



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...و

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

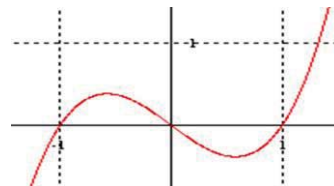
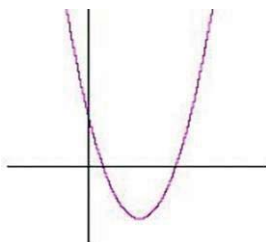
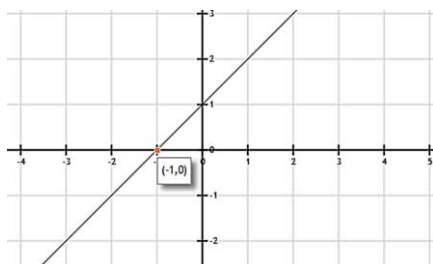


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

معادلات

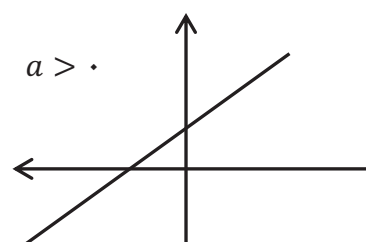
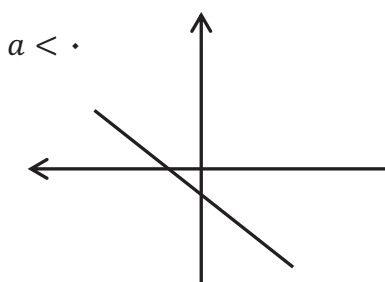
تابع $y = f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر به جای y عدد صفر را قرار دهیم به معادله $f(x) = 0$ تبدیل می شود. یعنی باید x هایی را پیدا کنیم که رابطه $f(x) = 0$ برقرار شود. به این x ها ریشه های معادله $f(x) = 0$ گویند که طول نقاط برخورد تابع با محور x هاست.

مثال: تعداد ریشه های توابع زیر؟



معادله درجه اول:

مدل کلی معادله درجه اول بصورت $ax + b = 0$ است. نمودار این معادله به صورت زیر می باشد:



بحث در مورد ریشه ی معادله ی درجه اول:

حالت اول: اگر $a \neq 0$:

$$2x + 3 = 0 \quad 5x - \sqrt{2} = 0$$

مثال:

حالت دوم: اگر $a = 0$: در اینجا باز هم دو حالت مختلف پیش می آید:

الف: اگر $b = 0$:

ب: اگر $b \neq 0$:

بنابراین به طور خلاصه می توان گفت:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \\ a = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

تست: در معادله $(m-1)x = m^2 - 1$ مقدار m چقدر باشد تا معادله مبهم شود؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ± 1

تست: در معادله $(m^2 - 4)x = m + 2$ مقدار m چقدر باشد تا معادله غیر ممکن شود؟

(۲) ۲ (۲) -۲ (۳) ± 2 (۴) هیچکدام

معادله درجه دوم:

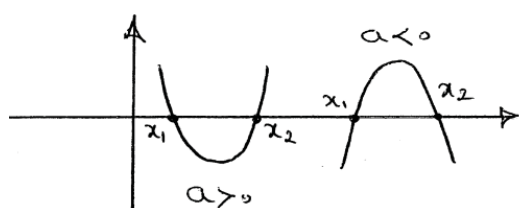
یک معادله درجه دوم در حالت کلی بصورت $ax^2 + bx + c = 0$ نوشته می شود که در آن $a \neq 0$. در این معادله b یا c یا هر دوی آن ها می توانند صفر باشند که در هر کدام از این حالت ها، معادله را یک معادله درجه دوم ناقص می گویند.

✓ روش کلی برای حل معادله ی درجه دوم روش Δ می باشد: $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

بحث در مورد تعداد ریشه های معادله درجه دوم:

حالت اول: اگر $\Delta > 0$: دو ریشه حقیقی متمایز خواهیم داشت:

در نقطه متفاوت محور مختصات قطع شده است. $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.



دو ریشه دارند که با هم تفاوت دارند

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

نکته مهم:

یادآوری: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$. آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر می شود یعنی:

$$AB = 0 \rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0 \quad (x+2)(x-3) = 0$$

$$1) 2x^2 + x - 1 = 0$$

مثال:

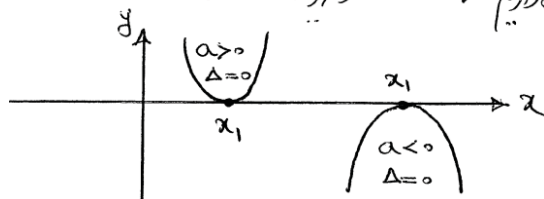
$$2) 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

تذکر: منظور از دو ریشه ی حقیقی متمایز آن است که دو ریشه ی متفاوت داریم.

نکته: اگر علامت a و c مخالف هم باشند حتماً $\Delta > 0$ خواهد بود زیرا:

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$: ریشه ی مضاعف (تکراری) خواهیم داشت:

همین یک ریشه است. $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه مساوی داریم. $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه مضاعف است.



$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

دو نوع کلی داریم: (۱) اگر $\Delta = 0$ و $a > 0$ → کمترین مقدار یکی برابر صفر است و عبارت همواره غیر منفی است
 $ax^2 + bx + c \geq 0$ صفر است یعنی: $\min = 0$

(۲) اگر $\Delta = 0$ و $a < 0$ → بیشترین مقدار یکی برابر صفر است و عبارت همواره غیر مثبت است
 $ax^2 + bx + c \leq 0$ صفر است یعنی: $\max = 0$

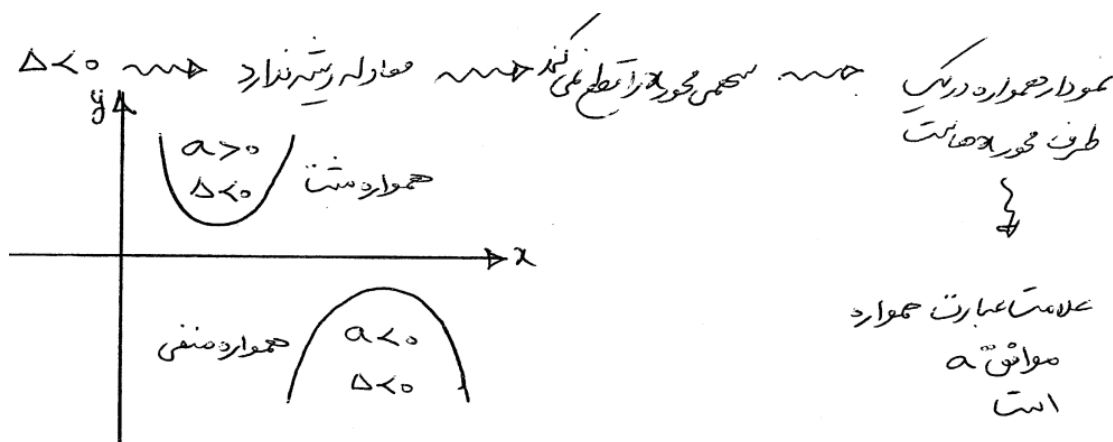
$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

نکته مهم:

$$۱) x^2 + 2x + 1 = 0$$

مثال:

$$۲) 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$: ریشه‌ی حقیقی نداریم:

$$ax^2 + bx + c \rightarrow$$

نکته مهم:

$$۱) x^2 + x + 4 = 0$$

مثال:

$$۲) x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$۱) x^2 + 4x + 3 = 0$$

تمرین: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۲) 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$۳) ۴x^2 + ۴x + ۱ = ۰$$

$$۴) x^2 + ۲x + ۲ = ۰$$

$$۵) ۳x^2 + x + ۴ = ۰$$

$$۶) ۹x^2 + ۶x + ۱ = ۰$$

$$۷) ۲x^2 - x - ۵ = ۰$$

$$۸) ۳x - x^2 = -۷$$

$$۹) \frac{x^2}{۵} - \frac{x}{۳} - \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$۱۰) x^2 + (\sqrt{۵} + ۱)x - (۲ + \sqrt{۵}) = ۰$$

$$۱۱) t^2 + \sqrt{۲}t - ۴ = ۰$$

مثال: در هر یک از قسمت های زیر، ابتدا مقدار m را طوری به دست آورید که معادله ی داده شده ریشه ی مضاعف داشته باشد، سپس ریشه ی مضاعف را به دست آورید.

$$۱) ۲x^2 + (m + ۱)x + ۸ = ۰$$

$$۲) (۲m + ۱)x^2 + ۶x + ۱ = ۰$$

حالات خاص معادله درجه دوم:

۱) اگر $c = ۰$ برابر صفر باشد: فاکتور گیری کنید.

$$ax^2 + bx = ۰$$

$$۵x^2 + ۲x = ۰$$

$$۲x^2 + \sqrt{۳}x = ۰$$

مثال:

۲) اگر $b = ۰$ باشد. شبیه معادله درجه یک رفتار کنید.

$$ax^2 + c = ۰$$

یادآوری: اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2 = a$ عبارتند

از: $x = \sqrt{a}$ و $x = -\sqrt{a}$

مثال: $x^2 = ۲۵$

حالت کلی ریشه گیری:

$$u^2 = a \rightarrow \begin{cases} \text{if } a \geq 0 \Rightarrow u = \pm\sqrt{a} \\ \text{if } a < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

مثال:

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = -9$$

$$x^2 = 5$$

$$x^2 = -5$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 + 6 = 0$$

تذکر: در حالتی که $b = 0$ باشد فقط وقتی جواب حقیقی داریم که علامت a و c مخالف هم ($ac < 0$) باشند.

$$4) 5x^2 - 20 = 0$$

$$5) t^2 + 7 = 0$$

$$6) (x - 2)^2 - 16 = 0$$

$$7) (3x + 2)^2 - 36 = 0$$

$$8) 16(2x - 1)^2 - 25 = 0$$

$$9) 3 - 3k = 3k(2k + 1)$$

(۳) اگر $a + b + c = 0$ آنگاه $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$

$$1) 2x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$2) 7x^2 - 8x + 1 = 0$$

مثال:

$$3) (\sin^2 \alpha)x^2 - x + \cos^2 \alpha = 0$$

(۴) اگر $b = a + c$ آنگاه $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$

$$1) 81x^2 + 100x + 19 = 0$$

مثال:

$$2) (2 + \sqrt{3})x^2 + 4x + 2 - \sqrt{3} = 0$$

تست: یکی از ریشه های معادله ی $ax^2 + (a + b + c)x + b + c = 0$ کدام است؟

$$-\frac{c}{a} \quad (4)$$

$$\frac{c}{a} \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

(۵) تجزیه به عبارات درجه اول

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

حالت اول: ضرب x^2 یک باشد.

$$1) x^2 + 3x + 2 = 0$$

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید و ریشه های آن ها را به دست آورید.

$$2) x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$3) x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$4) x^2 - 4x + 3 = 0$$

۵) $x^2 + 5x + 6 = 0$

۶) $x^2 - 15x + 36 = 0$

۷) $x^2 + 15x + 36 = 0$

۸) $x^2 - 3x - 4 = 0$

۹) $x^2 + 15x + 56 = 0$

۱۰) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = x^2 + x + 3$

۱) $4x - 8x^2 = 0$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

۲) $x - x^2 = 0$

۳) $x^2 - 4 = 0$

۴) $x^2 - 1 = 0$

۵) $x^2 - 2 = 0$

۶) $x^2 - 6x + 8 = 0$

۷) $x^2 - x - 2 = 0$

۸) $x^2 - 6x + 5 = 0$

۹) $x^2 + x - 6 = 0$

۱۰) $x^2 - 18x + 72 = 0$

۱۱) $x^2 - 15x + 50 = 0$

حالت دوم: ضریب x^2 یک نباشد.

۱) $-x^2 - 7x + 8 = 0$

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

۲) $4x^2 - 8x - 12 = 0$

نکته: در صورتی که نتوانیم از ضریب x^2 فاکتور بگیریم از روش زیر که به روش A مشهور است استفاده می کنیم.

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید و ریشه های آن ها را به دست آورید.

۱) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

روش کنکوری: ابتدا ضریب x^2 یعنی a را در عدد ثابت ضرب می کنیم و آن را به صورت حالت اول (ضریب یک) حل می کنیم. با این تفاوت که جمله ی مشترک ax است.

$$۲) ۵x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$۳) 3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$۴) -2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$۵) 2x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$۶) 7x^2 - 13x - 2 = 0$$

$$۷) -x^2 + x + 12 = 0$$

$$۸) 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$۹) x^3 - 4x = 0$$

$$۶) -3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$۷) 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$۸) 3x^2 - x - 1 = 0$$

$$۹) 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$۱۱) x^2 - 16x + 39 = 0$$

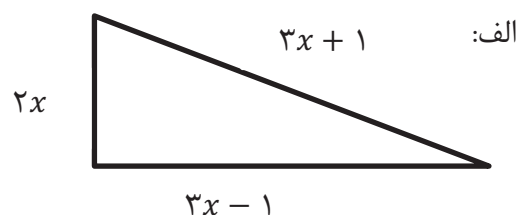
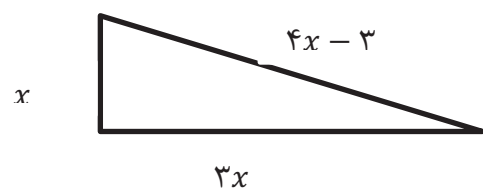
$$۱۲) 4x^2 + 4x = 15$$

$$۱۳) (x+1)^3 - x^3 = 1$$

$$۱۴) x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$$

$$۱۴) 2(x+2)^2 + 2x^2 = (2x-3)^2 + x$$

مثال: در هر یک از شکل های زیر مقدار x را به دست آورید.

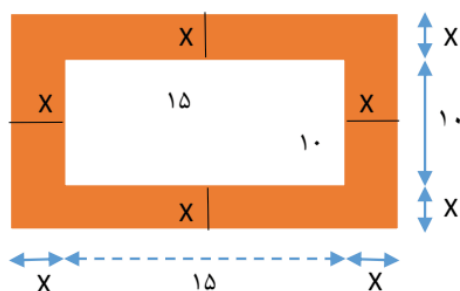


مثال: مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی ۲۶۵ است. این دو عدد را پیدا کنید.

مثال: مجموع مربع عددی طبیعی و سه برابر همان عدد برابر ۴۰ است. آن عدد را پیدا کنید.

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را پیدا کنید.

مثال: اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصلضرب سن آن ها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

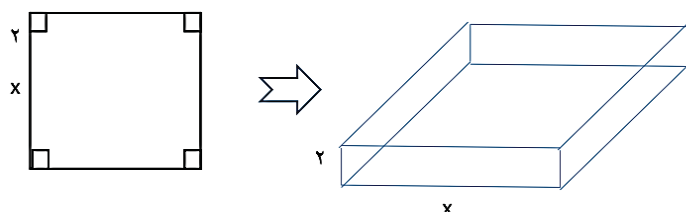


مثال: یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌مترمربع، قرار دارد، اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

مثال: در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید.

تمرین: در یک مسابقه ی دوره ای بین تعدادی شطرنج باز، ۳۶ بازی انجام شده است. (در مسابقات دوره ای بین هر دو نفر فقط یک بازی انجام می شود). تعداد شطرنج بازان این دوره از مسابقات را به دست آورید.

مثال: با یک دستگاه برش، یک صفحه ی مقوایی به شکل مربع را برش می زنیم. سپس چهار مربع کوچک در گوشه های آن را جدا می کنیم. بعد با تا زدن لبه ها ، یک جعبه می سازیم. اگر مربع های جدا شده به ضلع ۲ سانتی متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



تست های تکمیلی

تست: به ازای کدام مقادیر m ، معادله ی درجه ی دوم $x^2 - mx + m = 0$ فاقد ریشه ی حقیقی است؟

- (۱) $m < 4$ (۲) $m < 0$ (۳) $0 < m < 4$ (۴) $\emptyset$

تست: به ازای کدام مقادیر m ، معادله ی درجه دوم $x^2 - m - x = 0$ ریشه ی مضاعف دارد؟

- (۱) هیچ مقدار (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

تست: به ازای کدام مقادیر m ، معادله ی درجه ی دوم $x^2 - mx + m - 1 = 0$ دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز است؟

- (۱) $m > 2$ (۲) R (۳) $\emptyset$ (۴) $m \neq 2$

تست: مجموع ریشه های معادله ی $(1 - \sqrt{2})^2 = (x - 1)^2$ برابر است با؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

تست: به ازای کدام مقدار m ، معادله ی $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ دارای ریشه ی مضاعف منفی است؟

- (۱) $3 \pm \sqrt{12}$ (۲) $3 + \sqrt{12}$ (۳) $3 + \sqrt{3}$ (۴) مقداری برای m وجود ندارد

تست: حاصلضرب یک عدد مثبت در خودش از ۳ برابر آن عدد ۴ واحد بزرگ تر است. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۳

تست: دو برابر عدد مثبتی، از ثلث مربع آن عدد، ۹ واحد کمتر است. این عدد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

تست: طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $1, 2x + 1, 2x - 1, x$ است ($x > 1$)، طول ضلع متوسط کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

تست: طول و عرض مستطیلی مضارب طبیعی و متوالی عدد ۶ هستند. اگر عدد مساحت این مستطیل ۲ برابر عدد محیط آن باشد، طول این مستطیل کدام است؟

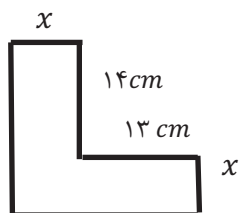
۳۰ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۸ (۱)

تست: اگر مساحت شکل زیر ۱۶۰ سانتی متر مربع باشد، x چند سانتی متر است؟



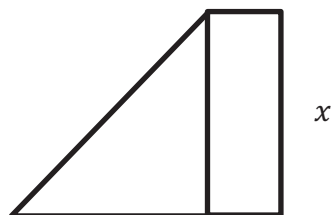
۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

تست: اگر مساحت شکل زیر ۱۲۰۰ سانتی متر مربع باشد، x چند سانتی متر است؟



۶۰ (۴)

۴۸ (۳)

۵۶ (۲)

۳۲ (۱)

تست: اگر x' ، x'' ریشه های معادله ی $3x^2 + x - 1 = 0$ باشند و داشته باشیم $x' > x''$ ، 1 cm x

 $x' + x'' = 1$ (۴) $1 > x' > x''$ (۳) $1 < x'' < x'$ (۲) $x'' < 1 < x'$ (۱)

تست: مجموع مربعات ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

 $4\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

تست: معادله ی درجه دوم $\frac{m}{4}x^2 - 4x + 8 = 0$ به ازای مقادیر $m \in (m., +\infty)$ ریشه ی حقیقی ندارد. حداقل مقدار $m.$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست: معادله ی درجه دوم $x(2x - 5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه ی مضاعف دارد. مقدار ریشه ی مضاعف کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

تست: در معادله ی $ax^2 - 2x + 3 = 0$ ، مقدار a کدام باشد تا معادله دو ریشه ی حقیقی برابر داشته باشد؟

- (۱) ۳ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) -۳ (۴) $\frac{1}{3}$

تست: فاصله ی هر طرف قالی از کنار یک دیوار مستطیل شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴ ، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

تست: شرکت کنندگان در یک جلسه همه با هم یک بار دست می دهند. اگر تعداد دست دادن ها ۶۶ بار بوده ، چند نفر در این جلسه شرکت کرده اند؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

تست: یک جعبه ی رو باز را به وسیله ی قطعه ای مقوا به شکل مربع می سازیم. برای این کار از هر گوشه ی آن مربعی به ضلع ۴ سانتی متر می بریم و سپس لبه ها را تا می زنیم. اگر حجم پدید آمده ۱۰۰ سانتی متر مکعب باشد، مساحت مقوای مربع شکل اولیه چند سانتی متر مربع بوده است؟

- (۱) ۹۹ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۴۴ (۴) ۱۶۹

مجموع، حاصلضرب و تفاضل ریشه های معادله درجه دوم:

اگر α, β ریشه های معادله باشد، آنگاه بدون حل معادله می توان مجموع، حاصلضرب و تفاضل ریشه ها را بدست آورد.

