{7\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{24} + \frac{7\pi}{24} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{24} - \frac{7\pi}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{8\pi}{24} \right) + \cos \left( \frac{-6\pi}{24} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right] = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مثال 3: حاصل عبارت  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned} 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) &= 2 \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \cos \left( x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - x \right) - \cos \left( x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + x \right) \right] \right\} \\ &= - \left[ \cos \frac{\pi}{2} - \cos 2x \right] = \cos 2x \end{aligned}$$

مثال 4: حاصل عبارت  $4 \sin x \sin(60 - x) \cdot \sin(60 + x) = ?$  را محاسبه کنید؟



$$\begin{aligned}
 & 4 \sin x \sin(60 - x) \cdot \sin(60 + x) \\
 &= -4 \sin x \cdot \frac{1}{2} [\cos(60 - x + 60 + x) - \cos(60 - x - 60 - x)] \\
 &= -2 \sin x [\cos 120 - \cos 2x] = -2 \sin x \left[ -\frac{1}{2} - \cos 2x \right] \\
 &= \sin x + 2 \sin x \cos 2x = \sin x + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin 3x + \sin(-x)] \\
 &= \sin x + \sin 3x - \sin x = \sin 3x
 \end{aligned}$$

مثال 5: حاصل عبارت  $4 \sin 20 \sin 80 - 2 \sin 10 = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}
 4 \sin 20 \sin 80 - 2 \sin 10 &= -4 \cdot \frac{1}{2} [\cos 100 - \cos(-60)] - 2 \sin 10 \\
 &= -2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + 10 \right) - \frac{1}{2} \right] - 2 \sin 10 = -2 \left[ -\sin 10 - \frac{1}{2} \right] - 2 \sin 10 \\
 &= 2 \sin 10 + 1 - 2 \sin 10 = 1
 \end{aligned}$$

مثال 6: حاصل عبارت  $\cos 20 \cos 40 + \cos^2 80 = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\begin{aligned}
 \cos 20 \cos 40 + \cos^2 80 &= \frac{1}{2} [\cos 60 + \cos(-20)] + \frac{1 + \cos 2 \cdot 80}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 20 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 160 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 20 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi - 20) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 20 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$



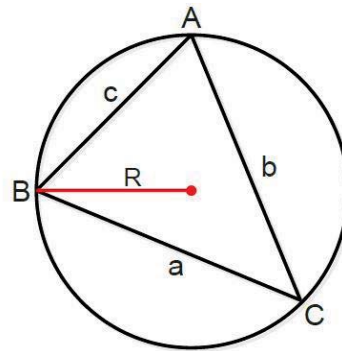
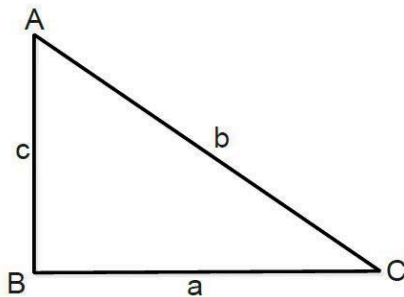
## فصل چهارم

### تطبیقات مثلثات

#### قانون $\sin x$ :

بیان میدارد که در هر مثلث دلخواه  $ABC$  نسبت هر ضلع به ساین زاویه مقابل آن مساوی به مقدار ثابت است

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R} \quad , \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



ثبوت: برای ثبوت آن از فرمول مساحت مثلث استفاده میکنیم

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} a \cdot b \sin C \\ s &= \frac{1}{2} b \cdot c \sin A \\ s &= \frac{1}{2} a \cdot c \sin B \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{2} ab \sin C &= \frac{1}{2} bs \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B \rightarrow ab \sin C = bs \sin A = ac \sin B \\ \frac{ab \sin C}{abc} &= \frac{bs \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} \rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \end{aligned}$$

#### مثالها

مثال 1: هر گاه در مثلث  $ABC$  زاویه  $A = 90^\circ$  و اضلاع  $a = 10\text{cm}$   $b = 5\text{cm}$  باشد متباقی اضلاع و زوایای این مثلث را محاسبه کنید؟

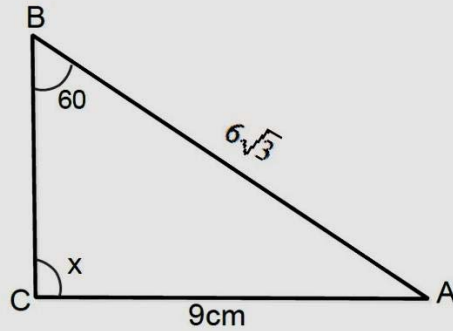
$$\left. \begin{aligned} A &= 90^\circ \\ a &= 10\text{cm} \\ b &= 5\text{cm} \\ c &=? \\ B &=? \\ C &=? \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin 90^\circ}{10} = \frac{\sin B}{5} \rightarrow \frac{1}{10} = \frac{\sin B}{5} \rightarrow 10 \sin B = 5 \rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \\ B &= 30^\circ, \quad A + B + C = 180^\circ \rightarrow 90 + 30 + C = 180 \rightarrow C = 60^\circ \\ \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin 90^\circ}{10} = \frac{\sin 60^\circ}{c} \rightarrow \frac{1}{10} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{c} \rightarrow c = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

مثال 2: هر گاه در مثلث  $ABC$  زاویه  $B = 60^\circ$  و اضلاع  $a = 16\text{cm}$   $b = 8\sqrt{3}\text{cm}$  باشد متباقی اضلاع و زوایای این مثلث را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{aligned} B &= 60^\circ \\ b &= 8\sqrt{3}\text{cm} \\ a &= 16\text{cm} \\ c &=? \\ A &=? \\ C &=? \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin A}{a} \rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{8\sqrt{3}} = \frac{\sin A}{16} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sin A}{16} \rightarrow \sin A = 1, \quad A = 90^\circ \\ A + B + C &= 180^\circ \rightarrow 90 + 60 + C = 180 \rightarrow C = 30^\circ \\ \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin 90^\circ}{16} = \frac{\sin 30^\circ}{c} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{\frac{1}{2}}{c} \rightarrow c = 16 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow c = 8 \end{aligned}$$

مثال 3: در شکل ذیل اجزای نامعلوم این مثلث را محاسبه کنید؟





$$\left. \begin{array}{l} B = 60^\circ \\ b = 9cm \\ c = 6\sqrt{3}cm \\ a = ? \\ A = ? \\ C = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin 60}{9} = \frac{\sin C}{6\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{9} = \frac{\sin C}{6\sqrt{3}} \rightarrow 9 \sin C = 9 \rightarrow \sin C = 1 \\ C = 90^\circ, A + B + C = 180 \rightarrow A + 60 + 90 = 180 \rightarrow A = 30^\circ \\ \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} \rightarrow \frac{\sin 90}{6\sqrt{3}} = \frac{\sin 30}{a} \rightarrow \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{a} \rightarrow a = 3\sqrt{3}cm \end{array}$$

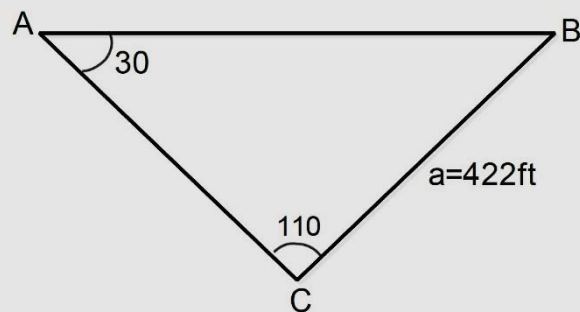
مثال 4: هرگاه در مثلث  $ABC$  زاویه  $A = 45^\circ$  و ضلع  $a = 10cm$  باشد شعاع دایره محیطی این مثلث را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} A = 45^\circ \\ a = 10cm \\ R = ? \end{array} \right\} \frac{a}{\sin A} = 2R \rightarrow \frac{10}{\sin 45} = 2R \rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \rightarrow \frac{20}{\sqrt{2}} = 2R \rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{2}} cm$$

مثال 5: در شکل ذیل طول  $AB$  را محاسبه کنید؟

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin 30}{422} = \frac{\sin 110}{AB}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{422} = \frac{0,94}{AB} \rightarrow AB = 793,36$$

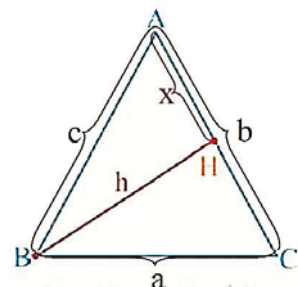


### قانون $\cos x$ :

بیان میدارد که در مثلث دلخواه  $ABC$  کوساین یک زاویه مساوی به مجموعه مربعات اضلاع مجاور منفی مربع ضلع مقابل بر دوچند اضلاع مجاور می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} h^2 = c^2 - x^2 \\ x = c \cdot \cos A \\ a^2 = h^2 + (b - x)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow a^2 = h^2 + (b - x)^2 \\ \rightarrow a^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx \\ \rightarrow a^2 = h^2 + x^2 + b^2 - 2bx \end{array}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$





$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

## مثالها

مثال 1: هرگاه در یک مثلث  $a = 6\text{cm}$  ,  $b = 3\text{cm}$  ,  $c = 3\sqrt{3}\text{cm}$  باشد با استفاده از قانون کوساین زوایای  $A, B, C$  را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} a = 6\text{cm} \\ b = 3\text{cm} \\ c = 3\sqrt{3}\text{cm} \end{array} \right\} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + (3\sqrt{3})^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{9 + 27 - 36}{18\sqrt{3}} = \frac{0}{18\sqrt{3}} = 0$$

$$A = 90^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + (3\sqrt{3})^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{36 + 27 - 9}{36\sqrt{3}} = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow B = 30^\circ$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{6^2 + 3^2 - (3\sqrt{3})^2}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{36 + 9 - 27}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \rightarrow C = 60^\circ$$

مثال 2: در مثلث که اضلاع آن به ترتیب  $a = \sqrt{28}$  ,  $b = 4$  ,  $c = 6$  باشد زاویه  $A$  را محاسبه کنید؟

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 6^2 - (\sqrt{28})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{16 + 36 - 28}{48} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \rightarrow A = 60^\circ$$

مثال 3: در شکل ذیل اجزای نامعلوم را محاسبه کنید؟

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{5^2 + 8^2 - a^2}{2 \cdot 5 \cdot 8}$$

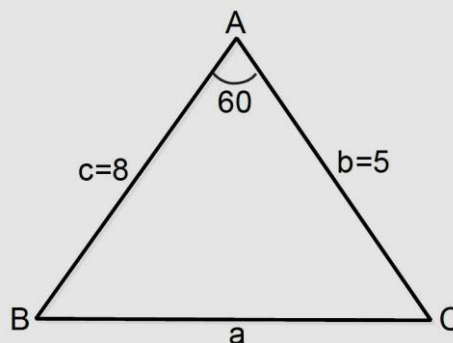
$$\frac{1}{2} = \frac{89 - a^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} \rightarrow 89 - a^2 = 40 \rightarrow a^2 = 49$$

$$a = 7$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$C = 81,8^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{88}{112} \rightarrow B = 38,21^\circ$$

قانون  $\tan x$ :

در هر مثلث  $ABC$  با زوایای  $A, B, C$  و اضلاع  $a, b, c$  ارتباط ذیل نظر به نسبت مثلثاتی  $\tan x$  وجود دارد.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}} = \tan \frac{A+B}{2} \cdot \cot \frac{A-B}{2} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}} \quad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan \frac{A-C}{2}}{\tan \frac{A+C}{2}}$$

## مثالها

مثال 1: در مثلث  $ABC$ ،  $\frac{b-c}{b+c} + \frac{1}{\sqrt{3}}$  و  $A = 90^\circ$  است زوایا  $C = ?$ ،  $B = ?$  را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b-c}{b+c} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ A = 90^\circ \\ B = ? \\ C = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} A+B+C = \pi \rightarrow \frac{\pi}{2} + B+C = \pi \rightarrow B+C = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4} \\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{\pi}{4}} \rightarrow \tan \frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\frac{B-C}{2} = 30 \rightarrow B-C = 60 \rightarrow \begin{cases} B+C = 90 \\ B-C = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 75 \\ C = 15 \end{cases}$$

مثال 2: هرگاه در مثلث  $ABC$  مقدار  $C = 75^\circ$ ،  $B = 60^\circ$ ،  $a = 35ft$  باشد زوایای نامعلوم را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} a = 35ft \\ B = 60^\circ \\ C = 75^\circ \\ A = ? \\ b = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} A+B+C = 180 \rightarrow A+60+75 = 180 \rightarrow A = 180 - 135 \rightarrow A = 45 \\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \rightarrow \frac{35+b}{35-b} = \frac{\tan \frac{45+60}{2}}{\tan \frac{45-60}{2}} \rightarrow \frac{35+b}{35-b} = \frac{\tan 52,5}{-\tan 7,5} \end{array}$$

$$\frac{35+b}{35-b} = \frac{1,3}{-0,13} \rightarrow \frac{35+b}{35-b} = -10 \rightarrow 35+b = -350 + 10b \rightarrow 9b = 385$$

$$\rightarrow b = \frac{385}{9} \rightarrow b = 42,8$$

## جزئیات دایره :

طول قوس دایره: به یک قسمت از محیط دایره قوس دایره گفته میشود و اگر زاویه مرکزی قوس دایره  $\theta$  باشد طول قوس دایره از رابطه ذیل محاسبه میشود.

$$\left[ \begin{array}{l} 2\pi \\ \theta^R \end{array} \right] \frac{2\pi r}{l} \quad 2\pi l = 2\pi r \theta^R \rightarrow l = r \cdot \theta^R$$

و اگر زاویه مرکزی به درجه باشد کافی است رابطه فوق را با  $\frac{\pi}{180}$  ضرب نماییم.



$$l = r \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow l = \pi \cdot r \frac{\theta}{180^\circ}$$

## مثالها

مثال 1: طول قوس را که در مقابل زاویه مرکزی 45 درجه واقع باشد دریابید اگر شعاع دایره 14cm باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 45^\circ \\ r = 14cm \\ l = ? \end{array} \right\} l = \pi \cdot r \frac{\theta}{180^\circ} = \pi \cdot 14cm \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{22}{7} \cdot 14cm \cdot \frac{1}{4} = 11cm$$

مثال 2: طول قوس که در مقابل زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{2}$  رادیان واقع باشد دریابید اگر شعاع دایره 28cm باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2} \\ r = 28cm \\ l = ? \end{array} \right\} l = r \cdot \theta^R = 28cm \cdot \frac{\pi}{2} = 14\pi cm$$

مثال 3: اگر طول قوس مقابل زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{6}$  رادیان مساوی به  $3\pi cm$  باشد شعاع دایره را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{6} \\ l = 3\pi cm \\ r = ? \end{array} \right\} l = r \cdot \theta^R \rightarrow 3\pi cm = r \cdot \frac{\pi}{6} \rightarrow r = 18cm$$

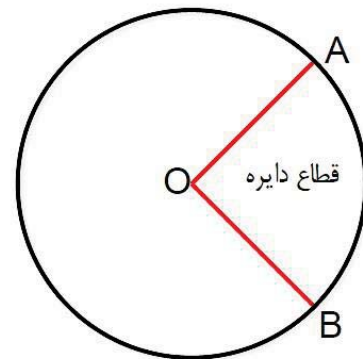
**مساحت قطاع دایره**: قطاع دایره به یک قسمت از سطح دایره گفته میشود که توسط دو شعاع دایره جدا گردیده باشد. واگر زاویه مرکز قطاع دایره  $\theta$  و شعاع دایره  $r$  باشد مساحت قطاع دایره از فورمول ذیل محاسبه میشود.

$$\left[ \begin{array}{l} 2\pi \\ \theta \end{array} \right] \frac{\pi r^2}{S} \rightarrow \frac{2\pi}{\theta} = \frac{\pi r^2}{S} \rightarrow 2\pi S = \pi r^2 \theta$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta^R$$

و اگر زاویه مرکزی به درجه داده شده باشد کافی است رابطه فوق را ضرب  $\frac{\pi}{180}$  می نماییم.

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta^R \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow S = \frac{\pi r^2 \theta^R}{360}$$



## مثالها

مثال 1: اگر شعاع دایره 10cm باشد مساحت قطاع دایره را محاسبه کنید که زاویه مرکزی آن  $\frac{\pi}{2}$  رادیان است.

$$\left. \begin{array}{l} r = 10cm \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ S = ? \end{array} \right\} S = \frac{1}{2} r^2 \theta^R = \frac{1}{2} 10^2 \frac{\pi}{2} = 25\pi cm^2$$



مثال 2: اگر شعاع دایره  $10\text{cm}$  باشد مساحت قطعه دایره را محاسبه کنید که زاویه قطاع آن  $\theta = 72^\circ$  باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} r = 10\text{cm} \\ \theta = 72 \\ S = ? \end{array} \right\} S = \frac{\pi r^2 \theta^\circ}{360} = \frac{\pi 10^2 \cdot 72}{360} = 20\pi \text{cm}^2$$

مثال 3: اگر شعاع یک دایره  $6\text{cm}$  و مساحت قطاع آن  $15\pi \text{cm}^2$  باشد طول قوس این قطاع را محاسبه کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} R = 6\text{cm} \\ S = 15\pi \text{cm}^2 \\ \theta = ? \\ l = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{1}{2} r^2 \theta \rightarrow 15\pi \text{cm}^2 = \frac{1}{2} (6\text{cm})^2 \cdot \theta \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \\ L = r \cdot \theta = 6\text{cm} \cdot \frac{5\pi}{6} = 5\pi \text{cm} \end{array}$$

مثال 4: دایره دارای شعاع  $7\text{cm}$  است محیط و مساحت دایره و طول قوس مقابل زاویه مرکزی  $60^\circ$  و مساحت قطاع مقابل  $60^\circ$  را دریابید؟

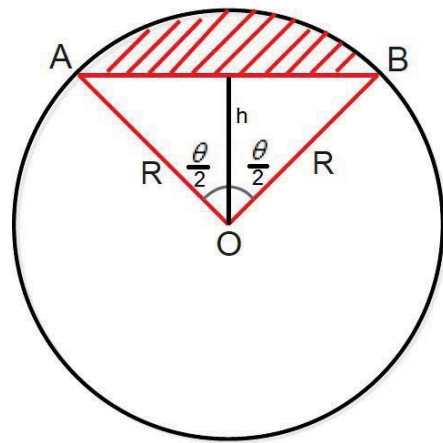
$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 7\text{cm} = 14\pi \text{cm}$$

$$S = \pi r^2 = \pi (7\text{cm})^2 = 49\pi \text{cm}^2$$

$$l = r \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{180} = 7\text{cm} \cdot 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{3} \text{cm}$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} (6\text{cm})^2 \cdot 60 \cdot \frac{\pi}{180} = 6\pi \text{cm}^2$$

**مساحت قطعه دایره:** قطعه دایره یک قسمت از سطح دایره است که توسط وتر دایره جداگر دیده باشد و اگر زاویه مرکزی قطعه دایره  $\theta$  و شعاع دایره  $r$  باشد مساحت قطعه دایره از فرمول ذیل محاسبه میشود.



$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{h}{R} \rightarrow h = R \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{R} \rightarrow AB = 2R \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot R \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} R^2 \sin \theta \rightarrow S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

### مثالها

مثال 1: مساحت قطعه دایره را محاسبه کنید که شعاع دایره  $10\text{cm}$  و زاویه مرکزی قطاع  $\frac{\pi}{2}$  رادیان باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} r = 10\text{cm} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ S = ? \end{array} \right\} S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (10\text{cm})^2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 50 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{cm}^2$$

مثال 2: مساحت قطعه دایره را محاسبه کنید که شعاع آن  $6\text{cm}$  بود و توسط وتر  $6\text{cm}$  جدا شده باشد.



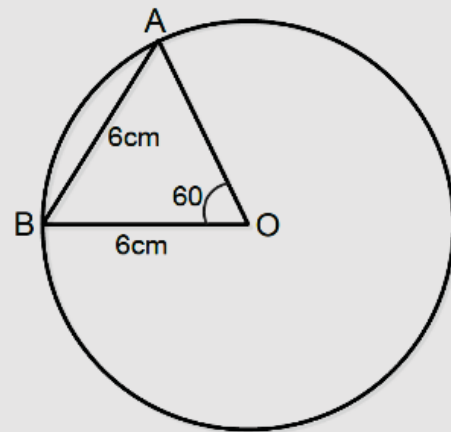
حل : چون وتر دایره با شعاع دایره مساوی است بناء زاویه مرکزی آن  $\frac{\pi}{3}$  رادیان است.

$$\left. \begin{aligned} r &= 6\text{cm} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \\ S &=? \end{aligned} \right\} S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2}(6\text{cm})^2 \left( \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 18 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{cm}^2$$

$$= (6\pi - 9\sqrt{3})\text{cm}^2$$



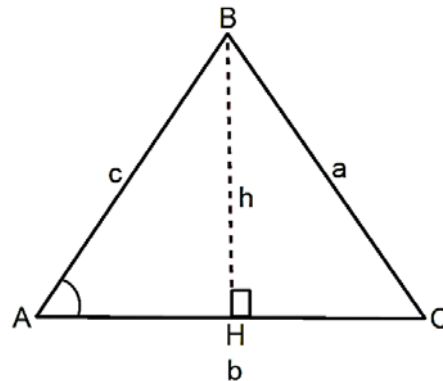
دریافت مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه مابین آنها:

هرگاه دو ضلع و زاویه مابین این دو ضلع را در یک مثلث داشته باشیم مساحت این مثلث از فرمول ذیل محاسبه میشود.

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

$$S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$$

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$



$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}b \cdot h \\ \sin A &= \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \sin A \end{aligned} \right\} S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2}b(c \cdot \sin A) \rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

#### مثالها

مثال 1: مساحت مثلث را دریابید که اضلاع آن به ترتیب  $a = 10\text{cm}$  ,  $b = 8\text{cm}$  ,  $C = 60^\circ$  باشد؟

$$\left. \begin{aligned} a &= 10\text{cm} \\ b &= 8\text{cm} \\ C &= 60^\circ \end{aligned} \right\} S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C = \frac{1}{2} 10\text{cm} \cdot 8\text{cm} \cdot \sin 60 = 20\sqrt{3}\text{cm}^2$$

مثال 2: مساحت مثلث را در شکل ذیل دریابید؟



$\sin 130^\circ = 0.7660$

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 8\text{cm} \cdot 13\text{cm} \cdot \sin 130 = 52\text{cm}^2 \cdot 0,766 = 39,8\text{cm}^2$

مثال 3: مساحت مثلث را در شکل ذیل محاسبه کنید؟

$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8\text{cm} \cdot 8\text{cm} \cdot \sin 30 = 16\text{cm}^2$

دریافت  $\sin \frac{A}{2}$  ,  $\sin \frac{B}{2}$  ,  $\sin \frac{C}{2}$  از جنس اضلاع مثلث:

$$p = \frac{a + b + c}{2} \quad , \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad , \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc}} \end{aligned}$$

چون  $a + b + c = 2p$  است بناء

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2(p - b) \cdot 2(p - c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}} \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}$$

دریافت  $\cos \frac{A}{2}$  ,  $\cos \frac{B}{2}$  ,  $\cos \frac{C}{2}$  از جنس اضلاع مثلث:



$$\begin{aligned}\cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}}\end{aligned}$$

چون  $a + b + c = 2p$  است پس داریم که:

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

$$a + b + c = 2p$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2p \cdot 2(p-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

دریافت  $\tan \frac{A}{2}$  ,  $\tan \frac{B}{2}$  ,  $\tan \frac{C}{2}$  از جنس اضلاع مثلث:

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

دریافت  $\sin A$  ,  $\cos A$  ,  $\tan A$  از جنس اضلاع آن :

$$\begin{aligned}\sin A &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ &= \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\end{aligned}$$





$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مساحت مثلث از جنس سه ضلع آن :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مثالها

مثال 1: مساحت مثلث را دریابید که اضلاع آن به ترتیب 3cm , 4cm , 5cm باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} a = 3cm \\ b = 4cm \end{array} \right\} p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = 6$$

$$c = 5cm \left\} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{36} = 6$$

مثال 2: مساحت مثلث را دریابید که اضلاع آن به ترتیب 18cm , 24cm , 30cm باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} a = 3cm \\ b = 4cm \end{array} \right\} p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36$$

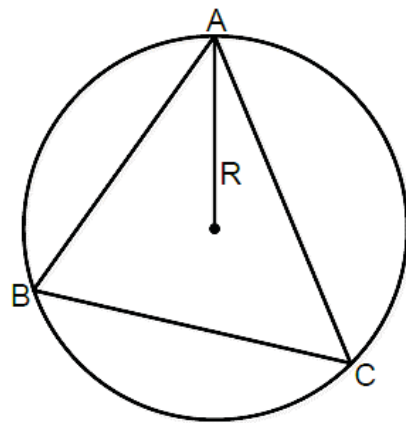
$$c = 5cm \left\} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = 216cm$$

دریافت شعاع دایره محیطی یک مثلث:

دایره محیطی مثلث عبارت از دایره است که از راس های یک مثلث عبور نماید و مثلث در داخل دایره قرار داشته باشد و اگر اضلاع مثلث را  $a, b, c$  بنامیم مساحت مثلث از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \rightarrow \frac{a \cdot bc}{bc \sin A} = 2R \rightarrow \frac{abc}{2S} = 2R$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$





## مثالها

مثال 1: شعاع دایره محیطی مثلث  $ABC$  را دریابید که اضلاع آن  $a = 11\text{cm}$  ,  $b = 12\text{cm}$  ,  $c = 13\text{cm}$  باشد.

$$a = 11\text{cm} \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11+12+13}{2} = 18 \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-11)(18-12)(18-13)} = 61,4 \\ R = ? \end{array} \right. \quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{4 \cdot 61,48} = 6,98$$

مثال 2: شعاع دایره محیطی مثلث را دریابید که اضلاع آن به ترتیب  $a = 3\text{cm}$  ,  $b = 5\text{cm}$  ,  $c = 6\text{cm}$  باشد؟

$$a = 3\text{cm} \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+5+6}{2} = 7 \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = 7,5 \\ R = ? \end{array} \right. \quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 7,6} \approx 3$$

## دریافت شعاع دایره محاطی یک مثلث:

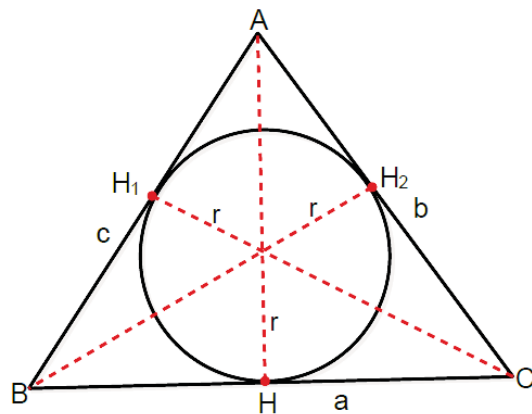
دایره محاطی یک مثلث عبارت از دایره است که در داخل مثلث قرار داشته و محیط آن با هر سه ضلع مثلث مماس باشد. و اگر اضلاع مثلث را  $a, b, c$  بنامیم شعاع دایره محاطی از فرمول ذیل محاسبه میشود.

