



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**معادله درجه دوم**

فرم کلی معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است که اعداد  $a, b, c$  ضرایب معادله نامیده می‌شوند.

**تست)** معادله درجه دوم  $mx^2 - 8x - m = 5$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، ریشه‌ی مضاعف دارد؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) هیچ مقدار (۴) ۳

$$\Delta' = 0 \quad \Delta' = b'^2 - ac$$

$$16 - m(-m - 5) = 0 \Rightarrow m^2 + 5m + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta < 0$$

**تست)** به ازای کدام مقادیر  $m$  خط با معادله  $y = 2x - 4$  بر منحنی  $y = (m + 3)x^2 + mx$

مماس است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

(۱) ۸, -۲ (۲) ۲, -۲

(۳) ۲, ۲۲ (۴) ۴, ۱۱

معادله‌ی تلاقی این خط و منحنی را تشکیل می‌دهیم.

$$(m + 3)x^2 + mx = 2x - 4$$

$$\Rightarrow (m + 3)x^2 + (m - 2)x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 16(m + 3) = 0 \Rightarrow m^2 - 4x + 4 - 16m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 20m - 44 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 22)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 22 \\ m = -2 \end{cases}$$

**نکته:** اگر دو منحنی و یا یک خط منحنی بخواهند بر یکدیگر مماس

باشند باید معادله‌ی حاصل از برخورد آنها ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 3x = 1$  باشند به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب معادله‌ی  $8x^2 + x - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \beta^2\alpha\}$  است؟

۵ (۱)                      ۶ (۲)                      ۷ (۳)                      ۹ (۴)

پاسخ:

$$S = \alpha + \beta = \frac{3}{2}$$

$$P = \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

چون  $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $8x^2 + x - 1 = 0$  هستند پس داریم:

$$S = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{-k}{8} \Rightarrow \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-k}{8}$$

$$\Rightarrow k = \frac{8 \times 3}{4} = 2 \times 3 = 6$$

**تست)** در معادله‌ی  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف دیگر ۵ واحد بیشتر است  $m$  کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱۰ (۱)                      ۱۲ (۲)                      ۱۴ (۳)                      ۱۵ (۴)

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta + 5$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 8 \\ P = \alpha\beta = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\beta + 5 + \beta = 8 = \frac{3}{2}\beta = 3 \Rightarrow \beta = 2, \alpha = \frac{1}{2}(2) + 5 = 6 \\ \alpha\beta = m \Rightarrow 6(2) = m \Rightarrow m = 12 \end{cases}$$

**نکته:** اگر دو منمنی و یا یک فط منمنی بخواهند بر یکدیگر مماس باشند

باید معادله‌ی حاصل از برخورد آنها ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 3x = 1$  باشند به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب معادله‌ی  $8x^2 + x - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \beta^2\alpha\}$  است؟

۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۹ (۴)

$\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  هستند بنابراین:

$$S = \alpha + \beta = \frac{3}{2}$$

$$P = \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

چون  $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $8x^2 + x - 1 = 0$  هستند پس داریم:

$$S = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{-k}{8} \Rightarrow \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-k}{8}$$

$$\Rightarrow k = \frac{8 \times 3}{4} = 2 \times 3 = 6$$

معادلات درجه ۲

**تست)** در معادله‌ی  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف دیگر ۵ واحد بیشتر است  $m$  کدام است؟

(سراسری ۹۱)

۱۰ (۱)      ۱۲ (۲)      ۱۴ (۳)      ۱۵ (۴)

پاسخ:

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta + 5$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 8 \\ P = \alpha\beta = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\beta + 5 + \beta = 8 = \frac{3}{2}\beta = 3 \Rightarrow \beta = 2, \alpha = \frac{1}{2}(2) + 5 = 6 \\ \alpha\beta = m \Rightarrow 6(2) = m \Rightarrow m = 12 \end{cases}$$

**نکته:** برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش معلوم است اول مجموع ( $S$ ) و حاصل-ضرب ( $P$ ) ریشه‌ها را می‌یابیم و سپس معادله را با استفاده از رابطه‌ی  $x^2 - Sx + P = 0$  می‌نویسیم.

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تمرین** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 5 = 0$  باشد.

**نکته:** برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله  $ax^2 - bx + c = 0$  باشد کافی است به جای  $x$ ،  $\sqrt{x}$  قرار دهیم.

$$\begin{aligned}x^2 - 3x - 5 = 0 &\Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) - 5 = 0 \\ \Rightarrow x - 5 = 3\sqrt{x} &\Rightarrow (x - 5)^2 = (3\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 19x + 25 = 0\end{aligned}$$

**تمرین**  $m$  را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های معادله  $mx^2 - 4x + 1 = 0$  سه برابر ریشه دیگر باشد. ( $m \neq 0$ )

روش اول:

$$\begin{aligned}\alpha &= 3\beta \\ \alpha + \beta &= \frac{-b}{a} = \frac{4}{m} \Rightarrow 3\beta + \beta = \frac{4}{m} \Rightarrow \beta = \frac{1}{m} \\ m\left(\frac{1}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{m}\right) + 1 &= 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{4}{m} + 1 = 0 \\ \Rightarrow m - 3 &= 0 \Rightarrow m = 3\end{aligned}$$

روش دوم:

**نکته:** اگر در معادله درجه دوم یک ریشه  $k$  برابر ریشه دیگر باشد داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

حل:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{(-4)^2}{m \times 1} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{m} \Rightarrow m = 3$$

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تست)** به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله  $(m+1)x^2 + m(m^2-9)x - 2 = 0$  دو ریشه قرینه حقیقی دارد؟