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{مجموع دو ریشه :}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{ضرب دو ریشه :}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{s^2 - 4p} \quad \text{تفاضل دو ریشه :}$$

$$۱) \quad 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{مثال:}$$

$$۲) \quad x^2 - 5x - 9 = 0$$

مثال: اگر بدانیم معادله ی $2x^2 - 6x + m = 0$ دارای دو ریشه است مقدار m را به گونه ای بیابید که حاصلضرب ریشه های معادله برابر ۲ باشد.

مثال: k را به گونه ای بیابید که در معادله ی $kx^2 - x + 2 = 0$ حاصل جمع ریشه ها برابر $\frac{5}{3}$ باشد.

مثال: اگر ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2 + bx + 2 = 0$ دو عدد صحیح متوالی باشند، b را بیابید.

تست: اگر ریشه های معادله ی $x^2 + px + q = 0$ دو عدد صحیح متوالی باشند، همواره داریم:

$$(۱) \quad p^2 = 4q \quad (۲) \quad p^2 + 4q = 1 \quad (۳) \quad p^2 = -4q \quad (۴) \quad p^2 - 4q = 1$$

چند نکته در مورد معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$:

(۱) اگر $a, b \neq 0$, $c = 0$ یکی از ریشه های معادله صفر است.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

(۲) اگر یکی از ریشه های معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ صفر باشد، قطعاً $c = 0$ و ریشه ی دیگر $-\frac{b}{a}$ است.

(۳) اگر $b = c = 0$ هر دو ریشه معادله صفر است. در واقع ریشه مضاعف داریم.

$$ax^2 = 0$$

$$5x^2 = 0$$

تست: اگر هر دو ریشه معادله $x^2 + (\sqrt{b+3} + a)x + a^2 - 1 = 0$ صفر باشند آنگاه:

(۴) $a = \pm 1$ (۲) $a = \pm 1, b = \pm 1$ (۳) $a = 1, b = 2$ (۴) $a = -1, b = -2$

(۵) شرط اینکه یکی از ریشه های معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به سمت بی نهایت میل کند، آن است که $a \rightarrow 0$ میل کند. اگر $a, b \rightarrow 0$ و $c \neq 0$ ، هر دو ریشه ی معادله به سمت بی نهایت میل می کنند.

تست: اگر یکی از ریشه های معادله ی درجه دوم $(m+2)x^2 - x + 2m = 0$ به سمت بی نهایت میل کند، ریشه ی دیگر معادله کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

تست: به ازای کدام مقدار m فقط یکی از ریشه های معادله ی $(m^3 - m)x^2 + (m^2 - m)x + 4 = 0$ به سمت ∞ میل کند؟

(۲) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱ و -۱ و ۰

(۶) اگر $b = 0$ ، $ac \leq 0$ ($\Delta \geq 0$) معادله دارای دو ریشه حقیقی قرینه است. $2x^2 - 8 = 0$

تست: m چند باشد تا معادله ی $9x^2 + (m^2 - 81)x + m - 5 = 0$ دو ریشه ی قرینه داشته باشد؟

(۱) ± 3 (۲) ± 9 (۳) ۹ (۴) -۹

تست: به ازای چند مقدار a ریشه های حقیقی معادله ی $x^2 + a^2x + 1 = a(x+2)$ قرینه ی یکدیگرند؟

(۱) یک مقدار (۲) دو مقدار (۳) بی شمار (۴) هیچ مقداری

تست: به ازای چه مقداری از m معادله ی $mx^2 + (m^2 - 4)x + m - 3 = 0$ دو ریشه ی قرینه دارد؟

(۱) ± 2 (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $\emptyset$

(۷) اگر $a = c$, $\Delta \geq 0$ معادله دارای دو ریشه حقیقی معکوس هم است: $x^2 - 4x + 1 = 0$

تست: ریشه های کدام معادله معکوس یکدیگرند؟

$$(۱) \quad 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$(۳) \quad 2x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$(۲) \quad \sqrt{2}x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 2 = 0$$

$$(۴) \quad \frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2 + 10x + \sqrt{2} + 1 = 0$$

تست: به ازای کدام مقدار m ، ریشه های حقیقی معادله ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

$$(۱) \quad -2 \quad (۲) \quad -1 \quad (۳) \quad 1 \quad (۴) \quad 2$$

تست: اگر معادله $ax^2 + 2bx + c = 0$ دارای دو ریشه عکس یکدیگر باشد، کدام گزینه درست است؟

$$(۱) \quad a = -c \quad (۲) \quad b = c \quad (۳) \quad |b| > |a| \quad (۴) \quad |b| < |a|$$

(۸) اگر $a = -c$ معادله دارای دو ریشه حقیقی است که عکس و قرینه یکدیگرند:

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

مثال: مقدار a را طوری بیابید که معادله ی $x^2 - (a-1)x + a - 7 = 0$ دارای دو جواب قرینه و معکوس هم باشند.

یادآوری: اگر a, c هم علامت نباشند ($\frac{c}{a} < 0$ یا $ac < 0$)، معادله درجه دوم همواره دو ریشه حقیقی و مختلف

العلامت دارد. زیرا در این حالت Δ همواره مثبت است.

$$\text{مثال:} \quad 3x^2 + 5x - 1 = 0$$

مثال: k را چنان بیابید تا معادله ی درجه دوم $-3x^2 + 4x + (k^2 - 1) = 0$ همواره دو ریشه ی مختلف العلامت داشته باشد.

تست: حدود m را چنان بیابید تا معادله ی درجه دوم $(2\sqrt{2} + 1)x^2 - 4mx + (2m - 6) = 0$ دو ریشه ی مختلف
العلامت داشته باشد.

$$(1) \quad m > 3 \quad (2) \quad m < 3 \quad (3) \quad m > 6 \quad (4) \quad m < 6$$

نکته: در حالتی که c, a هم علامت باشند در مورد تعداد جواب های معادله نمی توان اظهار نظر کرد و حتما باید Δ را به
دست آورد و با توجه به علامت Δ تعداد جواب ها را بیان کرد.

مثال: $3x^2 - 5x + 1 = 0$

$$-7x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

مثال: در معادله ی درجه دوم $mx^2 - 5x + m^2 = 6$ مقدار m را طوری تعیین کنید که
الف) دو ریشه معکوس یکدیگر باشند.

ب) دو ریشه معکوس و قرینه ی یکدیگر باشند.

تست: اگر $\log^a$ و $\log^b$ ریشه های معادله ی $x^2 + 2mx - 3 = 0$ باشند، مقدار $\frac{\log^{ab}}{\log^a \log^b}$ کدام است؟

$$(1) \quad -\frac{2m}{3} \quad (2) \quad \frac{2m}{2} \quad (3) \quad \frac{2}{3m} \quad (4) \quad \frac{2m}{3}$$

تست: اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه های معادله ی $x^2 + kx - 3 = 0$ باشند، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{k}{3} \quad (2) \quad -\frac{k}{4} \quad (3) \quad \frac{k}{4} \quad (4) \quad -\frac{k}{3}$$

مثال: طول مستطیلی یک متر بیشتر از ۲ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۵ متر مربع باشد، ابعاد این
مستطیل را مشخص کنید.

تست: اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ باشند، به ازای چه مقداری برای k داریم $x_1 + 2x_2 = 3$.

(۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) -۲ (۴) $\frac{1}{2}$

مثال: در معادله ی درجه دوم $x^2 - 3x + 2m = 0$ اگر α, β ریشه های معادله باشند و داشته باشیم $3\alpha + 2\beta = 7$. مقدار m را پیدا کنید.

تست: در معادله ی $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه ها ۲ واحد از ریشه ی دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

(۱) $\frac{59}{5}$ (۲) $\frac{63}{5}$ (۳) $\frac{59}{4}$ (۴) $\frac{63}{4}$

تست: در معادله ی $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه ی دیگر است. مجموع دو ریشه ی مثبت کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه های معادله ی $x^2 - 6mx + 8 = 0$ مربع ریشه ی دیگری باشد.

مثال: اگر یکی از ریشه های معادله ی $x^2 + x + m = 0$ از دو برابر معکوس دیگری ۲ واحد بیشتر باشد m را پیدا کنید.

تست: اگر x' و x'' ریشه های معادله ی درجه دوم $mx^2 - 2(m+1)x + m = 0$ باشند، m چند باشد تا داشته باشیم $x' + 2x'' = 3$.

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

مثال: اگر در معادله درجه دوم $x^2 - 8x + k = 0$ ریشه ها برابر α, β باشند و رابطه $\alpha - 2\beta = 4$ برقرار باشد، مقدار k را بدست آورید.

مثال: اگر یکی از ریشه های معادله $x^2 - mx + 27 = 0$ مجذور ریشه دیگر باشد، مقدار m را بدست آورید.

مثال: به ازای چه مقدار m یکی از ریشه های معادله $2x^2 - mx - 1 = 0$ هشت برابر قرینه ی ریشه دیگر است.

مثال: در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه ها ۲ واحد از ریشه دیگر کمتر باشد m را بدست آورید.

مثال: در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ ، یکی از ریشه ها از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است m را بدست آورید.

تشکیل معادله درجه دوم:

اگر α, β ریشه های معادله درجه دوم باشند، معادله درجه دوم حاصل بصورت زیر است: $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

مثال: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن دو مقدار زیر باشد:

۱) -5 و -2

۲) -2 و $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$

۳) $\frac{m}{2}$ و $2m$

۴) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ و $m - \sqrt{m^2 - 3}$

نکته: اگر مجموع و حاصلضرب دو عدد معلوم باشند (p و s معلوم باشند)، می توان آن دو عدد را از حل معادله ی درجه دوم $x^2 - sx + p = 0$ بدست آورد.

مثال: مجموع دو عدد حقیقی ۱۲ و حاصلضرب آن ها ۳۶ است. آن دو عدد کدامند؟

مثال: محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۲۰ و ۲۴ می باشد. ابعاد این مستطیل را پیدا کنید.

مثال: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

نکته: بحث در مورد علامت ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به کمک s, p :

حالت اول: اگر $\Delta > 0$:

۱) $\begin{cases} p > 0 \\ s > 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} p > 0 \\ s < 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} p < 0 \\ s > 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} p < 0 \\ s < 0 \end{cases}$

۵) $\begin{cases} p = 0 \\ s > 0 \end{cases}$

۶) $\begin{cases} p = 0 \\ s < 0 \end{cases}$

۷) $\begin{cases} p < 0 \\ s = 0 \end{cases}$

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$:

۱) $\begin{cases} p > 0 \\ s > 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} p > 0 \\ s < 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} p = 0 \\ s = 0 \end{cases}$

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$:

مثال: در مورد علامت ریشه های معادلات زیر بحث کنید.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$3x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

تست: اگر معادله $x^2 + ax + b = 0$ دارای دو جواب به صورت عدد صحیح باشد. کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) اگر هر دو جواب فرد باشند، آنگاه b, a اعدادی فرد هستند.

(۲) اگر هر دو جواب فرد باشند، آنگاه a فرد و b زوج هستند.

(۳) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد، آنگاه a زوج و b فرد هستند.

(۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد، آنگاه a فرد و b زوج هستند.

تست: معادله $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{2} = 0$:

(۱) دو ریشه ی حقیقی و مثبت دارد.

(۲) دو ریشه ی حقیقی و منفی دارد.

(۳) دو ریشه ی حقیقی و مختلف علامت دارد.

(۴) ریشه ی حقیقی ندارد.

تست: کدام معادله ی زیر به ازای هر مقدار حقیقی a دارای دو ریشه ی حقیقی و مختلف علامت است؟

$$x^2 + ax - (a^2 + 1) = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + (a^2 + 1)x + a = 0 \quad (۱)$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x - a = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + a(a^2 + 1)x + 1 = 0 \quad (۳)$$

تذکر: مثال ها و تست های مربوط به علامت ریشه ها بعد از یادگیری مبحث نامعادلات حل خواهند شد.

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر ضرایب گویا باشند و یک ریشه معادله بصورت $p + \sqrt{q}$ باشد، ریشه دیگر بصورت $p - \sqrt{q}$ است.

مثال: معادله درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یکی از ریشه های آن $2\sqrt{3} - 5$ باشد.

مثال: معادله درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که ریشه های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

تست: معادله درجه دوم با ضرایب گویا که یکی از ریشه های آن $3 - \sqrt{5}$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad x^2 + 6x - 4 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 6x + 4 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

تمرین: معادله درجه دوم با ضرایب گویا که یکی از ریشه های آن $2 - \sqrt{3}$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

مثال: معادله درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که ریشه های آن $\frac{3+\sqrt{5}}{5}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{5}$ باشد.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش $2 - \sqrt{4-a}$, $2 + \sqrt{4-a}$ باشد، کدام است؟

$$(1) \quad x^2 - 4x + a = 0 \quad (2) \quad x^2 + ax - 4 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 4x - a = 0 \quad (4) \quad x^2 - ax + 4 = 0$$

مثال: ریشه های معادله ی $x^2 - (\sqrt{2} + 3)x + 3\sqrt{2} = 0$ عبارتند از:

تمرین: اگر $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ باشد آن گاه ریشه های معادله کدام است؟

$$(1) \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = 1 \quad (2) \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = -1$$

$$(3) \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = 1 \quad (4) \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = -1$$

تست: معادله درجه دوم که ریشه های آن به صورت $\frac{1}{a+b}$, $a+b$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad x^2 - \frac{1+(a+b)^2}{a+b}x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 + \frac{1+(a+b)^2}{a+b}x + 1 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - \frac{1+(a+b)^2}{(a+b)^2}x + 1 = 0 \quad (4) \quad x^2 - \frac{1+(a+b)^2}{(a+b)^2}x + 1 = 0$$

تمرین: معادله درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یکی از ریشه های آن $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ باشد

تست: کدام معادله درجه ۲ ریشه هایش $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$, $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ است؟

$$(1) \quad x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 18x + 1 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 9x + 1 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$$

تمرین: معادله درجه دوم که ریشه های آن $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$ و $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}$ می باشد برابر است با:

$$x^2 - \frac{2a\sqrt{a}}{b^2}x + \frac{a^2}{bc} = 0 \quad (۱)$$

$$bx^2 - 2\sqrt{a}x + a^2 = 0 \quad (۲)$$

$$bx^2 - 2a\sqrt{a}x + a^2 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - 2a\sqrt{a}x + \frac{a^2}{b} = 0 \quad (۴)$$

یادآوری: یک عبارت جبری که شامل دو حرف α, β باشد در صورتی بر حسب α, β متقارن است که اگر α را به β و β را به α تبدیل کنیم در آن عبارت تغییری حاصل نشود مانند:

$$\alpha + \beta, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \quad \alpha^2 + \beta^2, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1)$$

$$\alpha^2 - \beta^2, \quad \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}, \quad \text{عبارات زیر متقارن نیستند:}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2, \quad |\alpha - \beta|, \quad \alpha - \beta \quad \text{مثال:}$$

محاسبه برخی عبارت های متقارن α, β به کمک مجموع و حاصلضرب آن ها:

$$۱) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$۲) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^2 - 2PS$$

$$۳) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$۴) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{S^2}{P} - 2$$

$$۵) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$۶) \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{1}{S} = -\frac{a}{b}$$

$$۷) \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

$$۸) \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2PS}{P^2}$$

$$۹) |\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$۱۰) |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

$$۱۱) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t \xrightarrow{(\quad)^2} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = t^2 \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = t^2 \Rightarrow (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta} = t^2 \Rightarrow s + 2\sqrt{p} = t^2 \Rightarrow t = +\sqrt{s + 2\sqrt{p}}$$

$$۱۲) |\alpha^2 - \beta^2| =$$

$$۱۳) |\alpha^4 - \beta^4| =$$

$$۱۴) \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 =$$

$$۱۵) \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} =$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{(\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{s}{\sqrt{p}}$$

مثال: اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل هر یک از عبارت های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } x_1 + x_2 = -\left(\frac{-3}{1}\right) = 3 = S$$

$$\text{ب) } x_1 x_2 = p = \frac{1}{1}$$

$$\text{ج) } x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2p = 3^2 - 2 \times 1 = 7$$

$$\text{د) } x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3pS = 3^3 - 3 \times 1 \times 3 = 18$$

$$\text{هـ) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{و) } x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = SP = 3$$

$$\text{ط) } A = \left| \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} - \frac{x_2}{\sqrt{x_1}} \right| \xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می رسانیم.}} A^2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} - \frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1 x_2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} - \frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{s^2 - 2sp}{p} - \frac{2p}{\sqrt{p}} = 16 \Rightarrow A^2 = 16 \xrightarrow{A > 0} A = 4$$

مثال: اگر در معادله درجه دوم $4x^2 - 7x - 1 = 0$ ریشه ها برابر α, β باشند و رابطه $\frac{m}{\alpha} + \frac{m}{\beta} = 4$ برقرار باشد، مقدار m را بدست آورید.

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که ریشه های معادله $x^2 + mx + m + 7 = 0$ در رابطه $x'^2 + x''^2 = 10$ صدق کند (ریشه های معادله هستند).

مثال: اگر $x^2 - 5x + 6 = 0$ باشد حاصل $x'\sqrt{x''} + x''\sqrt{x'}$ کدام است (ریشه های معادله هستند).