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}r \cdot a + \frac{1}{2}r \cdot c + \frac{1}{2}r \cdot b$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$S = \frac{1}{2}r \cdot 2p \rightarrow S = rp \quad r = \frac{S}{p}$$



## مثالها

مثال 1: شعاع دایره محاطی مثلث را دریابید که طول اضلاع آن به ترتیب  $7\text{cm}$  ,  $8\text{cm}$  ,  $9\text{cm}$  باشد.

$$a = 7\text{cm} \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = 12 \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 26,83 \\ R = ? \end{array} \right. \quad r = \frac{S}{p} = \frac{26,83}{12} = 2,23\text{cm}$$

مثال 2: دوضلع قائم یک مثلث قائم الزاویه به ترتیب  $3\text{cm}$  ,  $4\text{cm}$  است شعاع دایره محیطی و محاطی این مثلث را محاسبه کنید؟



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 3\text{cm} \\ b = 4\text{cm} \\ c = ? \\ R = ? \\ r = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow c = 5 \\ p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6 \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = 6 \\ R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2} \\ r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1 \end{array}
 \end{aligned}$$

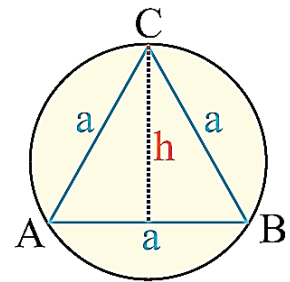
دریافت ارتفاع ، مساحت ، شعاع دایره محیطی و محاطی مثلث متساوی الاضلاع:

$$\sin 60 = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot \sin 60 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2} \rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2}} \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$



مثالها

مثال 1: مساحت شعاع دایره محیطی و محیط مثلث متساوی الاضلاع را دریابید که طول یک ضلع آن  $a = 10\text{cm}$  باشد؟

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (10\text{cm})^2 = 25\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} (10\text{cm}) = \frac{10\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{\sqrt{3}}{6} (10\text{cm}) = \frac{5\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

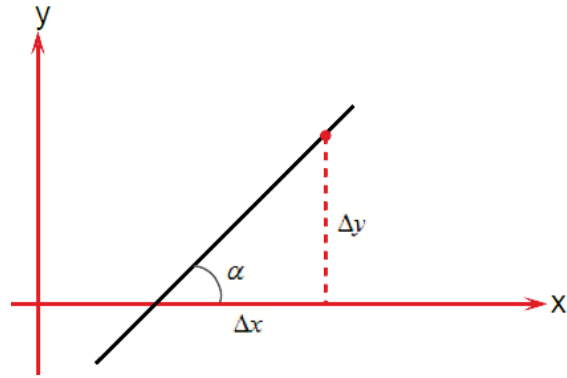
زاویه میل :

نظر به معلومات هندسه تحلیلی زاویه را که خط مستقیم با جهت مثبت محور  $x$  میسازد بنام زاویه میل یاد میشود.



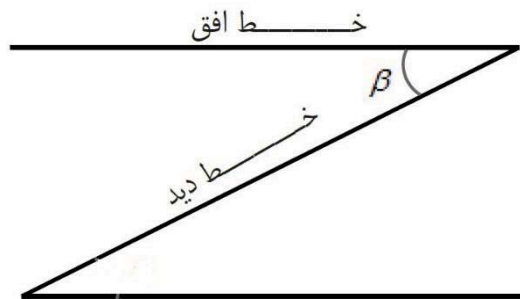
$$\tan \alpha = m$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



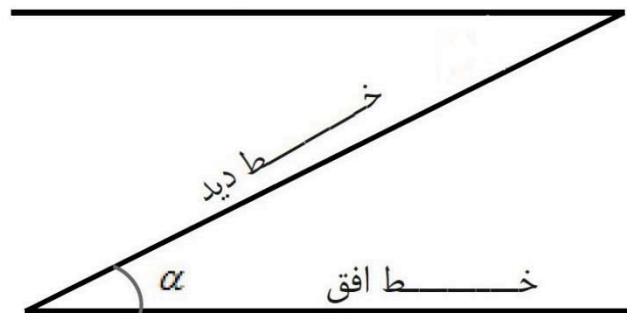
### زاویه ارتفاع :

هرگاه یک جسم در یک ارتفاع قرار داشته باشد خط دید از جسم تا به افق یک زاویه را میسازد که بنام زاویه ارتفاع نامیده میشود.



### زاویه تنزیل :

هرگاه یک جسم در پایین قرار داشته باشد خط دید با سطح افق یک زاویه را تشکیل میدهد که بنام زاویه تنزیل نامیده میشود.



#### مثالها

مثال 1: هرگاه طول تار در یک کاغذ پران  $120m$  است و زاویه ارتفاع کاغذ پران  $45^\circ$  است ارتفاع کاغذ پران را محاسبه کنید؟

$$\sin 45 = \frac{h}{120} \rightarrow h = 120 \cdot \sin 45 \rightarrow h = 120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow h = 60\sqrt{2}m$$



## مطابقت ها :

به مساوات مثلثاتی گفته میشود که اطراف مساوات در برابر هر قیمت صدق نماید. و عموماً در مطابقت از یک طرف مطابقت با استفاده از روابط اصلی و فرعی مثلثاتی و فورمولهای مثلثات طرف دیگر مطابقت را بدست می آوریم.

## مثالها

مثال 1: مطابقت  $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$  را ثبوت کنید؟

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 1 = 2$$

مثال 2: مطابقت  $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = 2 \csc x$  را ثبوت کنید؟

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{\sin x (1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x}{\sin x (1+\cos x)}$$

$$= \frac{1+1+2 \cos x}{\sin x (1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{\sin x (1+\cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x$$

مثال 3: مطابقت  $\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} = \tan^2 x$  را ثبوت کنید؟

$$\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

مثال 4: مطابقت  $\frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x} = \tan x$  را ثبوت کنید؟

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x} = \frac{\sin x + 2 \sin x \cos x}{1+\cos x + 2\cos^2 x - 1} = \frac{\sin x (1+2 \cos x)}{\cos x (1+2 \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

مثال 5: مطابقت  $\frac{\csc x}{\cot x + \tan x} = \cos x$  را ثبوت کنید؟

$$\frac{\csc x}{\cot x + \tan x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x}} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x \cos x}} = \cos x$$

مثال 6: مطابقت  $\sec x - \frac{\tan x}{\csc x} = \cos x$  را ثبوت کنید؟

$$\sec x - \frac{\tan x}{\csc x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$$

مثال 7: مطابقت  $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A$  را ثبوت کنید.

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \frac{1-(1-2\sin^2 A)}{1+2\cos^2 A - 1} = \frac{1-1+2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \tan^2 A$$

مثال 8: مطابقت  $\frac{1-\cos x + \cos y - \cos(x+y)}{1+\cos x - \cos y - \cos(x+y)} = \tan \frac{x}{2} \cdot \cot \frac{y}{2}$  را ثبوت کنید؟



$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x + \cos y - \cos(x+y)}{1 + \cos x - \cos y - \cos(x+y)} &= \frac{1 - \cos x + \cos y - [\cos x \cos y - \sin x \sin y]}{1 + \cos x - \cos y - [\cos x \cos y - \sin x \sin y]} \\ &= \frac{1 - \cos x + \cos y - \cos x \cos y + \sin x \sin y}{1 + \cos x - \cos y - \cos x \cos y + \sin x \sin y} \\ &= \frac{(1 - \cos x) + \cos y (1 - \cos x) + \sin x \sin y}{(1 - \cos x)(1 + \cos y) + \sin x \sin y} \\ &= \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos y) + \sin x \sin y}{(1 + \cos x)(1 - \cos y) + \sin x \sin y} \\ &= \frac{2\cos^2 \frac{y}{2} \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot 2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}}{2\sin^2 \frac{y}{2} \cdot 2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot 2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} \\ &= \frac{4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \left[ \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right]}{4\cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \left[ \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right]} = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}} \\ &= \tan \frac{x}{2} \cdot \cot \frac{y}{2} \end{aligned}$$

مثال 9: مطابقت  $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sec x - \tan x$  را ثابت کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} &= \sqrt{\frac{(1 - \sin x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \csc x - \tan x \end{aligned}$$

مثال 10: مطابقت  $\frac{\cot x - 1}{\cot x + 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = 2 \sec 2x$  را ثابت کنید.

$$\begin{aligned} \frac{\cot x - 1}{\cot x + 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1} &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - 1}{\frac{\cos x}{\sin x} + 1} + \frac{\frac{\cos x}{\sin x} + 1}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} \\ &= \frac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{1 + 1}{\cos 2x} = \frac{2}{\cos 2x} = 2 \sec 2x \end{aligned}$$

مثال 11: مطابقت  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$  را ثابت کنید.

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 &= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= 1^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} (2\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \end{aligned}$$



مثال 12: مطابقت  $\sin^6 x + \cos^6 x =$  را ثابت کنید؟

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}(2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$



## فصل پنجم

## معادلات

## معادلات :

به مساوات گفته میشود که اطراف مساوات در برابر بعضی قیمت ها صدق نماید  
معادلات مثلثاتی درجه یک : به معادلات گفته میشود که در آن یک زاویه مجهول بوده و توان نسبت مثلثاتی  
یک باشد.

1- معادله درجه یک از جنس  $\sin x$  :

شکل عمومی این معادله بصورت  $a \sin x + b = 0$  بوده و برای حل آن معادله را معلوم و مجهول نموده  
و قیمت  $\sin x$  را دریافت میکنیم و سپس از روی  $\sin x$  قیمت زاویه را دریافت میکنیم.

$$a \sin x + b = 0 \rightarrow a \sin x = -b \rightarrow \sin x = -\frac{b}{a}$$

شرط حل : معادله فوق زمانی دارای حل است که قیمت  $\sin x$  در انتروال  $[-1, +1]$  قرار داشته باشد.

حل عمومی : هر معادله مثلثاتی دارای یک ست حل است چون زاویه که در معادله صدق کند بی نهایت زاویه  
کوترمینل دارد و با توجه به رابطه مثلثاتی هرگاه  $\alpha$  کوچکترین حل معادله باشد پس زاویه  $(\pi - \alpha)$  نیز حل  
معادله است زیرا  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  است.

$$ss = \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k + 1)\pi - \alpha \end{cases} \rightarrow x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

## مثالها

مثال 1: معادله  $2 \sin x - 1 = 0$  را حل کنید؟

$$2 \sin x - 1 = 0 \rightarrow 2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$ss = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k - 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

مثال 2: معادله  $6 \sin x - 3\sqrt{2} = 0$  را حل کنید؟

$$6 \sin x - 3\sqrt{2} = 0 \rightarrow 6 \sin x = 3\sqrt{2} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$ss = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = (2k - 1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$$

مثال 3: معادله  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  را حل کنید؟

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow 2 \sin x = \sqrt{3} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$





$$SS = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = (2k-1)\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$$

مثال 4: معادله  $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$  در انتروال  $[0, 4\pi]$  چند حل دارد؟

$$\sqrt{2} \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2} \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad \pi - \frac{\pi}{4}, \quad 2\pi + \frac{\pi}{4}, \quad 3\pi - \frac{\pi}{4}$$

دیده میشود که در این انتروال 4 حل دارد.

**نکته:** هرگاه در معادله مثلثاتی درجه یک از جنس نسبت  $\sin x$  را ساده کنیم و به حالت  $\sin p = \sin q$  تبدیل کنیم در این حالت با توجه به حل عمومی معادله از جنس  $\sin x$  دو دسته جواب برای آن می توانیم بنویسیم.

$$\begin{cases} p = 2k\pi + q \\ p = (2k+1)\pi - q \end{cases}$$

مثالها

مثال 1: معادله  $4 \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 2 = 0$  را حل نمایید؟

$$4 \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 2 = 0 \rightarrow 4 \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 2 \rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} p = x - \frac{\pi}{4} \\ q = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ p = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

مثال 2: معادله  $\sin 3x - \sin x = 0$  را حل نمایید.

$$\sin 3x - \sin x = 0 \rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\begin{cases} p = 3x \\ q = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = 2k\pi - q \rightarrow 3x = 2k\pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi \rightarrow x = k\frac{\pi}{2} \\ p = (2k+1)\pi - q \rightarrow 3x = (2k+1)\pi - x \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \end{cases}$$

## 2- معادله درجه یک از جنس $\cos x$ :

شکل عمومی این معادله بصورت  $a \cos x + b = 0$  بوده و برای حل آن معادله را معلوم و مجهول نموده و قیمت  $\cos x$  را دریافت میکنیم و سپس از روی قیمت زاویه را دریافت میکنیم.

$$a \cos x + b = 0 \rightarrow a \cos x = -b \rightarrow \cos x = -\frac{b}{a}$$



شرط حل : معادله فوق زمانی دارای حل است که قیمت  $\cos x$  در انتروال  $[-1, +1]$  قرار داشته باشد.

حل عمومی : هر معادله مثلثاتی دارای یک ست حل است چون زاویه که در معادله صدق کند بی نهایت زاویه کوترمینل دارد و با توجه به رابطه مثلثاتی هرگاه  $\alpha$  کوچکترین حل معادله باشد پس زاویه  $(-\alpha)$  نیز حل معادله است زیرا  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  است.

$$SS = \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

## مثالها

مثال 1: معادله  $2 \cos x - 1 = 0$  را حل کنید؟

$$2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow 2 \cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$SS = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

مثال 2: معادله  $6 \cos x - 3\sqrt{2} = 0$  را حل کنید؟

$$6 \cos x - 3\sqrt{2} = 0 \rightarrow 6 \cos x = 3\sqrt{2} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$SS = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال 3: معادله  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$  را حل کنید؟

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow 2 \cos x = \sqrt{3} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$SS = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

نکته : هرگاه در معادله مثلثاتی درجه یک از جنس نسبت  $\cos x$  را ساده کنیم و به حالت  $\cos p = \cos q$  تبدیل کنیم در این حالت با توجه به حل عمومی معادله از جنس  $\cos x$  دو دسته جواب برای آن می توانیم بنویسیم.

$$SS = \begin{cases} p = 2k\pi + q \\ p = 2k\pi - q \end{cases}$$

## مثالها

مثال 1: ست حل معادله  $4 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) - 2\sqrt{2} = 0$  را بدست آورید؟

$$4 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) - 2\sqrt{2} = 0$$

$$4 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} \rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\left. \begin{aligned} p &= 2x - \frac{\pi}{4} \\ q &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p = 2k\pi + q \rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ p = 2k\pi - q \rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \end{cases}$$

### 3- معادله درجه یک از جنس $\tan x$ :

شکل عمومی این معادله بصورت  $a \tan x + b = 0$  بوده و برای حل آن معادله را معلوم و مجهول نموده و قیمت  $\tan x$  را دریافت میکنیم و سپس از روی قیمت زاویه را دریافت میکنیم.

$$a \tan x + b = 0 \rightarrow a \tan x = -b \rightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$$

**حل عمومی :** هر معادله مثلثاتی دارای یک ست حل است چون زاویه که در معادله صدق کند بی نهایت زاویه کوترمینل دارد و با توجه به رابطه مثلثاتی هرگاه  $\alpha$  کوچکترین حل معادله باشد پس زاویه  $(\pi + \alpha)$  نیز حل معادله است زیرا  $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$  است.

$$ss = \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k + 1)\pi + \alpha \end{cases} \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

#### مثالها

مثال 1: معادله  $5 \tan x - 5 = 0$  را حل نمایید؟

$$5 \tan x - 5 = 0 \rightarrow 5 \tan x = 5 \rightarrow \tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in Z$$

مثال 2: معادله  $3 \tan x + \sqrt{3} = 0$  را حل نمایید؟

$$3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \rightarrow 3 \tan x = -\sqrt{3} \rightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in Z$$

مثال 3: معادله  $2 \tan x + 4\sqrt{3} = \tan x + 3\sqrt{3}$  را حل نمایید؟

$$2 \tan x + 4\sqrt{3} = \tan x + 3\sqrt{3} \rightarrow 2 \tan x - \tan x = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad k \in Z$$

**نکته :** هرگاه معادله درجه یک از جنس  $\tan x$  بصورت  $\tan p = \tan q$  قرار گیرد این معادله دارای یک دسته جواب به صورت  $p = k\pi + q$  میباشد.



## مثالها

مثال 1: معادله  $\tan(3x + \frac{\pi}{4}) - \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 0$  را حل نمایید؟

$$\tan(3x + \frac{\pi}{4}) - \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \rightarrow \tan(3x + \frac{\pi}{4}) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$$

$$p = k\pi + q \rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = k\pi + x - \frac{\pi}{4} \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

مثال 2: معادله  $\sqrt{3} \tan 2x = 1$  در انتروال  $[0, \frac{\pi}{2}]$  چند حل دارد؟

$$\sqrt{3} \tan 2x = 1 \rightarrow \tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$

دیده میشود که معادله فوق در انتروال  $[0, \frac{\pi}{2}]$  دارای یک حل است.

## معادلات مثلثاتی یک مجهوله درجه دوم:

به معادلات گفته میشود که در آن یک زاویه مجهول بوده و توان نسبت مثلثاتی دو باشد. و برای حل آن مانند یک معادله الجبری حل نموده و ست حل معادله را دریافت میکنیم.

## مثالها

مثال 1: معادله  $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$  را حل نمایید؟

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = p$$

$$6p^2 - 5p + 1 = 0, \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$$

$$p_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}, \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \\ p_2 = \frac{1}{3}, \sin x = \frac{1}{3} \rightarrow x = 19^\circ, 30', x = k\pi + (-1)^k \frac{13\pi}{120} \end{cases}$$

مثال 2: معادله  $2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$  را حل نمایید؟

$$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0 \rightarrow \sin x (2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال 3: ست حل معادله  $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$  را بدست آورید؟

$$3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0 \rightarrow \cos x = p \rightarrow 3p^2 + 2p - 5 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64$$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 8}{6} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 1 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow x = 2k\pi \\ p_2 = -\frac{5}{3} \dots \dots \dots x \end{cases}$$

مثال 4: ست حل معادله  $\cos 2x + \sin x = 0$  را دریافت کنید؟

$$\cos 2x + \sin x = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = p$$



$$2p^2 - p - 1 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_1 = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2} \\ p_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

مثال 5: ست حل معادله  $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$  را بدست آورید؟

$$\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2} \rightarrow \cos 2x + 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = v \rightarrow 2v^2 + v - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} v_1 = -1 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = (2k+1)\pi \\ v_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

مثال 6: ست حل معادله  $\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$  را بدست آورید؟

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{(1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\sqrt{3} \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow \tan^2 x - (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

سیستم معادلات دوجملهه مثلثاتی :

سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی را در شش نوع حل کرده میتوانیم.

نوع اول: این نوع از هشت سیستم معادلات ذیل تشکیل شده است.

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

شرط حل این نوع معادلات  $a^2 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0 \rightarrow -1 \leq \frac{a}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \leq 1$  میباشد.

مثالها

مثال 1: سیستم معادلات  $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  را حل نمایید؟

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \rightarrow x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x-y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} + y = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0$$

$$\text{فعالیت : سیستم معادله} \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ را حل نمایید.}$$

نوع دوم : این نوع از شش سیستم معادلات ذیل تشکیل شده است.

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ \sin x \cos y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

شرط حل این نوع سیستم معادلات  $-\cos^2 \frac{a}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{a}{2}$  می باشد.

## مثالها

مثال 1: حل سیستم معادله  $\begin{cases} x+y = \pi \\ \sin x \cdot \sin y = 1 \end{cases}$  را حل نمایید؟

$$\begin{cases} x+y = \pi \\ \sin x \cdot \sin y = 1 \end{cases}$$

$$\sin x \cdot \sin y = 1 \rightarrow -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] = 1$$

$$-\frac{1}{2} [\cos(\pi) - \cos(x-y)] = 1 \rightarrow -\frac{1}{2} [-1 - \cos(x-y)] = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(x-y) = 1 \rightarrow \frac{1}{2} \cos(x-y) = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x-y) = 1 \rightarrow x-y = 0$$

$$\begin{cases} x+y = \pi \\ x-y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$x+y = \pi \rightarrow \frac{\pi}{2} + y = \pi \rightarrow y = \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{فعالیت : سیستم معادله} \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x-y = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \text{ را حل نمایید.}$$

نوع سوم : این نوع معادلات از چهارم سیستم معادلات ذیل تشکیل شده است.



$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

## مثالها

مثال 1: سیستم معادله  $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$  را حل نمایید؟

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{\sin x - \sin y}{\sin y + \sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \rightarrow \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\rightarrow \cot \frac{x+y}{2} \cdot \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \rightarrow \cot \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \cdot \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \cot \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \rightarrow \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \rightarrow \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3} + y = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

فعالیت: سیستم معادله  $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$  را حل نمایید.

نوع چهارم: این نوع از چهار سیستم معادلات ذیل تشکیل شده است.

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

شرط حل این سیستم معادلات  $0 \leq a^2 - 4 + 4a \cot \alpha$  میباشد.

## مثالها

مثال 1: سیستم معادله  $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$  را حل نمایید.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$



$$\tan(x - y) = \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{-2\sqrt{3}}{1 + \tan x \tan y} = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{-2}{1 + \tan x \tan y} = 1 \rightarrow \tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \\ \tan x \cdot \tan y = -3 \end{cases} \rightarrow \tan x = (\tan y - 2\sqrt{3})$$

$$(\tan y - 2\sqrt{3}) \cdot \tan y = -3 \rightarrow \tan^2 y - 2\sqrt{3} \tan y + 3 = 0 \rightarrow (\tan y - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\tan y - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \tan y = \sqrt{3} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

$$x - y = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{فعالیت : سیستم معادله} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases} \text{ را حل نمایید.}$$

نوع پنجم : این نوع از دو نوع سیستم معادلات ذیل تشکیل شده است.

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

شرط حل این نوع سیستم معادلات  $1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \alpha \leq 1$  می باشد.

## مثالها

$$\text{مثال سیستم معادله} \begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{6} \\ \tan x \tan y = 0 \end{cases} \text{ را حل نمایید.}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{6} \\ \tan x \tan y = 0 \end{cases}$$

$$\tan x \tan y = 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 0 \rightarrow \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 0$$

$$\rightarrow \frac{-\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]}{\frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] = 0$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos(x-y) = 0 \quad \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x - y = \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{6} \\ x - y = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \rightarrow 2x = \frac{12\pi}{6} \rightarrow x = \pi$$

$$x + y = \frac{7\pi}{6} \rightarrow \pi + y = \frac{7\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$





فعالیت : سیستم معادله  $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x \cdot \tan y = -3 \end{cases}$  را حل نمایید.

نوع ششم : این معادلات از دو سیستم معادلات ذیل تشکیل شده است.