(۲)  $4, 1$

(۱)  $3, 0$

(۴)  $0, 4$

(۳)  $\pm 3$

**نکته:** برای اینکه معادله دارای دو ریشه حقیقی و قرینه هم باشد باید  $a, b, c = 0$  مختلف‌العلامه باشد.

حل:

$$b = 0 \Rightarrow m(m^2 - 9) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 3 \end{cases}$$

$$c < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow a = 1 > 0 \text{ ق ق} \\ m = 3 \Rightarrow a = 4 > 0 \text{ ق ق} \\ m = -3 \Rightarrow a = -2 < 0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - x + 8 = 0$  باشند حاصل  $\frac{\alpha^2 - \alpha + 5}{\beta^2 - \beta + 12}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $-\frac{3}{4}$

(۳)  $\frac{4}{3}$

(۴)  $-\frac{4}{3}$

می‌دانیم  $x^2 - x + 8 = 0$  پس داریم:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha = -8 \\ \beta^2 - \beta = -8 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^2 - \alpha + 5}{\beta^2 - \beta + 12} = \frac{-8 + 5}{-8 + 12} = -\frac{3}{4}$$

**تست)** اگر معادله  $5x^2 - ax + b = 0$  ریشهی مضاعف  $x = 2$  داشته باشد  $a - 2b$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲۰ (۳) -۲۰ (۴) -۶۰

چون  $x = 2$  ریشهی مضاعف است پس معادله به صورت مضربی از  $(x - 2)^2$  است و چون ضریب  $x^2$  برابر با ۵ است پس معادله به صورت  $5(x - 2)^2 = 0$  است داریم:

$$5(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 20 \end{cases}$$

$$a - 2b = 20 - 2(20) = 20 - 40 = -20$$

معادلات درجه ۲

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشههای معادلهی درجهی دوم  $x^2 - 4mx + 4 = 0$  باشند و  $\alpha\beta^2 + 4 = 0$ ،  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $-\frac{3}{5}$

$$\alpha\beta^2 + 4 = 0 \Rightarrow \alpha\beta \cdot \beta + 4 = 0 \Rightarrow p \cdot \beta - 4 = 0 \Rightarrow 4\beta + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$\beta$  ریشهی معادله است پس در معادله صدق می‌کند

$$(-1)^2 - 3m(-1) + 4 = 0 \Rightarrow 3m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشههای معادلهی  $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$  باشند مقدار  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

$$\left. \begin{aligned} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \sqrt{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{3}{1} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 2(-3)} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تست)** به ازای کدام مقدار  $m$  مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد. (تجربی ۹۳)

$$-1, \frac{9}{5} \quad (۱۴) \quad -\frac{9}{5}, 1 \quad (۳) \quad ۱ \quad (۲) \quad -\frac{9}{5} \quad (۱)$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

اگر  $x_1, x_2$  ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = 6 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2} = 6$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

اکنون چون ریشه‌های حقیقی معادله مد نظر است باید  $m$  را امتحان نمود که  $\Delta$  معادله منفی نشود

$$m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 = -4 < 0 \quad \text{غ ق ق}$$

$$m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \frac{36}{25} - 4\left(-\frac{9}{5}\right)(5) > 0 \quad \text{ق ق}$$

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $4x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  کدام است؟

(فارج ریاضی ۸۵)

$$۲ \quad (۱) \quad ۳ \quad (۲) \quad ۴ \quad (۳) \quad ۶ \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{s + 2\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{3 + 2 \times \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$s = \frac{12}{4} = 3$$

**نکته:** می‌دانیم  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{s + 2\sqrt{p}}$  می‌باشد



تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تست)** اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x = 1$  باشند به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه‌ی جواب‌های معادله  $8x^2 + kx - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است. (ریاضی خارج ۸۵)

۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۹ (۴)

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2} = S$$

$$\alpha \cdot \beta = -\frac{1}{2}$$

$$S' = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$P' = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

می‌دانیم معادله‌ی درجه‌ی دومی که مجموع ریشه‌های آن  $S$  و حاصلضرب ریشه‌های آن  $P$  باشد به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است.

پس داریم:

$$x^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)x + \left(-\frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow k = 6$$

**تست)** اگر عبارت  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$  به ازای هر مقدار  $x$  منفی باشد،  $a$  به کدام مجموعه تعلق دارد؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱)  $\{a : |1 < a < 5\}$       ۲)  $\{a : a < 1\}$       ۳)  $\emptyset$       ۴)  $R$

می‌دانیم تابع درجه‌ی دوم  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) وقتی همواره منفی است که  $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$  باشد.

$$(a-1) < 0 \Rightarrow a < 1 \quad I$$

$$\Delta = (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-1-4) < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5 \quad II$$

$$I \cap II = \emptyset$$

تهیه و تنظیم: عباس اسدی امیرآبادی

**تست** به ازای کدام مقدار  $m$  تابع  $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$  بر نیمساز نامیهی اول  
محورهای مختصات مماس است؟

(۱)  $-۴$  (۲)  $۴, -۱۲$  (۳)  $-۴, ۱۲$  (۴)  $۱۲$

نیمساز نامیهی اول و سوم یعنی خط  $y = x$  و نیمساز نامیهی اول یعنی خط  $y = x$  با شرط  $x \geq 0$   
مماس شدن یعنی معادلهی حاصل از دو تابع جواب مضاعف داشته باشد.

$$y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + (m + 1 - 1)x + m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m + 6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 12)(m + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

موفق و پیروز باشید

عباس اسدی امیرآبادی

*Abasasadi220@gmail.com*