تست: به ازای یک مقدار m ، ریشه های معادله ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

- (۱) $-1/5$ (۲) $1/5$ (۳) 2 (۴) 3

تست: در معادله ی $2x^2 + (2k - 1)x - k = 0$ ، به ازای کدام مقدار k ، مجموع معکوس هر دو ریشه برابر $\frac{7}{3}$ است؟

- (۱) -4 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 4

تست: اگر α, β ریشه های معادله ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

تست: به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله ی $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می باشد؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) 1 (۳) $1, -\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}, -1$

تست: اگر α, β ریشه های معادله ی $2x^2 - (m + 2)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ باشند و $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2$ باشد، آنگاه m کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 7 (۴) هیچ مقدار m

مثال: اگر $\tan A, \tan B$ ریشه های معادله $x^2 - x - 4 = 0$ باشند، حاصل $\tan(A + B)$ را بدست آورید.

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $|\alpha^3 - \beta^3|$ را بدست آورید.

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ باشند به ازای چه مقدار m رابطه $\alpha - \beta = 2\sqrt{3}$ برقرار است؟

نکته: ریشه معادله در خود معادله صدق می کند.

مثال: اگر α ریشه معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد پس $\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$

مثال: اگر یک ریشه ی معادله ی $ax^2 - 7x + 2 = 0$ برابر ۲ باشد، ریشه ی دیگر را بیابید.

تست: اگر $x = 1$ یکی از ریشه های معادله ی درجه دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه ی دیگر آن کدام است؟

$$(1) -\frac{4}{3} \quad (2) -\frac{3}{4} \quad (3) \frac{3}{4} \quad (4) \frac{4}{3}$$

نکته: برای محاسبه عبارت های طولانی بر حسب ریشه ها یا توان های بزرگ آن ها می توان از این ویژگی استفاده کرد که ریشه معادله در معادله صدق می کند.

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = (\alpha^2 + 1)^3 + (\beta^2 + 1)^3$$

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = (\alpha^2 - 7\alpha + 5)(\beta^2 - 7\beta + 5)$$

تست: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند حاصل عبارت $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$ کدام است.

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) -2 \quad (4) -1$$

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $3\alpha^3\beta - \alpha^2\beta + 3$ را بدست آورید.

تست: در معادله ی $ax^2 + 2x + c = 0$ ، مجموع دو ریشه عددی مثبت و یکی از ریشه ها برابر a است. ریشه ی دیگر که برابر c باشد، چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) ۳

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + 3$$

تست: اگر α, β ریشه های معادله $2x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)^2$$

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۳

تست: اگر $x_1 = \sin \alpha$ و $x_2 = \cos \alpha$ ریشه های معادله ی $x^2 + bx + c = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^3} + \frac{x_2}{x_1^3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3c^2-1}{c^3}$ (۲) $\frac{c^2+2}{c^3}$ (۳) $\frac{1-2c^2}{c^3}$ (۴) $\frac{2c^2-1}{c^3}$

تست: در معادله ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، حاصل $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

تست: اگر رابطه ی $4a + c = -2b$ ، بین ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برقرار باشد، یک جواب معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{2a}{c}$ (۲) $\frac{c}{2a}$ (۳) $-\frac{c}{2a}$ (۴) $\frac{a}{c}$

تست: اگر رابطه ی $a + 3b + 9c = 0$ ، بین ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برقرار باشد، یک جواب معادله کدام است؟

- $\frac{-b}{3a}$ (۲) $\frac{c}{3a}$ (۳) $\frac{3c}{a}$ (۴) $\frac{-3b}{a}$

تشکیل معادله درجه دوم جدید که ریشه هایش با معادله درجه دوم داده شده ارتباط دارند:

روش اول: برای حل می توان هر ریشه ی معادله مفروض را x و هر ریشه معادله مطلوب را y فرض کنیم سپس رابطه بین x , y را نوشته و از آن x را بر حسب y پیدا کرده و در معادله مفروض قرار دهیم. پس از ساده کردن معادله مطلوب بر حسب y بدست می آید. می توانیم در این معادله y را به x تبدیل کنیم تا مجهول معادله بدست آید.

روش دوم:

مرحله ۱: ریشه های معادله ی داده شده (که ضرایب a, b, c مشخص اند) را β, α می نامیم و p, s را به دست می آوریم.

مرحله ۲: ریشه های معادله جدید را β', α' در نظر می گیریم و سپس رابطه ی بین α', α همچنین β', β را نوشته و p', s' را به دست می آوریم.

مرحله ۳: با استفاده از رابطه ی $x^2 - s'x + p' = 0$ معادله را بدست می آوریم.

مثال: معادله درجه دومی را تشکیل دهید که هر یک از ریشه هایش نصف ریشه های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشد.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن معکوس ریشه های معادله درجه دوم $5x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند.

مثال: معادله درجه دومی را تشکیل دهید که هر یک از ریشه هایش مربع ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 2 = 0$ باشد.

مثال: معادله درجه دومی را تشکیل دهید که هر ریشه آن معکوس هر ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.

مثال: معادله درجه دومی تشکیل دهید که هر ریشه آن n برابر هر ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.

مثال: معادله درجه دومی تشکیل دهید که هر ریشه آن قرینه هر ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.

ریشه ها	معادله
α, β	$ax^2 + bx + c = 0$
$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$	$cx^2 + bx + a = 0$
$-\alpha, -\beta$	$ax^2 - bx + c = 0$
$-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$	$cx^2 - bx + a = 0$
$\alpha n, n\beta$	$ax^2 + nbx + n^2c = 0$
$\alpha + k, \beta + k$	$a(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$
$\alpha - k, \beta - k$	$a(x + k)^2 + b(x + k) + c = 0$

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۳ واحد کمتر از ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند.

مثال: معادله درجه دومی را تشکیل دهید که هر ریشه آن از ۳ برابر هر یک از ریشه های معادله $x^2 - mx - 1 = 0$ چهار واحد کمتر باشد.

مثال: اگر هر یک از ریشه های معادله ی $3x^2 + ax + b = 0$ مربع ریشه های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ باشند، a کدام است؟

مثال: ریشه های معادله درجه دوم $4x^2 + ax + b = 0$ دو واحد بیشتر از عکس ریشه های معادله $2x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند. a کدام است؟

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 6x - 3 = 0$ باشند آنگاه معادله ای که ریشه های آن $\beta^2 + \alpha\beta$, $\alpha^2 + \alpha\beta$ باشند کدام است؟

مثال: اگر ریشه های معادله ی $-5x^2 - 6x = -1$ ، β, α باشند به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله ی $10x^2 + kx = 1$ به صورت $\left\{-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}\right\}$ است؟

مثال: اگر x'', x' ریشه های معادله ی $2x^2 - 16x + 30 = 0$ باشند به ازای کدام مقدار m مجموعه جواب های معادله $3x^2 - nx - m = 0$ به صورت $\{2x'' + 5, 2x' + 5\}$ است؟

مثال: اگر β, α ریشه های معادله $3x^2 = -x - 1$ باشند به ازای کدام مقدار b مجموعه جواب های معادله $-x^2 + ax + b = 0$ به صورت $\left\{\frac{2}{\alpha} - 1, \frac{2}{\beta} - 1\right\}$ است؟

مثال: معادله درجه دومی که هر یک از ریشه های آن ۲ واحد بیشتر از هر ریشه معادله $x^2 + x - 5 = 0$ باشد؟

مثال: معادله درجه دومی که هر ریشه آن ۵ برابر هر ریشه معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ باشد؟

تست: اگر β, α ریشه های معادله $-3x^2 - 4x + 6 = 0$ باشند مجموعه جواب های کدام معادله به صورت $\{3\alpha - 1, 3\beta - 1\}$ است؟

$$(1) \quad x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 6x - 13 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 6x - 13 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 2x - 4 = 0$$

تست: اگر β, α ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند ریشه های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$ است؟

$$(1) \quad x^2 + 3x + 8 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 3x + 8 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 3x - 8 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 3x - 8 = 0$$

تست: اگر β, α ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 + (c + 2)x + 8 = 0$ باشند آنگه ریشه های معادله $x^2 + bx + c = 0$

به صورت $\{\sqrt{\alpha\beta}, 2\sqrt{\alpha\beta}\}$ بصورت است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

$$(1) \quad -5 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad -4$$

تست: اگر هر یک از ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر یک از ریشه های معادله $4x^2 - 7x + 1 = 0$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۱۴ (۲) -۱۲ (۳) -۸ (۴) -۶

تست: ریشه های معادله $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است، b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

تست: ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

تست: مقدار m کدام باشد تا معادله $mx^2 + (m^2 - 4)x + m - 3 = 0$ دو ریشه قرینه داشته باشد.

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ± 2 (۴) هیچکدام

تست: در معادله $x^2 + ax + b = 0$ اگر بین ریشه ها رابطه $|x_1 - x_2| = 1$ برقرار باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $a^2 = 4b + 1$ (۲) $a^2 = 4b$ (۳) $a^2 = 4b - 1$ (۴) $a^2 = b^2$

تمرین: به ازای چه مقدار m, n ریشه های معادلات زیر معکوس یکدیگرند؟

$$\begin{cases} (m+1)x^2 + 5x + 2 = 0 \\ (n-5)x^2 + 5x + 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که یک ریشه معادله $2x^2 + 3x + m - 1 = 0$ ، $\frac{1}{4}$ ریشه دیگر باشد.

تست: ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (2)$$

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ باشند معادله ای تشکیل دهید که ریشه هایش $1 - \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\beta}$ باشد.

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند معادله ای تشکیل دهید که ریشه هایش $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}$ باشد.

نکته: اگر دو معادله درجه دوم مختلف دارای یک ریشه مشترک باشند برای یافتن آن ریشه مشترک کافیت x^2 را بین دو معادله حذف کنیم.

$$\begin{cases} 3x^2 - (3\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0 \\ x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

مثال: ریشه مشترک معادلات مقابل را پیدا کنید.

معادلات شبه درجه دوم:

هر معادله که بصورت $a(f(x))^2 + bf(x) + c = 0$ باشد را معادلات شبه درجه دوم می نامیم. این معادله با تغییر متغیر $f(x) = t$ قابل حل است.

$$1) \quad (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

مثال:

$$2) \quad 3\left(\frac{2}{x+1}\right)^2 - \frac{4}{x+1} - 1 = 0$$

تمرین: معادله $2(x^2 + x + 3)^2 + x^2 + x + 2 = 0$ را حل کنید.

معادله درجه چهارم دو مجذوری:

هر معادله بصورت $ax^4 + bx^2 + c = 0$ باشد / معادله درجه ۴ دو مجذوری می نامیم. این معادله با تغییر متغیر $x^2 = t$ به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می شود که به آن معادله حلال می گوئیم.

مثال: ۱) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

۲) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

نکته: مجموع ریشه های معادله درجه چهارم دو مجذوری همواره برابر صفر است.

مثال: $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

بحث در مورد تعداد ریشه های معادله دو مجذوری:

نکته ۱: برای اینکه معادله ی دو مجذوری دارای ۴ ریشه ی متمایز باشد باید معادله ی حلال دارای دو ریشه ی مثبت

باشد. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ p > 0 \\ s > 0 \end{cases}$ اشتراک

نکته ۲: برای اینکه معادله ی دو مجذوری ریشه نداشته باشد باید معادله ی حلال دارای دو ریشه ی منفی باشد.

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ p > 0 \\ s < 0 \end{cases}$ اشتراک

نکته ۳: برای اینکه معادله ی دو مجذوری دارای ۲ ریشه ی قرینه باشد باید معادله ی حلال دارای دو ریشه ی مختلف

العلامت باشد. $p < 0$

تست: اگر معادله ی $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه ی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m ؟

(۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$

تست: به ازای کدام مقدار a ، معادله ی $3x^4 + 5x^2 + a^2 = 1$ فقط دو جواب قرینه دارد؟

(۱) $0 < a < 2$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $|a| > 1$ (۴) هر مقدار a

تست: معادله ی $(x+2)(x-2)(x^2+1)=1$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

تست: مجموع ریشه های حقیقی معادله ی $(x^2+x)^2-1=0$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

تست: حاصلضرب جواب های حقیقی معادله ی $(x^2+3)^2-5x^2-11=0$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۴

تست: کدام معادله تعداد جواب های حقیقی کمتری نسبت به معادله ی بقیه ی گزینه ها دارد؟

(۱) $x^4-7x^2+12=0$ (۲) $x^4+8x^2+7=0$

(۳) $4x^6+1=5x^3$ (۴) $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=0$

تست: مجموعه مقادیر a کدام باشد تا معادله ی $x^4+(3a+1)x^2+(a^2-1)=0$ دارای دو جواب قرینه باشد؟

- (۱) $\{-\frac{1}{3}\}$ (۲) $\{a \in R \mid -1 < a < 1\}$ (۳) $\{a \in R \mid a < -1 \cup a > 1\}$ (۴) تهی

ریشه چند جمله ای:

عددی است که به ازای آن مقدار چند جمله ای صفر می شود. برای یافتن ریشه، عبارت را مساوی صفر قرار می دهیم.

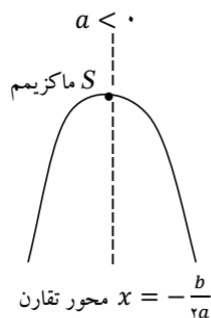
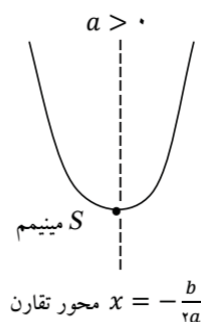
انواع ریشه ها:

الف- ریشه مکرر فرد که حالت خاص آن ریشه ساده است. $p(x) = (x-2)^3$

ب- ریشه مکرر زوج که حالت خاص آن ریشه مضاعف است. $p(x) = (x+1)^4$

نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

نمودار این تابع سهمی قائم نام دارد. اگر ضریب x^2 یعنی a مثبت باشد آن گاه سهمی رو به بالا و دارای مینیمم است و اگر ضریب x^2 یعنی a عددی منفی باشد آن گاه سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم است.



مختصات رأس سهمی S:

$$S \leftarrow \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{دو برابر ضریب } x^2} \\ y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \leftarrow \text{مختصات رأس ماکزیمم یا مینیمم (اکسترمم)}$$

مثال: $y = x^2 - 4x + 5 \rightarrow S = \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16 - 20}{4} = +1 \end{cases}$

مثال: $y = x^2 + 5 \rightarrow S = \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \times 1} = -\frac{0}{2} = 0 \\ y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(0) = 5 \end{cases}$

مثال: $y = 1 - x^2 \rightarrow S = \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \times (-1)} = -\frac{0}{-2} = 0 \\ y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(0) = 1 \end{cases}$

مثال: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه ی $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را در صورت وجود به دست آورید.

مثال: کمترین مقدار تابع $y = 2x^2 - 3x + 4$ را بدست آورید.

یادآوری مهم: معادله تقارن در سهمی قائم $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد.

تست: معادله ی محور تقارن منحنی $x + y = x^2$ کدام است؟

$$(۱) \quad 2x + 1 = 0 \quad (۲) \quad 2y - 1 = 0 \quad (۳) \quad 2x - 1 = 0 \quad (۴) \quad 2y + 1 = 0$$

نکته: اگر منحنی یک تابع بصورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ باشد، در این صورت مختصات راس سهمی که همان ماکزیمم یا مینیمم است بصورت $s(x_0, y_0)$ می باشد. اگر $a > 0$ این نقطه مینیمم و اگر $a < 0$ این نقطه ماکزیمم است.

نکته: اگر منحنی یک تابع بصورت $y = a(bx + c)^2 + d$ باشد، در این صورت مختصات راس سهمی که همان ماکزیمم یا مینیمم است بصورت $(-\frac{c}{b}, d)$ می باشد. اگر $a > 0$ این نقطه مینیمم و اگر $a < 0$ این نقطه ماکزیمم است.

مثال: مختصات راس سهمی های زیر را بدست آورید و مشخص کنید این منحنی ها دارای ماکزیمم هستند یا مینیمم.

$$y = -2(x + 5)^2 - 3$$

$$y = 2(x - 3)^2 - 4$$

$$y = -(2x + 4)^2 + 1$$

تبدیل تابع از فرم $y = ax^2 + bx + c$ به فرم $y = a(x - x_0)^2 + y_0$:

در این روش ابتدا از ضریب x^2 فاکتور گرفته و آن را به صورت $a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$ می نویسیم. سپس به عبارت داخل پرانتز عدد $(\frac{b}{2a})^2$ را اضافه و کم می کنیم و مربع کامل تشکیل می دهیم. $(\frac{b}{2a})^2$ در واقع نصف ضریب x پس از فاکتورگیری از a است).

مثال: $y = x^2 + 2x - 2$

$$y = 2x^2 - 4x + 5$$

مثال: مینیمم و ماکزیمم چند جمله ای های زیر را به دست آورید.

۱) $-3x^2 + 9x + 2$, ۲) $2x^2 + 6x - 1$

مثال: معادله $y = x^2 + 8x + 1$ را با روش مربع کامل حل کنید.

مثال: تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم و مینیمم هر یک را

مشخص کنید. ۲) $g(x) = x^2 - 4x + 9$ ۱) $f(x) = -(x+1)^2 + 3$

مثال: مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

۲) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$ ۱) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

یادآوری مهم: روش یافتن عرض (مقدار) نقطه ماکزیمم یا مینیمم:

کمترین یا بیشترین مقدار تابع $y = ax^2 + bx + c$ بسته به علامت a برابر است با: $-\frac{\Delta}{4a}$

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = -5x^2 + mx + 7$ ماکزیمی برابر با ۱۲ دارد. m را بیابید.