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

و شرط حل این نوع سیستم معادلات  $1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \alpha \leq -1$  می باشد.

مثالها

مثال 1: سیستم معادله  $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases}$  را حل نمایید.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases}$$

$$\frac{\tan x}{\tan y} = -3 \rightarrow \frac{\tan x - \tan y}{\tan y + \tan y} = \frac{-3 - 1}{-3 + 1} \rightarrow \frac{\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}} = 2 \rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = 2$$

$$= 2 \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(x+y)} = 2 \rightarrow \frac{1}{\sin(x+y)} = 2 \rightarrow \sin(x+y) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x + y = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ x + y = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{8\pi}{6} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x - y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{3} - y = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$



## تمرینات عمومی مثلثات

- (1) در یکی از سیستم های ذیل یک دایره به 400 حصه مساوی تقسیم گردیده است  
1: صدی      2: شصتی      3: دایروی      4: هیچکدام
- (2) علم که روابط بین اضلاع و زوایای یک مثلث را بیان مینماید، عبارت است از:  
1) ریاضی      2) هندسه      3) الجبر      4) مثلثات
- (3) شکل که از اتحاد دونیم خط به وجود می آید عبارت است از:  
1) مثلث      2) زاویه      3) دایره      4) هیچکدام
- (4) زاویه که در اثر دوران نیم خط و مطابق عقربه ساعت حاصل میگردد عبارت است از:  
1) مثبت      2) منفی      3) مثبت و منفی      4) هیچکدام
- (5) واحد اندازه گیری زاویه عبارت است از:  
1) درجه (سیستم شصتی)      2) گراد (سیستم صدی)      3) رادیان (دایروی)      4) همه درست
- (6) یک درجه عبارت است از:  
1)  $\frac{1}{90}$  ام حصه یک قائمه (2)  $\frac{1}{360}$  ام حصه محیط دایره (3)  $\frac{1}{400}$  ام حصه محیط دایره (4) 1 و 2
- (7) در سیستم صدی محیط یک دایره به ..... حصه مساوی تقسیم شده است.  
1) 360      2) 400      3)  $2\pi$       4) همه درست
- (8) در سیستم شصتی محیط یک دایره به ..... حصه مساوی تقسیم شده است.  
1) 360      2) 400      3)  $2\pi$       4) هیچکدام
- (9) یک گراد عبارت است از:  
1)  $\frac{1}{90}$  ام حصه یک قائمه      2)  $\frac{1}{360}$  ام حصه محیط دایره      3)  $\frac{1}{400}$  ام حصه محیط دایره (4) الف و ب
- (10) سه درجه برابر به چند دقیقه میباشد؟  
1) 60 دقیقه      2) 120 دقیقه      3) 180 دقیقه      4) 360 دقیقه
- (11)  $0,04^\circ$  از جنس ثانیه عبارت است از:  
1)  $2,4''$       2)  $240''$       3)  $14,4''$       4)  $144''$
- (12) وسعت یک زاویه  $45^\circ$  میباشد. وسعت این زاویه بر اساس درجه عبارت است از:  
1)  $2700^\circ$       2)  $1^\circ$       3)  $0,5^\circ$       4)  $0,75^\circ$
- (13) وسعت زاویه که  $150''$  میباشد. به درجه عبارت است از:  
1)  $2,5^\circ$       2)  $0,041^\circ$       3)  $0,05^\circ$       4)  $0,042^\circ$
- (14) وسعت یک زاویه ( $45^\circ$   $34'$   $12''$ ) میباشد. این زاویه بر اساس درجه عبارت است از:  
1)  $12,57^\circ$       2)  $12,58^\circ$       3)  $12,5791^\circ$       4)  $12,87^\circ$
- (15) زوایه که وسعت آن ( $32^\circ$   $56'$   $-135''$ ) است. بر حسب درجه مساویست به:  
1)  $-134,057^\circ$       2)  $-135,43^\circ$       3)  $-134,58^\circ$       4)  $-143,01^\circ$
- (16) وسعت یک زاویه که ( $12^\circ$   $47'$   $36''$ ) میباشد. بر حسب درجه عبارت است از:  
1)  $36,8766^\circ$       2)  $36,788^\circ$       3)  $36,7866^\circ$       4) هیچکدام
- (17) وسعت یک زاویه ( $33^\circ$   $2'$   $4^\circ$ ) است. اندازه این زاویه بر اساس دقیقه مساویست به:  
1)  $242'$       2)  $243,55'$       3)  $242,55'$       4)  $242,6'$
- (18) وسعت یک زاویه مساوی به ( $23,65^\circ$ ) است. این زاویه بر حسب درجه، دقیقه و ثانیه مساویست به:  
1) ( $23^\circ$   $38'$   $58''$ )      2) ( $23^\circ$   $38'$   $56''$ )      3) ( $23^\circ$   $38'$ )      4) ( $23^\circ$   $39'$ )
- (19) وسعت یک زاویه ( $45,004^\circ$ ) میباشد. این زاویه بر اساس (درجه، دقیقه و ثانیه) مساویست به:  
1) ( $45^\circ$   $24'$   $10''$ )      2) ( $45^\circ$   $2'$   $24''$ )      3) ( $45^\circ$   $14,4'$ )      4) ( $45^\circ$   $14,4'$ )
- (20) وسعت یک زاویه ( $55,967663^\circ$ ) میباشد. این زاویه بر اساس (درجه، دقیقه و ثانیه) مساویست به:  
1) ( $55^\circ$   $58'$   $3,5''$ )      2) ( $55^\circ$   $58'$   $3,8''$ )      3) ( $55^\circ$   $59'$   $3,5''$ )      4) ( $55^\circ$   $59'$ )
- (21) زاویه  $42,6033^\circ$  بر اساس (درجه دقیقه و ثانیه) مساوی است به؟  
1)  $32^\circ$   $14'$   $50''$       2)  $42^\circ$   $11'$   $36''$       3)  $30^\circ$   $36'$   $50''$       4)  $42^\circ$   $36'$   $11''$



(22) زاویه  $A = 12^\circ 14' 56''$  و زاویه  $B = 43^\circ 52' 19''$  میباشد. حاصل جمع این دو زاویه مساویست به:

$$(1) (56^\circ 7' 15'') (2) (57^\circ 8' 12'') (3) (56^\circ 15' 7'') (4) (55^\circ 59'')$$

(23) زاویه  $A = 98^\circ 23' 44''$  و زاویه  $B = 109^\circ 37' 29''$  میباشد. حاصل جمع این دو زاویه مساویست به:

$$(1) (208^\circ 1' 17'') (2) (209^\circ 1' 13'') (3) (208^\circ 1' 13'') (4) (210^\circ)$$

(24) زاویه  $A = 135^\circ 13' 28''$  و زاویه  $B = 120^\circ 56' 29''$  میباشد. حاصل  $A - B$  مساویست به:

$$(1) (14^\circ 16' 59'') (2) (15^\circ 17' 53'') (3) (14^\circ 17' 59'') (4) \text{ هیچکدام}$$

(25) زاویه  $A = 223^\circ 51' 11''$  و زاویه  $B = 345^\circ 33' 43''$  میباشد. حاصل  $B - A$  مساویست به:

$$(1) (122^\circ 42' 32'') (2) (121^\circ 42' 23'') (3) (121^\circ 42' 32'') (4) \text{ هیچکدام}$$

(26) قیمت تبدیل درجه به گراد از رابطه ذیل بدست آمده می تواند

$$1: \frac{D}{180} = \frac{G}{200} \quad 2: D = \frac{9}{10}G \quad 3: D = 0,9G \quad 4: \text{ همه درست}$$

(27) قیمت معکوس عدد  $\pi$  عبارت است از

$$1: 3,14 \quad 2: 3,141592 \quad 3: 0,3183 \quad 4: 1 \text{ و } 2 \text{ درست}$$

(28) اگر اندازه یک قوس واقع بر محیط دایره مساوی  $\frac{1}{6}$  محیط دایره باشد اندازه زاویه مقابل آن عبارت است از

$$1: \frac{\pi}{6} \quad 2: \frac{\pi}{3} \quad 3: \frac{3\pi}{2} \quad 4: \frac{2\pi}{3}$$

(29) وسعت یک زاویه  $18^\circ$  است وسعت آن از جنس گراد مساوی است به

$$1: 18 \quad 2: 20 \quad 3: 24 \quad 4: 28$$

(30) وسعت  $15 \text{ grad}$  از جنس رادیان مساوی است به

$$1: \frac{40\pi}{3} \quad 2: \frac{3\pi}{40} \quad 3: \frac{\pi}{10} \quad 4: \frac{7\pi}{30}$$

(31) قیمت وسعت زاویه  $5^\circ, 10', 20''$  به عدد اعشاری مساوی است به

$$1: 5,17 \quad 2: 7,51 \quad 3: 5,71 \quad 4: 5,1$$

(32) قیمت وسعت زاویه  $33^\circ, 33', 33''$  به عدد اعشاری آن مساوی است به

$$1: 33,56 \quad 2: 33,33 \quad 3: 33,30 \quad 4: 33,35$$

(33) قیمت وسعت زاویه  $120, 125^\circ$  به درجه دقیقه و ثانیه مساوی است به

$$1: 120^\circ, 30', 7'' \quad 2: 120^\circ, 7', 30'' \quad 3: 120^\circ, 10', 24'' \quad 4: 120^\circ, 25', 10''$$

(34) اندازه وسعت یک درجه از جنس گراد مساوی است به

$$1: 0,318 \quad 2: 0,9 \quad 3: 57,3 \quad 4: 57,13$$

(35) اندازه وسعت یک رادیان از جنس درجه عبارت است از

$$1: 0,318 \quad 2: 0,017 \quad 3: 57,3 \quad 4: 57,13$$

(36) اندازه وسعت یک گراد از جنس رادیان عبارت است از

$$1: 0,017 \quad 2: 0,0157 \quad 3: 63,69 \quad 4: 57,3$$

(37) 225 درجه چند رادیان است؟

$$(1) \frac{2\pi}{3} \quad (2) \frac{11\pi}{15} \quad (3) \frac{4\pi}{5} \quad (4) \frac{5\pi}{4}$$

(38) 50 گراد مساوی به چند رادیان میشود؟

$$(1) \frac{\pi}{2} \quad (2) \frac{\pi}{3} \quad (3) \frac{\pi}{4} \quad (4) \frac{\pi}{6}$$



- (39)  $\frac{3\pi}{5}$  رادیان مساوی به چند درجه است؟  
 (1) 108 (2) 72 (3) 124 (4) 135
- (40)  $300^\circ$  مساوی به چند رادیان میشود؟  
 (1)  $\frac{3\pi}{2}$  (2)  $\frac{2\pi}{3}$  (3)  $\frac{5\pi}{3}$  (4)  $\frac{5\pi}{4}$
- (41) طول قوس متقابل زاویه  $\frac{\pi}{4}$  رادیان از دایره دارای شعاع  $r = 8$  مساویست به:  
 (1)  $\pi$  واحد (2)  $\frac{\pi}{2}$  واحد (3)  $2\pi$  واحد (4)  $3\pi$  واحد
- (42) مساحت قطاع دایره مقابل زاویه  $\frac{\pi}{4}$  از دایره با شعاع  $r = 4$  مساویست به:  
 (1)  $\pi$  واحد (2)  $2\pi$  واحد (3)  $3\pi$  واحد (4)  $4\pi$  واحد
- (43) اگر شعاع دایره مساوی به  $6\text{cm}$  و طول قوس مقابل مساوی به  $9.42\text{cm}$  باشد زاویه را دریافت کنید؟  
 (1)  $\theta = 45$  (2)  $\theta = 90$  (3)  $\theta = 30$  (4)  $\theta = 60$
- (44) اگر شعاع دایره مساوی به  $4\text{cm}$  و طول قوس مقابل مساوی به  $3.14\text{cm}$  باشد، زاویه را دریافت کنید؟  
 (1)  $\theta = 50$  (2)  $\theta = 90$  (3)  $\theta = 30$  (4)  $\theta = 45$
- (45) اگر طول قوس مقابل  $9.42\text{cm}$  و زاویه  $60^\circ$  باشد، شعاع آن را دریافت کنید؟  
 (1)  $r = 2$  (2)  $r = 10$  (3)  $r = 9$  (4)  $r = 4$
- (46) اگر طول قوس مقابل  $6.28\text{cm}$  و زاویه  $90$  باشد، شعاع آن را دریافت کنید؟  
 (1)  $r = 5$  (2)  $r = 4$  (3)  $r = 2$  (4)  $r = 8$
- (47) شعاع چرخ باسکلی  $26\text{cm}$  است اگر این چرخ در روی زمین طوری حرکت نماید که از نقطه  $A$  تا به نقطه  $B$ ، 3 دور مکمل طی نماید فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$  را دریافت کنید؟  
 (1)  $d = 134\pi\text{cm}$  (2)  $d = 230\pi\text{cm}$  (3)  $d = 120\pi\text{cm}$  (4)  $d = 156\pi\text{cm}$
- (48) اندازه وسعت یک رادیان از جنس گراد عبارت است از  
 1: 63,69 (2) 57,3 (3) 62,65 (4) 51,7
- (49) چرخ یک طیاره در یک ساعت 3000 دور میچرخد معلوم نمایید در یک ثانیه چند رادیان چرخیده است  
 1:  $\frac{5\pi}{6}$  (2)  $\frac{5\pi}{3}$  (3)  $\frac{3\pi}{5}$  (4)  $\frac{6\pi}{5}$
- (50) سرعت یک موتور  $\frac{60\text{km}}{h}$  است هرگاه قطر تایر موتور  $50\text{cm}$  باشد تایر موتور در یک دقیقه چند دور میزند  
 1: 637 (2) 1274 (3) 1273 (4) 1270
- (51) یک متحرک با سرعت  $\frac{12\text{km}}{h}$  روی دایره به شعاع  $120\text{m}$  در حال حرکت است اندازه قوس طی شده از جنس  $m$  در یک دقیقه عبارت است از  
 1: 240 (2) 200 (3) 350 (4) 120
- (52) کدام زاویه است که اگر بر وسعت آن برحسب درجه عدد 15 افزوده شود اندازه آن برحسب گراد بدست می آید  
 1: 150 (2) 135 (3) 50 (4) 65
- (53) اگر مجموع دوزاویه برحسب گراد 120 گراد و یکی ازین دوزاویه  $45$  درجه باشد وسعت زاویه دوم از جنس درجه مساوی است به  
 1: 75 (2) 65 (3) 63 (4) 70
- (54) کدام زاویه است که اگر از وسعت آن برحسب گراد عدد 5 کم شود اندازه آن برحسب درجه بدست می آید  
 1: 50 (2) 45 (3) 120 (4) 30



55) مجموع دوزاویه 180 درجه و تفاضل آنها 100 گراد است اندازه وسعت زاویه بزرگ برحسب رادیان مساوی است به

$$\frac{\pi}{4} : 1 \quad \frac{3\pi}{2} : 2 \quad \frac{4\pi}{3} : 3 \quad \frac{3\pi}{4} : 4$$

56) اندازه وسعت زوایای یک مثلث با اعداد 1 و 2 و 9 متناسب اند این مثلث عبارت است از

$$1: \text{متساوی الاضلاع} \quad 2: \text{متساوی الساقین} \quad 3: \text{قائم الزاویه} \quad 4: \text{منفرج الزاویه}$$

57) اندازه وسعت زوایای مثلثاتی با تناسب کدام یک از اعداد ذیل مثلث قائم الزاویه را ترسیم می نماید

$$1: 1, 2, 3 \quad 2: 7, 4, 3 \quad 3: 5, 4, 9 \quad 4: \text{همه درست است}$$

58) هرگاه طول قوس یک دایره با شعاع آن مساوی باشد وسعت زاویه مرکزی آن از جنس درجه

$$1: 57, 3 \quad 2: 53, 7 \quad 3: 1 \quad 4: \text{همه غلط}$$

59) هر گاه وسعت زاویه مرکزی یک دایره 40 گراد و طول شعاع آن 20cm است طول قوس این دایره مساوی است به

$$1: 5\pi \text{ cm} \quad 2: 4\pi \text{ cm} \quad 3: 800 \text{ cm} \quad 4: 80 \text{ cm}$$

60) وسعت یک زاویه قوس یک دایره برحسب درجه مفروض است اگر به این زاویه عدد 15 اضافه شود وسعت آن از جنس گراد به دست می آید قیمت این زاویه مساوی است به

$$1: 150 \quad 2: 120 \quad 3: 135 \quad 4: 105$$

61) وسعت زاویه قوس یک دایره برحسب درجه مفروض است اگر به این زاویه عدد 11 تفریق شود وسعت آن از جنس گراد به دست می آید قیمت این زاویه مساوی است به

$$1: 78 \quad 2: 121 \quad 3: 110 \quad 4: 99$$

62) در ساعت 3: 30 عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار کدام زاویه را تشکیل میدهد

$$1: 90 \quad 2: 75 \quad 3: 105 \quad 4: 65$$

63) بین ساعت های 6 و 7 کدام وقت عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار زاویه قائمه را تشکیل میدهد

$$1: 6: 10 \quad 2: 6: 16 \quad 3: 6: 30 \quad 4: 6: 15$$

64) هرگاه قطر یک تاپر بایسکل 70cm باشد در صورتیکه تاپر بایسکل سه دوره از نقطه A الی B نماید پس فاصله طی شده مساوی است به

$$1: 220 \quad 2: 218 \quad 3: 219 \quad 4: 221$$

65) هرگاه یک قائمه به 800 حصه مساوی تقسیم گردد 100 حصه آن چند گراد میشود

$$1: 100 \quad 2: 25 \quad 3: 12, 5 \quad 4: 50$$

66) حاصل عبارت  $\frac{1}{1+\tan^2 30}$  مساوی است به؟

$$1) \frac{2}{3} \quad 2) \frac{3}{4} \quad 3) \frac{4}{3} \quad 4) \frac{3}{2}$$

67) حاصل عبارت  $\sin 60 \cos 30 + \sin 30 \cos 60$  مساوی به کدام است؟

$$1) 1 \quad 2) \frac{1}{2} \quad 3) \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 4) \sqrt{3}$$

68) حاصل عبارت  $\frac{-2(\tan 45 - \sin^2 60)}{1 - \cot^2 30}$  مساوی به کدام است؟

$$1) \frac{3}{2} \quad 2) \frac{1}{3} \quad 3) \frac{1}{5} \quad 4) \frac{1}{4}$$

69) حاصل عبارت  $\frac{1 + \cos^2 30 + \sin^2 30}{2 + \tan 45}$  مساوی به کدام است؟

$$1) \frac{1}{2} \quad 2) \frac{2}{3} \quad 3) \frac{3}{2} \quad 4) \frac{5}{3}$$

70) حاصل عبارت  $2 \tan 45 + 9 \tan 60$  مساوی به کدام است؟

$$1) 9\sqrt{3} \quad 2) 3\sqrt{3} \quad 3) 1 + 3\sqrt{3} \quad 4) 2 + 9\sqrt{3}$$



- 71) مقدار  $\sin(-1110)$  کدام است؟  
 (1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{1}{2}$
- 72) مقدار  $\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)$  مساوی است به؟  
 (1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{1}{2}$
- 73) مقدار  $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)$  کدام است؟  
 (1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{1}{2}$
- 74) مقدار  $\tan(780)$  کدام است؟  
 (1)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (2)  $\sqrt{3}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{1}{2}$
- 75) مقدار  $\sin(-3\pi)$  کدام است؟  
 (1)  $-1$  (2)  $1$  (3)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (4)  $0$
- 76) مقدار  $\tan(390)$  کدام است؟  
 (1)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (4)  $\frac{1}{2}$
- 77) مقدار  $\sin\left(\frac{31\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{105\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{43\pi}{4}\right)$  کدام است؟  
 (1)  $1$  (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (4)  $-1$
- 78) مقدار  $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  کدام است؟  
 (1)  $-\cot x$  (2)  $\tan x$  (3)  $-\tan x$  (4)  $\cot x$
- 79) مقدار  $\frac{2\sin(x-3\pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sin x$  (2)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  (3)  $-\tan x$  (4)  $\tan x$
- 80) مقدار  $\sin(780)$  مساوی است به؟  
 (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $-\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (4)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 81) مقدار  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  مساوی است به؟  
 (1)  $-3\cos x$  (2)  $\cos x$  (3)  $\sin x$  (4)  $-3\sin x$
- 82) مقدار  $3\sin(x - \pi) - 2\sin(2\pi - x) + 4\sin(x + \pi)$  مساوی است به؟  
 (1)  $-5\sin x$  (2)  $2\sin x$  (3)  $\sin x$  (4)  $-3\cos x$
- 83) مقدار  $\sin 900 + \cos 900$  مساوی است به؟  
 (1)  $-1$  (2)  $1$  (3)  $0$  (4)  $-2$
- 84) مقدار  $4\sin 240 + 4\cos 120$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sqrt{3} + 1$  (2)  $-2(\sqrt{3} + 1)$  (3)  $2(\sqrt{3} + 1)$  (4)  $-2(\sqrt{3} - 1)$
- 85) مقدار  $4\sin 630 + 6\cos 450$  مساوی است به؟  
 (1)  $1$  (2)  $-3$  (3)  $2$  (4)  $-4$
- 86) حاصل افاده مثلثاتی  $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$  مساوی است به؟  
 (1)  $1$  (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $-1$



- (87) ساده شده افاده مثلثاتی  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sin x$  (2)  $\cos x$  (3)  $2 \cos x$  (4)  $2 \sin x$
- (88) اگر حاصل عبارت  $\frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\cos x} = 3$  شود حاصل  $\tan x = ?$  کدام است؟  
 (1)  $-\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{3}$  (3)  $\frac{2}{3}$  (4)  $\frac{3}{4}$
- (89) حاصل عبارت  $\sec 150 = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (2)  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (3) 2 (4) -2
- (90) مقدار  $\tan\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\infty$  (2) 1 (3) -1 (4) 0
- (91) حاصل عبارت  $3 \tan(12\pi) + 4 \tan(21\pi) - \cot\left(\frac{9\pi}{2}\right) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $-\cot\left(\frac{9\pi}{2}\right)$  (2)  $\cot\left(\frac{9\pi}{2}\right)$  (3)  $\tan\left(\frac{9\pi}{2}\right)$  (4)  $-\tan\left(\frac{9\pi}{2}\right)$
- (92) مقدار  $\sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  (2)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  (3)  $-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  (4)  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- (93) مقدار  $\sin\left(\frac{73\pi}{3}\right) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $-\frac{1}{2}$
- (94) مقدار  $\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $-\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$  (2)  $-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$  (3)  $-\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$  (4)  $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- (95) مقدار  $\cos(3\pi + x) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \tan(x - 5\pi) \cdot \cot(x + 7\pi) = ?$  مساوی است به؟  
 (1) 1 (2) -1 (3)  $\cos^2 x$  (4)  $\sin^2 x$
- (96) اگر  $\tan x = \frac{2}{3}$  باشد مقدار  $\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + x)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(x - \pi)}$  مساوی است به؟  
 (1) 5 (2) 1 (3) -3 (4) 4
- (97) قیمت افاده مثلثاتی  $\cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = ?$  مساوی است به  
 1: صفر (2)  $-2 \cos x$  (3)  $2 \cos x$  (4)  $\cos x$
- (98) حاصل افاده مثلثاتی  $\sin 200 + \sin 10 + \sin 20 + \sin 190 = ?$  مساوی است به  
 1:  $2 \sin 10$  (2)  $2 \cos 10$  (3) صفر (4)  $-\sin 10$
- (99) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(3\pi + x)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(x - \pi)}$  عبارت است از (در صورتیکه  $x$  یک زاویه حاده باشد)  
 1: -1 (2) 1 (3) 2 (4) -2
- (100) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\sin 110 - \cos 70}{\cos 200}$  عبارت است از  
 1: 0 (2)  $1 - \tan 20$  (3)  $\tan 20 - 1$  (4)  $1 + \cot 20$
- (101) اگر  $\tan 23 = x$  باشد حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{3 \sin 23 + 2 \cos 113}{\sin 293 - \cos 67}$  مساوی است به  
 1:  $\frac{x}{x-1}$  (2)  $\frac{x}{1+x}$  (3)  $-\frac{x}{1+x}$  (4)  $\frac{x}{1-x}$



102) اگر  $\tan 34 = \frac{2}{3}$  باشد مقدار  $\frac{2 \sin 326 + 3 \sin 56}{\cos 304}$  مساوی است به؟

- 1) 2,5 (2) 2 (3) -1,5 (4) -1

103) اگر در حالت معیاری  $\cos x = -\frac{3}{5}$  باشد مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- 1)  $-\frac{3}{4}$  (2)  $-\frac{4}{3}$  (3)  $-\frac{5}{3}$  (4)  $-\frac{3}{5}$

104) اگر  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  باشد و  $180 < x < 270$  باشد  $\tan x$  کدام است؟