تست: اگر نقطه ای طول ۱- ماکزیمم تابع $y = (1-m)x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ باشد m برابر است با:

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۱ ۴) ۲

تست: اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه ی $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۴

تست: خط به معادله ی $y = -\frac{5}{4}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه ی $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می کند. a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

تست: اگر محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 - kx + 1$ به صورت $x = -2$ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

تست: نقطه ی مینیمم تابع با ضابطه ی $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

تست: اگر کمترین مقدار سهمی $y = x^2 - mx + m - 1$ برابر ۱- باشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

تست: نقطه ی $s(1,3)$ راس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. اگر این سهمی از نقطه ی $(3,4)$ بگذرد، عرض سهمی به

ازای طول $\sqrt{2} + 1$ کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

تست: طول و عرض راس یک سهمی به ترتیب از راست به چپ برابر با $\frac{-3}{2}$ و $\frac{-9}{4}$ هستند و این سهمی از مبدا مختصات

می گذرد. مجموع ضرایب عددی چند جمله ای مربوط به معادله ی این سهمی کدام است؟

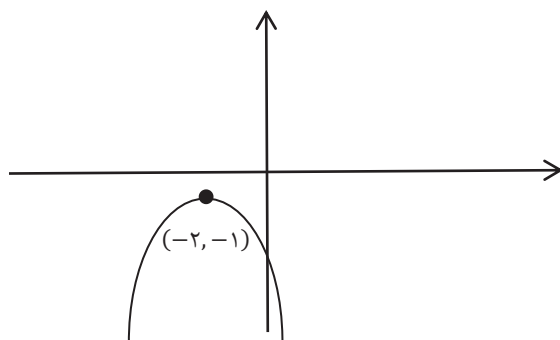
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

تست: اگر راس سهمی $y = x^2 - mx + m + 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد، در این صورت مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۳ (۲) ۱ یا -۳ (۳) صفر یا ۲ (۴) صفر یا -۲

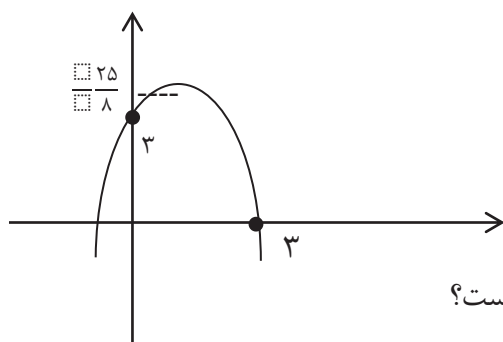
تست: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + bx + c$ به شکل زیر است. این نمودار محور y ها را با چه عرضی قطع

می کند؟



- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۶

تست: شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. مقدار a کدام است؟



(۱) $-\frac{2}{9}$

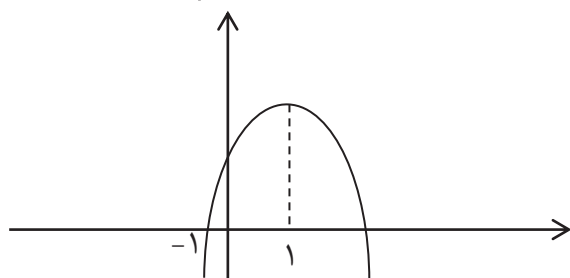
(۲) $-\frac{1}{9}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{2}{5}$

۳

تست: شکل زیر نمودار تابع $y = -2x^2 + ax + b$ است. b کدام است؟



(۱) ۳

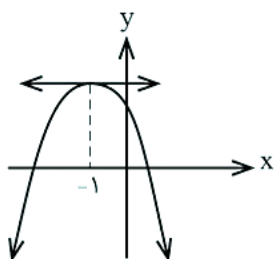
(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

تست ۳: شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (a-2)x^3 - 4bx + c$ می باشد. اگر a عددی طبیعی باشد در

این صورت مقدار b کدام است؟



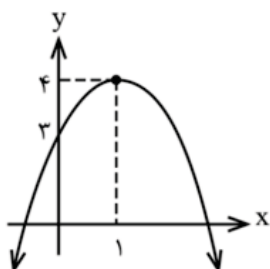
(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) ۴

(۱) ۲

تست ۳: اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل باشد، آنگاه مقدار $a - b + c$ کدام است؟



(۴) -۱

(۳) ۰

(۲) ۲

(۱) ۱

مثال: حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است این دو عدد را چنان بیابید که حاصلضرب آن ها ماکزیمم شود.

مثال: محیط یک مستطیل برابر ۱۰۰ است، طول و عرض مستطیل را چنان بیابید که مساحت این مستطیل ماکزیمم شود.

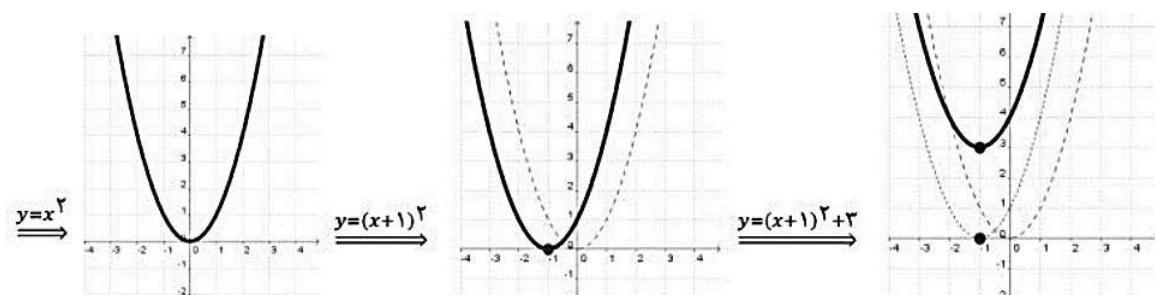
مثال: قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه ی نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

رسم منحنی درجه دوم:

الف) به کمک انتقال:

در این روش ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم می کنیم. سپس با توجه به مقادیری که به x اضافه یا از آن کم می شود، همچنین مقداری که به خود تابع اضافه و یا از آن کم می شود، نمودار در راستای افقی و یا عمودی انتقال می دهیم.

مثال: نمودار تابع $y = (x + 1)^2 + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید.



ب) به کمک مختصات راس سهمی و نقطه یابی:

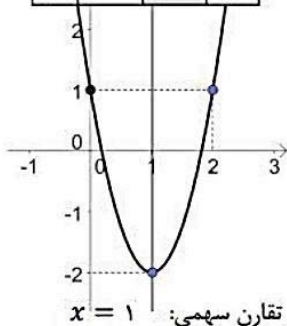
اگر منحنی درجه دوم بصورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد برای رسم آن کافی است $x = -\frac{b}{2a}$ را بدست آورده، یک عدد قبل و یک عدد بعد از آن را در جدول نوشته و مقادیر y را برای آن ها بدست آوریم.

مثال: نمودار مربوط به هر تابع را رسم کنید.

$$۱) y = ۳x^2 - ۶x + ۱$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-۶}{۲(۳)} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

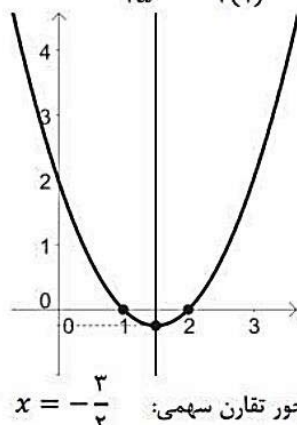
x	۰	۱	۲
y	۱	-۲	۱



$$۲) y = (x - ۱)(x - ۲) \Rightarrow y = x^2 - ۳x + ۲$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-۳}{۲(۱)} = \frac{۳}{۲}$$

x	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
y	۰	$-\frac{۱}{۴}$	۰



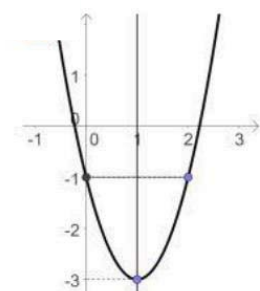
نکته: در صورتی که منحنی درجه دوم به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ باشد، نقطه ی $S(x_0, y_0)$ را در نظر گرفته، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از x_0 را در جدول نوشته و مقادیر را برای آن ها به دست می آوریم.

مثال: نمودار مربوط به هر تابع را رسم کنید.

$$۳) y = ۲(x - ۱)^2 - ۳$$

$$S(x_0, y_0) = (۱, -۳)$$

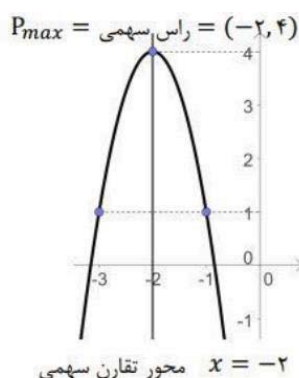
x	۰	۱	۲
y	-۱	-۳	-۱



$$۴) y = -۲(x + ۲)^2 + ۴$$

$$S(x_0, y_0) = (-۲, ۴)$$

x	-۳	-۲	-۱
y	۱	۴	۱



نکته: برای رسم دقیق تر، مختصات نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز می توانیم به دست آوریم.

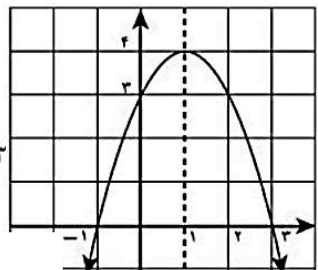
مثال: نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$$

x	۰	۱	۲
y	۳	۴	۳

محل برخورد نمودار با محور x ها: $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$

محل برخورد نمودار با محور y ها: $x = 0 \Rightarrow y = 3$

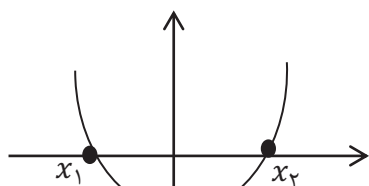


صفه‌های تابع درجه ۲:

نکته: نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفه‌های تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. به عبارت دیگر در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

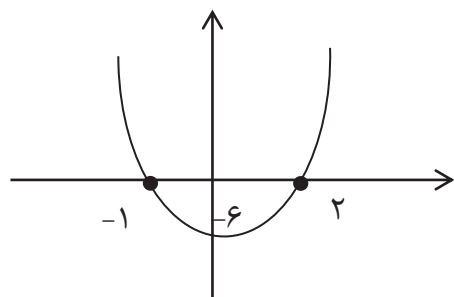
مثال: صفه‌های تابع $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ را بیابید.

یادآوری: اگر تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقاطی به طول‌های x_1, x_2 قطع کند، آنگاه معادله را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نیز می‌توان نوشت.



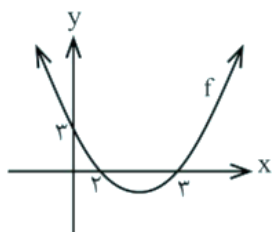
معادله	مختصات راس	محور تقارن	ماکزیمم (مینیمم)
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

مثال: در سهمی $f(x) = -4(x + 7)(x - 5)$ مختصات راس، ماکزیمم (مینیمم) و محور تقارن سهمی را بیابید.

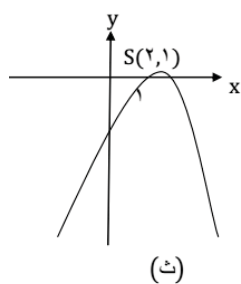
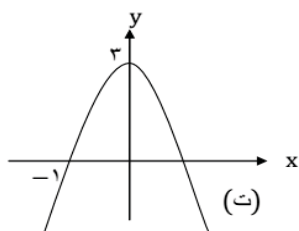
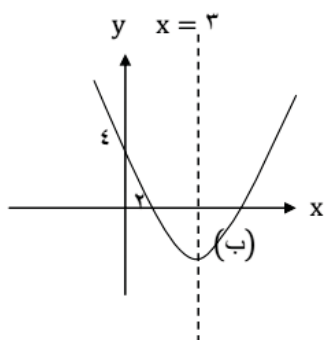
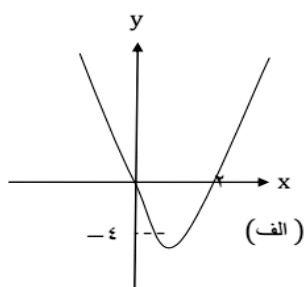


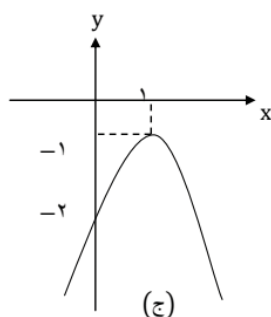
مثال: معادله‌ی سهمی شکل رو به رو را بیابید.

مثال: مطابق شکل اگر عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ متناظر با $f(x)$ باشد، در این صورت $f(4)$ را بیابید.



مثال: معادله ی سهمی های زیر را بنویسید.





مثال: سهمی به معادله $y = \frac{1}{4}(x-1)(x+3)$ را رسم کنید.

نکته: اگر تابع درجه دوم از دو نقطه A و B بگذرد معادله y محور تقارن (طول راس) برابر است با نصف

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{مجموع طول آن دو نقطه:}$$

مثال: اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

تست: اگر دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(-5, 4)$ روی تابع $y = ax^2 + bx + c$ باشد. طول اکستریم منحنی کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

تست: صفرهای تابع به معادله $f(x) = -2(x+m)(x-2)$ نسبت به خط $x = -1$ متقارن هستند. حاصلضرب

صفرهای تابع f کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) -۱۲ (۴) ۱۲

تست: ماکزیمم تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ برابر ۱۸ و اختلاف صفرهای تابع ۶ است. a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

نوشتن معادله سهمی با داشتن مختصات: الف) سه نقطه از آن ب) راس و یک نقطه از آن

الف: داشتن مختصات سه نقطه از سهمی

با توجه به اینکه نقاط داده شده روی سهمی قرار دارند پس در معادله سهمی صدق می کنند. یعنی نقاط داده شده را در معادله $y = ax^2 + bx + c$ قرار می دهیم و با حل دستگاه معادلات مقادیر a, b, c را به دست می آوریم.

مثال: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱۰ و محور x ها را در نقاط ۲ و ۵ قطع کرده است. معادله این سهمی؟

مثال: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(۲, -۱), (۳, ۰), (۰, ۳)$ می گذرد. معادله سهمی؟

تست: نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را با طول های (-۱) و ۳ و محور y ها را با عرض ۶ قطع می کند. فاصله ی راس این سهمی از محور x ها کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

ب) داشتن مختصات راس و یک نقطه از سهمی

با توجه به اینکه اگر (h, k) مختصات راس سهمی باشد آنگاه معادله ی سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ می باشد. بعد از جایگذاری مختصات راس سهمی به جای h, k در معادله ، نقطه ی داده شده را نیز در معادله قرار می دهیم تا a نیز بدست آید.

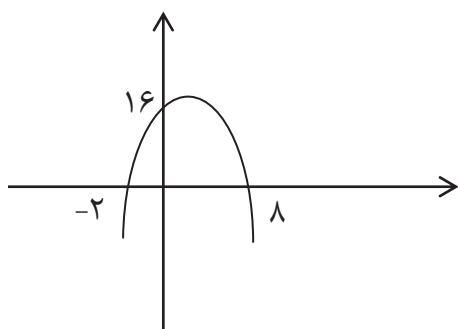
مثال: معادله ی یک سهمی را بنویسد که نقطه ی $(۲, ۵)$ راس آن باشد و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند.

مثال: معادله ی سهمی را بنویسید که راس آن نقطه ی $(۱, -۲)$ و عرض از مبدا آن برابر ۴ باشد.

تست : اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد این منحنی محور x را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست: اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، مجموع ضرایب آن کدام است؟



(۱) ۱۹

(۲) ۲۰

(۳) ۲۱

(۴) ۲۲

تست: راس سهمی به معادله $y = 3x^2 - 4x + 1$ و محل تلاقی آن با محور x ها، رئوس مثلثی هستند. مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{9}$

مثال: می دانیم که نمودار هر تابع درجه ۲ یک سهمی است. به عنوان مثال فرض می کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویه ی ۴۵ درجه نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه ی 20 m/s شوت کند. معادله ی مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه ۲ با ضابطه $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است. الف: حداکثر ارتفاع توپ؟

ب: حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ؟

مثال: راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادله ی آن به صورت مقابل است.

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف: چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب: ارتفاع نقطه ی اوج را بیابید.

پ: چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بر می گردد؟

تست: موشکی از سطح زمین پرتاب می شود به طوری که مسیر سهمی را طی می کند. اگر ارتفاع موشک بعد از t ثانیه از

معادله ی $y = -5t^2 + 100t + 200$ به دست آید، حداکثر ارتفاعی که موشک به آن خواهد رسید کدام است؟

- (۱) ۴۰۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۷۰۰

تست: بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن

رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

- (۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸

تست ۳: قیمت فروش هر یک از x کالای فروخته شده توسط شرکتی در یک ماه معین، از رابطه ی $p(x) = 60 - 3x$ به

دست می آید. با فروش چه تعداد کالا در آن ماه، بیشترین درآمد فروش نصیب شرکت می گردد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۳۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

مثال: مستطیل هایی با ابعاد متفاوت را در نظر بگیرید. باریک ترین آن ها به عرض ۲۰ و طول ۶۰ سانتی متر است. به ازای

هر یک سانتی متر که به عرض آن افزوده شود ۲ سانتی متر از طول آن کم می شود. بیشترین مساحت این مستطیل ها؟

تست: در یک زمین گل خانه ای ، اگر با فاصله های یکسان ۴۰ بوته ی گوجه فرنگی کاشته شود، به طور متوسط از هر بوته

۸ کیلو محصول به دست می آید. به ازای هر بوته ی اضافی که کاشته شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین محصول بوته ها

کاسته می شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی چند کیلو گرم است؟

- (۱) ۳۳۶ (۲) ۳۳۸ (۳) ۳۴۰ (۴) ۳۴۲

معادلات گویا:

عبارت های گویا: کسرهایی که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای باشند را عبارت های گویا می نامیم.

مثال: $\frac{x+1}{x}$, $\frac{x+1}{x-5} - \frac{7x}{x+9}$, $\frac{x^3-3x-10}{x^2+7x}$

معادلات گویا: گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+1}{x} = x$ بر می خوریم که در آن ها مجهول در مخرج یک عبارت گویا قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می نامیم.

حل معادلات گویا:

۱- مخرج ها را تجزیه می کنیم (اگر تجزیه شدند).

۲- کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها را به دست می آوریم.

۳- دو طرف تساوی را در کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرده تا معادله از شکل کسری خارج شود.

۴- پس از ساده کردن معادله به دست آمده را حل می کنیم.

تذکر مهم: جواب های به دست آمده در صورتی قابل قبول هستند که هیچ یک از مخرج ها را صفر نکنند.

یادآوری: برای محاسبه ب.م.م و ک.م.م عبارت های جبری، ابتدا عبارت ها را تجزیه می کنیم. اگر عوامل مشترک را با کمترین توان در هم ضرب کنیم ب.م.م به دست می آید و اگر عوامل مشترک و غیر مشترک را با بیشترین توان در هم ضرب کنیم ک.م.م به دست می آید.

مثال: ب.م.م و ک.م.م عبارت های زیر را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} A &= (2x^3 - 5x^2 + 3x) & , & & B &= (x^2 - 1)(x + 1) \\ p &= x^3 - 1 & , & & q &= x^3 + x^2 + x & , & & r &= 2x^4 - 2x \\ A &= (x^2 - 1)^3 & , & & B &= (x^2 + x)^2 \end{aligned}$$

مثال: معادلات مقابل را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{2 - x}{x^2 - x}$$

نکته: در معادلات گویا بصورت $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (A, B, C, D چند جمله ای بر حسب x هستند) بهتر است معادله را طرفین وسطین کنیم سپس آن را ساده کنیم. $A \times D = B \times C$. به یاد داشته باشید آخرین جواب های بدست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کند.

$$\frac{3}{2x+1} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-1}{x-3}$$

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\frac{2x+4}{x+2} = 1$$

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$\frac{x+5}{3x+15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3x+1} = \frac{5}{8x+1}$$

نکته: در معادلاتی بصورت $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{k}{n}$ که صورت و مخرج تمام کسرها چندجمله ای باشند بهتر است بین مخرج ها ابتدا کوچکترین مضرب مشترک را بدست آوریم (ک.م.م) و این عبارت را به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیریم سپس تمام کسرها را در مخرج مشترک ضرب کنیم با این کار کسرها از بین می رود. سپس عبارت را ساده و حل می کنیم. به یاد داشته باشید آخرین جواب های بدست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کند.

$$\frac{4}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{8}{(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4}{2x-3} + \frac{5}{5x-4} = \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{2x-3} = \frac{6x+1}{(x+1)(2x-3)}$$

$$\frac{3x+2}{x} - \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

$$\frac{x}{x-4} + 1 = \frac{4}{x-4}$$

$$\frac{3x-2}{5} + 3 = \frac{4x-1}{3}$$

$$\frac{3x+7}{2} + 3x-7 = \frac{2x+3}{5}$$

$$\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9} = \frac{2}{(x+5)(2x+9)}$$

$$\frac{5x + 20}{(3x - 5)(x + 1)} = \frac{2x - 7}{x - 5} - \frac{6x - 6}{3x - 5}$$

$$\frac{x + 7}{(2x - 3)(x + 1)} = \frac{8x - 9}{2x - 3} - \frac{4x + 9}{x + 2}$$

مثال: در هر یک از معادلات زیر مقدار b را طوری تعیین کنید که $x = 5$ یک جواب معادله باشد.

$$\frac{x - 3}{b + 6} + \frac{2x - 8}{2b - 9} = \frac{x - 2}{b - 1}$$

$$\frac{x - 3}{b + 5} + \frac{x + 1}{3b + 5} = \frac{2x - 6}{b + 3}$$

$$\frac{x - 2}{3b + 7} - \frac{x - 4}{2b + 18} = \frac{1}{2b - 2}$$

تمرین: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} = 5$$

$$\frac{10}{r} + \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5$$

$$\frac{2x}{x - 3} + \frac{x + 1}{x + 4} = \frac{x - 1}{x - 3}$$

$$\frac{3}{2x} = \frac{x + 2}{x^2 - 3x}$$

$$\frac{t - 1}{t + 4} - \frac{2}{t - 4} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x - 2)} = \frac{x - 4}{x - 2}$$

$$\frac{6}{p} = 2 + \frac{p}{p+1}$$

$$2 + \frac{5}{3k-1} = \frac{-2}{(3k-1)^2}$$

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$$

$$\frac{(m+3)^2}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

تست: تعداد جواب های معادله ی $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

مثال: به ازای چه مقدار a ، معادله ی $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

مثال: به ازای چه مقدار k ، معادله ی $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

تست: اگر $x = 4$ یکی از جواب های معادله ی $\frac{x-a}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{a-1}{2x-4}$ باشد جواب دیگر آن کدام است؟

(۴) جواب دیگری ندارد.

(۳) ۲

(۲) ۵

(۱) ۳

تست: اگر عدد $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یکی از جواب های معادله $\frac{1}{x^2+x^2} = \frac{k}{x+1}$ باشد، مجموع تمامی ریشه ها کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(۲) -۱

(۱) صفر

نکته: در بعضی از موارد استفاده از **تغییر متغیر** به حل سریعتر معادله کمک می کند.

$$\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2 - \frac{8}{2x-1} + 7 = 0$$

مثال:

تست: در معادله ی $x + \frac{2x-1}{x-4} = -2$ ریشه ها چگونه اند؟

- (۱) فقط یک جواب قابل قبول (۲) دو جواب وارون هم (۳) دو جواب مساوی (۴) دو جواب قرینه

تست کتاب: مجموع جواب های معادله ی $x^3 - \frac{1}{x^3} = 3x - \frac{3}{x}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

تست: اگر $x = 2$ جواب معادله ی $\frac{(x^2+1)^2}{(x+k)^2} = \frac{3x+1}{(k+2)^2} + 2$ باشد، مقادیر k کدام است؟

- (۱) -۱ و -۵ (۲) -۲ و ۱ (۳) ۱ و -۵ (۴) ۲ و ۱

تست: به ازای کدام مقدار k ، مجموع ریشه های معادله ی $\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2$ برابر ۷ است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

تست: اگر معادله ی $\frac{3-x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{ax+b}{x^2-9}$ دارای بیشمار جواب باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۹ (۴) صفر

تست: تعداد جواب های معادله ی $\left(2 - \frac{x+2}{x-3}\right)\left(1 + \frac{x+2}{x-8}\right) = x^2 - 7$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست: اگر معادله ی $\frac{5}{2x^2-x} = \frac{3}{x+a}$ فاقد ریشه باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $a < -\frac{1}{2}$ (۲) $a > -\frac{1}{15}$ (۳) $a < -\frac{1}{15}$ (۴) $a > -1$

تست: حاصلضرب جواب های معادله ی $\frac{1}{x^2+x-4} + \frac{2}{x^2+x-2} = 1$ کدام است؟

(۴) -۱۸

(۳) -۹

(۲) ۱۸

(۱) ۹

تست: در مستطیلی به طول a و عرض b ، رابطه ی $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ برقرار است. نسبت طول به عرض این مستطیل؟

(۴) $1 + \sqrt{3}$ (۳) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $1 + \sqrt{5}$ (۱) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

تست ۳: موتور سوار ۱ با سرعت 120 km/h ، از A به طرف B حرکت می کند. موتور سوار ۲ از 50 km جلوتر با سرعت 80 km/h حرکت می کند و یک ساعت دیرتر از موتور سوار ۱ به B می رسد. فاصله ی A تا B چند کیلومتر است؟

(۴) ۳۷۰

(۳) ۴۳۰

(۲) ۴۱۰

(۱) ۳۹۰

معادلات گنگ:

اگر در معادله ای دست کم یک رادیکال شامل مجهول وجود داشته باشد آن معادله را گنگ می نامیم.

$$x + \sqrt{x+1} = 2 \quad \sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x-3}$$

$$\sqrt[k]{A} \Rightarrow A \geq 0$$

نکته: عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد.

حل معادلات رادیکالی که شامل یک رادیکال باشد:

۱- رادیکال را در یک سمت معادله (معمولا سمت چپ) قرار می دهیم و بقیه را به سمت دیگر (معمولا سمت راست)

منتقل می کنیم. یعنی کاری می کنیم رادیکال به تنهایی در یک سمت قرار گیرد. یعنی معادله بصورت کلی

$$A + \sqrt{B} = C \quad A = \sqrt{B} \text{ در می آید } (A, B \text{ عبارت های جبری هستند}).$$

۲- برای حذف رادیکال طرفین را به توان فرجه رادیکال (اگر فرجه ۲ باشد به توان ۲ و اگر فرجه ۳ باشد به توان ۳)

می رسانیم و معادله را حل می کنیم.

۳- بعد از حذف رادیکال معادله به دست آمده را حل می کنیم تا جواب به دست آید.

تذکر: حتما جواب های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان کنید آن ها باید دو شرط زیر را برقرار کنند:

الف: زیر رادیکال را منفی نکنند.

ب: تساوی را برقرار کند.

مثال:

۱) $\sqrt{x} - 7 = 10$

۲) $x + \sqrt{x} = 6$

۳) $\sqrt{x+2} - 3x + 4 = 0$

۴) $2x - 1 - \sqrt{3x+1} = 0$

۵) $\sqrt{5x+9} = 2x+3$

۶) $\sqrt{3x+7} - 3 = x$

۷) $\sqrt{1-x^2} = x$

۸) $\sqrt{15 + \sqrt{2x+80}} = 5$

۹) $\sqrt{5q-1} + 3 = 0$

نکته: در حالت کلی $(\sqrt{u} = \text{عدد منفی})$ جواب ندارد.

حل معادلاتی که شامل بیش از یک رادیکال باشند:

در اینگونه معادلات ابتدا با به توان رساندن دو طرف معادله باید تعداد رادیکالها را کاهش دهیم تا به معادله صحیح برسیم و

۱) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$

آن را حل کنیم. برای راحتی به مدل های زیر توجه کنید:

۲) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$

در موارد ۱ و ۲ بعد از اینکه معادله به توان ۲ رسید و ساده شد لازم است یک بار دیگر معادله را به توان ۲ برسانیم. در ضمن

باید یادمان باشد جواب های آخر را در معادله امتحان کنیم.

$$\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$2\sqrt{x} - \sqrt{3x+4} = 0$$

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+1} + 2$$

$$\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x+12} - \sqrt{5x+9} = 1$$

$$\sqrt{3x+3} - \sqrt{x+2} = 1$$

$$\sqrt{x} + 2 = \sqrt{4+7\sqrt{x}}$$

$$3 - \sqrt{x} = \sqrt{2\sqrt{x}-3}$$

$$\sqrt{2\sqrt{7x+2}} = \sqrt{3x+2}$$

تمرین: هر يك از معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{t+4} = 3$$

$$k = \sqrt{6k-8}$$

$$x + \sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

$$\sqrt{t} + 1 = 0$$

نکته: اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشد، هر کدام از آن ها صفرند.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$$

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 0$$

مثال: معادله ی $x(x-3)\sqrt{x-2} = 0$ را حل کنید.

تست: اگر $x = 4$ یکی از جواب های معادله ی $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد جواب دیگر آن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگری ندارد.

مثال: عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{4}x \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4}x \rightarrow x = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, x = 4$$

حالت خاص معادلات رادیکالی:

معادلات به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ را نیم مجذوری گوئیم و به دو روش می توانیم آن را حل کنیم.

روش دوم: با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله ی $at^2 + bt + c = 0$ می رسیم و آن را به کمک معادلات درجه دوم حل می کنیم.

مثال: معادله $x + \sqrt{x} = 6$ را حل کنید.

$$\sqrt{x} + x - 2 = 0$$

$$2x + 3\sqrt{x} + 1 = 0$$

بحث در مورد تعداد ریشه های معادله نیم مجذوری:

نکته: معادلات $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ را نیم مجذوری گوییم و با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله $at^2 + bt + c = 0$ می رسیم که به آن معادله ی حلال گوییم.

نکته ۱: برای اینکه معادله نیم مجذوری دارای ۲ ریشه ی متمایز باشد باید معادله ی حلال دارای دو ریشه ی مثبت

باشد. $\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ p > 0 \\ s > 0 \end{array} \right.$ اشتراک

نکته ۲: برای اینکه معادله نیم مجذوری ریشه نداشته باشد باید معادله ی حلال دارای دو ریشه ی منفی باشد.

$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ p > 0 \\ s < 0 \end{array} \right.$ اشتراک

نکته ۳: برای اینکه معادله نیم مجذوری دارای یک ریشه باشد باید معادله ی حلال دارای دو ریشه ی مختلف علامت

باشد. ($p < 0$)

تست: معادله ی $x - 13\sqrt{x} + 36 = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست: معادله ی $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست: به ازای کدام مقدار a معادله ی $x - (a^2 + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{a} = 0$ فقط دو جواب برای x دارد؟

(۱) $a > 2$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $|a| > 2$ (۴) هر مقدار a

تست: تعداد و علامت جواب معادله ی $\sqrt{2x+1} = x - 2$ چگونه است؟

(۱) دو جواب مثبت (۲) دو جواب مثبت و منفی (۳) فقط یک جواب مثبت (۴) فاقد جواب حقیقی

تست: معادله ی $\sqrt{x^2 + 6} = 3x + 4$ از نظر تعداد جواب ها چگونه است؟

(۱) یک جواب منفی (۲) یک جواب مثبت (۳) دو جواب منفی (۴) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

تست: مجموعه مقادیر a به طوری که معادله ی $\sqrt{x^2 + x + a} = x - 1$ دارای جواب مثبت باشد، کدام است؟

(۱) $a \geq -2$ (۲) $a \leq -2$ (۳) $a \leq 2$ (۴) $a \geq 2$

تست: اگر $x = 4$ جواب معادله $\sqrt{3x-8} - a = \sqrt{5-x}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟
 (۱) $\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) جواب دیگری ندارد.

تست: تعداد جواب های متمایز معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{2}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست: به ازای کدام مجموعه ی مقادیر m از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود.
 (۱) $m \geq 1$ (۲) $m < 2$ (۳) $1 \leq m < 2$ (۴) هیچ مقدار m

تست: جواب های معادله $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x - 5$ چگونه است؟
 (۱) جواب حقیقی ندارد (۲) یک جواب حقیقی دارد (۳) دو جواب حقیقی دارد (۴) بیشمار جواب حقیقی دارد

تست: مجموعه ی جواب معادله $\sqrt{169 - x^2} = x - 17$ کدام است؟
 (۱) $[-13, 13]$ (۲) R (۳) $[-13, 17]$ (۴) $\emptyset$

تست: معادله $x(x^2 - 3)\sqrt{x-2} = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست: تعداد جواب های معادله $\sqrt{x^2 + 4 - 4x} = -\sqrt{3x-2} - 1$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

نکته: اگر حاصلضرب چند عبارت مساوی صفر باشد تک تک آن ها را مساوی صفر قرار می دهیم یعنی:

$$f(x) \times g(x) \times h(x) \times \dots = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

تذکر: دقت کنید جواب های به دست آمده در صورتی که با دامنه تضاد نداشته باشند قابل قبول هستند.

تذکر: برای استفاده از این نکته باید دو شرط اساسی زیر برقرار باشد:

شرط ۱: بین عبارات بایستی حتما ضرب باشد و نه جمع یا تفریق.

شرط ۲: سمت راست عبارت بایستی فقط صفر باشد نه عدد دیگر.

تست: معادله $\frac{(x^2-9)(x^2-16)\sqrt{x-2}}{(x-3)} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

نکته: اگر معادله ای به صورت مجموع دو یا چند عبارت نامنفی باشد (نامنفی ها عبارتند از: قدر مطلق، عبارات با توان زوج

و رادیکال ها با فرجه زوج) و طرف دوم تساوی صفر باشد کفایت ریشه های عبارت نامنفی ساده تر را پیدا کرده و آن را

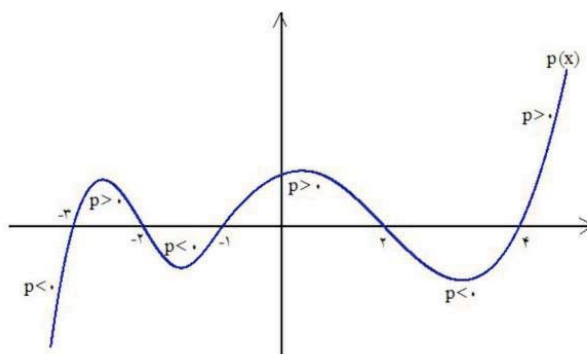
در سایر نامنفی ها قرار دهیم، اگر ریشه ای تمام نامنفی ها را صفر کند، ریشه کل معادله محسوب می شود.

تست: معادله ی $\sqrt[4]{x^3+x-10} + \sqrt{x^2-3x+2} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

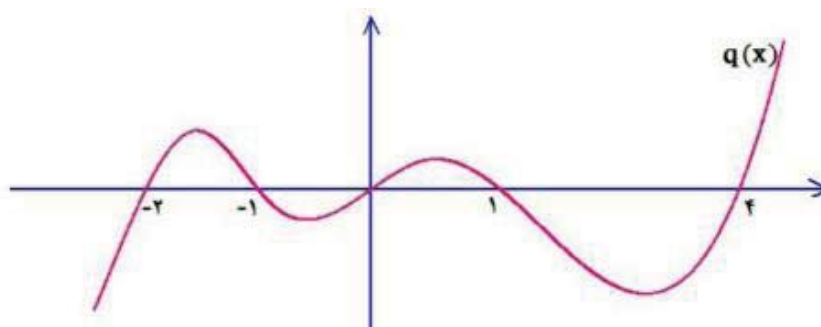
تعیین علامت:

در این قسمت هدف یافتن بازه هایی است که عبارتی مانند $p(x)$ در آن ها صفر، مثبت، منفی و یا تعریف نشده باشد. برای تعیین علامت یک عبارت اولین گام تعیین ریشه ها است.



$$\begin{cases} x < -3 \Rightarrow p(x) < 0 & \text{گوییم عبارت منفی است} \\ -3 < x < -2 \Rightarrow p(x) > 0 & \text{گوییم عبارت مثبت است} \\ -2 < x < -1 \Rightarrow p(x) < 0 \\ \vdots \\ x > 4 \Rightarrow p(x) > 0 \end{cases}$$

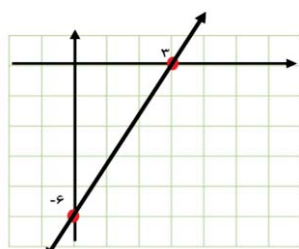
مثال: با توجه به شکل علامت منحنی $q(x)$ را مشخص کنید.



تعیین علامت چند جمله ای درجه اول:

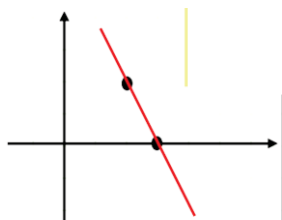
مثال:

$$y = 2x - 6$$



$$y = -2x + 6$$

مثال:



نکته: با توجه به شکل های بالا در عبارت درجه اول، قبل از ریشه مخالف علامت پشت x و بعد از ریشه موافق علامت پشت x است.

در حالت کلی برای تعیین علامت عبارت درجه اول $y = ax + b$ ($a \neq 0$) ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه (جواب) آن را به دست می آوریم که بصورت مقابل است.

$$ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$p(x) = ax + b$$

جدول تعیین علامت عبارت درجه اول:

x	$-\frac{b}{a}$
p	مخالف علامت a موافق علامت a

$$p(x) = 2x + 3$$

مثال: علامت عبارات زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = -4x + 5$$

$$y = 5x - 2$$

$$y = 3 - x$$

$$y = 2x - 1$$

تست: اگر جدول تعیین علامت زیر مربوط به نمودار خطی مفروض باشد، این نمودار از کدام نقطه ی زیر نمی تواند بگذرد؟

x	۱	۰	-
y	+	۰	-
(۱, -۳)	(۲, -۱)	(۳, -۱/۲)	(۴, -۱/۲)

تست: عبارت درجه اول $f(x) = 2kx + k^2 - 27$ به ازای $x < k$ مثبت و به ازای $x > k$ منفی است. k کدام است؟

$$(۱) \{-۳, ۳\} \quad (۲) \text{ فقط } -۳ \quad (۳) \text{ فقط } ۳ \quad (۴) -۲$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

تعیین علامت عبارت درجه دو:

در عبارات درجه دوم بسته به علامت Δ سه حالت مختلف خواهیم داشت:
حالت اول: $\Delta > 0$: اگر عبارت دو ریشه x_1, x_2 که $x_1 < x_2$ داشته باشد:



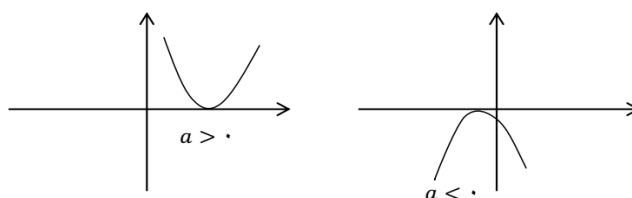
جدول تعیین علامت:

x	x_1 x_2		
p	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

$$p(x) = x^2 + 4x + 3$$

مثال:

حالت دوم: $\Delta = 0$: در این حالت معادله دارای ریشه مضاعف x_1 است. مقدار عبارت در این نقطه صفر و در سایر نقاط موافق علامت a است.