- 1) -2 (2)  $-\frac{1}{2}$  (3) 1 (4) 2

105) کدام یک از مقادیر ذیل منفی است؟

- 1)  $\csc 315$  (2)  $\cos 330$  (3)  $\csc 89$  (4)  $\sin 120$

106) اگر  $\sin x \cdot \cos x < 0$  باشد زاویه  $x$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

- 1) اول یا چهارم (2) اول یا سوم (3) دوم یا چهارم (4) دوم یا سوم

107) اگر  $\tan \alpha > 0$  و  $\sec \alpha < 0$  باشد زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیه قرار دارد

- 1: اول 2: سوم 3: چهارم 4: هیچکدام

108) در کدام یک از حالات ذیل یک زاویه میتواند در هیچ ناحیه قرار گیرد

- 1:  $\tan a < 0, \sin a > 0$  2:  $\cot a < 0, \cos a > 0$

- 3:  $\tan a > 0, \sin a < 0$  4:  $\csc a < 0, \sin a > 0$

109) اگر  $\sin a = \frac{1}{2}$  باشد طوریکه  $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$  قرار داشته باشد قیمت  $\cos a = ?$

- 1:  $\frac{1}{2}$  2:  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  3:  $-\frac{1}{2}$  4:  $+\frac{\sqrt{3}}{2}$

110) یک زاویه  $a$  در حالت ستندرد است و ضلع دوم آن از نقاط  $(+1, +2)$  عبور می نماید در این

صورت  $\cos a = ?$  مساوی است به

- 1:  $\frac{1}{2}$  2:  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  3:  $-\frac{1}{2}$  4:  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

111) یک زاویه  $a$  در حالت ستندرد است و ضلع دوم آن از نقاط  $(-1, 2)$  عبور مینماید در اینصورت قیمت

$\sin a$  مساوی است به

- 1:  $\frac{1}{2}$  2:  $-\frac{1}{2}$  3:  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  4:  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

112) یک زینه به طول 20m در یک دیوار طوری ایستاده گردیده است که با سطح زمین زاویه 60 درجه

را تشکیل نموده است ارتفاع دیوار مربوطه عبارت است از

- 1) 8,5 (2) 17 (3) 12 (4) 15

113) اگر  $\tan a = \sqrt{2}$  باشد طوریکه  $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$  باشد قیمت  $\sin a = ?$  عبارت است از

- 1:  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  2:  $-\sqrt{\frac{2}{3}}$  3:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  4:  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

114) اگر  $\sin a = -\frac{5}{2}$  باشد قیمت  $\csc a = ?$  عبارت است از (در صورتیکه  $\frac{3\pi}{2} \leq a \leq 2\pi$  باشد)

- 1:  $\frac{2}{5}$  2:  $-\frac{2}{5}$  3:  $\frac{\sqrt{21}}{2}$  4: هیچکدام

115) در صورتیکه  $\sec a = 0,5$  باشد طوریکه  $a$  در ناحیه چهارم قرار داشته باشد قیمت  $\tan a$  عبارت

است از

- 1:  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  2:  $-\sqrt{3}$  3: -1,7 (4) همه غلط است





116) یکی از جوابات ذیل صحت دارد

$$\sin a = 1,001 : 1 \quad \sin a = -1,9991 : 2 \quad \sin a = 0,00017 : 3 \quad \sin a = 0,00017 : 4$$

117) یکی از جوابات ذیل غلط است

$$\sin a = 0,00002 : 1 \quad \cos a = -0,9992 : 2 \quad \csc a = 0,45 : 3 \quad \sec a = 2,5 : 4$$

118) یک از جوابات ذیل صحت دارد

- 1: سین یک زاویه حاده با کوساین حاده دیگر در یک مثلث قائم الزاویه مساوی است
- 2: سین یک زاویه حاده با  $\csc$  حاده دیگر در مثلث قائم الزاویه مساوی است
- 3: سین یک زاویه حاده با کوساین حاده دیگری در مثلث قائم الزاویه مساوی است
- 4: حاصل جمع سین و کوساین یک زاویه حاده باتانجانان زاویه حاده دیگری در مثلث قائم الزاویه مساوی است

119) حاصل ضرب افاده  $\sin 23 \cdot \csc 23$  عبارت است از

$$\text{صفر} : 1 \quad \infty : 2 \quad 1 : 3 \quad -1 : 4$$

120) حاصل ضرب افاده  $\sin 21 \cdot \cos 69 = ?$  مساوی است به

$$\sin^2 69 : 1 \quad \cos^2 69 : 2 \quad 2 \sin 21 : 3 \quad 2 \cos 69 : 4$$

121) برای هر  $x$ ،  $\cos x$  مساوی است به

$$\sec x : 1 \quad \frac{1}{\sec x} : 2 \quad \frac{1}{\cos x} : 3 \quad 1 \text{ و } 3 \text{ درست} : 4$$

122) برای هر  $a$  قیمت  $\sec a = ?$

$$\sec(90 + a) : 1 \quad \sec(90 - a) : 2 \quad \csc(90 + a) : 3 \quad \csc(90 - a) : 4$$

123) هر زاویه  $a$

- 1: کوچکتر از صفر است
- 2: گزینه 3 و 4
- 3: کوچکتر یا مساوی به یک است
- 4: بزرگتر یا مساوی به یک است

124) نسبت های مثلثاتی حاد الزاویه همیشه

- 1: مثبت است
- 2: منفی است

- 3: کوچکتر یا مساوی به یک است
- 4: همه غلط است

125) یک زینه 10m از زمین به یک کلکین می رسد اگر زینه با سطح زمین زاویه 60 را تشکیل میدهد پس

کلکین از زمین چقدر بلند است

$$8,5m : 1 \quad 8m : 2 \quad 12,5m : 3 \quad 4,5m : 4$$

126) یک از جوابات ذیل صحت دارد

$$-\sin a = \sin(-a) : 1 \quad -\cos a = \cos(-a) : 2 \quad \tan^2(-a) = +\tan^2 a : 3 \quad \tan^2(-a) = -\tan^2 a : 4 \quad \text{همه صحت}$$

دارد

127) کدام زاویه حاده است که کوساین آن  $\sqrt{3}$  برابر سین آن است

$$30 : 1 \quad 60 : 2 \quad 45 : 3 \quad 15 : 4$$

128) یکی از روابط ذیل صحت دارد

$$\cot 30 = 3 \cot 60 : 1 \quad \cot 60 = 3 \cot 30 : 2$$

$$\cot 30 = 2 \cot 30 : 3 \quad \cot 60 = 3 \cot 60 : 4$$

129) کدام یک از روابط ذیل صحت دارد

$$\sin 30 < \sin 60 < \sin 45 : 1 \quad \sin 30 > \sin 45 > \sin 60 : 2$$

$$\sin 30 < \sin 45 < \sin 60 : 3 \quad \sin 45 > \sin 30 > \sin 60 : 4$$

130) قیمت افاده  $\sqrt{2} \sin 45 \cdot \sin 20$  عبارت است از

$$\cos 20 : 1 \quad \cos 70 : 2 \quad \sin 20 : 3 \quad 2 \text{ و } 3 \text{ درست} : 4$$



131) قیمت افاده  $3 \sin 30 - 4 \sin^2 30$  مساوی است به

1:  $\sin 30$     2:  $\cos 60$     3:  $\frac{1}{2}$     4: همه درست

132) قیمت افاده  $\cos 60 \cdot \cos 30 + \sin 30 \cdot \sin 60$  مساوی است به

1:  $\sin 30$     2:  $\cos 30$     3:  $2 \sin 60$     4:  $2 \cos 60$

133) قیمت افاده  $\frac{1 - \tan^2 30}{1 + \tan^2 30}$  مساوی است به

1:  $\sin 60$     2:  $\cos 60$     3:  $\tan 30$     4:  $\tan 60$

134) قیمت افاده  $\frac{1 + \tan^2 30}{1 + \tan^2 30}$  مساوی است به

1: 1    2: -1    3: 2    4: -2

135) اندازه زوایای یک مثلث با اعداد 1 و 3 و 5 تناسب دارد نوعیت مثلث عبارت است از

1: متساوی الساقین    2: منفرج الزاویه    3: قائم الزاویه    4: حادالزاویه

136) دو چرخ باهم متصل گردیده است چرخ خورد باشعاع 15cm به اندازه  $2\pi$  دوران می نماید اگر شعاع

چرخ بزرگ 20cm باشد وسعت زاویه دوران چرخ بزرگ عبارت است از

1:  $\frac{2\pi}{3}$     2:  $\frac{3\pi}{2}$     3:  $\frac{5\pi}{2}$     4:  $\frac{2\pi}{5}$

137) قیمت افاده  $\tan 0,025 \cdot \cot \frac{1}{40}$  عبارت است از

1: 3    2: صفر    3: 2    4: 1

138) اگر  $\sin a = 0,04$  باشد  $\csc a = ?$  عبارت است از

1: 25    2: 20    3:  $\frac{1}{25}$     4:  $\frac{1}{20}$

139) اگر  $f(x) = \cos x$  و  $g(x) = \sec x$  باشد در اینصورت  $Dom f(x) \cap Dom g(x)$  عبارت است از

1:  $(-1, +1)$     2:  $(-\infty, +\infty)$     3:  $x = 1, x = -1$     4:  $[-1, +1]$

140) در صورتیکه  $\cos x = m - 1$  باشد لازم است که

1:  $m \leq 2$     2:  $-1 \leq m \leq 1$     3:  $0 \leq m \leq 2$     4:  $-1 < m < 1$

141) بیشترین و کمترین قیمت A بر حسب مقادیر مختلف x در عبارت ذیل مثلثاتی  $A = 1 - 2 \cos x$  عبارت است از

1:  $\begin{cases} A_{max} = 3 \\ A_{min} = -1 \end{cases}$     2:  $\begin{cases} A_{max} = 3 \\ A_{min} = +1 \end{cases}$     3:  $\begin{cases} A_{max} = 1 \\ A_{min} = -3 \end{cases}$     4:  $\begin{cases} A_{max} = 1 \\ A_{min} = 3 \end{cases}$

142) اگر  $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  باشد و  $\cos x = 2 - 3m$  باشد حدود تغییرات m عبارت است از

1:  $1 \leq m \leq \frac{2}{3}$     2:  $1 \geq m \geq \frac{2}{3}$     3:  $91 \leq m \leq \frac{1}{3}$     4:  $1 \geq m \geq \frac{1}{3}$

143) اگر a زاویه غیر مشخص باشد کدام یکی از نامساوی های ذیل صحت دارد

1:  $\sin a \cdot \sin(-a) \leq 0$     2:  $\tan a \cdot \tan(-a) \geq 0$

3:  $\cos a \cdot \cos(-a) \leq 0$     4:  $\cot a \cdot \cot(-a) \geq 0$

144) کدام یک از توابع ذیل جفت است

1:  $x^2 \tan x$     2:  $x \cos x$     3:  $x + \cos x$     4:  $x \sin x$

145) تابع  $f(x) = \sin x + \cos x$  همیشه یک تابع

1: جفت است    2: طاق است    3: نه جفت است نه طاق    4: بستگی به مقدار x دارد

146) شخصی باقد 150cm الماری به طول 390cm را که یک سر آن به دیوار تکیه داده شده است با

زاویه 45 درجه بلند کرده است شخص دور میشود تا جایی که سر دیگر الماری تاقد او پایین بیاید



اوچقدر از دیوار دور شده است

- 150cm :4      180cm :3      210cm :2      360cm :1
- 147) حاصل ضرب  $\tan 20 \cdot \tan 45 \cdot \tan 70 = ?$  عبارت است از
- 4: صفر      1:3       $\sqrt{3}:2$        $\frac{\sqrt{3}}{3}:1$
- 148) قیمت افاده  $\tan 15 \cdot \cos \frac{25\pi}{2} \cdot \sin 12$  مساوی است به
- 4:  $\infty$       0:3      -1:2      1:1
- 149) قیمت افاده  $\frac{\sin 15 \cdot \cos 45}{\tan \frac{25\pi}{2} \cdot \sec 30}$  مساوی است به
- $\frac{\sqrt{3}}{2}:4$       1:3      2: لایتناهی      1: صفر
- 150) حاصل عبارت  $(1 - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x)$  عبارت است از
- $\tan x :4$        $\sin x :3$       -1:2      1:1
- 151) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$  مساوی است به
- $\sec x :4$        $\cot x :3$        $\sin x \cdot \cos x :2$        $\tan x :1$
- 152) در مثلث قائم الزاویه به راس A حاصل عبارت  $\frac{2 \sin B \cdot \cos B}{2 \cos^2 B}$  مساوی است به
- $\cos c :4$        $\sin c :3$        $\tan B :2$        $\tan c :1$
- 153) اگر  $\sin x > 0$  و  $\sin x \cdot \tan x < 0$  پس زاویه x در کدام ناحیه قرار دارد
- 4: هیچ ناحیه      III:3      II:2      I:1
- 154) اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$  باشد قیمت  $\sin x \cdot \cos x$  عبارت است از
- $\frac{9}{4}:4$        $\frac{4}{9}:3$        $\frac{9}{8}:2$        $\frac{8}{9}:1$
- 155) اگر  $5 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 2$  باشد قیمت  $\tan x$  مساوی است به
- $\frac{5}{4}:4$        $\frac{4}{5}:3$        $\frac{3}{2}:2$        $\frac{2}{3}:1$
- 156) اگر  $\tan x = 3$  باشد حاصل  $\frac{\sin x}{2 \cos x - \sin x}$  عبارت است از
- 27:4      27:3      -3:2      3:1
- 157) حاصل عبارت  $2 \sin 60 \cdot \cos 60 - \sin 30 \cdot \tan 30$  عبارت است از
- $\frac{\sqrt{3}}{3}:4$        $\frac{\sqrt{3}}{2}:2$        $\frac{1}{2}:2$        $\sqrt{3}:1$
- 158) حاصل افاده  $2 \sin 30 \cdot \cos 30 - \sin 60 + 2 \tan 20 \cdot \cot 20$  عبارت است از
- 1:4       $\frac{1}{2}:3$        $\sqrt{3}:2$       2:1
- 159) حاصل افاده  $2 \cot 45 + \cos 60 \cdot \cos 30 - \sin 60 \cdot \sin 30 - \tan 45$  مساوی است به
- 4: صفر       $\frac{1}{2}:3$       1:2      2:1
- 160) افاده مثلثاتی  $(a + b)^2 \sin^2 30 - (a - b)^2 \cos^2 60 = ?$  مساوی است به
- $a - b :4$        $a \cdot b :3$        $\frac{a}{b} :2$        $a + b :1$
- 161) اگر  $\tan x = 3$  باشد حاصل  $\frac{\sin x - 2 \cos x}{3 \cos x - 4 \sin x}$  مساوی است به
- $-\frac{1}{9}:4$        $\frac{1}{9}:3$       -9:2      9:1



162) اگر  $\tan x = 2$  باشد حاصل افاده مثلثاتی ذیل  $\frac{\sin^4 x}{3 + \cos^2 x}$  مساوی است به

5 : 1       $\frac{1}{5} : 2$       3 : 3       $\frac{1}{3} : 4$

163) حاصل عبارت  $\sin x \cdot \cos x = ?$  در صورتیکه  $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$  باشد عبارت است از

1 :  $\frac{12}{15}$        $\frac{12}{25} : 2$        $\frac{4}{5} : 3$       4 : 3 و 3 درست

164) اگر  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$  باشد و  $0^\circ < x < 90^\circ$  حاصل عبارت  $\sin x + \cos x = ?$  عبارت از

1 :  $\sqrt{\frac{3}{2}}$        $\frac{\sqrt{6}}{2} : 2$        $\frac{3}{2} : 3$       4 : 2 و 2 درست

165) اگر  $\tan x + \cot x = 2$  و  $0 < x < 90$  باشد آنگاه حاصل عبارت  $\sin x + \cos x = ?$  عبارت است از

2 : 1       $\sqrt{2} : 2$       3 : 3       $\sqrt{3} : 4$

166) هرگاه  $A$  زاویه حاده یک مثلث قائم الزاویه و  $B$  زاویه حاده دوم این مثلث قائم الزاویه باشد یکی از روابط ذیل صحت دارد

$\sin A + \cos B = 0 : 1$        $\sin A - \cos B = 0 : 2$   
 $\sin A \cdot \cos B = 1 : 3$        $\sin A \cdot \cos B = 0 : 4$

167) اگر  $\tan x + \cot x = 3$  باشد قیمت  $\tan^2 x + \cot^2 x = ?$  عبارت است از

1 : 49      2 : 7      3 : 8      4 : 9

168) اگر  $0 < x < 90$  باشد طوری که  $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = -3$  است قیمت  $\tan x$  را دریابید

2 : 1       $-\frac{1}{2} : 2$       3 : 3       $\frac{1}{3} : 4$

169) اگر  $\cos x = 2a + b$  و  $2b + \sin x = a$  باشد یکی از جوابات ذیل صحت دارد

1 :  $5a^2 + 5b^2 = 1$       2 :  $5a^2 - 5b^2 = 1$       3 :  $3a^2 + 3b^2 = 1$       4 :  $3a^2 - 3b^2 = 1$

170) اگر  $\tan x = a - b$  و  $\cot x - a = b$  باشد یکی از روابط ذیل صحت دارد

1 :  $a^2 + b^2 = 1$       2 :  $a^2 - b^2 = 1$       3 :  $a \cdot b = 1$       4 :  $a = \frac{1}{b}$

171) یکی از جملات ذیل صحت دارد

1: تانجاننت یک زاویه حاده همیشه بزرگتر از سین آن است

2: کوتانجاننت یک زاویه حاده همیشه بزرگتر از کوساین آن زاویه حاده است

3: هر دو صحت دارد

4: تانجاننت و کوتانجاننت یک زاویه حاده همیشه مساوی به سین و کوساین آن زاویه حاده است

172) از نقطه که به ارتفاع 2m از سطح زمین قرار دارد برجی با زاویه 30 درجه قابل مشاهده است در صورتی که فاصله این نقطه از پای برج 420m باشد ارتفاع برج عبارت است از

1 : 249      2 : 238      3 : 250      4 : 268

173) فاصله دو نقطه A و B که در سطح زمین قرار دارد 100m است درختی که پای آن بین این دو نقطه

قرار دارد از نقطه A با زاویه 30 درجه و از نقطه B با زاویه 60 درجه مشاهده میگردد ارتفاع

درخت عبارت است از در صورتیکه نقاط A, B در دو طرف درخت قرار دارد

1 :  $25\sqrt{3}$       2 : 75      3 :  $15\sqrt{3}$       4 :  $20\sqrt{3}$



174) فاصله دو نقطه A, B و که در سطح زمین قرار دارند 21m است درختی که پای آن در یک طرف این دو نقطه قرار دارد از نقطه A با زاویه 30 درجه و از نقطه B با زاویه 45 درجه مشاهده میگردد ارتفاع درخت مذکور عبارت است از

$$17,85 : 4 \quad 25 : 3 \quad 30 : 2 \quad 27,5 : 1$$

175) حاصل افاده مثلثاتی  $\cos 30 - \sin 45 + \sin 60 - \tan 30 + \cos 45$  مساوی است به

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} : 4 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} : 2 \quad 1 - \sqrt{3} : 2 \quad \text{صفر} : 1$$

176) در صورتیکه  $0 \leq x \leq 90$  باشد بیشترین قیمت که  $2 + 3 \sin x$  اختیار می نماید عبارت است از

$$7 : 4 \quad 1 : 3 \quad 2 : 2 \quad 5 : 1$$

177) کم ترین قیمت که  $2 \sin x - \cos^2 x + 4$  اختیار می نماید در صورتیکه  $0 \leq x \leq 90$  عبارت است از

$$0 : 4 \quad -1 : 3 \quad 3 : 2 \quad 7 : 1$$

178) کم ترین قیمت که  $2 \cos x - \sin^2 x + 4$  اختیار می نماید در صورتیکه  $0 \leq x \leq 90$  عبارت است از

$$1 : 4 \quad 7 : 3 \quad 2 : 2 \quad 3 : 1$$

179) در بالای ساختمانی به ارتفاع 20m یک آنتن مخابراتی نصب شده است از نقطه A واقع بر سطح زمین ساختمان با زاویه 30 درجه و بالای آنتن با زاویه 60 درجه دیده میشود طول آنتن مذکور عبارت است از

$$20 : 4 \quad 30 : 3 \quad 40 : 2 \quad 60 : 1$$

180) اگر  $30 \leq x \leq 60$  درجه باشد بیشترین مقدار عبارت  $\frac{8}{1+4\cos^2 x}$  مساوی به چند است

$$2 : 4 \quad 8 : 3 \quad 4 : 2 \quad 3 : 1$$

181) قیمت افاده مثلثاتی  $\cos^2 11 + \cos^2 28 + \cos^2 38 + \cos^2 52 + \cos^2 62 + \cos^2 79$  مساوی است به

$$4 : 4 \quad \frac{5}{2} : 3 \quad 3 : 2 \quad 1 : 1$$

182) در صورتیکه  $A = \sin x \cdot \cos y$  و  $B = \sin x \sin y$  و  $c = \cos x$  باشد در اینصورت  $A^2 + B^2 + c^2$  عبارت است از

$$1 : 4 \quad 2 : 3 \quad 3 : 2 \quad 4 : 1$$

183) پریود  $y = \sin 2x$  در کدام انتروال وجود دارد

$$[0, \frac{\pi}{2}] : 4 \quad [0, 4\pi] : 3 \quad [0, \pi] : 2 \quad [0, 2\pi] : 1$$

184) پریود یکی از نسبت های ذیل مثلثاتی در انتروال  $[0, 6\pi]$  تکمیل میگردد

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \sin x \\ y = \frac{1}{3} \cos x \end{cases} : 4 \quad \begin{cases} y = \sin \frac{x}{3} \\ y = \cos \frac{x}{3} \end{cases} : 3 \quad \begin{cases} y = \sin 3x \\ y = \cos 3x \end{cases} : 2 \quad \begin{cases} y = 3 \sin x \\ y = 3 \cos x \end{cases} : 1$$

185) مساحت تحول  $\frac{\sin x}{2}$  عبارت است از

$$(-1, +1) : 4 \quad [-2, 2] : 3 \quad [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : 2 \quad [-1, 1] : 1$$

186) مساحت تحول  $\cos 2x = ?$  عبارت است از

$$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : 4 \quad [-1, 1] : 3 \quad (-2, 2) : 2 \quad [-2, 2] : 1$$

187) مساحت تحول  $3 \cos 2x = ?$  مساوی است به

$$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] : 4 \quad [-1, 1] : 3 \quad [-3, 3] : 2 \quad [-6, 6] : 1$$



- 188) پرپود  $y = \tan 2x$  عبارت است از  
 $\pi : 1$        $2\pi : 2$        $\frac{\pi}{2} : 3$        $4\pi : 4$
- 189) تابع  $y = \cos 4x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  کدام دوره ذیل را طی میکند  
 1: چهارم حصه یک دور    2: چهار دور    3: دو دور    4: یک دور
- 190) قیمت اعظمی  $y = \sin 2x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  عبارت است از  
 $\frac{\pi}{4} : 1$        $\frac{5\pi}{4} : 2$        $\frac{\pi}{2} : 3$       4: او و 2 صحت دارد
- 191) یکی از نسبت های ذیل انقباض تابع مثلثاتی در مسیر محور  $x$  را نشان میدهد  
 $y = \sin 3x : 1$        $y = \sin \frac{x}{3} : 2$        $y = 3 \sin x : 3$        $y = \frac{1}{3} \sin x : 4$
- 192) یکی از نسبت های ذیل انبساط تابع مثلثاتی در مسیر محور  $x$  را نشان میدهد  
 $y = \sin 3x : 1$        $y = \sin \frac{x}{3} : 2$        $y = 3 \sin x : 3$        $y = \frac{1}{3} \sin x : 4$
- 193) قیمت اعظمی تابع  $y = \sin \frac{x}{3}$  در دوره اول پرپود خویش عبارت است از  
 $\frac{\pi}{2} : 1$        $\frac{3\pi}{2} : 2$        $\frac{\pi}{3} : 3$        $\frac{\pi}{6} : 4$
- 194) قیمت های تابع  $y = 2 \cos x$  در یکی از انتروال های ذیل صورت میگیرد  
 $[-1, +1] : 1$        $[-2, +2] : 2$        $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] : 3$        $[-4, +4] : 4$
- 195) قیمت اعظمی تابع  $y = -2 \cos x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  عبارت است از  
 $0 : 1$        $2\pi : 2$        $\pi : 3$       4: او و 2 درست است
- 196) یکی از نسبت های ذیل انبساط تابع مثلثاتی را در محور  $y$  ارائه میدارد  
 $y = 5 \cos x : 1$        $y = \cos 5x : 2$        $y = \cos \frac{x}{5} : 3$        $y = \frac{1}{5} \cos x : 4$
- 197) یکی از نسبت های ذیل انقباض تابع مثلثاتی را در محور  $y$  ارائه میدارد  
 $y = 3 \sin x : 1$        $y = \sin 3x : 2$        $y = \frac{1}{3} \sin x : 3$        $y = \sin \frac{x}{3} : 4$
- 198) نسبت  $y = \frac{1}{2} \sin x$  نمایندگی از یکی از جوابات ذیل میباشد  
 1: انقباض در مسیر محور  $x$     2: انقباض در مسیر محور  $y$   
 3: انبساط در مسیر محور  $x$     4: انبساط در مسیر محور  $y$
- 199) قیمت اعظمی تابع  $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  در انتروال  $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$  عبارت است از  
 $\frac{3\pi}{2} : 1$        $\frac{5\pi}{2} : 2$        $2\pi : 3$        $\frac{\pi}{2} : 4$
- 200) قیمت اصغری تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$  در انتروال  $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$  عبارت است از  
 $-\frac{\pi}{2} : 1$        $\frac{\pi}{2} : 2$        $\pi : 3$        $2\pi : 4$
- 201) ساحه تحول  $y = \sin x + 4$  عبارت است از  
 $[-1, +1] : 1$        $[3, 5] : 2$        $[-4, 4] : 3$        $[-3, 5] : 4$
- 202) ساحه تحول  $y = \cos x - 2$  عبارت است از  
 $[-3, -1] : 1$        $[-1, 1] : 2$        $[1, 3] : 3$        $[-2, 2] : 4$
- 203) ساحه تحول  $y = \sin \frac{x}{3}$  عبارت است از  
 $[-1, +1] : 1$        $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] : 2$        $[1, 3] : 3$        $[-1, 3] : 4$
- 204) پرپود  $y = \cot \frac{x}{2}$  عبارت است از  
 $\pi : 1$        $2\pi : 2$        $\frac{\pi}{2} : 3$        $4\pi : 4$