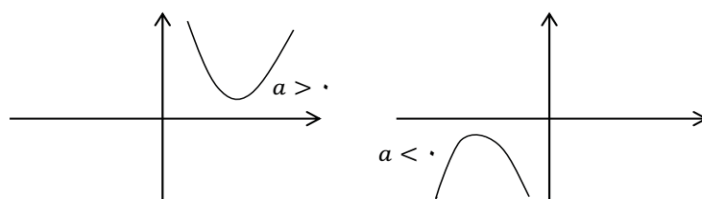
جدول تعیین علامت:

x	x_1	
p	موافق علامت a	موافق علامت a

$$p(x) = x^2 + 4x + 4$$

مثال:

حالت سوم: $\Delta < 0$: در این حالت عبارت درجه دوم ریشه حقیقی ندارد (هیچ گاه صفر نمی شود) و علامت عبارت همواره موافق علامت a است.



جدول تعیین علامت:

x	$-\infty$	$+\infty$
p	همواره موافق علامت a	

$$p(x) = x^2 + 2x + 9$$

مثال:

$$p(x) = -x^2 + 6x - 9$$

$$p(x) = -x^2 - x - 1$$

$$p(x) = 2x^2 - x - 3$$

مثال: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$p(x) = -x^2 + x + 2$$

$$x^2 - 9 < 0$$

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

$$x^2 - 16 > 0$$

$$4x^2 - 20 \leq 100$$

در حالت کلی داریم: $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a$, $x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow (x \geq a \text{ or } x \leq -a)$ **نکته:** در نامعادله درجه دو برای تعیین علامت، علامت ضریب x^2 و نامعادله را با هم مقایسه می کنیم:

حالت اول - یکسان باشند:

حالت دوم - یکسان نباشند:

$$4x^2 + 3x - 7 \leq 0 \rightarrow$$

مثال:

$$4x^2 - 20 \leq 100$$

$$x^2 - 16 > 0$$

مثال: حدود m را طوری تعیین کنید که معادله $x^2 - mx + 3 - m = 0$ دارای دو جواب حقیقی متمایز باشد.

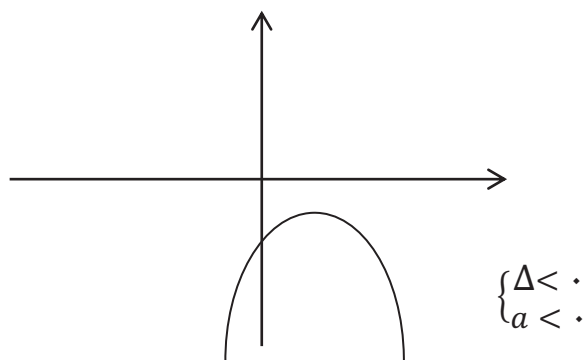
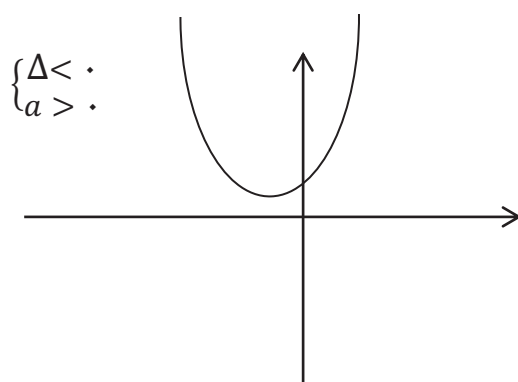
وضعیت سهمی نسبت به محورهای مختصات:

یادآوری: سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه $(0, c)$ قطع می کند.

یادآوری: برای یافتن محل برخورد آن با محور x ها کافی است در معادله بالا قرار دهیم $y=0$. یعنی معادله

$$ax^2 + bx + c = 0$$
 را حل کنیم. حال با توجه به علامت Δ با سه حالت مختلف رو به رو می شویم:

حالت اول: $\Delta < 0$. در این حالت سهمی همواره یک طرف محور x ها است یعنی محور x را قطع نمی کند.



نمودار همواره پایین محور x هاست (همواره منفی) نمودار همواره بالای محور x هاست (همواره مثبت)

تست: به ازای چه مقدار m نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها است.

$$(1) \quad m < -\frac{1}{4} \quad (2) \quad -\frac{1}{4} < m < 1 \quad (3) \quad 1 < m < \frac{3}{4} \quad (4) \quad m > \frac{3}{4}$$

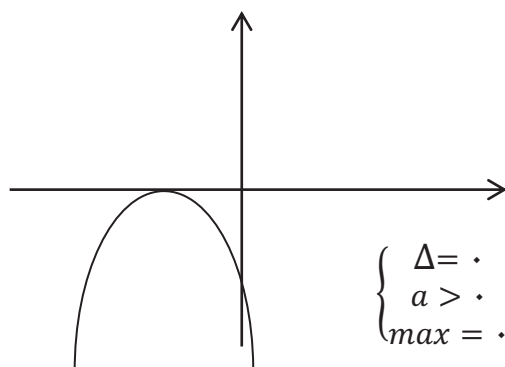
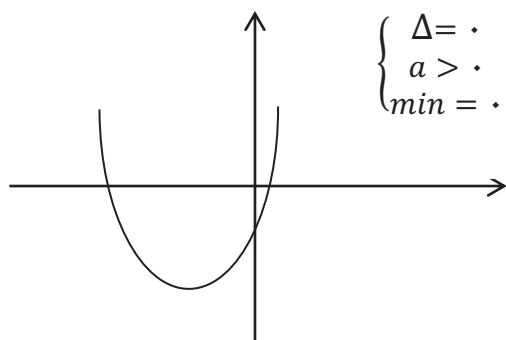
تست: به ازای کدام مقادیر، نمودار تابع $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x هاست؟

$$(1) \quad m > -2 \quad (2) \quad -2 < m < -1 \quad (3) \quad -2 < m < 2 \quad (4) \quad -1 < m < 2$$

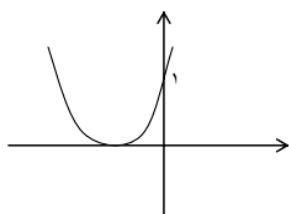
تست: به ازای کدام مقدار a ، هر نقطه از نمودار تابع $y = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

$$(1) \quad a < -1 \quad (2) \quad a > 1 \quad (3) \quad a > 2 \quad (4) \quad 1 < a < 2$$

حالت دوم: $\Delta = 0$. در این حالت سهمی مماس بر محور x ها است.

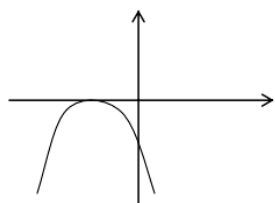


تست: با توجه به شکل مقابل، m در تابع $y = x^2 - mx + c$ کدام است؟



- (۱) $+2$ و -2 (۲) -2 (۳) $+2$ (۴) $\emptyset$

تست: با توجه به شکل زیر، سهمی به معادله $y = -2x^2 - 2mx - m^2 + 3$ در چه نقطه ای محور عرض ها را قطع می کند؟

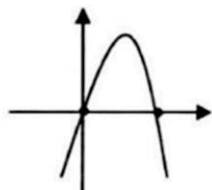
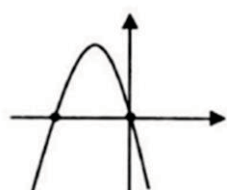
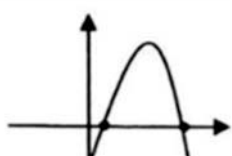


- (۱) 6 (۲) -6 (۳) 3 (۴) -3

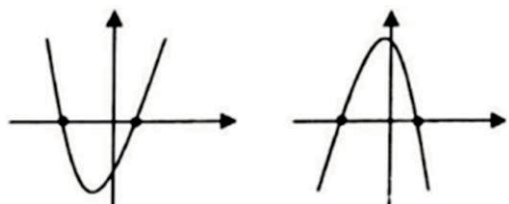
حالت سوم: $\Delta > 0$. در این حالت سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. اگر:

الف) $p > 0$ هر دو ریشه مثبت یا هر دو ریشه منفی هستند.

ب) $p = 0$ یک ریشه صفر است.



ج) $p < 0$ یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است.



تعیین علامت عبارت درجه دوم $p(x)$:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \begin{cases} p(x) > 0 & \rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ p(x) \geq 0 & \rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ p(x) < 0 & \rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \\ p(x) \leq 0 & \rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \end{cases}$$

نکته: برای حل یک نامعادله ی درجه دوم، ابتدا همه ی عبارت ها را به یک طرف انتقال داده و نامعادله را به یکی از شکل

های $p > 0$, $p < 0$, $p \geq 0$, $p \leq 0$ تبدیل می کنیم که در آن $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) است. با توجه

به شرایط Δ ، جدول تعیین علامت عبارت را تشکیل داده و سپس مجموعه را می یابیم.

مثال: نامعادله $4x^2 < 4x + 3$ را حل کنید.

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $mx^2 + 2x - 1$ همواره منفی باشد.

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $mx^2 + 2mx + m + 1$ همواره مثبت باشد.

مثال: در هر یک از معادله های زیر مقدار k را چنان تعیین کنید که معادله ریشه حقیقی داشته باشد. $x^2 - kx + 8 = 0$

$$x^2 + kx + 2k = 0$$

$$kx^2 + 4x + k = 0$$

یادآوری: در حل نامعادلات درجه دوم استفاده از دو نامساوی زیر کارساز است:

$$u^2 \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -\sqrt{a} \leq u \leq \sqrt{a}$$

$$u^2 \geq a \xrightarrow{a \geq 0} u \geq \sqrt{a} \text{ or } u \leq -\sqrt{a}$$

مثال: نامعادله $(x+2)^2 \leq 9$ را حل کنید.

نکته: با استفاده از نامعادله ی درجه دوم می توان وضعیت یک سهمی را با محور x ها یا خط $y = ax + b$ بررسی نمود.

مثال: به ازای چه حدودی از m ، سهمی $y = mx^2 + 2x + m$ همواره پایین محور x هاست؟

مثال: حدود m را چنان تعیین کنید که تابع $y = (m+3)x^2 + (3m+1)x + 1$ همواره بالای محور x ها باشد.

مثال: به ازای کدام مقدار m تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x است؟

مثال: به ازای کدام مقدار m تابع $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x و بر آن مماس است؟

$$(1) -3 \quad (2) -\frac{5}{2} \quad (3) \frac{5}{2} \quad (4) 3$$

تست: به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است.

$$(1) m < -2 \quad (2) m > 2/5 \quad (3) 1 < m < 2 \quad (4) 1 < m < 2/5$$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ در بالای محور x ها است.

$$(1) a < -9 \quad (2) a < -3 \quad (3) a > -1 \quad (4) -3 < a < 0$$

تست: اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

$$(1) 1 < a < 5 \quad (2) a < 1 \quad (3) \emptyset \quad (4) R$$

مثال: حدود k را چنان بیابید که برای هر مقدار x ، عبارت $2x^2 + 2kx$ بزرگتر یا مساوی $x - 8$ باشد.

تست: مقادیر تابع $y = x^2 - 4x - 12$ در بازه (a, b) کوچکتر از -7 است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۴) $6/5$

(۳) 6

(۲) $5/5$

(۱) 5

تست: اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه حدود m کدام است؟

(۴) $4 < m < 5$

(۳) $3 < m < 5$

(۲) $3 < m < 4$

(۱) $m > 3$

تست: حدود m کدام باشد تا معادله $5x^2 + x + m - 7 = 0$ دو ریشه مختلف علامت داشته باشد؟

(۴) $m > 8$

(۳) $m < 8$

(۲) $m > 7$

(۱) $m < 7$

تست: حدود m کدام باشد تا معادله $(m - 1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دو ریشه مختلف علامت داشته باشد؟

(۴) $0 < m < 1$

(۳) $m < 1$

(۲) $1 < m < 3$

(۱) $m > 2$

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله $(m + 2)x^2 + 4x + m - 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد.

مثال: مقدار k را چنان تعیین کنید که عبارت $(k + 1)x^2 - 2kx + 3 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد.

مثال: مقدار k را چنان تعیین کنید که عبارت $x^2 + (k - 1)x + 3 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

مثال: اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، مجموعه مقادیر m را بدست آورید.

(۴) $4 < m < 5$

(۳) $3 < m < 4$

(۲) $3 < m < 5$

(۱) $m > 3$

مثال: اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی و متمایز باشد حدود m ؟

تست: به ازای کدام مقدار m از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

$$(1) -\frac{3}{4} < m < 2 \quad (2) 0 < m < 2 \quad (3) \frac{3}{4} < m < \frac{5}{4} \quad (4) 2 < m < \frac{3}{4}$$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟

$$(1) m \geq 1 \quad (2) m < 2 \quad (3) 1 \leq m < 2 \quad (4) \text{هیچ مقدار } m$$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

$$(1) -3 < m < 5 \quad (2) -3 < m < 4 \quad (3) -2 < m < 4 \quad (4) -1 < m < 5$$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $x + m\sqrt{x} + m = 1$ هیچ جوابی برای x حاصل نمی شود.

$$(1) \emptyset \quad (2) m > 1 \quad (3) 0 < m < 1 \quad (4) m < 0$$

تست: اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند آنگاه

مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

$$(1) m > 1 \quad (2) 3 < m < 4 \quad (3) 3 < m < 5 \quad (4) 4 < m < 5$$

تست: در عبارت $p(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر $\frac{\Delta}{4a}$ منفی باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(۱) معادله ی $p(x)$ همواره ریشه ی حقیقی ندارد. (۲) عبارت $p(x)$ همواره مثبت است.

(۳) عبارت $p(x)$ همواره منفی است. (۴) علامت عبارت $p(x)$ به علامت a بستگی دارد.

نکته: اگر در تست گفته شود نقطه ی راس سهمی (مینیمم یا ماکزیمم) روی فلان خط یا منحنی قرار گرفته، مراحل زیر را انجام می دهیم.

گام ۱: طول راس سهمی را با استفاده از فرمول $x_s = -\frac{b}{2a}$ بدست می آوریم.

گام ۲: عرض راس سهمی را با استفاده از فرمول $y_s = -\frac{\Delta}{4a}$ بدست می آوریم.

گام ۳: مختصات نقطه ی راس به دست آمده را در معادله خط یا منحنی که راس سهمی روی آن قرار دارد جایگذاری می کنیم تا پارامتر مورد نظر یا مجهول بدست آید.

تذکر: اگر دو مقدار برای پارامتر یا مجهول بدست آید با توجه به شرایط مساله مقدار قابل قبول را انتخاب می کنیم.

تست: نقطه ی مینیمم تابع با ضابطه ی $y = x^2 + 2ax + 6$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

تست: به ازای کدام مقدار a ، نقطه ی مینیمم نمودار تابع $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط به معادله ی $y = 1$ واقع است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

مقایسه یک عدد با ریشه های معادله درجه دوم:

اگر در معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ مقدار $\Delta > 0$ باشد یعنی معادله درجه دوم دو ریشه متمایز داشته باشد و

$\begin{cases} af(k) < 0 \\ af(k) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ یک عدد حقیقی و متمایز از ریشه ها باشد داریم:

تست: حدود m کدام باشد که عدد ۱ بین دو ریشه معادله $mx^2 - 2x - 1 = 0$ باشد.

- (۱) $2 < m < 3$ (۲) $0 < m < 3$ (۳) $-2 < m < 2$ (۴) $-3 < m < 3$

نتیجه: برای اینکه یک ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ بین دو عدد حقیقی m, n باشد لازم و کافی است:

$$\begin{cases} af(m)f(n) < 0 \\ or \\ f(m)f(n) < 0 \end{cases}$$

تست: به ازای چه مقدار m یکی از ریشه های معادله $x^2 - (m-1)x + 2 = 0$ بین دو عدد ۲ و ۱- است؟

$$(1) -2 < m < 4 \quad (2) -1 < m < 3 \quad (3) 0 < m < 3 \quad (4) m < -2 \text{ or } m > 4$$

تشخیص علامت Δ, b, a, c با توجه به نمودار:

• برای تشخیص علامت Δ کافیه به تعداد نقاط سهمی با محور x ها توجه کنیم:

اگر سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کند (دو ریشه ساده) $\Delta > 0 \iff$

اگر سهمی در یک نقطه محور x ها را قطع کند (یک ریشه مضاعف) $\Delta = 0 \iff$

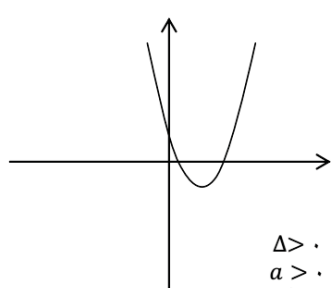
اگر سهمی محور x ها را قطع نکند (ریشه حقیقی ندارد) $\Delta < 0 \iff$

✓ اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد $a > 0$ و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد $a < 0$

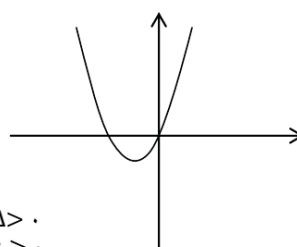
➤ برای تشخیص علامت b باید به مثبت یا منفی بودن طول راس سهمی یعنی $x_s = -\frac{b}{2a}$ از روی شکل توجه کنیم.

❖ c عرض از مبدا سهمی است یعنی به محل تقاطع با محور y ها توجه می کنیم.

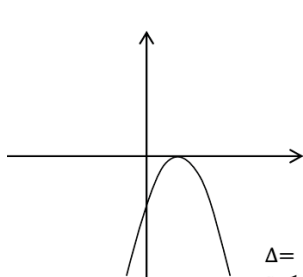
مثال: نمودار تابع درجه ۲ شبیه شکل های زیر است. مطلوب است علامت های Δ, b, a, c



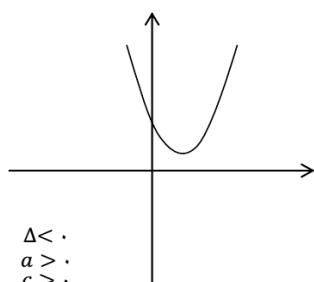
$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ a &> 0 \\ c &> 0 \\ b = ? \rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} &> 0 \\ \xRightarrow{a > 0} b &< 0 \end{aligned}$$



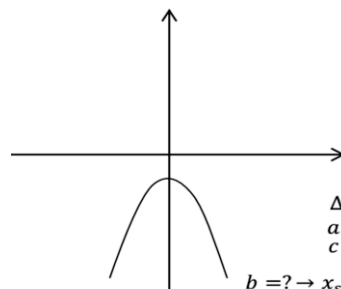
$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ a &> 0 \\ c &< 0 \\ b = ? \rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} &< 0 \\ \xRightarrow{a > 0} b &> 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ a &< 0 \\ c &> 0 \\ b = ? \rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} &> 0 \\ \xRightarrow{a < 0} b &> 0 \end{aligned}$$



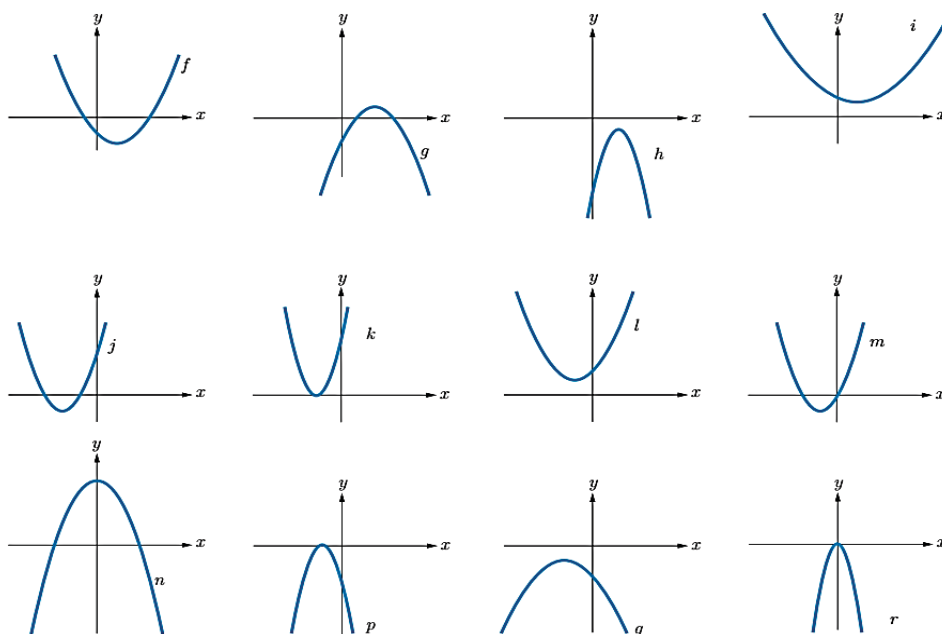
$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ a &> 0 \\ c &< 0 \\ b = ? \rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} &> 0 \\ \xRightarrow{a > 0} b &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ a &< 0 \\ c &< 0 \\ b = ? \rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} &> 0 \\ \rightarrow b &= 0 \end{aligned}$$

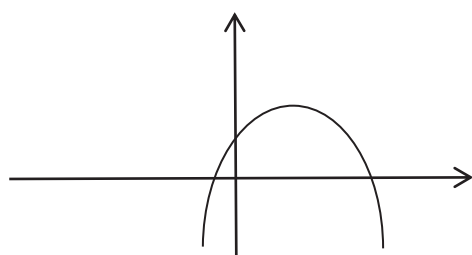
Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

مثال: با توجه به نمودارهای داده شده جدول زیر را کامل کنید.



ویژگی \ تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			-	
b	-							+			-	
c	-							۰			-	
تعداد ریشه ها	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

تست: کدام معادله ی زیر می تواند مربوط به نمودار شکل مقابل باشد؟



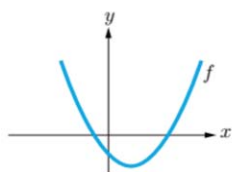
$$y = 2x^2 - x + 1 \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4 \quad (2)$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \quad (3)$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1 \quad (4)$$

تست: شکل زیر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه ی زیر همواره درست است؟



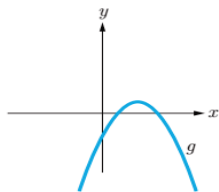
(۱) $a + b > 0$

(۲) $a + b < 0$

(۳) $b + c > 0$

(۴) $b + c < 0$

تست: نمودار سهمی $g(x) = mx^2 + 8x - 2$ به صورت زیر است. m چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟



(۴) ۱۰

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۷

تست: در یک سهمی، راس به مختصات $(3, -7)$ است و سهمی محور x ها را در دو نقطه، یکی به طول مثبت و دیگری به طول منفی قطع می کند. اگر معادله ی سهمی بصورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، آنگاه از میان a, b, c کدام یک باید مثبت باشند؟

(۱) فقط a

(۲) فقط b

(۳) فقط c

(۴) b, a

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله ی $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی، قطع می کند؟

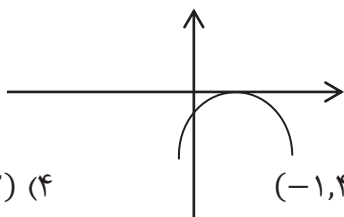
(۱) $m > 2$

(۲) $-1 < m < 2$

(۳) هر مقدار m

(۴) هیچ مقدار m

تست: شکل زیر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx - 1$ است. کدام دوتایی برای (a, b) قابل قبول است؟



(۴) $(-1, 2)$

(۳) $(-1, 4)$

(۲) $(-2, -1)$

(۱) $(1, -2)$

وضعیت نمودار با نواحی مختصاتی:

برای بررسی وضعیت سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ با نواحی مختصاتی، ابتدا شکلی مطلوب از شرایط داده شده رسم کرده، سپس با توجه به نمودار رسم شده، علامت ضرایب معادله را می یابیم. به حالت های a , Δ در زیر توجه کنید.

الف) حالت های a و نواحی مختصاتی:

$a > 0$	$a < 0$
ختم شده به نواحی اول و دوم	ختم شده به نواحی سوم و چهارم

ب) حالت های Δ و نواحی مختصاتی:

$\Delta > 0$				$\Delta < 0$	
از چهار ناحیه عبور می کند نتیجه: $ac < 0$	از ۳ ناحیه عبور می کند.	از ناحیه اول و دوم عبور می کند.	$a > 0, \Delta \leq 0$ از ناحیه اول و دوم عبور می کند.	$a < 0, \Delta \leq 0$ از ناحیه اول و دوم عبور می کند.	

مثال: اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 3x + 2m - 3$ از هر چهار ناحیه ی دستگاه مختصات عبور کند، حدود m را بیابید.

مثال: اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^2 + x + a - 1$ فقط از ناحیه ی چهارم و مبدا عبور نکند، حدود a را بیابید.

تست: به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a + 2)x$ فقط از ناحیه دوم مختصات نمی گذرد؟

$$(1) a \leq -2 \quad (2) a < -2 \quad (3) a \geq -2 \quad (4) -2 \leq a < 0$$

تست: به ازای کدام مقادیر $y = (1 - m)x^2 + x + m - 2$ نمودار تابع از هر چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

(۱) $m < 1$ (۲) $m > 2$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 2$

تست: به ازای کدام مقادیر m منحنی به معادله $y = (m + 2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه مختصات می گذرد؟

(۱) $m < -2$ (۲) $m < -1$ (۳) $-1 < m < 1$ (۴) $-4 < m < -2$

تست: نمودار سهمی به معادله $y = 2x^2 - 8x + 1$ از کدام ناحیه ی محورهای مختصات نمی گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

تست: نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

(۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۳

تست: در ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = mx^2 + (m - 1)x$ از ناحیه ی سوم محورهای مختصات نمی گذرد؟

(۱) $m \leq 1$ (۲) $0 \leq m \leq 1$ (۳) $m \geq 1$ (۴) $1 \leq m \leq 2$

تست: حدود m کدام باشد تا مینیمم تابع $y = mx^2 + 2x + 2m - 1$ در ناحیه سوم قرار گیرد؟

(۱) $m > 0$ (۲) $-1 < m < \frac{1}{4}$ (۳) $0 < m < 1$ (۴) $-\frac{1}{4} < m < 0$

مثال: اگر نمودار تابع $y = x^2 - mx + m - 3$ از ناحیه های اول و دوم و سوم عبور کند حدود m کدام است؟

معادله درجه سوم:

فرم کلی معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ است. روش حل مناسب و دقیق برای حل معادله درجه سوم وجود ندارد. بنابراین به حالت های خاص معادله درجه سه می پردازیم.

حالت اول: $a + b + c + d = 0$ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

حالت دوم: $a + c = b + d$ $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

حالت سوم: $d = 0$ $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

حالت چهارم: روش دسته بندی و فاکتورگیری: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

مثال: معادله های زیر را حل کنید. ۱) $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$

۲) $x^3 - 3x^2 + 3x = 9$

تمرین: ریشه های حقیقی معادله $x^3 - 2x + 1 = 0$ چگونه اند؟

۱) ریشه مضاعف مثبت-یک ریشه منفی ۳) ریشه مضاعف منفی-یک ریشه مثبت

۲) یک ریشه مثبت-دو ریشه منفی ۴) یک ریشه منفی-دو ریشه مثبت

تست: اگر $x = 4$ یکی از جواب های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب ندارد

تست: معادله $\sqrt{x} - x + 6 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست: حاصلضرب ریشه های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

ادامه ی بحث تعیین علامت:

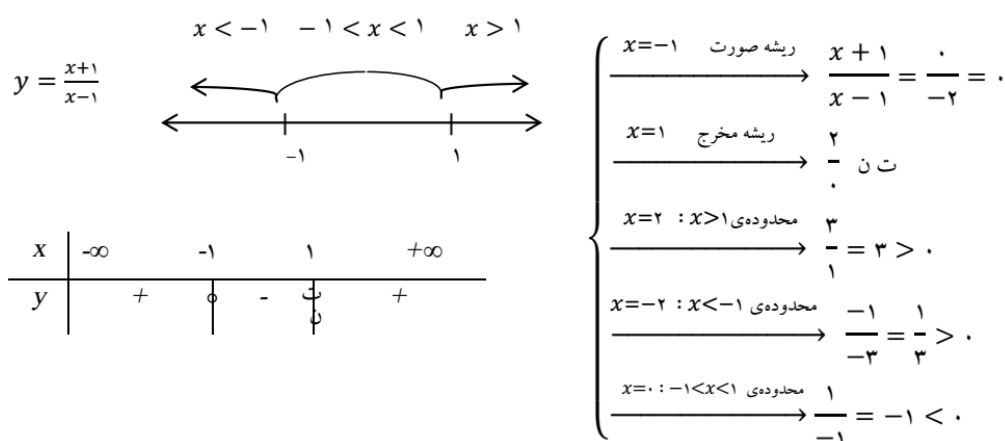
مفهوم تعیین علامت یک عبارت: تعیین علامت عبارت یعنی عبارت را از لحاظ علامت تعیین تکلیف کنیم. در بحث تعیین علامت، یک عبارت می تواند ۳ وضعیت داشته باشد:

- الف: مثبت باشد. ب: منفی باشد. ج: فاقد علامت باشد:
۱ - صفر شود مثل ریشه صورت
۲ - تعریف نشده شود مثل ریشه مخرج

تذکر: برای تشخیص اینکه عبارت کجاها مثبت یا منفی است (مرز علامت ها) کافیست ریشه های صورت و مخرج را پیدا کرده و روی یک محور نشان دهیم.

مثال: تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را تعیین علامت کنید.

چون هنوز قواعد تعیین علامت را نخوانده ایم با عدد گذاری این عبارت را تعیین علامت کنیم.



مثال: با توجه به جدول زیر مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را به صورت بازه بنویسید.

x	$-\infty$	a	b	c	d	$+\infty$
y	-	0	-	0	-	+

دید نموداری تعیین علامت:

الف: تابع مثبت باشد یعنی نمودار بالای محور x هاست.

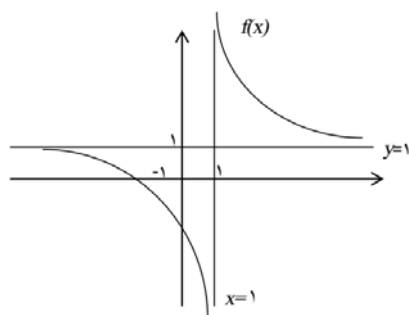
ب: تابع منفی باشد یعنی نمودار زیر محور x هاست.

۱ - تابع صفر شود (تقاطع با محور x ها)

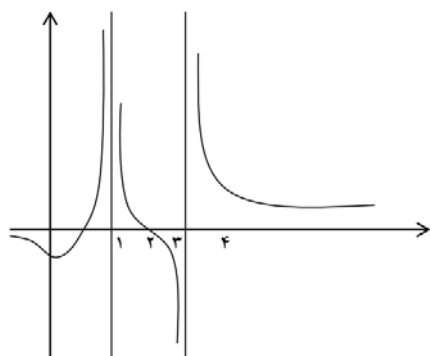
ج: تابع فاقد علامت باشد یعنی:

۲ - تابع تعریف نشده شود (ریشه های مخرج که مجانب قائم اند)

مثال: نمودار $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ شبیه شکل مقابل است. جدول تعیین علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



مثال: نمودار تابع $g(x)$ شبیه شکل مقابل است. جدول تعیین علامت $g(x)$ را تشکیل دهید.



مثال: علامت عبارت $A = (2x - 1)(3 - x)$ را برای x های مختلف تعیین کنید.

نکته: برای تعیین علامت عبارت هایی که به صورت حاصل ضرب و یا تقسیم چند عبارت دیگر باشد، باید هر یک از عبارت ها را تعیین علامت کرده و نتیجه را در یک جدول مشخص کنیم. سپس علامت عبارت اولیه را از ضرب و تقسیم علامت ها به دست آوریم.

$$۱) A = (3x + 1)(x - 2)$$

مثال: هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۲) B = (2x - 3)^2$$

$$۳) C = x^2(7 - x)$$

$$۴) D = \frac{x-1}{5-2x}$$

تذکر: توان فرد در تعیین علامت تاثیری ندارد.

تذکر: توان زوج در تعیین علامت همواره نامنفی است.

مثال: عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) p(x) = \frac{-x+1}{2x-1}$$

$$۲) p(x) = \frac{(x-1)(2-x)^2}{|x+3|(x+2)^3}$$

نکته: در جدول تعیین علامت می توان عبارت نامنفی (صفر یا مثبت) را حذف کرد. (فقط ریشه های آن ها را در صورت وجود در جدول قرار می دهیم).

نکته: عبارات نامنفی عبارتند از:

۱) عبارات با توان زوج $(x-a)^2$ مانند:

۲) عبارات قدر مطلق $|x-a|$ مانند:

۳) عبارات رادیکالی با فرجه زوج $\sqrt[n]{x-a}$ مانند:

۴) عبارات رادیکالی مانند $\sqrt[n]{(x-a)^{2n}}$ فرد

نکات خیلی مهم در تعیین علامت:

۱- عبارات جبری در ریشه های ساده و مکرر مرتبه فرد تغییر علامت می دهند.

۲- عبارات جبری در ریشه های مضاعف ، مکرر مرتبه زوج و ریشه های قدرمطلق تغییر علامت نمی دهند.

۳- عبارات همواره مثبت مانند $(|5-x|)$ ، x^2+1 ، x^2+x+1 ، $2+\sin x$ که بصورت ضرب یا تقسیم در عبارات وجود دارند در تعیین علامت نقشی ندارند.

۴- برای تعیین علامت ستون آخر سمت راست جدول، کافی است علامت های ضرایب بیشترین توان های x را در هم ضرب کنیم.

$$۱) P = x^2 - 2x - 3$$

$$۲) P = -x^2 + 6x - 9$$

$$۳) \quad P = -x^2 - x - ۱$$

$\Delta < ۰$ (ریشه ندارد)

$$۴) \quad -۶x^2 + ۶x + ۱۲$$

$$P = -۶(x^2 - x - ۲)$$

$$۵) \quad P = -۴x^2 + ۱۲x^2$$

$$-۴x^2(x - ۳)$$

$$۶) P = (x - ۱)(\underbrace{x^2 + x + ۲}_{\text{همواره مثبت}})$$

همواره مثبت
۸ -

$$۷) \quad P = ۴x^2 + ۶x$$

$$P = ۲x(\underbrace{۲x^2 + ۳}_{\text{همواره مثبت}})$$

همواره مثبت

$$۸) \quad P = -۴(x - ۲)^2$$

$$p(x) = ۱۵x^4 - ۷۵x^2 + ۶۰$$

$$۹) \quad P = ۱۵x^4 - ۷۵x^2 + ۶۰$$

$$P = ۱۵(x^4 - ۵x^2 + ۴)$$

$$P = ۱۵(x^2 - ۱)(x^2 - ۴)$$

$$۱۰) \quad ۳(\underbrace{x^2 - ۱}_{\text{همواره مثبت}})^2(۲x)$$

همواره مثبت

$$\begin{aligned} ۱۱) \quad P &= ۴x^۳ - ۶x^۲ \\ P &= ۲x^۲(۲x - ۳) \end{aligned}$$

$$۱۲) P = ۴(x - ۱)(x^۲ - ۵x + ۶)$$

$$۱۳) P = ۴(x - ۲)(x^۲ - ۷x + ۱۲)$$

$$۱۴) P = (x + ۲)(-x^۲ + ۶x - ۹)$$

$$\begin{aligned} ۱۵) \quad P &= ۱۵x^۴ - ۱۵x^۳ \\ P &= ۱۵x^۳(x - ۱) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۶) \quad P &= -۴x^۳ + ۱۲x^۲ \\ P &= ۴x^۲(-x + ۳) \end{aligned}$$

$$۱۷) P = ۴(x - ۱)(x^۲ + x - ۲)$$

$$\begin{aligned} ۱۸) \quad P &= ۴x^۳ - ۵x^۴ \\ &= x^۳(۴ - ۵x) \end{aligned}$$

$$۱۹) \quad P = -4x^2 + 24x^2 - 36x$$

$$P = -4x(x^2 - 6x + 9)$$

$$۲۰) \quad P = -12x^2 + 48x - 36$$

$$P = -12(x^2 - 4x + 3)$$

$$p(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$۲۲) \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$۲۳) \quad \frac{3x^2 - 3x}{x^2 - 1}$$

همواره مثبت (ریشه ندارد $\Delta < 0$)

$$۲۴) \quad \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 1)\boxed{(-x^2 - 1)}}$$

همواره منفی (ریشه ندارد)

$$۲۷) \quad P = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 4} \rightarrow \text{همواره مثبت } (\Delta < 0)$$

$$p(x) = \frac{x(x - 2)^2}{x^2 + x - 2}$$

$$p(x) = \frac{3x^2}{-x^2 + 1}$$

مثال: عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) \quad p(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{(x^2-4x)} =$$

$$۲) \quad p(x) = \frac{x^2-x}{(x+1)(x+2)} =$$

$$۳) \quad p(x) = \frac{-x^2+6x-9}{3x+2} =$$

$$۳) \quad p(x) = \frac{-x^2+6x-9}{x^2+x+3} =$$

$$۳) \quad p(x) = \frac{x^2+2x+3}{2x-1} =$$

$$۴) \quad p = (x^2-x+6)(x^2+7x+12)$$

$$۵) \quad p(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2-4x+4} =$$

$$p(x) = \frac{2x^2+4x+3}{x^2-4x+4}$$

$$p(x) = \frac{3x^2}{-x^2+1}$$

$$p(x) = \frac{(4-x)^2(x-1)^2}{|x+2|} =$$

$$p(x) = \frac{1-x^2}{(x^2-4)(x+3)} =$$

$$۶) \quad p = (x^2-3x)(x^2+4x+3)^2$$

نامعادلات غیر کسری درجه اول (مجهول در مخرج نباشد)

در یک نامعادله اگر عبارت درجه یک باشد و مجهول در مخرج نباشد بدون نیاز به تعیین علامت می توان آن را حل کرد.
برای حل این نامعادلات از خواص زیر استفاده می کنیم تا مجهول تنها شود.