- 205) افاده مثلثاتی  $\sin(x + 2n\pi) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\cos x$  (2)  $-\cos x$  (3)  $-\sin x$  (4)  $\sin x$
- 206) تابع  $y = \sin x$  در انتروال  $[2\pi, 4\pi]$  چند نقطه اعظمی دارد؟  
 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) هیچکدام
- 207) تابع  $f(x) = \tan x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند مجانب عمودی دارد؟  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار
- 208) به کدام قیمت  $x$  تابع  $y = \cot 4x$  تعریف نشده است؟  
 (1)  $x = -\frac{\pi}{8}$  (2)  $x = \frac{\pi}{4}$  (3)  $x = \frac{\pi}{8}$  (4)  $x = \frac{\pi}{3}$
- 209) تابع  $f(x) = \sec x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند مجانب عمودی دارد؟  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار
- 210) عبارت  $\sin(x + y) = ?$  برابر است به؟  
 (1)  $\sin x \sin y - \cos x \cos y$  (2)  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$   
 (3)  $\sin x \sin y + \cos x \cos y$  (4)  $\sin x \cos y + \cos x \sin y$
- 211) عبارت  $\sin(x - y) = ?$  برابر است به؟  
 (1)  $\sin x \sin y - \cos x \cos y$  (2)  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$   
 (3)  $\sin x \sin y + \cos x \cos y$  (4)  $\sin x \cos y + \cos x \sin y$
- 212) عبارت  $\cos(x + y) = ?$  برابر است به؟  
 (1)  $-\sin x \sin y + \cos x \cos y$  (2)  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$   
 (3)  $\sin x \sin y + \cos x \cos y$  (4)  $\sin x \cos y + \cos x \sin y$
- 213) عبارت  $\cos(x - y) = ?$  برابر است به؟  
 (1)  $\sin x \sin y - \cos x \cos y$  (2)  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$   
 (3)  $\sin x \sin y + \cos x \cos y$  (4)  $\sin x \cos y + \cos x \sin y$
- 214) قیمت افاده  $\sin 25 \cdot \cos 35 + \cos 25 \cdot \sin 35 = ?$  مساوی است به  
 (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 215) قیمت افاده  $\sin 23 \cdot \sin 22 - \cos 23 \cos 22 = ?$  مساوی است به  
 (1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (2)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (4)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 216) قیمت افاده  $\frac{\tan 54 - \tan 24}{1 + \tan 54 \cdot \tan 24}$  عبارت است از  
 (1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (3)  $\sqrt{3}$  (4)  $\frac{1}{2}$
- 217) اگر  $\sin a = \frac{4}{5}$  باشد و  $\cos b = \frac{8}{17}$  باشد در اینصورت  $\sin(a + b)$  مساوی است به  
 (1)  $\frac{77}{85}$  (2)  $\frac{87}{77}$  (3)  $\frac{36}{85}$  (4)  $\frac{36}{77}$
- 218) قیمت افاده  $\cos a \cdot \cos(b - a) - \sin a \sin(b - a) = ?$  مساوی است به  
 (1)  $\sin a$  (2)  $\sin b$  (3)  $\cos a$  (4)  $\cos b$
- 219) قیمت افاده  $\cos(45 + x) \cdot \cos(45 - y) + \sin(45 + x) \cdot \sin(45 - y)$  مساوی است به  
 (1)  $\sin(45 + x)$  (2)  $\sin(45 + y)$  (3)  $\cos(45 + x)$  (4)  $\cos(45 + y)$
- 220) حاصل افاده  $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b)$  عبارت است از  
 (1)  $\sin a - \sin b$  (2)  $\sin^2 a - \sin^2 b$  (3)  $\sin a - \cos b$  (4)  $\sin^2 a - \cos^2 b$



221) قیمت افاده مثلثاتی  $\cot a - \cot b$  مساوی است به

$$\frac{\cos(a-b)}{\sin a \sin b} : 4 \quad \frac{\cos(a+b)}{\sin a \sin b} : 3 \quad \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b} : 2 \quad \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} : 1$$

222) قیمت افاده  $7 \cos 8x \cos x + 7 \sin 8x \sin x$  مساوی است به

$$7 \cos 7x : 4 \quad 7 \cos 8x : 3 \quad \sin 7x : 2 \quad 7 \sin 8x : 1$$

223) قیمت افاده  $\tan 75$  مساوی است به

$$1 : 1 \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} : 1 \quad \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} : 2 \quad \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3} : 3 \quad 1 \text{ و } 2 \text{ درست}$$

224) قیمت افاده  $\sin 105$  مساوی است به

$$\sin 15 : 1 \quad \sin 75 : 2 \quad \tan 15 : 3 \quad \cos 75 : 4$$

225) اگر  $\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 7 \sin x \cos x = 5$  باشد قیمت  $\tan x$  مساوی است به

$$-1 : 1 \quad \frac{-3}{4} : 2 \quad -3 : 3 \quad 1 \text{ و } 2 \text{ درست}$$

226) حاصل افاده  $A = \sin^2 \frac{\pi}{36} + \sin^2 \frac{5\pi}{36} + \sin^2 \frac{9\pi}{36} + \sin^2 \frac{13\pi}{36} + \sin^2 \frac{17\pi}{36}$  مساوی است به

$$\frac{2}{5} : 1 \quad \frac{5}{2} : 2 \quad \frac{3}{2} : 3 \quad \frac{2}{3} : 4$$

227) قیمت افاده  $\tan 15$  مساوی است به

$$1 : 1 \quad \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} : 1 \quad \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} : 2 \quad \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3} : 3 \quad 1 \text{ و } 2 \text{ درست}$$

228) قیمت افاده  $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$  مساوی است به

$$\sin x + \tan x : 1 \quad \sin x + \cos x : 2 \quad \sin x - \cos x : 3 \quad 4 \text{ همه}$$

229) حاصل  $\sin x - \cos x$  مساوی است به

$$1 : 1 \quad \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) : 1 \quad -\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) : 2 \quad \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) : 3 \quad 4 \text{ و } 2 \text{ درست است}$$

230) حاصل عبارت مثلثاتی  $y = \sqrt{3} \cos 40 - \sin 40$  را به ساده ترین صورت ممکنه در یافت نمایید

$$-2 \sin 20 : 1 \quad -2 \cos 20 : 2 \quad 2 \sin 20 : 3 \quad 2 \cos 20 : 4$$

231) حاصل عبارت  $A = \tan 35 + \tan 10 + \tan 35 \cdot \tan 10$  مساوی است به

$$\sqrt{3} : 1 \quad 1 : 2 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} : 3 \quad -2 : 4$$

232) حاصل عبارت  $A = \tan 80 - \tan 20 - \sqrt{3} \tan 80 \tan 20$  قیمت A مساوی است به

$$\frac{\sqrt{3}}{3} : 1 \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} : 2 \quad \sqrt{3} : 3 \quad -\sqrt{3} : 4$$

233) قیمت افاده  $\sin^4 x + \cos^4 x$  مساوی است به

$$1 + \frac{\sin^2 2x}{2} : 1 \quad 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} : 2 \quad 1 - \frac{\sin^2 x}{2} : 3 \quad 1 + \frac{\sin^2 x}{2} : 4$$

234) در صورتیکه  $A, B, C$  زوایای یک مثلث باشد در اینصورت قیمت  $\cos A$  مساوی است به

$$\cos(B+C) : 1 \quad -\cos(B+C) : 2 \quad \cos(B-C) : 3 \quad -\cos(B-C) : 4$$

235) در صورتیکه  $A, B, C$  زوایای یک مثلث باشد در اینصورت قیمت  $\sin 2A$  مساوی است به

$$\sin(2B+2C) : 1 \quad -\sin(2B+2C) : 2 \quad \sin(B+C) : 3 \quad -\sin(B+C) : 4$$

236) در صورتیکه  $A, B, C$  زوایای داخل یک مثلث باشد قیمت  $\sin(B + \frac{A}{2})$  مساوی است به

$$\cos(\frac{B-C}{2}) : 1 \quad \cos(\frac{A-C}{2}) : 2 \quad \cos(\frac{3B+C}{2}) : 3 \quad \cos(\frac{B+C}{2}) : 4$$





237) اگر  $\sin x = \frac{1}{3}$  باشد طوری که ضلع دوم این زاویه در ناحیه دوم قرار دارد قیمت  $\tan(x + \frac{3\pi}{2})$  عبارت است از

$$2\sqrt{2} : 1 \quad 3 - 2\sqrt{2} : 2 \quad \frac{\sqrt{2}}{4} : 3 \quad -\frac{\sqrt{2}}{4} : 4$$

238) اگر  $\sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}$  باشد و  $\tan x \cdot \tan y = 3$  است پس قیمت  $\cos(x - y) = ?$  مساوی است به

$$\frac{3}{2} : 1 \quad 1 : 2 \quad 2 : 3 \quad \frac{1}{2} : 4$$

239) قیمت افاده  $\sin(x + y) + \sin(x - y) = ?$

$$2 \sin x \cdot \cos y : 1 \quad -2 \sin x \cos y : 2 \quad 2 \sin x \sin y : 3 \quad -2 \sin x \sin y : 4$$

240) قیمت افاده  $\cos(x - y) - \cos(x + y)$  مساوی است به

$$2 \sin x \cdot \cos y : 1 \quad -2 \sin x \cos y : 2 \quad 2 \sin x \sin y : 3 \quad -2 \sin x \sin y : 4$$

241) قیمت افاده  $\cos(\frac{\pi}{4} - x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + x) - \sin(\frac{\pi}{4} - x) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + x)$  مساوی است به

$$\sin(\frac{\pi}{4} + x) : 1 \quad \cos(\frac{\pi}{4} + x) : 2 \quad 3 : \text{صفر} \quad 1 : 4$$

242) قیمت افاده مثلثاتی  $\sqrt{3} \cos x + \sin x$  مساوی است به

$$2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) : 1 \quad 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) : 2 \quad 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) : 3 \quad 2 \cos(x + \frac{\pi}{3}) : 4$$

243) حاصل افاده  $3 \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x = ?$  مساوی است به

$$\sin 2x - \sin x : 1 \quad \sin 3x - \sin 2x : 2 \quad 2 \sin 3x - \sin 2x : 3 \quad 2 \sin 4x - \sin 2x : 3$$

244) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan(\sqrt{2}+\sqrt{8}) - \sin(\sqrt{2}+\sqrt{8})}{2 \tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})}$  مساوی به کدام است؟

$$1 + \sin^2 \frac{\sqrt{18}}{2} (1) \quad 1 + \cos^2 \frac{\sqrt{18}}{2} (2) \quad 1 - \sin^2 \frac{\sqrt{18}}{2} (3) \quad 1 - \cos^2 \frac{\sqrt{18}}{2} (4)$$

245) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan(x+10) - \sin(x+10)}{2 \tan(x+10)}$  مساوی است به؟

$$\cos^2 \frac{x+10}{2} (1) \quad \sin^2 \frac{x+10}{2} (2) \quad \cos^2 \frac{x-10}{2} (3) \quad \sec^2 \frac{x+10}{2} (4)$$

246) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan 20 - \sin 20}{2 \tan 20}$  مساوی است به؟

$$\sin^2 \frac{30}{2} (1) \quad \sin^2 \frac{40}{2} (2) \quad \sin^2 \frac{20}{2} (3) \quad \cos^2 20 (4)$$

247) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan 800 - \sin 800}{2 \tan 800}$  مساوی است به؟

$$\sin^2 1600 (1) \quad \sin^2 400 (2) \quad \sin^2 800 (3) \quad \cos^2 400 (4)$$

248) افاده مثلثاتی  $\cos 20 \cos 25 - \sin 20 \sin 25 = ?$  مساوی است به؟

$$\cos 30 (1) \quad \cos 15 (2) \quad \cos 45 (3) \quad \cos 30 (4)$$

249) افاده مثلثاتی  $\sin 57 \cos 12 - \cos 57 \sin 12 = ?$  مساوی است به؟

$$\sin 57 (1) \quad \cos 57 (2) \quad \sin 44 (3) \quad \sin 45 (4)$$

250) افاده مثلثاتی  $\sin 2 \cos 88 + \cos 2 \sin 88 = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{1}{2} (1) \quad 0 (2) \quad -1 (3) \quad 1 (4)$$

251) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan \sqrt{60} - \sin \sqrt{60}}{2 \tan \sqrt{60}}$  مساوی است به؟

$$\cos^2 \sqrt{15} (1) \quad \cos^2 \sqrt{60} (2) \quad \sin^2 \sqrt{15} (3) \quad \sin^2 \sqrt{60} (4)$$



- (252) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{1}{\sec 18 \sin 3 \cos 21} = ?$  مساوی است به؟  
 $\cot 3 + \tan 21$  (4)  $\cot 21 + \tan 21$  (3)  $\tan 3 - \tan 21$  (2)  $\tan 21 - \tan 3$  (1)
- (253) افاده مثلثاتی  $\sin 60 \cos 30 + \cos 60 \sin 30 = ?$  مساوی است به؟  
 $\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (3)  $1$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (1)
- (254) اگر  $\tan(a+b) = \frac{1}{2}$  و  $\tan(a-b) = \frac{1}{3}$  باشد قیمت  $\tan 2b$  مساوی چند است  
 $\frac{1}{10} : 4$   $\frac{1}{4} : 3$   $\frac{1}{5} : 2$   $\frac{1}{7} : 1$
- (255) اگر  $\tan(a+b) = \frac{1}{2}$  و  $\tan(a-b) = \frac{1}{3}$  باشد قیمت  $\tan 2a$  مساوی چند است  
 $\frac{1}{5} : 1$   $-\frac{1}{5} : 2$   $3 : \text{صفر}$   $4 : \text{یک}$
- (256) اگر  $\tan(a - \frac{b}{2}) = \sqrt{3} - 1$  و  $\tan(a + \frac{b}{2}) = \sqrt{3} + 1$  باشد قیمت  $\tan 2b$  مساوی چند است  
 $\frac{12}{5} : 4$   $\frac{8}{5} : 3$   $\frac{3}{7} : 2$   $\frac{15}{4} : 1$
- (257) اگر  $\tan a$  و  $\tan b$  جذور معادله  $x^2 + 5x - 1 = 0$  باشد در اینصورت قیمت  $\tan(a+b)$  عبارت است از  
 $-\frac{5}{2} : 4$   $\frac{5}{2} : 3$   $\frac{3}{2} : 2$   $-\frac{3}{2} : 1$
- (258) اگر  $A + B = \frac{\pi}{2}$  باشد حاصل  $(1 + \tan \frac{A}{2})(1 + \tan \frac{B}{2})$  عبارت است از  
 $-1 : 4$   $1 : 3$   $-2 : 2$   $2 : 1$
- (259) قیمت عددی افاده  $\tan 76 + \tan 59 - \tan 76 \tan 59$  مساوی است به  
 $-2 : 4$   $2 : 3$   $-1 : 2$   $1 : 1$
- (260) اگر  $x + y = \frac{9\pi}{4}$  باشد قیمت عددی  $\cot x + \cot y - \cot x \cdot \cot y = ?$  مساوی است به  
 $-\sqrt{3} : 4$   $\sqrt{3} : 3$   $-1 : 2$   $1 : 1$
- (261) اگر  $\sin(x) = \frac{4}{5}$  باشد طوریکه  $x$  یک زاویه حاده است در اینصورت قیمت  $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$  مساوی است به  
 $\frac{3}{5} : 4$   $\frac{1}{2} : 3$   $\frac{1}{4} : 2$   $\frac{1}{5} : 1$
- (262) اگر  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$  باشد قیمت  $\sin 2x = ?$  است  
 $\frac{4}{5} : 4$   $\frac{4}{5} : 3$   $-\frac{3}{5} : 2$   $\frac{3}{5} : 1$
- (263) اگر  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$  باشد قیمت  $\cos 2x = ?$  است  
 $\frac{4}{5} : 4$   $\frac{4}{5} : 3$   $-\frac{3}{5} : 2$   $\frac{3}{5} : 1$
- (264) اگر  $\sin x = -\frac{1}{3}$  باشد و  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد قیمت  $\tan 2x$  مساوی است به  
 $\frac{4\sqrt{2}}{7} : 4$   $\frac{7}{9} : 3$   $\frac{4\sqrt{2}}{9} : 2$   $\frac{3\sqrt{2}}{7} : 1$
- (265) مقدار عددی  $y = \frac{\sin 9}{\sin 3} - \frac{\cos 9}{\cos 3}$  مساوی می شود به  
 $3 : 4$   $\frac{1}{3} : 3$   $2 : 2$   $\frac{1}{2} : 1$
- (266) هرگاه  $\sin x = \frac{4}{5}$  باشد و ضلع دوم  $x$  در ربع دوم باشد  $\sin 2x = ?$  کدام است؟  
 $\frac{27}{4} : 4$   $-\frac{24}{25} : 3$   $\frac{3}{25} : 2$   $\frac{24}{25} : 1$



267) هرگاه  $\sin x = \frac{4}{5}$  باشد و ضلع دوم  $x$  در ربع دوم باشد  $\cos 2x = ?$  کدام است؟

(1)  $\frac{24}{25}$  (2)  $-\frac{7}{25}$  (3)  $\frac{24}{7}$  (4)  $\frac{27}{7}$

268) هرگاه  $\sin x = \frac{4}{5}$  باشد و ضلع دوم  $x$  در ربع دوم باشد  $\tan 2x = ?$  کدام است؟

(1)  $\frac{24}{25}$  (2)  $-\frac{7}{25}$  (3)  $\frac{24}{7}$  (4)  $\frac{27}{7}$

269) یکی از روابط ذیل صحت دارد

1:  $3 \sin 30 - 4 \sin^3 30 = 1$  2:  $2 \sin 60 \cdot \cos 60 = \sin 120$

3:  $3 \cos 30 - 4 \cos^3 30 = 0$

4: همه درست است

270) یکی از جوابات ذیل غلط است

1:  $\tan 60 = \frac{2 \tan 30}{1 - \tan^2 30}$  2:  $\cos 60 = \frac{1 - \tan^2 30}{1 + \tan^2 30}$

3:  $\frac{\sin^2 45}{2} = \sin 30$

4:  $2 \sin 30 \cdot \cos 30 = \sin 30$

271) عبارت  $2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = ?$  برابر است به؟

(1)  $\cos x$  (2)  $\sin 2x$  (3)  $\sin x$  (4)  $\cos 2x$

272) عبارت  $2 \cos^2 x - 1 = ?$  برابر است به؟

(1)  $\cos x$  (2)  $2 \cos 2x$  (3)  $\cos 2x$  (4)  $\sin 2x$

273) عبارت  $\cos 2x = ?$  برابر است به؟

(1)  $\cos^2 x - \sin^2 x$  (2)  $2 \cos^2 x - 1$  (3)  $1 - 2 \sin^2 x$  (4) همه درست

274) عبارت  $\cos \frac{x}{2}$  برابر است به؟

(1)  $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$  (2)  $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$  (3)  $\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2}}$  (4) هیچکدام

275) قیمت  $\sin \frac{x}{2} = ?$  برابر است به؟

(1)  $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$  (2)  $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$  (3)  $\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2}}$  (4) هیچکدام

276) هرگاه  $\cos x = \frac{4}{5}$  باشد  $(90 > x > 0)$  مقدار  $\sin \frac{x}{2}$  را محاسبه نمایید؟

(1)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  (2)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (3)  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$  (4) 1 و 2 درست

277) هرگاه  $\cos x = \frac{4}{5}$  باشد  $(90 > x > 0)$  مقدار  $\tan \frac{x}{2} = ?$  کدام است؟

(1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{1}{4}$  (4)  $\frac{1}{5}$

278) حاصل  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = ?$  برابر است با

(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4)  $\sin 2x$

279) اگر  $\sin x = \frac{3}{5}$  و ضلع دوم  $x$  در ربع اول باشد  $\cos 2x = ?$  کدام است؟

(1)  $\frac{8}{25}$  (2)  $\frac{11}{25}$  (3)  $\frac{7}{25}$  (4)  $\frac{9}{25}$

280) اگر  $\sin x = \frac{12}{13}$  و ضلع دوم  $x$  در ربع دوم باشد  $\tan \frac{x}{2} = ?$  کدام است؟

(1)  $\frac{2}{3}$  (2)  $\frac{4}{5}$  (3)  $\frac{7}{8}$  (4)  $\frac{3}{7}$

281) حاصل عبارت  $\tan x + \cot x = ?$  برابر است به؟

(1)  $\frac{2}{\sin 2x}$  (2)  $\frac{1}{\sin x}$  (3)  $\frac{1}{2 \sin 2x}$  (4)  $2 \tan 2x$



- 282) حاصل عبارت  $\cot x - \tan x = ?$  مساوی است به؟  
 $2 \cot 2x$  (4)       $\frac{1}{2} \cot x$  (3)       $\tan 2x$  (2)       $\cot 2x$  (1)
- 283) حاصل عبارت  $\sin^4 x + \cos^4 x = ?$  مساوی است به؟  
 $1 - \frac{1}{2} \sin x$  (4)       $\frac{1}{2} \sin^2 x$  (3)       $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$  (2)       $1 - 2 \sin^2 x$  (1)
- 284) حاصل عبارت  $\cos^4 x - \sin^4 x = ?$  مساوی است به؟  
 $\cos x$  (4)       $\cos 2x$  (3)       $\sin x$  (2)       $\sin 2x$  (1)
- 285) حاصل عبارت  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = ?$  مساوی است به؟  
 $2 \tan \frac{x}{2}$  (4)       $\tan \frac{x}{3}$  (3)       $\tan x$  (2)       $\tan \frac{x}{2}$  (1)
- 286) نقطه  $(\sin \frac{11\pi}{3}, \cos \frac{11\pi}{3})$  در کدام یکی از نواحی ذیل وجود دارد؟  
 (4) ناحیه چهارم      (3) ناحیه سوم      (2) ناحیه دوم      (1) ناحیه اول
- 287) حاصل  $\sin 75 + \sin 25 = ?$  مساوی است به؟  
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (4)       $-\frac{\sqrt{6}}{2}$  (3)       $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (2)       $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (1)
- 288) حاصل عبارت  $\frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x + \cos 2x} = ?$  مساوی است به؟  
 $\tan 2x$  (4)       $\cot x$  (3)       $\tan x$  (2)       $\cos x$  (1)
- 289) حاصل عبارت  $\cos 75 - \cos 15 = ?$  مساوی است به؟  
 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (4)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)       $\frac{1}{2}$  (2)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (1)
- 290) حاصل عبارت  $2 \cos 95 \cdot \sin 13 = ?$  مساوی است به؟  
 $4 \cos 108 + \cos 82$  (4)       $\sin 108 - \sin 82$  (3)       $\sin 108 + \sin 82$  (2)      (1)
- 291) حاصل عبارت  $\frac{\cos 2x - \cos 2y}{\sin 2x + \sin 2y} = ?$  مساوی است به؟  
 $\cot(y - x)$  (4)       $\tan(x - y)$  (3)       $\tan(y - x)$  (2)       $\tan(x + y)$  (1)
- 292) حاصل عبارت  $\sin(A + B) - \sin(A - B) = ?$  مساوی است به؟  
 $2 \sin A \cos B$  (4)       $2 \cos A \sin B$  (3)       $\cos A \sin B$  (2)       $\cos A \cdot \cos B$  (1)
- 293) حاصل عبارت  $\frac{\cos 37 + \sin 37}{\cos 37 - \sin 37} = ?$  مساوی است به؟  
 $\cot 16$  (4)       $\cot 8$  (3)       $\tan 16$  (2)       $\tan 37$  (1)
- 294) حاصل عبارت  $\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = ?$  مساوی است به؟  
 $\cot x$  (4)       $\tan x$  (3)       $\cos 2x$  (2)       $\tan 2x$  (1)
- 295) اگر  $\tan x = \frac{1}{3}$  باشد پس حاصل عبارت  $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos x - \cos 3x} = ?$  مساوی است به؟  
 $\frac{3}{4}$  (4)       $\frac{1}{4}$  (3)       $-\frac{1}{4}$  (2)       $-\frac{1}{2}$  (1)
- 296) افاده  $\cos^4 x - \sin^4 x = ?$  مساوی است به  
 $-\cos 2x : 4$        $\cos 2x : 3$        $-\sin 2x : 2$        $\sin 2x : 1$
- 297) افاده  $\frac{2}{\tan x + \cot x}$  مساوی است به  
 $\sin x : 4$        $\tan 2x : 3$        $\sin 2x : 2$        $\cos 2x : 1$
- 298) افاده  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = ?$  مساوی است به  
 $\frac{\cos x}{1 + \cos x} : 4$        $\frac{\sin x}{1 + \sin x} : 3$        $\frac{\cos x}{1 + \sin x} : 2$        $\frac{\sin x}{1 + \cos x} : 1$



299) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan 2x} = ?$  مساوی است به

$\tan x : 4$                        $\sin x : 3$                        $\cot x : 2$                        $\cos x : 1$

300) قیمت افاده  $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = ?$  مساوی است به

$2 \cot x : 4$                        $2 \tan x : 3$                        $\cot x : 2$                        $\tan x : 1$

301) افاده  $\cot(\frac{\pi}{4} - x) - \cot(\frac{\pi}{4} + x) = ?$  مساوی است به

$2 \cos 2x : 4$                        $2 \cot 2x : 3$                        $2 \tan 2x : 2$                        $2 \sin 2x : 1$

302) افاده  $\frac{2 \tan(\frac{\pi}{4} - x)}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{4} - x)}$  مساوی است به

$-\tan 2x : 4$                        $\sin 2x : 3$                        $\cot 2x : 2$                        $\tan 2x : 1$

303) اگر  $\sin x = \frac{3}{5}$  باشد و  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  باشد پس قیمت  $\tan(\frac{\pi}{2} + 2x)$  مساوی است به

$-\frac{24}{7} : 4$                        $\frac{24}{7} : 3$                        $-\frac{7}{24} : 2$                        $\frac{7}{24} : 1$

304) حاصل افاده  $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2 = ?$  مساوی است به

$4 : \text{صفر}$                        $-1 : 3$                        $-4 : 2$                        $-2 : 1$

305) قیمت افاده  $\tan 15 + \cot 15 = ?$  مساوی است به

$5 : 4$                        $4 : 3$                        $3 : 2$                        $2 : 1$

306) افاده  $\cos 2x + \frac{-1}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{1 + \cot^2 x} = ?$  مساوی است به

$-\sin^2 x : 4$                        $\sin^2 x : 3$                        $-\cos^2 x : 2$                        $\cos^2 x : 1$

307) اگر  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$  باشد قیمت  $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$  عبارت است از

$\sqrt{2} : 4$                        $\frac{\sqrt{2}}{2} : 3$                        $\frac{1}{2} : 2$                        $2 : 1$

308) در صورتیکه  $x = \frac{15}{2}$  باشد در اینصورت قیمت  $\sin x \cdot \cos x (1 - 2\sin^2 x) = ?$  مساوی است به

$\frac{3}{8} : 4$                        $\frac{1}{8} : 3$                        $\frac{1}{2} : 2$                        $\frac{1}{4} : 1$

309) حاصل عبارت  $(8\sin^3 \frac{\pi}{36} - 6\sin \frac{\pi}{36})(8\cos^3 \frac{\pi}{36} - 6\cos \frac{\pi}{36}) = ?$  مساوی است به

$-1 : 4$                        $1 : 3$                        $-\frac{1}{2} : 2$                        $\frac{1}{2} : 1$

310) نتیجه کسر  $\frac{3 \sin x + \sin 2x}{1 + 3 \cos x + \cos 2x}$  عبارت است از

$\tan x : 4$                        $\cot 2x : 3$                        $\tan 2x : 2$                        $\cot x : 1$

311) قیمت عددی  $\sin 3x \cdot \cos 2x + 2 \sin x \cdot \cos x \cos 3x = ?$  در صورتیکه  $x = \frac{\pi}{15}$  باشد

$\frac{\sqrt{3}}{2} : 4$                        $1 : 3$                        $\frac{1}{2} : 2$                        $1 : \text{صفر}$

312) اگر  $\tan(a + b) = 5$  و  $\tan(a - b) = 2$  باشد قیمت  $\tan 2b = ?$

$\frac{9}{5} : 4$                        $-\frac{2}{7} : 3$                        $\frac{2}{7} : 2$                        $\frac{3}{11} : 1$

313) قیمت عددی  $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = ?$  مساوی است به

$\frac{8}{11} : 4$                        $\frac{9}{16} : 3$                        $\frac{7}{8} : 2$                        $1 : 1$



(314) اگر  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  باشد کمترین قیمت که  $\frac{1-\tan^2(45-x)}{1+\tan^2(45+x)}$  مساوی است به

$$-2 : 4 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} : 3 \quad -\sqrt{2} : 2 \quad \frac{1}{2} : 1$$

(315) حاصل افاده  $\tan 75 - \tan 15 = ?$

$$3\sqrt{2} : 4 \quad 2 - \sqrt{3} : 3 \quad 2\sqrt{3} : 2 \quad 2 + \sqrt{3} : 1$$

(316) قیمت عددی  $\frac{\cos 20 + \sqrt{3} \sin 20}{\cos 40}$  مساوی است به

$$2 : 4 \quad \sqrt{3} : 3 \quad \frac{1}{2} : 2 \quad \sqrt{2} : 1$$

(317) افاده  $\frac{\tan^2 35 - \tan^2 10}{1 - \tan^2 35 \tan^2 10}$  مساوی است به

$$\cot 15 : 4 \quad \tan 35 : 3 \quad \tan 25 : 2 \quad \tan 15 : 1$$

(318) اگر  $\tan a$  و  $\tan b$  جذور معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشد قیمت  $\tan(a + b) = ?$

$$\frac{3}{2} : 4 \quad \infty : 3 \quad 1 : 2 \quad \frac{1}{2} : 1$$

(319) اگر  $A + B = \frac{5\pi}{4}$  باشد حاصل افاده  $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = ?$  مساوی است به

$$2 : 4 \quad \text{صفر} : 3 \quad 1 : 2 \quad -3 : 1$$

(320) اگر  $A + B = \frac{\pi}{4}$  باشد قیمت  $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$  مساوی است به

$$2 \cot B : 4 \quad \cot B : 3 \quad \tan B : 2 \quad 2 \tan B : 1$$

### طول قوس مساحت قطعه دایره و قطاع دایره

(321) طول قوسی را دریابید که در مقابل زاویه مرکزی 45 درجه واقع باشد اگر شعاع دایره 14cm باشد

$$13 : 4 \quad 12 : 3 \quad 11 : 2 \quad 10 : 1$$

(322) اگر در یک دایره در مقابل زاویه مرکزی 45 درجه طول قوس  $3\pi \text{ cm}$  قرار داشته باشد شعاع این

دایره چند است

$$13 : 4 \quad 12 : 3 \quad 11 : 2 \quad 10 : 1$$

(323) طول قوسی را دریابید که در مقابل زاویه مرکزی 90 درجه واقع باشد اگر شعاع دایره 20cm باشد

$$20\pi : 4 \quad 15\pi : 3 \quad 10\pi : 2 \quad 5\pi : 1$$

(324) طول قوسی را دریابید که در مقابل زاویه مرکزی 30 درجه واقع باشد اگر شعاع دایره 10cm باشد

$$\frac{16\pi}{3} : 4 \quad \frac{11\pi}{3} : 3 \quad \frac{7\pi}{3} : 2 \quad \frac{5\pi}{3} : 1$$

(325) طول قوس مقابل زاویه مرکزی  $15\pi$  است اگر شعاع دایره 20cm باشد دریابید زاویه مرکزی را

$$\frac{3\pi}{4} : 4 \quad \frac{\pi}{2} : 3 \quad \frac{5\pi}{3} : 2 \quad \frac{3\pi}{2} : 1$$

(326) طول قوس مقابل زاویه مرکزی  $2\pi \text{ cm}$  است اگر شعاع دایره 8cm باشد دریابید زاویه مرکزی را

$$\frac{\pi}{6} : 4 \quad \frac{\pi}{2} : 3 \quad \frac{\pi}{4} : 2 \quad \frac{\pi}{8} : 1$$

(327) طول قوس مقابل زاویه مرکزی  $5\pi \text{ cm}$  است اگر شعاع دایره 30cm باشد دریابید زاویه مرکزی

$$\frac{\pi}{6} : 4 \quad \frac{\pi}{2} : 3 \quad \frac{\pi}{4} : 2 \quad \frac{\pi}{8} : 1$$

(328) اگر شعاع دایره 9cm و زاویه مرکزی  $20^\circ$  باشد طول قوسی را دریابید که در مقابل زاویه مذکور

تشکیل میشود

$$\frac{\pi}{9} \text{ cm} (4) \quad 3\pi \text{ cm} (3) \quad \pi \text{ cm} (2) \quad \frac{\pi}{9} \text{ cm} (1)$$



329) طول قوسی که در مقابل زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{5}$  واقع است اگر شعاع دایره  $25\text{cm}$  باشد مساوی است به؟

- 1)  $15.7\text{cm}$  (2)  $17.7\text{cm}$  (3)  $11.5\text{cm}$  (4)  $14.7\text{cm}$

330) در یک دایره در مقابل زاویه مرکزی  $56^\circ$  درجه طول قوس  $\frac{2\pi}{45}\text{cm}$  باشد شعاع دایره مساوی است به؟

- 1)  $\frac{1}{14}\text{cm}$  (2)  $\frac{1}{7}\text{cm}$  (3)  $14\text{cm}$  (4)  $8\text{cm}$

331) اگر شعاع دایره  $5\text{cm}$  و زاویه قطاع دایره  $4$  باشد مساحت قطاع عبارت است از؟

- 1)  $\frac{5\pi}{18}$  (2)  $\frac{18\pi}{25}$  (3)  $\frac{25\pi}{18}$  (4)  $\frac{\pi}{18}$

332) هرگاه زاویه مرکزی  $\frac{3\pi}{4}$  و طول قوس مقابل  $210\text{cm}$  باشد پس شعاع دایره مساوی است به؟

- 1)  $\frac{720}{11}\text{cm}$  (2)  $\frac{980}{11}\text{cm}$  (3)  $\frac{920}{11}\text{cm}$  (4)  $\frac{680}{11}\text{cm}$

333) اگر شعاع یک دایره  $\frac{9}{\pi}\text{cm}$  باشد در اینصورت طول قوسی که در مقابل زاویه مرکزی  $2\pi^R$  واقع باشد مساوی است به؟

- 1)  $81$  (2)  $\frac{9}{2}$  (3)  $18$  (4)  $\frac{2}{9}$

334) هرگاه زاویه مرکزی  $\frac{3\pi}{4}$  و طول قوس مقابل  $210\text{cm}$  باشد پس شعاع دایره مساوی است به؟

- 1)  $\frac{720}{11}$  (2)  $\frac{980}{11}$  (3)  $\frac{920}{11}$  (4)  $\frac{680}{11}$

335) اگر شعاع دایره  $10\text{cm}$  باشد مساحت قطاع دایره را دریابید در صورتیکه زاویه قطاع  $72^\circ$  باشد

- 1)  $10\pi$  : 2)  $20\pi$  : 3)  $30\pi$  : 4)  $40\pi$  :

336) اگر شعاع دایره  $10\text{cm}$  باشد مساحت قطاع دایره را دریابید در صورتیکه زاویه مرکزی قطاع دایره  $90^\circ$  باشد

- 1)  $20\pi$  : 2)  $25\pi$  : 3)  $30\pi$  : 4)  $35\pi$  :

337) اگر مساحت قطاع دایره  $15\pi$  باشد و شعاع دایره  $6\text{cm}$  باشد در یابید زاویه مرکزی قطاع دایره را

- 1)  $\frac{\pi}{6}$  : 2)  $\frac{3\pi}{2}$  : 3)  $\frac{5\pi}{6}$  : 4)  $\frac{7\pi}{2}$  :

338) اگر مساحت قطاع دایره  $25\pi$  و شعاع دایره  $10$  باشد دریابید طول قوس که در مقابل زاویه مرکزی این قطاع دایره قرار دارد

- 1)  $3\pi$  : 2)  $4\pi$  : 3)  $5\pi$  : 4)  $6\pi$  :

339) مساحت قطاع دایره  $25,6$  و زاویه مرکزی قطاع  $\frac{\pi}{3}$  رادیان بوده دریابید طول قوس که در مقابل زاویه

مرکزی این قطاع دایره قرار دارد

- 1)  $\frac{7\pi}{3}$  : 2)  $\frac{7\pi}{2}$  : 3)  $\frac{10\pi}{3}$  : 4)  $\frac{11\pi}{3}$  :

340) طول قوس مقابل یک زاویه مرکزی  $6,28\text{cm}$  است اگر شعاع دایره  $8\text{cm}$  باشد دریابید مساحت قطاع دایره را که توسط زاویه مرکزی آن ایجاد شده است

- 1)  $23,43$  : 2)  $34,32$  : 3)  $45,3$  : 4)  $25,12$  :

341) مساحت قطاع دایره را دریابید که زاویه مرکزی آن  $300^\circ$  درجه و شعاع دایره  $1\text{cm}$  باشد

- 1)  $\frac{\pi}{6}$  : 2)  $\frac{3\pi}{2}$  : 3)  $\frac{5\pi}{6}$  : 4)  $\frac{7\pi}{2}$  :

342) مساحت قطاع دایره را دریابید که زاویه مرکزی آن  $\frac{\pi}{2}$  و شعاع دایره  $5\text{cm}$  باشد

- 1)  $\frac{25\pi}{2}$  : 2)  $\frac{23\pi}{2}$  : 3)  $\frac{21\pi}{2}$  : 4)  $\frac{19\pi}{2}$  :

343) مساحت قطعه دایره را دریابید که زاویه مرکزی آن  $71^\circ$  درجه و شعاع دایره  $6,8\text{cm}$  باشد

- 1)  $4,32$  : 2)  $5,76$  : 3)  $9,87$  : 4)  $6,68$  :



344) مساحت قطعه دایره  $(24\pi - 36\sqrt{3})$  است اگر وسعت زاویه مرکزی آن 60 درجه باشد شعاع دایره را محاسبه کنید

10 : 1                      11 : 2                      12 : 3                      13 : 4

345) مساحت قطعه دایره را دریابید که شعاع دایره 6cm و توسط وتر 6cm جدا شده باشد

3,27 : 1                      8,67 : 2                      4,34 : 3                      8,23 : 4

346) مساحت قطعه دایره 120 است اگر شعاع دایره 10cm و باشد دریابید زاویه مرکزی آن را

$\frac{\pi}{6}$  : 1                       $\frac{3\pi}{2}$  : 2                       $\frac{\pi}{2}$  : 3                       $\frac{7\pi}{2}$  : 4

347) مساحت قطعه دایره را دریابید که زاویه مرکزی آن 60 درجه و شعاع دایره 20 سانتی متر باشد

6,4 : 1                      4,6 : 2                      5,6 : 3                      6,5 : 4

348) اگر مساحت قطعه دایره 7,5 و زاویه مرکزی آن  $\frac{\pi}{4}$  رادیان باشد شعاع دایره را محاسبه کنید

7 : 1                      8 : 2                      9 : 3                      10 : 4

349) مساحت مثلث را دریابید که  $a = 6, b = 4, C = \frac{\pi}{2}$  باشد

20 : 1                      12 : 2                      28 : 3                      32 : 4

350) مساحت مثلث را دریابید که  $A = 47,5, c = 6, b = 3,5$  باشد

7,74 : 1                      9,76 : 2                      6,56 : 3                      8,98 : 4

351) مساحت مثلث 16 است اگر  $b = ?, a = 8, A = 30$  ضلع b را دریابید

7 : 1                      8 : 2                      9 : 3                      10 : 4

352) مساحت مثلث  $\frac{35}{2}$  است اگر  $C = 45^\circ, a = 10$  باشد ضلع b را دریابید

4 : 1                      5 : 2                      6 : 3                      7 : 4

353) مساحت مثلث 12 است اگر  $a = 6, b = 4$  باشد وسعت زاویه C را دریابید

45 : 1                      60 : 2                      90 : 3                      120 : 4

354) مساحت مثلث را دریابید که  $C = 30^\circ, b = 8, a = 12$  باشد

20 : 1                      24 : 2                      45 : 3                      36 : 4

355) مساحت مثلث 15 است اگر  $C = 150^\circ, a = 10$  باشد طول ضلع b را دریابید

4 : 1                      5 : 2                      6 : 3                      7 : 4

356) مساحت مثلث را دریابید که  $a = 18, b = 24, c = 30$  باشد

432,45 : 1                      324 : 2                      456 : 3                      216 : 4

357) مساحت مثلث را دریابید که  $c = 38,4, b = 42,3, a = 29,7$  باشد

435 : 1                      656 : 2                      522 : 3                      89,5 : 4

358) مساحت مثلث را دریابید که  $a = 3, b = 4, c = 5$  باشد

4 : 1                      5 : 2                      6 : 3                      7 : 4

359) مساحت مثلث را دریابید که  $a = 6, b = 8, c = 10$  باشد

24 : 1                      46 : 2                      32 : 3                      64 : 4

360) مساحت مثلث را دریابید که  $a = 3, b = 5, c = 6$  باشد

$\sqrt{45}$  : 1                       $\sqrt{56}$  : 2                       $\sqrt{32}$  : 3                       $\sqrt{64}$  : 4

361) مساحت مثلث را دریابید که  $a = 7, b = 8, c = 9$  باشد

26,83 : 1                      56,42 : 2                      34,67 : 3                      67,5 : 4

362) شعاع دایره محیطی مثلث را دریابید که اضلاع آن  $a = 3, b = 5, c = 6$  باشد

4 : 1                      6 : 2                      3 : 3                      10 : 4







- (380) افاده مثلثاتی  $\cos^2 3x - \sin^2 4x$  مساوی است به
- $\cos x \cdot \cos 7x$  :1      $\sin x \cdot \sin 7x$  :2      $\cos x \cdot \sin 7x$  :3      $\sin x \cdot \sin 7x$  :4
- (381) افاده مثلثاتی  $\tan^2 a - \tan^2 b = ?$  مساوی است به
- $\frac{\sin(a-b) \cdot \sin(a+b)}{\sin^2 a \cdot \cos^2 b}$  :1      $\frac{\sin(a-b) \cdot \sin(a+b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b}$  :3
- $\frac{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}{\sin(a-b) \cdot \sin(a+b)}$  :2      $\frac{\sin(a-b) \cdot \sin(a+b)}{\cos(a-b) \cdot \cos(a+b)}$  :4
- (382) قیمت افاده  $\sin^2 70 - \cos^2 50 = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{2} \sin 20$  :1      $-\frac{1}{2} \sin 20$  :2      $\frac{1}{2} \cos 20$  :3      $-\frac{1}{2} \cos 20$  :4
- (383) قیمت  $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{2}$  :1      $\frac{1}{4}$  :2      $\frac{1}{3}$  :3      $\frac{1}{8}$  :4
- (384) افاده مثلثاتی  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{2}$  :1      $\frac{1}{4}$  :2      $\frac{1}{3}$  :3      $\frac{1}{8}$  :4
- (385) قیمت افاده  $\tan 15 + \tan 75 = ?$  مساوی است به
- 2 :1     3 :2     4 :3     8 :4
- (386) قیمت افاده  $8 \sin 10 \cdot \sin 50 \cdot \sin 70 = ?$  مساوی است به
- 1 :1      $\frac{1}{2}$  :2     2 :3     8 :4
- (387) قیمت افاده  $\tan 20 \cdot \tan 40 \cdot \tan 80 = ?$  مساوی است به
- $\sqrt{3}$  :1      $\frac{\sqrt{3}}{2}$  :2      $\frac{\sqrt{3}}{4}$  :3      $4\sqrt{3}$  :4
- (388) قیمت افاده  $3 \cos 20 \cos 40 \cdot \cos 80 = ?$  مساوی است به
- $\frac{3}{4}$  :1      $\frac{3}{8}$  :2      $\frac{1}{2}$  :3     1 :4
- (389) قیمت افاده  $\sin^2 75 - \sin^2 15 = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{2}$  :1      $\frac{\sqrt{3}}{2}$  :2     2 :3     1 :4
- (390) قیمت افاده  $\cos^2 75 - \sin^2 75 = ?$  مساوی است به
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$  :1      $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  :2      $\frac{1}{2}$  :3      $-\frac{1}{2}$  :4
- (391) قیمت افاده  $\cos^2 70 - \sin^2 10 = ?$  مساوی است به
- $-\frac{1}{2} \sin 10$  :1      $2 \sin 10$  :2      $\frac{1}{2} \sin 10$  :3      $-2 \sin 10$  :4
- (392) قیمت افاده  $\sin 87 - \sin 59 - \sin 93 + \sin 61 = ?$  مساوی است به
- $\sin 0$  :1      $\sin 100$  :2      $\sin 10$  :3      $\sin 1$  :4
- (393) قیمت افاده  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12} = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{2}$  :1      $\frac{1}{4}$  :2      $-\frac{1}{2}$  :3      $-\frac{1}{2}$  :4
- (394) قیمت افاده  $\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{2}$  :1      $\frac{1}{4}$  :2      $-\frac{1}{2}$  :3      $-\frac{1}{4}$  :4
- (395) قیمت افاده  $\sin 7 \cdot \cos 23 \cdot \cos 37 = ?$  مساوی است به
- $\frac{1}{4} \sin 21$  :1      $\frac{1}{4} \cos 69$  :2      $4 \sin 21$  :3     2 و 4 درست است



396) قیمت افاده  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = ?$  مساوی است به

1 :  $\frac{1}{2}$       2 :  $-\frac{1}{2}$       3 : 1      4 : -1

397) حاصل افاده  $2\cos^2 10 - 2\cos^2 20 = ?$  مساوی است به

1 :  $\sin 20$       2 :  $\cos 20$       3 :  $\cos 10$       4 :  $\sin 10$

398) حاصل افاده  $\frac{1}{2\sin a} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] = ?$  مساوی است به

1 :  $\sin a$       2 :  $\cos 20$       3 :  $\frac{1}{2}\cos b$       4 :  $\cos b$

399) اگر  $a - b = \frac{\pi}{3}$  باشد قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\sin a + \sin b}{\sin \frac{a+b}{2}}$  مساوی است به

1 :  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       2 :  $\sqrt{3}$       3 : 2      4 :  $2\sqrt{3}$

400) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\cos(x+3y) + \cos(x-3y)}{\sin(x+3y) + \sin(x-3y)} = ?$  مساوی است به

1 :  $\tan x$       2 :  $\cot x$       3 :  $\cot 3x$       4 :  $\tan 3x$

401) قیمت افاده مثلثاتی  $\sin^3 x \cdot \cot^3 x \cdot \tan^2 x \cdot \cos^2 x$  مساوی است به

1 :  $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$       2 :  $\sin^2 x \cdot \cos^3 x$       3 :  $\sin^3 x \cdot \cos^2 x$       4 :  $\sin^1 x \cdot \cos^1 x$

402) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{(1+\tan x)(1-\cot x)}{(1+\cot x)(1-\tan x)}$  مساوی است به

1 : 1      2 : -1      3 :  $\sin x$       4 :  $\cos x$

403) قیمت افاده مثلثاتی  $\cos x \left( \frac{2}{\cos x} + \tan x \right) \left( \frac{1}{\cos x} - 2 \tan x \right) + 3 \tan x$  مساوی است به

1 :  $-2 \cos x$       2 :  $-2 \sin x$       3 :  $2 \cos x$       4 :  $2 \sin x$

404) قیمت افاده مثلثاتی  $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$  مساوی است به

1 : 3      2 : -3      3 : 5      4 : -5

405) حاصل عبارت مثلثاتی  $\sin^2 10 + \sin^2 40 + \sin^2 50 + \sin^2 80$  عبارت از

1 : 1      2 : 2      3 : 4      4 : صفر

406) حاصل ضرب افاده مثلثاتی  $\tan 1 \cdot \tan 2 \cdot \tan 3 \dots \tan 88 \cdot \tan 89$  مساوی است به

1 : 1      2 : 0      3 : لایتناهی      4 : محاسبه شده نمی

تواند

407) حاصل ضرب افاده مثلثاتی  $\tan 1 \cdot \cot 2 \cdot \tan 3 \cdot \cot 4 \dots \cot 88 \cdot \tan 89$  مساوی است به