۱- خاصیت جمع:

به طرفین یک نامعادله می توان یک عبارت را اضافه یا از طرفین نامعادله یک عبارت کم کرد.

$$\text{if } A < B \rightarrow A + C < B + C \quad A, B, C : \text{عبارت های جبری}$$

۲- خاصیت ضرب:

الف) اگر طرفین یک نامعادله را در یک عبارت مثبت ضرب کنیم جهت نامعادله تغییر نمی کند به عبارت دیگر:

$$\text{if } A > B, c > 0 \rightarrow AC > BC$$

ب) اگر طرفین یک نامعادله را در یک عبارت منفی ضرب کنیم جهت نامعادله عوض می شود. به عبارت دیگر:

$$\text{if } A > B, c < 0 \rightarrow AC < BC$$

مثال: نامعادله ی $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل کنید.

مثال:

$$\begin{aligned} 1) \quad 3x + 3 < 0 &\Rightarrow 3x < -3 \rightarrow x < -1 \\ 2) \quad \frac{4}{5}x - 2 \geq 0 &\xrightarrow{\times 5} 4x - 10 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 10 \rightarrow x \geq \frac{10}{4} \\ 3) \quad \frac{x+1}{2} \geq 2x-1 &\xrightarrow{\times 2} x+1 \geq 4x-2 \Rightarrow -3x \geq -3 \\ &\xrightarrow{\div (-3)} x \leq 1 \end{aligned}$$

جهت عوض می شود

یادآوری: اگر طرفین یک نامعادله را در یک عدد منفی ضرب کنیم یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم جهت نامعادله عوض می شود.

$$\begin{aligned} 4) \quad -\frac{x}{3} + 1 \leq 2x - \frac{5}{2} &\xrightarrow{\times 6} -2x + 6 \leq 12x - 15 \Rightarrow 14x \leq -21 \xrightarrow{\div (-14)} x \geq \frac{21}{14} \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ 4x + 11 \geq 5x + 3 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{3} - 4x < \frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x-1}{4} \geq \frac{x}{3}$$

نامعادلات دوگانه:

برای حل نامعادلاتی مانند عبارات زیر می توانیم به دو روش عمل کنیم:

روش اول: نامعادله را به صورت دو نامعادله ی جدا از هم در یک دستگاه نامعادلات نوشته و جواب هر کدام را پیدا می کنیم، سپس بین جواب های به دست آمده اشتراک می گیریم.

روش دوم: حل با استفاده از خواص جمع و ضرب نامعادله ها.

$$-4 < -2x + 3 \leq 2$$

مثال :

$$2 < 3x - 1 \leq 5$$

$$0 \leq x + 2 < 3$$

$$-1 \leq -2x + \frac{2}{3} < 5$$

تست: جواب نامعادله ی $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad (2) -1 \leq x \leq 1 \quad (3) -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \quad (4) -2 \leq x \leq 1$$

تست: مجموعه جواب نامعادله $-5 < 3x - 1 \leq 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$(1) 3 \quad (2) 4 \quad (3) 5 \quad (4) 6$$

حل نامعادلات کسری و نامعادلات درجه ۲

برای حل این گونه نامعادلات مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱- همه ی عبارات را به سمت چپ منتقل می کنیم تا سمت راست معادله صفر شود.

۲- با مخرج مشترک گیری عبارت سمت چپ را به یک کسر که صورت و مخرج آن درجه یک یا دو باشند تبدیل می کنیم.

۳- عبارت را تعیین علامت می کنیم.

۴- با توجه به خواسته سوال محدوده جواب را مشخص می کنیم.

$$-x^2 + 6x - 9 > 0$$

مثال:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0$$

$$6x^2 - 6 < 5x$$

$$3x^2 \geq 2x - 5$$

$$-11x \geq 2x^2 + 12$$

$$-x^2 - x + 6 > 0$$

$$2x^2 - 5x \leq 0$$

$$5x^2 - 10x \geq 0$$

$$x^2(x - 3) > 0$$

$$2x^2 - 5x < -3$$

$$(x + 2)^2 - (2x - 1)^2 \geq 8$$

نکته: در نامعادله درجه یک به درجه یک، همه ی عبارت ها را به یک طرف می بریم و ساده می کنیم سپس علامت ضریب x در بالا و پایین را در هم ضرب می کنیم و با علامت نامساوی مقایسه می کنیم و طبق نکته قبل عمل می کنیم:

$$\frac{5x+1}{x-3} \geq 1$$

مثال:

$$\frac{2x-4}{x+2} < 2$$

$$\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$$

$$\frac{x^3-4x}{x^2+5} \leq 0$$

$$\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x-7} > 0$$

توجه: در حل نامعادلات جبری وقتی از علامت های طرفین نامعادله اطلاعی نداریم طرفین وسطین و مکوس کردن مجاز

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

نیست (باید همگی جملات را به یک طرف نامعادله ببریم).

$$\frac{1}{x-x^2} \geq 4$$

$$\frac{4}{x-2} < x-2$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x$$

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$$

$$\frac{3x-3}{x-2} > 0$$

$$\frac{-4x^3+12x^2}{-x^2+6x-9} > 0$$

$$\frac{3x^2-3x}{x^3-1} > 1$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} < 0.$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \geq 0.$$

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 1)(x^2 + 1)} \geq 0.$$

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} < 1$$

$$1 - \frac{1}{x} < x + 1$$

$$\frac{2x - 1}{x} > 1$$

$$\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x - 1} \leq 2$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} < x + 2$$

$$\frac{x^2 - x + 2}{x - 1} < x + 3$$

$$\frac{3x^2 + 8x - 2}{3x - 4} \leq x - 2$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{2x - 1} \leq x + 2$$

$$\frac{2x-3}{x^2+1} \geq 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2} < 0$$

$$\frac{4}{x-2} < x-2$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x$$

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$$

$$\frac{1}{2x^2+x-1} \geq \frac{1}{x^2+1}$$

$$2x-3-\frac{1}{x-5} < x-4-\frac{1}{x-5}$$

$$\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4} \geq 0$$

تست: جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} \geq 2x$ کدام است؟

$$(1) \{x < -1\} \quad (2) \{x > -1\} \quad (3) -1 < x < 1 \quad (4) -2 < x < -1$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

$$(1) \{x < 3\} \quad (2) 1 < x < 3 \quad (3) 2 < x < 3 \quad (4) -2 < x < 3$$

$$0 \leq \frac{3-2x}{5} \leq 1$$

مثال:

$$-1 < \frac{2x-3}{x+2} < 1$$

تست: اگر مجموعه نامعادله $\frac{x-2}{x-4} < \frac{x+2}{x}$ به صورت (a, b) باشد، ماکزیمم b کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱۱ (۳) ۴ (۴) ۳

تست: اگر معادله $\frac{a}{x} + \frac{2x-2}{x+1} = 1$ جواب حقیقی نداشته باشد، آنگاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(9, +\infty)$ (۲) $(1, 9)$ (۳) $(-1, 9)$ (۴) $\emptyset$

نکته: در نامعادلات پیچیده تر، همه ی عبارت ها را به یک طرف برده و ساده می کنیم، سپس علامت ستون آخر سمت راست را طبق نکته ۴ در بالا تعیین می کنیم و سرانجام در ریشه های ساده و مکرر فرد تغییر علامت می دهیم.

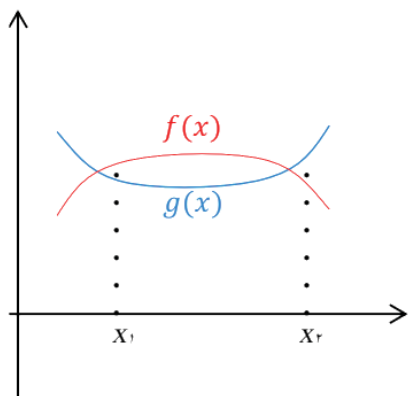
مثال: ۱) $p(x) = \frac{(x^3-1)^{14}(x^2-4)}{(x^2+3x+2)(x^2+1)} \geq 0$

۲) $p(x) = \frac{|3-x|(2x-8)^4}{(x-1)^{15}} < 0$

۴) $p(x) = \frac{(x+1)^2(3-x)}{(x^2+x+2)(3+\sin x)} = 0$

۵) $\frac{x^2+x+2}{x^2-3x+2} < 1$

وضعیت دو نمودار نسبت به هم:



- * اگر نمودار $f(x)$ نمودار $g(x)$ را قطع کند یعنی $f(x) = g(x)$
- * اگر نمودار $f(x)$ بالاتر از نمودار $g(x)$ باشد یعنی $f(x) > g(x)$
- * اگر نمودار $f(x)$ زیر نمودار $g(x)$ باشد یعنی $f(x) < g(x)$
- * اگر نمودار $f(x)$ بالاتر از نمودار $g(x)$ نباشد یعنی $f(x) \leq g(x)$
- * اگر نمودار $f(x)$ زیر نمودار $g(x)$ نباشد یعنی $f(x) \geq g(x)$

$$f(x) = g(x) \implies \{x_1, x_2\}$$

$$f(x) > g(x) \implies (x_1, x_2)$$

$$f(x) \geq g(x) \implies [x_1, x_2]$$

$$f(x) < g(x) \implies (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

$$f(x) \leq g(x) \implies (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$$

تست: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ∞

تست: در بازه $[x_0, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ بالاتر از خط به معادله $y = 3(x - 1)$ قرار نمی گیرد. کمترین مقدار $f(x)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

تست: مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{1}{4}$ می باشد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶

مثال: حدود x را طوری تعیین کنید که:

الف: نمودار $y = x^2 - 4x$ بالاتر از خط $y = x - 4$ قرار بگیرد.

ب: سهمی $y = 2x^2 - 7x + 3$ پایین تر از سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ قرار بگیرد.

مثال: یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد به هوا پرتاب می شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $y = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله ی زمانی ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

مثال: تعداد ضربان قلب پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه ی $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می آید. در چه زمان هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟

تمرین : نامعادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{(2x-1)^2 - (3x+2)^2}{-(4-5x)^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)} > 0$$

تست: عبارت $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$ در مجموعه اعداد حقیقی مثبت و در بازه ی $[a, b]$ نامثبت است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴) \quad \frac{5}{3} \quad (۳) \quad \frac{7}{3} \quad (۲) \quad \frac{8}{3} \quad (۱)$$

تست: کدام یک از عبارات زیر همواره نامثبت است؟

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|} \quad (۴) \quad \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 3} \quad (۳) \quad \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3} \quad (۲) \quad -\frac{2x + 1}{|x - 1|} \quad (۱)$$

تست: به ازای چه حدودی از x عبارت $p(x) = \frac{(x-2)^3(x+2)^2}{|x+2|}$ همواره منفی است؟
 (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, 3)$ (۳) $(-\infty, 2) - \{-2\}$ (۴) $(-\infty, 2] - \{-2\}$

تست: به ازای چه حدودی از m عبارت $\frac{(m+2)x^2+2mx+m-1}{-x^2+3x-4}$ همواره منفی است؟
 (۱) $-2 < m$ (۲) $-2 < m < 2$ (۳) $2 < m$ (۴) $m < 2$

حل دستگاه نامعادلات:

نکته: برای حل دستگاه نامعادلات بعد از حل هر نامعادله بین جواب ها اشتراک می گیریم.

تست: مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} x+2 \leq \frac{2}{x} \\ \frac{x+1}{1-x} > 0 \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $(-1, 1)$ (۲) $[-1, 1)$ (۳) $(-1, 1) \cup (0, 1)$ (۴) $(0, 1)$

تست: اگر مجموعه جواب نامعادله $2x + n < 0$ بازه $(-\infty, 2)$ باشد مجموعه جواب نامعادله $nx + 2 < 0$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۴) $(2, +\infty)$

تست: چند عدد صحیح منفی در نامعادله $2 - \frac{x}{4} < \frac{1+x}{3}$ صدق می کند؟
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بیشمار

تست: اگر A مجموعه جواب نامعادله $2x - 1 > \frac{x+1}{2}$ و B مجموعه جواب نامعادله $4 < \frac{-2x+1}{3} \leq -1$ باشد، حاصل $A \cap B$ کدام بازه است؟

(۱) $(-\frac{11}{2}, 1)$ (۲) $(-\frac{11}{2}, 1]$ (۳) $(-\infty, 2]$ (۴) $(1, 2]$

تست: اگر مجموعه جواب نامعادله $-2x^2 + ax + 4 \geq 0$ بازه $[-2, k]$ باشد $a + k$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

تست: به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

تست: به ازای چه مقداری از m ، معادله $(m-2)x^2 - 2x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه ی حقیقی مثبت و منفی است؟

- (۱) $m < 1$ (۲) $m > 1$ (۳) $2 < m < 5$ (۴) $2 < m < 3$

تست: یک باغبان برای محصور کردن یک زمین مستطیل شکل به طول x ، جهت کاشت سبزیجات، ۱۴۰ متر سیم مصرف کرده است. حدود تغییرات اندازه ی طول این زمین چقدر باشد تا مساحت زمین بیشتر یا مساوی ۸۲۵ متر مربع گردد؟

- (۱) $25 \leq x \leq 70$ (۲) $10 \leq x \leq 35$ (۳) $15 \leq x \leq 55$ (۴) $35 \leq x \leq 55$

تست: مجموعه جواب نامعادله ی $(x^2 + |x| + 3)(x^4 - 81) \leq 0$ در Z چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

تست: حدود تغییرات x در نامعادله ی $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ کدام است؟

- (۱) $-4 < x < 4$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x < -2$ or $x > 2$ (۴) $x < -4$ or $x > 4$

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-2x}{|x|+1} < 0$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۲) $(-2, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(\frac{1}{2}, +\infty) \cup (1, +\infty)$

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{-x^2+3x+10}{x^2-1} > 0$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-5, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -2) \cup (1, 5)$ (۴) $(-\infty, 5)$

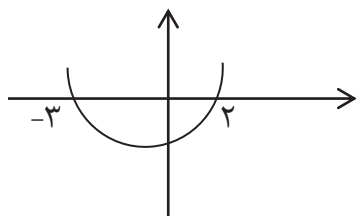
تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام است؟

- (۱) $x < -1$ (۲) $x > -1$ (۳) $-1 < x < 1$ (۴) $-2 < x < -1$

تست: شکل زیر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{ax^2 + bx + c} \geq 0$ کدام است؟



- (۱) $(-3, 0] \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-3, 0] \cup [2, +\infty)$ (۳) $(-3, 2) - \{0\}$ (۴) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \cup \{0\}$

تست: اگر $f(x) = -x^2 + bx + c$ و ریشه های معادله $f(x) = 0$ برابر با $x = -1$ و $x = 3$ باشند، عبارت

$$A = \frac{f(x)}{(x^2 - x + 1)(-x^2 + 4x - 3)}$$

به ازای چند مقدار صحیح x ، منفی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بیشمار

بازه ها:

اگر a, b دو عدد حقیقی و $a < b$ ، $x \in R$:

- ۱) $x \in (a, b) \leftrightarrow a < x < b$
- ۲) $x \in [a, b] \leftrightarrow a \leq x \leq b$
- ۳) $x \in [a, b) \leftrightarrow a \leq x < b$
- ۴) $x \in (a, b] \leftrightarrow a < x \leq b$
- ۵) $x \in [a, +\infty) \leftrightarrow x \geq a$
- ۶) $x \in (a, +\infty) \leftrightarrow x > a$
- ۷) $x \in (-\infty, a] \leftrightarrow x \leq a$

۸) $x \in (-\infty, a) \leftrightarrow x < a$

تست: اگر مجموعه جواب نامعادله $-\frac{1}{4} < 2 - 2x < x - 1$ بصورت (a, b) باشد $b - a$ در این صورت کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

تست: اگر $A = \{x \in R : -1 < \frac{x-1}{3} < 2\}$ و $A = \{x \in R : |x+1| < 2\}$ ، $A \cup B$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

تست: مجموع جواب های معادله $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

تست: مجموع جواب های معادله $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, \frac{1}{2}) \cup (2, 4]$ (۲) $(-1, 2]$ (۳) $[-2, \frac{1}{2})$ (۴) $[-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$

تست: منحنی به معادله $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ در کدام بازه زیر محور x ها است؟

- (۱) $(-2, 3)$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(3, +\infty)$ (۴) $(-2, 1) \cup (1, 3)$

تست: اگر معادله $mx^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه ی مثبت باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $(-3, 1)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) $\emptyset$

تست: به ازای کدام مقادیر m ، معادله $mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0$ دو ریشه ی متمایز منفی دارد؟

- (۱) $-\frac{1}{4} < m < 0$ (۲) $m > 2$ (۳) $0 < m < \frac{1}{4}$ (۴) $-1 < m < -\frac{1}{4}$

منابع:

- ۱- جزوه ریاضی آقای حبیب هاشمی
- ۲- جزوه ریاضی گروه آموزشی دانشگاه تهرانی ها
- ۳- جزوه ریاضی آقای مهدی جعفری کیا
- ۴- جزوات مکتبستان