1 : 1      2 : 0      3 : لایتناهی      4 : محاسبه شده نمی

تواند

408) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\sin x}{1-\cos x}$  عبارت است از

1 :  $\frac{1-\cos x}{\sin x}$       2 :  $\frac{1+\cos x}{\sin x}$       3 :  $\frac{\sin x}{1+\cos x}$       4 :  $\frac{1+\cos x}{\cos x}$

409) افاده مثلثاتی  $\frac{1+\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}$  مساوی است به

1 :  $2 \csc x$       2 :  $2 \cos x$       3 :  $2 \sin x$       4 :  $2 \tan x$

410) افاده مثلثاتی  $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\sin x}$  مساوی است به

1 :  $\frac{2}{\sin x}$       2 :  $\frac{2}{\cos x}$       3 :  $\frac{2}{\sec x}$       4 :  $\frac{2}{\tan x}$

411) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1}$  مساوی است به

1 :  $\frac{1+\cos x}{\sin x}$       2 :  $\frac{1-\sin x}{\sin x}$       3 :  $\frac{1+\sin x}{\sin x}$       4 :  $\frac{1-\cos x}{\sin x}$



412) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{(1+\sin x \cdot \cos x)(1-\sin x \cdot \cos x)}{\sin^4 x + \cos^4 x}$  مساوی است به

$$1 : 1 \quad -1 : 2 \quad \sin x : 3 \quad \frac{1}{\sin x} : 4$$

413) قیمت افاده مثلثاتی  $\sin^4 y + \cos^4 y = ?$  مساوی است به

$$1 : 1 \quad -1 : 2$$

$$1 + 2\sin^2 y \cdot \cos^2 y : 4 \quad 1 - 2\sin^2 y \cdot \cos^2 y : 3$$

414) قیمت افاده مثلثاتی  $\sin^6 x + \cos^6 x = ?$  مساوی است به

$$1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x : 2 \quad 1 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x : 1$$

$$1 - \sin^3 x \cdot \cos^3 x : 4 \quad 1 + \sin^3 x \cdot \cos^3 x : 3$$

415) قیمت افاده مثلثاتی  $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = ?$  مساوی است به

$$\sin^2 x : 4 \quad 3 : \text{صفر} \quad -1 : 2 \quad 1 : 1$$

416) قیمت افاده مثلثاتی  $(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$  عبارت است از

$$2 \cos x : 4 \quad -1 : 3 \quad 1 : 2 \quad 2 \sin x \cdot \cos x : 1$$

417) قیمت افاده مثلثاتی  $(\cos x + \sin x)^4 - (\sin x - \cos x)^4 = ?$  مساوی است به

$$-4 \sin x \cdot \cos x : 4 \quad 4 \sin x \cdot \cos x : 3 \quad -8 \sin x \cdot \cos x : 2 \quad 8 \sin x \cdot \cos x : 1$$

418) قیمت افاده مثلثاتی  $(\tan x - 1)(\cot x + 1) = ?$  مساوی است به

$$\cot x - \tan x : 4 \quad \cos x - \sin x : 3 \quad \tan x - \cot x : 2 \quad \sin x - \cos x : 1$$

419) قیمت افاده مثلثاتی  $\cos^2 x(2 + \tan^2 x) = ?$  مساوی است به

$$1 + \cos^2 x : 3 \quad 2 - \sin^2 x : 2 \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x : 1$$

420) قیمت افاده مثلثاتی  $\cot^2 x - \cot^2 x \cdot \cos^2 x = ?$  مساوی است به

$$\tan^2 x : 4 \quad \cot^2 x : 3 \quad \sin^2 x : 2 \quad \cos^2 x : 1$$

421) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$  مساوی است به

$$4 \tan x \cdot \cos x : 4 \quad 4 \tan x \cdot \csc x : 3 \quad 4 \tan x \cdot \sec x : 2 \quad 4 \tan x : 1$$

422) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x}$  مساوی است به

$$\tan^2 x : 4 \quad \cot^2 x : 3 \quad \csc^2 x : 2 \quad \sec^2 x : 1$$

423) قیمت افاده مثلثاتی  $\sin x \cdot \tan x + \cos x$  مساوی است به

$$\csc x : 4 \quad \sec x : 3 \quad \cos x : 2 \quad \sin x : 1$$

424) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = ?$  مساوی است به

$$\tan^6 x : 4 \quad \tan^4 x : 3 \quad \tan^2 x : 2 \quad 1 : 1$$

425) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{1+\tan x + \tan^2 x}{1+\cot x + \cot^2 x}$  مساوی است به

$$\cot^2 x : 4 \quad \cot x : 3 \quad \tan^2 x : 2 \quad \tan x : 1$$

426) قیمت افاده مثلثاتی  $\sin x \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x)$  مساوی است به

$$1 + \tan x : 4 \quad \sin x + \cos x : 3 \quad (1 + \tan x)^2 : 2 \quad (\sin x + \cos x)^2 : 1$$

427) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x(1 - \tan^2 x)} = ?$  مساوی است به

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan x} : 4 \quad \frac{2 \tan x}{1 - \tan x} : 3 \quad \frac{2 \tan x}{\tan x - 1} : 2 \quad \frac{2 \tan x}{\tan x + 1} : 1$$

428) قیمت افاده مثلثاتی  $\left( \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} - \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right) \left( \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} \right) = ?$  مساوی است به

$$2 \sin x : 4 \quad \frac{2}{\sin x} : 3 \quad \frac{4}{\sin x} : 2 \quad 4 \sin x : 1$$



- 429) قیمت افاده مثلثاتی  $\cot^2 x \frac{\sec x - 1}{\sin x + 1} + \sec^2 x \frac{\sin x - 1}{\sec x + 1}$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\cos x$  : 4       $\sin x$  : 3      صفر
- 430) قیمت افاده مثلثاتی  $(\sin x + \cos x)(\csc x - \sec x) = ?$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\sec x + \csc x$  : 4       $\cot x - \tan x$  : 3       $\tan x + \cot x$  : 2       $\tan x - \cot x$  : 1
- 431) قیمت افاده مثلثاتی  $(\sin x + \cos x)(\tan x + \cot x) = ?$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\tan x + \cot x$  : 4       $\tan x - \cot x$  : 3       $\sec x - \csc x$  : 2       $\sec x + \csc x$  : 1
- 432) قیمت افاده مثلثاتی  $\sin^2 x \cdot \cos^2 x (2 + \tan^2 x + \cot^2 x)$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\sin x$  : 4      صفر
- 433) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$  عبارت است از
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
صفر       $\cot x$  : 3       $\tan x$  : 2
- 434) قیمت افاده مثلثاتی  $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{1 + \tan^2 x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \cot^2 x} - \tan^2 x$  عبارت است از
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\tan x - \cot x$  : 4       $\sin x + \cos x$  : 3
- 435) مقدار عددی عبارت  $\frac{\sin^3 10x - \cos 20x}{4 \cos^2 15x - \sin 30x}$  در برابر  $x = 3^0$  عبارت است از
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $-\frac{1}{4}$  : 1       $-\frac{3}{8}$  : 2       $\frac{1}{4}$  : 3       $\frac{3}{8}$  : 4
- 436) حاصل عبارت  $\tan 1 \cdot \tan 5 \cdot \tan 9 \dots \tan 85 \cdot \tan 89$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
1 : 1      2 : 2      صفر      -1
- 437) اگر  $\cos x - \sin x = \frac{5}{7}$  باشد حاصل  $\sin x \cdot \cos x$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\frac{24}{49}$  : 1       $\frac{12}{49}$  : 2       $-\frac{24}{49}$  : 3       $-\frac{12}{49}$  : 4
- 438) اگر  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{3}$  باشد حاصل  $\tan x + \cot x = ?$  را دریابید
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\sqrt{3}$  : 1       $\frac{\sqrt{3}}{3}$  : 2       $\frac{1}{3}$  : 3      3 : 4
- 439) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$  عبارت است از
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\tan^6 x$  : 1       $\tan^2 x$  : 2      1 : 3       $\cot^6 x$  : 4
- 440) تعداد جواب های معادله  $2 \cos x + 1 = 0$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
1 : 1      2 : 2      4 : 3      هیچکدام
- 441) جذور معادله  $\sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  مساوی است به
- 1 : 1      2 : 2      3 : 3      4 : 4  
 $\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$  : 1       $\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}$  : 2       $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$  : 4      همه درست
- 442) معادله  $\sqrt{2} \sin x = 1$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند حل دارد؟
- 1) یک      2) دو      3) سه      4) حل ندارد
- 443) حل عمومی معادله  $\sqrt{2} \sin x = 1$  کدام است؟
- 1)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$       2)  $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$       3)  $x = k\pi$       4) 2 و 3 درست
- 444) معادله  $2 \sin x = -\sqrt{3}$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند حل دارد؟
- 1) یک      2) دو      3) سه      4) حل ندارد



445) حل معادله  $2 \sin x = -\sqrt{3}$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases} (4) \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} (3) \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{2\pi}{5} \end{cases} (2) \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} (1)$$

446) معادله  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$  در انتروال  $[0, \pi]$  دارای چند حل است؟

(1) یک (2) دو (3) سه (4) حل ندارد

447) حل عمومی معادله  $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$  کدام است؟

(1)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (2)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (3)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (4) حل ندارد

448) حل عمومی معادله  $\sqrt{2} \cos 2x = -1$  کدام است؟

(1)  $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (2)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (3)  $x = k\pi \pm \frac{3\pi}{8}$  (4)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

449) معادله  $\sqrt{3} \tan 2x = 1$  در انتروال  $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$  چند حل دارد؟

(1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار

450) جواب معادله  $\sqrt{3} \tan 2x = 1$  در انتروال  $[0, \frac{\pi}{2}]$  کدام است؟

(1)  $x = \frac{\pi}{12}$  (2)  $x = \frac{\pi}{6}$  (3)  $x = \frac{\pi}{3}$  (4) حل ندارد

451) مجموعه جواب های حاده معادله  $\cot 3x = \tan x$  کدام است؟

(1)  $\frac{5\pi}{8}$  (2)  $\frac{\pi}{3}$  (3)  $\frac{3\pi}{8}$  (4)  $\frac{\pi}{2}$

452) معادله  $\sin^2 x = \sin x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

453) جواب معادله  $\sin^2 x - \sin x = 0$  در انتروال  $[0, \pi]$  کدام است؟

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} (4) \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases} (2) \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} (1)$$

454) معادله  $2 \cos^2 x + \cos x = 1$  در انتروال  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

(1) 4 (2) 3 (3) 5 (4) 6

455) کوچکترین حل مثبت معادله  $2 \cos^2 x + \cos x = 1$  در انتروال  $[-\pi, \pi]$  کدام است؟

(1)  $\frac{\pi}{6}$  (2)  $\frac{\pi}{3}$  (3)  $\frac{\pi}{4}$  (4)  $\frac{\pi}{2}$

456) معادله  $\tan x + \sqrt{3} = 0$  در انتروال  $[-\pi, \pi]$  چند حل دارد؟

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) حل ندارد

457) حل معادله  $\tan x + \sqrt{3} = 0$  در انتروال  $[0, \pi]$  کدام است.

(1)  $x = \frac{2\pi}{3}$  (2)  $x = \frac{\pi}{3}$  (3)  $x = \frac{\pi}{6}$  (4)  $x = \frac{2\pi}{5}$

458) معادله  $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند حل دارد؟

(1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 5

459) یکی از حل های عمومی معادله  $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$  کدام است؟

(1)  $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (2)  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  (3)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (4)  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

460) معادله  $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x = 2$  در انتروال  $[0, \pi]$  چند حل دارد؟

(1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار



- 461) کوچکترین حل مثبت معادله  $2\sin^2 x + \sqrt{3} \cos x = 2$  کدام است؟  
 (1)  $\frac{\pi}{6}$  (2)  $\frac{\pi}{3}$  (3)  $\frac{\pi}{4}$  (4)  $\frac{\pi}{2}$
- 462) معادله  $\tan x = 3 \cot x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند حل دارد؟  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار
- 463) حل عمومی معادله  $\tan x = 3 \cot x$  کدام است؟  
 (1)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$  (2)  $x = k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (3)  $x = k\pi + \frac{4\pi}{3}$  (4) تمام موارد
- 464) معادله  $\frac{\cos x}{\tan x} = \frac{3}{2}$  در انتروال  $[0, \pi]$  چند حل دارد؟  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار
- 465) حل عمومی معادله  $2 \cos x = 3 \tan x$  در انتروال  $[0, \pi]$  کدام است؟  
 (1)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$  (3)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$  (4) هیچکدام
- 466) معادله  $\cos 2x = \sin x$  در انتروال  $[0, \pi]$  چند حل دارد؟  
 (1) سه (2) دو (3) یک (4) حل ندارد
- 467) حل معادله  $\cos 2x = \sin x$  در انتروال  $[0, \pi]$  کدام است؟  
 (1)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$  (2)  $x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{6}$  (3)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (4)  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
- 468) معادله  $\cos(\sin x) = 1$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند حل دارد؟  
 (1) حل ندارد (2) یک (3) دو (4) سه
- 469) حاصل عبارت  $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  برابر است به؟  
 (1) 1 (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (4)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- 470) ست حل معادله  $2 \sin x - 1 = 0$  عبارت است از  
 (1)  $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$  (2)  $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$  (3)  $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$  (4) هیچکدام
- 471) حل معادله  $2 \sin x - 3 = 0$  کدام است؟  
 (1)  $\frac{\pi}{2}$  (2) حل ندارد (3)  $-\frac{\pi}{4}$  (4)  $\frac{\pi}{3}$
- 472) ست حل معادله  $\tan x - 1 = 0$  کدام است؟  
 (1)  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  (2)  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  (3)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (4)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$
- 473) ست حل معادله  $\tan x - \sqrt{3} = 0$  کدام است؟  
 (1)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$  (2)  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$  (3)  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$  (4)  $x = k\pi + \frac{\pi}{8}$
- 474) ست حل معادله  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$  کدام است؟  
 (1)  $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$  (3)  $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$  (4) هیچکدام
- 475) معادله  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند حل دارد  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار



476) حل عمومی معادله  $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$  کدام است؟

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \quad (2) \qquad x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} \quad (4) \qquad x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

477) ست حل معادله  $\cos 2x + \sin x = 0$  کدام است؟

$$\begin{cases} x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} \\ x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} \\ x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad (1)$$

$$(4) \text{ هیچکدام} \qquad \begin{cases} x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} \\ x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3)$$

478) معادله  $2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$  در انتروال  $[0, \pi]$  چند حل دارد

(1) یک (2) دو (3) سه (4) حل ندارد

479) ست حل معادله  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$  کدام است؟

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \quad (1)$$

480) ست حل معادله  $2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$  کدام است؟

$$(4) \text{ هیچکدام} \quad x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3} \quad (3) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad x = 4k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

481) حل معادله  $\sqrt{3}\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  کدام است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

482) حل معادله  $2\cos^2 x + \cos x = 0$  کدام است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad x = 2\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

483) حل معادله  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  کدام است؟

$$(4) \text{ همه موارد} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

484) حل معادله  $2\cos^2 x - (\sqrt{2} + 2)\cos x + \sqrt{2} = 0$  کدام است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

485) حل معادله  $\cot^2 x - (\sqrt{3} + 1)\cot x + \sqrt{3} = 0$  کدام است؟

$$(4) \text{ گزینه 1 و 2} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

486) ست حل معادله  $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$  کدام است؟

$$(4) \text{ گزینه 1 و 3} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

487) حل معادله  $4\cos^2 x - 3 = 0$  کدام است؟

$$(4) \text{ هیچکدام} \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

488) حل معادله  $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0$  کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{18} \quad (4) \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \quad (3) \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{16} \quad (2) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

489) حل معادله  $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$  کدام است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$





$$(490) \text{ مقدار } x, y \text{ در سیستم معادلات} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases} (4)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{12} \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{6} \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases} (1)$$

$$(491) \text{ حل سیستم معادلات} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = \sqrt{3} \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

(4) هیچکدام

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{12} \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{4} \end{cases} (1)$$

$$(492) \text{ مقدار } x \text{ در سیستم} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$x = \frac{\pi}{4} (4)$$

$$x = \frac{\pi}{2} (3)$$

$$x = 0 (2)$$

$$x = \frac{\pi}{3} (1)$$

$$(493) \text{ مقدار } x \text{ در سیستم معادلات} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x - \tan y = 2 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$x = \frac{4\pi}{11} (4)$$

$$x = \frac{5\pi}{8} (3)$$

$$x = \frac{3\pi}{9} (2)$$

$$x = \frac{3\pi}{4} (1)$$

$$(494) \text{ حل سیستم معادلات} \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \cot x \cdot \cot y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{3\pi}{4} \end{cases} (4)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases} (1)$$

$$(495) \text{ شرط حل سیستم معادلات} \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \alpha \leq 1 (2)$$

$$-1 \leq \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \leq 1 (1)$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \cos \alpha \leq 1 (4)$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \tan \alpha \leq 1 (3)$$

$$(496) \text{ در سیستم معادلات} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases} \text{ مقدار } x + y = ? \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\pi}{6} (4)$$

$$\frac{\pi}{4} (3)$$

$$\frac{\pi}{3} (2)$$

$$\frac{\pi}{2} (1)$$

$$(497) \text{ در سیستم معادلات} \begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases} \text{ مقدار } x - y = ? \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{5} (3)$$

$$\frac{5\pi}{6} (2)$$

$$\frac{\pi}{6} (1)$$





509) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})-\sin(\sqrt{2}+\sqrt{8})}{2 \tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})}$  مساوی به کدام است؟

1)  $1 + \sin^2 \frac{\sqrt{18}}{2}$  (1)    2)  $1 + \cos^2 \frac{\sqrt{18}}{2}$  (2)    3)  $1 - \sin^2 \frac{\sqrt{18}}{2}$  (3)    4)  $1 - \cos^2 \frac{\sqrt{18}}{2}$  (4)

510) حاصل افاده مثلثاتی  $\sin\left(\frac{5}{13}\right)\left(1 + \sin\frac{5}{13}\right) + \cos\frac{5}{13}\left(1 + \sin\frac{5}{13}\right)^{-1}$  مساوی به کدام است؟

1)  $-\frac{2}{\cos\frac{5}{13}}$  (1)    2)  $-\frac{2}{\sin\frac{5}{13}}$  (2)    3)  $\frac{2}{\cos\frac{5}{13}}$  (3)    4)  $\frac{2}{\sin\frac{5}{13}}$  (4)

511) افاده مثلثاتی  $\frac{\sec(-x)+\sec(-x)}{\sec(-x)}$  مساوی است به؟

0 (1)    2 (2)    1 (3)    -2 (4)

512) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan(x+10)-\sin(x+10)}{2 \tan(x+10)}$  مساوی است به؟

1)  $\cos^2 \frac{x+10}{2}$  (1)    2)  $\sin^2 \frac{x+10}{2}$  (2)    3)  $\cos^2 \frac{x-10}{2}$  (3)    4)  $\sec^2 \frac{x+10}{2}$  (4)

513) حاصل افاده مثلثاتی  $\cos 70 + \cos 20 = ?$  مساوی است به؟

1)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 25$  (1)    2)  $-\sqrt{2} \cos 25$  (2)    3)  $\sqrt{2} \cos 25$  (3)    4)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 25$  (4)

514) اگر  $a \neq 0$  و  $\tan 18 = a$  باشد در اینصورت  $\tan 36 = ?$  کدام است؟

1)  $\frac{2a}{a^2+1}$  (1)    2)  $\frac{-2a}{a^2-1}$  (2)    3)  $\frac{1}{a}$  (3)    4)  $-\frac{1}{a}$  (4)

515) اگر  $180 < x < 270$  و  $\sin x = -\frac{2}{3}$  باشد پس  $2 \cos 2x = ?$  مساوی است به؟

1)  $-\frac{1}{9}$  (1)    2)  $-\frac{2}{9}$  (2)    3)  $\frac{1}{9}$  (3)    4)  $\frac{2}{9}$  (4)

516) اگر شعاع دایره  $9 \text{ cm}$  و زاویه مرکزی  $20^\circ$  باشد طول قوسی را دریابید که در مقابل زاویه مذکور تشکیل میشود

1)  $\frac{\pi}{9} \text{ cm}$  (1)    2)  $\pi \text{ cm}$  (2)    3)  $3\pi \text{ cm}$  (3)    4)  $\frac{\pi}{9} \text{ cm}$  (4)

517) افاده مثلثاتی  $\tan \frac{A-B}{2}$  مساوی است به؟

1)  $\frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\frac{a-b}{2}}$  (1)    2)  $\frac{(a+b) \tan \frac{A+B}{2}}{a-b}$  (2)    3)  $\frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\frac{a+b}{2}}$  (3)    4)  $\frac{(a-b) \tan \frac{A+B}{2}}{a+b}$  (4)

518) طول قوسی که در مقابل زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{5}$  واقع است اگر شعاع دایره  $25 \text{ cm}$  باشد مساوی است به؟

1)  $15.7 \text{ cm}$  (1)    2)  $17.7 \text{ cm}$  (2)    3)  $11.5 \text{ cm}$  (3)    4)  $14.7 \text{ cm}$  (4)

519) محیط مثلث متساوی الاضلاع  $84 \text{ cm}$  است شعاع دایره محاطی آن را محاسبه نمایید؟

1)  $\frac{84}{18} \sqrt{3}$  (1)    2)  $\frac{28}{18} \sqrt{3}$  (2)    3)  $\frac{84}{6} \sqrt{3}$  (3)    4)  $\frac{84}{3} \sqrt{3}$  (4)

520) محیط مثلث متساوی الاضلاع  $38 \text{ cm}$  است ارتفاع مثلث را دریابید؟

1)  $\frac{19}{6} \sqrt{3}$  (1)    2)  $\frac{38}{6} \sqrt{2}$  (2)    3)  $\frac{38}{3} \sqrt{3}$  (3)    4)  $\frac{19}{6} \sqrt{12}$  (4)

521) محیط مثلث متساوی الاضلاع  $8 \text{ cm}$  است ارتفاع مثلث را دریابید

1)  $\frac{4}{6} \sqrt{3}$  (1)    2)  $\frac{8}{6} \sqrt{2}$  (2)    3)  $\frac{8}{3} \sqrt{3}$  (3)    4)  $\frac{2}{3} \sqrt{12}$  (4)

522) در مثلث  $ABC$  اگر  $a = 15 \text{ cm}$  و  $A = 60^\circ$  باشند پس شعاع دایره محیطی این مثلث مساوی است به

1)  $R = 5\sqrt{2} \text{ cm}$  (1)    2)  $R = 5\sqrt{3} \text{ cm}$  (2)    3)  $R = 10\sqrt{3} \text{ cm}$  (3)    4)  $R = 5 \text{ cm}$  (4)



523) در یک دایره در مقابل زاویه مرکزی 56 درجه طول قوس  $\frac{2\pi}{45} cm$  باشد شعاع دایره مساوی است به؟

8cm (4)      14cm (3)       $\frac{1}{7} cm$  (2)       $\frac{1}{14} cm$  (1)

524) در مثلث ABC اگر  $b = 15cm$  و  $R = \frac{15\sqrt{2}}{2} cm$  باشند پس اندازه زاویه B مساوی است به؟

$\frac{\pi}{3}$  (4)       $\frac{\pi}{4}$  (3)       $\frac{\pi}{6}$  (2)       $\frac{\pi}{12}$  (1)

525) در مثلث ABC اگر  $a = 15cm$  و  $A = 45^\circ$  باشد پس شعاع دایره محیطی این مثلث مساوی است به؟

$R = \frac{15}{2}$  (4)       $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$  (3)       $R = \frac{15\sqrt{2}}{2}$  (2)       $R = 15\sqrt{2}$  (1)

526) هرگاه طول اضلاع یک مثلث به ترتیب  $a = 4$   $b = 5$   $c = 7$  باشد شعاع دایره محیطی مثلث عبارت است از؟

$35\sqrt{6}$  (4)       $\frac{\sqrt{6}}{24}$  (3)       $\frac{35\sqrt{6}}{4}$  (2)       $40\sqrt{6}$  (1)

527) اگر شعاع دایره 5cm و زاویه قطاع دایره 4 باشد مساحت قطاع عبارت است از؟

$\frac{\pi}{18}$  (4)       $\frac{25\pi}{18}$  (3)       $\frac{18\pi}{25}$  (2)       $\frac{5\pi}{18}$  (1)

528) محیط مثلث متساوی الاضلاع 10cm میباشد مساحت مثلث عبارت است از؟

$\frac{100}{13}\sqrt{2}$  (4)       $\frac{100}{36}\sqrt{3}$  (3)       $\frac{16}{36}\sqrt{3}$  (2)       $\frac{100}{18}\sqrt{\frac{3}{4}}$  (1)

529) هرگاه زاویه مرکزی  $\frac{3\pi}{4}$  و طول قوس مقابل 210cm باشد شعاع دایره مساوی است به؟

$\frac{680}{11} cm$  (4)       $\frac{920}{11} cm$  (3)       $\frac{980}{11} cm$  (2)       $\frac{720}{11} cm$  (1)

530) محیط مثلث متساوی الاضلاع 4cm میباشد مساحت مثلث عبارت است از؟

$\frac{100}{13}\sqrt{2}$  (4)       $\frac{100}{36}\sqrt{3}$  (3)       $\frac{16}{36}\sqrt{3}$  (2)       $\frac{8}{36}\sqrt{3}$  (1)

531) افاده مثلثاتی  $\sqrt{3} \sec 20 - \sec 20 = ?$  مساوی است به؟

2 (4)       $\frac{2 \sin 20}{\sin 40}$  (3)       $\frac{4 \sin 20}{\sin 40}$  (2)       $\frac{8}{2}$  (1)

532) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan 20 - \sin 20}{2 \tan 20} = ?$  مساوی است به؟

$\cos^2 20$  (4)       $\sin^2 \frac{20}{2}$  (3)       $\sin^2 \frac{40}{2}$  (2)       $\sin^2 \frac{30}{2}$  (1)

533) افاده مثلثاتی  $\frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = ?$  مساوی است به؟

2 (4)      1 (3)      -1 (2)      -2 (1)

534) حاصل افاده مثلثاتی  $(\cos^4 7,5 - \sin^4 7,5) \cdot \sin 7,5 \cdot \cos 7,5 = ?$  مساوی است به؟

$\frac{\sqrt{3}}{8}$  (4)       $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (3)       $\frac{1}{8}$  (2)       $\frac{1}{4}$  (1)

535) حاصل افاده مثلثاتی  $(\tan \sqrt{7} + 1)(\tan \sqrt{7} - 1)(1 - \sin^2 \sqrt{7}) = ?$  مساوی است به؟

$\sin^2 \sqrt{7}$  (4)       $\sin \sqrt{7} - \cos \sqrt{7}$  (3)       $\cos^2 \sqrt{7}$  (2)       $\sin^2 \sqrt{7} - \cos^2 \sqrt{7}$  (1)

536) اگر  $\sin 40 = a$  باشد پس قیمت  $\cos 50 = ?$  مساوی است به؟

1 - a (4)      1 - a<sup>2</sup> (3)       $\frac{a}{2}$  (2)      a (1)

537) ساده شده افاده مثلثاتی  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = ?$  مساوی است به؟

2 sin x (4)      2 cos x (3)      cos x (2)      sin x (1)



538) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan 800 - \sin 800}{2 \tan 800} = ?$  مساوی است به؟

$\sin^2 1600$  (1)  $\sin^2 400$  (2)  $\sin^2 800$  (3)  $\cos^2 400$  (4)

539) قیمت  $\sin 33 \cdot \cos 33 + \sin 66 = ?$  مساوی است به؟

$\frac{3}{2} \sin^2 66$  (1)  $\frac{3}{2} \sin 66$  (2)  $\frac{3}{2} \cos 66$  (3)  $\frac{2}{3} \sin 66$  (4)

540) افاده مثلثاتی  $\sin^2(3x+3) \cot^2(3x+3) + \cos^2(3x+3) \cdot \tan^2(3x+3) + \tan^2(3x+3) = ?$  مساوی است به؟

$1 + \tan^2(3x+3)$  (1)  $2 + \tan^2(3x+3)$  (2)  $1 + \cot^2(3x+3)$  (3)  $1$  (4)

541) ساده شده افاده مثلثاتی  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = ?$  مساوی است به؟

$0$  (1)  $2$  (2)  $-1$  (3)  $1$  (4)

542) ساده شده افاده مثلثاتی  $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = ?$  مساوی است به؟

$\cos x - \sin x$  (1)  $\cos 2x$  (2)  $1 + \sin 2x$  (3)  $1 - \sin 2x$  (4)

543) افاده مثلثاتی  $\log_{0,1} \cos^2 \frac{x}{4} + 2 \cos^2 \frac{x}{8} - \sin^2 \frac{x}{4} = ?$  مساوی است به؟

$2 \cos \frac{x}{8}$  (1)  $\cos \frac{x}{4}$  (2)  $2 \cos \frac{x}{4}$  (3)  $\cos \frac{x}{8}$  (4)

544) افاده مثلثاتی  $\frac{\tan x \cdot \cos x}{2} = ?$  مساوی است به؟

$\sin^2 x$  (1)  $\cos^2 x$  (2)  $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$  (3)  $\cos x$  (4)

545) افاده مثلثاتی  $\cos 20 \cos 25 - \sin 20 \sin 25 = ?$  مساوی است به؟

$\cos 30$  (1)  $\cos 15$  (2)  $\cos 45$  (3)  $\cos 30$  (4)

546) افاده مثلثاتی  $(\sin 1 + \cos 1)^2 + (\sin 1 - \cos 1)^2 = ?$  مساوی است به؟

$2$  (1)  $\sin^2 1 \cdot \cos 1$  (2)  $\sin 21 \cdot \cos 1$  (3)  $2 \sin 1 \cos 1$  (4)

547) افاده مثلثاتی  $\sin 57 \cos 12 - \cos 57 \sin 12 = ?$  مساوی است به؟

$\sin 57$  (1)  $\cos 57$  (2)  $\sin 44$  (3)  $\sin 45$  (4)

548) افاده مثلثاتی  $\sin 2 \cos 88 + \cos 2 \sin 88 = ?$  مساوی است به؟

$\frac{1}{2}$  (1)  $0$  (2)  $-1$  (3)  $1$  (4)

549) حاصل  $\frac{\sin 8 + \sin 16}{\cos 8 + \cos 16} = ?$  مساوی است به؟

$\cot 8$  (1)  $2 \csc 16$  (2)  $\tan 12$  (3)  $2 \sec 16$  (4)

550) افاده مثلثاتی  $\frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{10}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{10}} = ?$  مساوی است به؟

$\tan \frac{\pi}{5}$  (1)  $\sin \frac{\pi}{5}$  (2)  $\cot \frac{\pi}{5}$  (3)  $\cos \frac{\pi}{5}$  (4)

551) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\sin 18x}{\sin 7x} - \frac{\sin 18x}{\cos 7x} = ?$  مساوی است به؟

$\frac{\cos 25x}{\sin 7x}$  (1)  $\frac{2 \cos 25x}{\sin 14x}$  (2)  $\frac{\cos 25x}{\sin 7x}$  (3)  $\frac{\cos 25x}{\sin 14x}$  (4)

552) در مثلث  $ABC$  اگر  $b = 15 \text{ cm}$  و  $R = 5\sqrt{3} \text{ cm}$  باشند پس اندازه زاویه  $B = ?$  مساوی است به؟

$\frac{\pi}{12}$  (1)  $\frac{\pi}{3}$  (2)  $\frac{\pi}{4}$  (3)  $\frac{\pi}{6}$  (4)

553) افاده  $\sin 150 = ?$  مساوی است به؟

$-\sin 30$  (1)  $-\cos 30$  (2)  $\sin 30$  (3)  $\cos 30$  (4)



554) افاده مثلثاتی  $\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = ?$  مساوی است به؟

$\cot(x - y)$  (4)       $\tan(x - y)$  (3)       $\tan(x + y)$  (2)       $\cot(x + y)$  (1)

555) افاده مثلثاتی  $\frac{1 + \tan^2 900}{1 + \cot^2 900} = ?$  مساوی است به؟

$\cos^2 900$  (4)       $\cot^2 900$  (3)       $\sin^2 900$  (2)       $\tan^2 900$  (1)

556) اگر  $\sin 2x = \cos 3x$  باشد پس  $\cos x = ?$  مساوی است به؟

$\frac{1}{1 - 4\sin^2 x}$  (4)       $\frac{\sin 2x}{1 - 4\sin^2 x}$  (3)       $-\frac{\sin 2x}{1 + 4\sin^2 x}$  (2)       $\frac{\sin x}{1 - 4\sin^2 x}$  (1)

557) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6}} = ?$  مساوی است به؟

$\sqrt{2}$  (4)       $\sqrt{3}$  (3)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (1)

558) حاصل افاده مثلثاتی  $2 + \frac{2}{2\cot^2 \frac{\pi}{8}} = ?$  مساوی است به؟

$3\sec^2 \frac{\pi}{8}$  (4)       $\sec^2 \frac{\pi}{8}$  (3)       $2\tan^2 \frac{\pi}{8}$  (2)       $2\sec^2 \frac{\pi}{8}$  (1)

559) اگر شعاع یک دایره  $\frac{9}{\pi} \text{ cm}$  باشد در اینصورت طول قوسی که در مقابل زاویه مرکزی  $2\pi^R$  واقع باشد

مساوی است به؟

$\frac{2}{9}$  (4)      18 (3)       $\frac{9}{2}$  (2)      81 (1)

560) افاده مثلثاتی  $\frac{-\tan^2 \sqrt{7} - 1}{-\cot \sqrt{7} - 1} = ?$  مساوی است به؟

$\tan^2 \sqrt{7}$  (4)       $\tan \sqrt{7}$  (3)       $-\tan^2 \sqrt{7}$  (2)       $-\cot^2 \sqrt{7}$  (1)

561) اگر  $\tan x = \frac{1}{3}$  باشد پس  $\tan \frac{x}{2}$  مساوی است به؟

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (4)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (3)       $\frac{1}{2}$  (2)       $-\frac{1}{2}$  (1)

562) هرگاه زاویه مرکزی  $\frac{3\pi}{4}$  و طول قوس مقابل  $210 \text{ cm}$  باشد پس شعاع دایره مساوی است به؟

$\frac{680}{11}$  (4)       $\frac{920}{11}$  (3)       $\frac{980}{11}$  (2)       $\frac{720}{11}$  (1)

563) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\sin 12x}{\sin 8x} - \frac{\sin 12x}{\cos 8x} = ?$  مساوی است به؟

$\frac{\cos 20x}{\sin 16x}$  (4)       $\frac{\cos 20x}{\sin 8x}$  (3)       $\frac{2 \cos 20x}{\sin 16x}$  (2)       $\frac{\cos 20x}{\sin 16x}$  (1)

564) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{\tan \sqrt{60} - \sin \sqrt{60}}{2 \tan \sqrt{60}} = ?$  مساوی است به؟

$\sin^2 \sqrt{60}$  (4)       $\sin^2 \sqrt{15}$  (3)       $\cos^2 \sqrt{60}$  (2)       $\cos^2 \sqrt{15}$  (1)

565) افاده مثلثاتی  $\sin 2 + \sin 3 = ?$  مساوی است به؟

$2 \cos \frac{1}{2} \sin \frac{5}{2}$  (4)       $\frac{\sqrt{1-\sqrt{3}}}{2}$  (3)       $2 \sin \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{5}{2}$  (2)       $\frac{\sqrt{1-\sqrt{3}}}{2}$  (1)

566) افاده مثلثاتی  $\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} = ?$  مساوی است به؟

$-\frac{1}{2}$  (4)      1 (3)      -1 (2)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (1)

567) حاصل افاده مثلثاتی  $\frac{1}{\sec 18 \cdot \sin 3 \cdot \cos 21} = ?$  مساوی است به؟

$\cot 3 + \tan 21$  (4)       $\cot 21 + \tan 21$  (3)       $\tan 3 - \tan 21$  (2)       $\tan 21 - \tan 3$  (1)



(568) قیمت  $\sin 15 = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \quad (1)$$

(569) قیمت افاده  $\frac{\sin 300}{1-\cos 240} = ?$  مساوی است به؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \quad -\sqrt{3} \quad (1)$$

(570) مقدار  $\cos(2A + 2B) = ?$  مساوی است به؟

$$\sin 2A \cdot \sin 2B + \cos 2A \cdot \cos 2B \quad (2) \quad \sin 2A \cdot \sin 2B - \cos 2A \cdot \cos 2B \quad (1)$$

$$\cos 2A \cos 2B - \sin 2A \sin 2B \quad (4) \quad \cos 2A \cos 2B + \sin 2A \sin 2B \quad (3)$$

(571) افاده  $-3\cot^2 x - 3 = ?$  مساوی است به؟

$$-3\sec^2 x \quad (4) \quad -\csc^2 3x \quad (3) \quad -3\csc^2 3x \quad (2) \quad -\csc^2 x \quad (1)$$

(572) افاده مثلثاتی  $\cos^2 \frac{x}{10} - \sin^2 \frac{x}{10} = ?$  مساوی است به؟

$$\cos \frac{x}{10} \quad (4) \quad \cos \frac{x}{5} \quad (3) \quad \sin \frac{x}{10} \quad (2) \quad \sin \frac{x}{5} \quad (1)$$

(573) حاصل افاده مثلثاتی  $\sin^4 \frac{44}{11} + \cos^4 \frac{44}{11} + \left(\sqrt{2} \sin \frac{44}{11} \cos \frac{44}{11}\right)^2 = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{\sin 22\pi}{\sin^3 \frac{13\pi}{2}} \quad (4) \quad \frac{1}{\sin^3 \frac{13\pi}{2}} \quad (3) \quad \sin^3 \frac{13\pi}{2} + \frac{\sin^2 \frac{44}{11}}{\cos^2 \frac{44}{11}} \quad (2) \quad \frac{1}{\sin^3 \frac{15\pi}{2}} \quad (1)$$

(574) افاده مثلثاتی  $\sin 60 \cos 30 + \cos 60 \sin 30 = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

(575) افاده مثلثاتی  $1 + \tan^2 x = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{1}{\csc^2 x} \quad (4) \quad \frac{1}{\sin^2 x} \quad (3) \quad \sec^2 x \quad (2) \quad \frac{1}{\sec^2 x} \quad (1)$$

(576) افاده مثلثاتی  $\sin \frac{x}{2}$  مساوی است به؟

$$\pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad (4) \quad \pm \frac{\sqrt{1-\cos x}}{2} \quad (3) \quad \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad (2) \quad \pm \sqrt{1-\cos x} \quad (1)$$

(577) حاصل افاده مثلثاتی  $1 - 2 \sin 0,4 \cdot \cos 0,4 = ?$  مساوی است به؟

$$(\sin 0,4 + \cos 0,4)^2 \quad (2) \quad \sin^2 0,4 + \cos^2 0,4 \quad (1)$$

$$\sin^2 0,4 - \cos^2 0,4 \quad (4) \quad (\sin 0,4 - \cos 0,4)^2 \quad (3)$$

(578) افاده مثلثاتی  $\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{3} - \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{3} = ?$  مساوی است به؟

$$\cos \left(\frac{3a-2b}{6}\right) \quad (4) \quad \sin \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) \quad (3) \quad \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \quad (2) \quad \sin \left(\frac{3a-2b}{6}\right) \quad (1)$$

(579) افاده مثلثاتی  $\sqrt{4\sin^2 10 + 4\cos^2 10} = ?$  مساوی است به؟

$$1 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 2 \sin 10 \quad (2) \quad 2 \cos 10 \quad (1)$$

(580) افاده مثلثاتی  $8\sin^3 15 \cdot \cos^3 15 = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{8} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

(581) مقدار  $\csc(90 + 30) = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (1)$$

(582) حاصل افاده  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12}\right)}{\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{12}} = ?$  مساوی است به؟

$$\cot \frac{\pi}{8} - \cot \frac{\pi}{12} \quad (4) \quad \tan \frac{\pi}{8} - \tan \frac{\pi}{12} \quad (3) \quad \tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{\pi}{12} \quad (2) \quad \cos \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{12} \quad (1)$$



- 583) افاده مثلثاتی  $\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sin(A + B)$  (2)  $\cos(A + B)$  (3)  $\cos(A - B)$  (4)  $\sin(A - B)$
- 584) حل معادله  $\tan x = \sqrt{3}$  مساوی است به؟  
 (1)  $\frac{\pi}{2}$  (2)  $\frac{\pi}{6}$  (3)  $\frac{\pi}{4}$  (4)  $\frac{\pi}{3}$
- 585) حل معادله  $\sqrt{2} \tan x - \sqrt{2} = 0$  مساوی است به؟  
 (1)  $\frac{\pi}{2}$  (2)  $\frac{\pi}{6}$  (3)  $\frac{\pi}{4}$  (4)  $\frac{\pi}{3}$
- 586) مقدار  $\sin(x - y) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  (2)  $\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$   
 (3)  $\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$  (4)  $\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- 587) مقدار  $\cos \frac{9\pi}{20} = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sin \frac{9\pi}{20}$  (2)  $\sin \frac{5\pi}{20}$  (3)  $\sin \frac{7\pi}{20}$  (4)  $\sin \frac{\pi}{20}$
- 588) مساوات  $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$  چه نوع مساوات است؟  
 (1) نامساوی مثلثاتی (2) مطابقت مثلثاتی (3) معادله مثلثاتی (4) افاده مثلثاتی
- 589) اگر  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$  باشد پس قیمت  $x = ?$  را دریابید؟  
 (1) 0 (2) 30 (3) 45 (4) 90
- 590) نقطه  $\left(\sin \frac{11\pi}{3}, \cos \frac{11\pi}{3}\right)$  در کدام یکی از نواحی ذیل وجود دارد؟  
 (1) ناحیه اول (2) ناحیه دوم (3) ناحیه سوم (4) ناحیه چهارم
- 591) قیمت عددی  $\frac{\sin 30}{\sin 10} - \frac{\cos 30}{\cos 10} = ?$  مساوی است به؟  
 (1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 1
- 592) حاصل  $\sin 75 + \sin 25 = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (3)  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$  (4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 593) افاده مثلثاتی  $\sin(x + 2n\pi) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\cos x$  (2)  $-\cos x$  (3)  $-\sin x$  (4)  $\sin x$
- 594) تابع  $y = \sin x$  در انتروال  $[2\pi, 4\pi]$  چند نقطه اعظمی دارد؟  
 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) هیچکدام
- 595) افاده مثلثاتی  $\tan(4\pi + x) = ?$  مساوی به کدام است؟  
 (1)  $\tan x$  (2)  $-\tan x$  (3)  $\cot x$  (4)  $-\cot x$
- 596) افاده مثلثاتی  $(\sec^2 x - \cos^2 cx)(2 + \tan^2 x + \cot^2 x) = ?$  مساوی است به؟  
 (1)  $\sec^2 x - \cos^2 cx$  (2)  $\sec^4 x - \cos^4 cx$   
 (3)  $\sec x - \cos^4 cx$  (4)  $\sec^4 x - \cos^4 cx$
- 597) تابع  $f(x) = \tan x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند مجانب عمودی دارد؟  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار
- 598) به کدام قیمت  $x$  تابع  $y = \cot 4x$  تعریف نشده است؟  
 (1)  $x = -\frac{\pi}{8}$  (2)  $x = \frac{\pi}{4}$  (3)  $x = \frac{\pi}{8}$  (4)  $x = \frac{\pi}{3}$
- 599) تابع  $f(x) = \sec x$  در انتروال  $[0, 2\pi]$  چند مجانب عمودی دارد؟  
 (1) یک (2) دو (3) سه (4) چهار





600) افاده  $\frac{2 \tan 15}{1 - \tan^2 15} = ?$  مساوی است به؟

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

کلید جوابات

سوال	جواب	سوال	جواب	سوال	جواب	سوال	جواب	سوال	جواب	سوال	جواب
1	1	2	1	3	2	4	2	5	2	6	4
7	2	8	2	9	3	10	3	11	4	12	4
13	2	14	3	15	1	16	1	17	3	18	4
19	4	20	1	21	4	22	4	23	1	24	1
25	3	26	4	27	3	28	3	29	2	30	2
31	1	32	1	33	2	34	2	35	3	36	2
37	4	38	3	39	1	40	1	41	3	42	2
43	2	44	4	45	3	46	3	47	2	48	1
49	2	50	1	51	2	52	2	53	3	54	1
55	4	56	4	57	4	58	4	59	1	60	3
61	3	62	2	63	2	64	2	65	1	66	2
67	1	68	4	69	2	70	2	71	4	72	2
73	4	74	2	75	4	76	4	77	1	78	1
79	4	80	3	81	1	82	1	83	1	84	2
85	4	86	1	87	4	88	4	89	2	90	1
91	1	92	3	93	1	94	1	95	3	96	1
97	2	98	3	99	2	100	2	101	1	102	1
103	2	104	3	105	1	106	1	107	3	108	4
109	2	110	2	111	3	112	3	113	2	114	2
115	4	116	3	117	3	118	3	119	1	120	2
121	2	122	4	123	2	124	2	125	1	126	4
127	1	128	1	129	3	130	3	131	4	132	2
133	2	134	1	135	2	136	2	137	2	138	1
139	3	140	3	141	1	142	1	143	2	144	4
145	3	146	4	147	3	148	3	149	3	150	1
151	2	152	2	153	2	154	2	155	3	156	1
157	4	158	1	159	2	160	2	161	3	162	2
163	2	164	4	165	2	166	2	167	2	168	2
169	1	170	2	171	3	172	3	173	1	174	4
175	4	176	1	177	2	178	2	179	1	180	2
181	2	182	4	183	2	184	2	185	3	186	3
187	2	188	3	189	2	190	2	191	4	192	2
193	2	194	2	195	3	196	3	197	1	198	2
199	3	200	1	201	2	202	2	203	1	204	2



4	210	2	209	2	208	2	207	1	206	4	205
2	216	2	215	2	214	3	213	1	212	2	211
4	222	2	221	2	220	4	219	4	218	1	217
2	228	1	227	2	226	4	225	2	224	4	223
2	234	2	233	3	232	2	231	3	230	4	229
3	240	1	239	2	238	3	237	3	236	2	235
3	246	2	245	4	244	4	243	2	242	3	241
4	252	3	251	4	250	4	249	3	248	2	247
1	258	4	257	4	256	4	255	1	254	2	253
4	264	2	263	4	262	4	261	1	260	2	259
4	270	4	269	3	268	2	267	3	266	2	265
4	276	2	275	1	274	4	273	3	272	3	271
4	282	1	281		280	3	279	4	278	1	277
2	288	2	287	4	286	1	285	3	284	2	283
3	294	3	293	3	292	2	291	2	290	4	289
4	300	4	299	2	298	2	297	3	296	4	295
3	306	3	305	2	304	2	303	2	302	2	301
1	312	4	311	4	310	4	309	3	308	3	307
3	318	2	317	4	316	2	315	3	314	2	313
1	324	2	323	3	322	2	321	2	320	4	319
	330	1	329	2	328	4	327	2	326	4	325
2	336	2	335	2	334	3	333	2	332		331
1	342	3	341	4	340	1	339	3	338	3	337
4	348	2	347	3	346	1	345	3	344	4	343
2	354	3	353	2	352	2	351	1	350	2	349
2	360	1	359	3	358	3	357	4	356	3	355
2	366	1	365	2	364	4	363	3	362	1	361
	372	2	371	1	370	1	369	3	368	3	367
2	378	3	377	4	376	4	375	2	374	2	373
1	384	2	383	3	382	3	381	1	380	2	379
2	390	2	389	2	388	4	387	1	386	3	385
2	396	4	395	4	394	2	393	4	392	3	391
2	402	2	401	2	400	2	399	4	398	4	397
2	408	1	407	1	406	2	405	1	404	3	403
2	414	3	413	1	412	3	411	2	410	1	409
1	420	4	419	2	418	1	417	1	416	2	415
1	426	2	425	4	424	3	423	4	422	2	421
1	432	1	431	3	430	2	429	2	428	2	427
4	438	2	437	1	436	2	435	2	434	1	433



2	444	4	443	2	442	4	441	2	440	1	439
1	450	3	449	3	448	1	447	1	446	1	445
2	456	2	455	1	454	2	453	3	452	4	451
4	462	1	461	2	460	1	459	2	458	1	457
4	468	1	467	1	466	2	465	2	464	4	463
1	474	1	473	2	472	2	471	3	470	4	469
3	480	1	479	3	478	1	477	3	476	2	475
4	486	4	485	1	484	4	483	2	482	1	481
3	492	1	491	1	490	1	488	2	488	1	487
2	498	2	497	4	496	2	495	2	494	3	493
2	504	3	503	3	502	3	501	3	500	4	499
	510	4	509	3	508	1	507		506	4	505
2	516	4	515	2	514	3	513	2	512	2	511
2	522	4	521	4	520	1	519	1	518	4	517
3	528		527	2	526	2	525	3	524	2	523
2	534	1	533	3	532	1	531	2	530	2	529
1	540	2	539	2	538	4	537	1	536	1	535
1	546	3	545	3	544	2	543	4	542	1	541
2	552	2	551	4	550	3	549	4	548	4	547
4	558	2	557	3	556	1	555	2	554	3	553
3	564	2	563	2	562	3	561	4	560	3	559
4	570	4	569	3	568	4	567	3	566	4	565
3	576	2	575		574	3	573	3	572	2	571
2	582	4	581	3	580	3	579	1	578	3	577
2	588	4	587	3	586	3	585	4	584	2	583
1	594	4	593	2	592	2	591	4	590	3	589
4	600	2	599	2	598	2	597	4	596	1	595