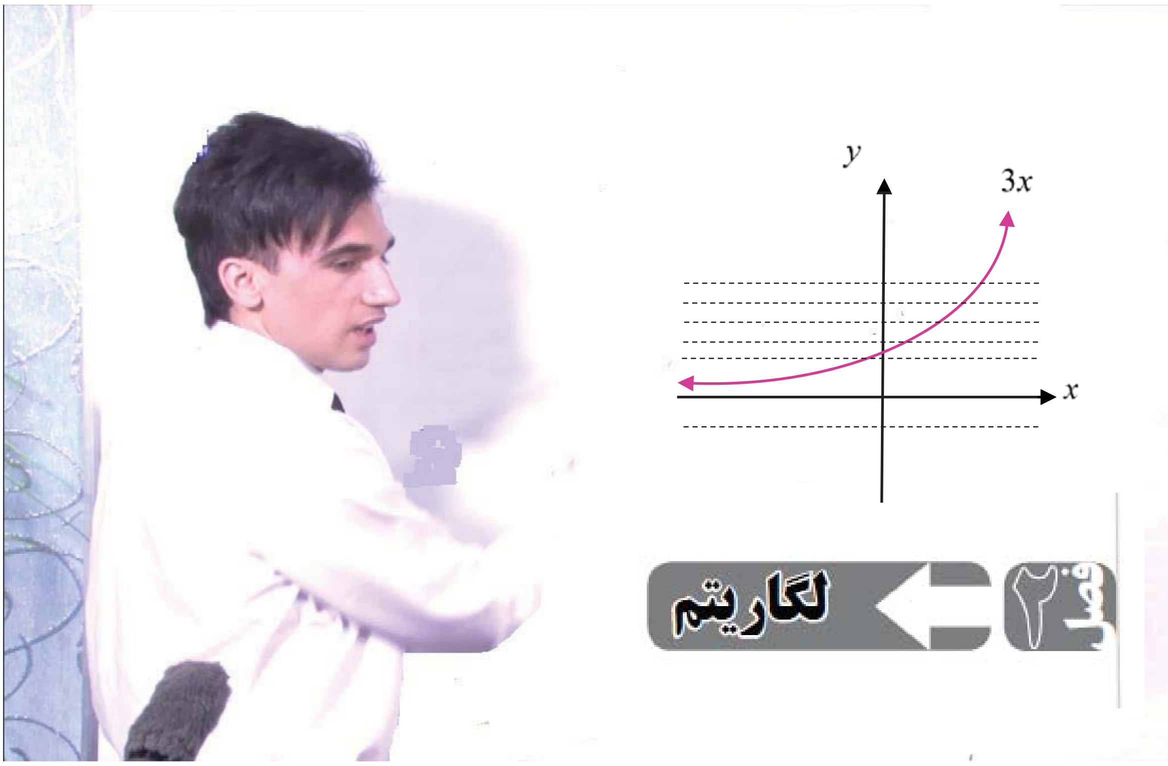
ریاضی یازدهم (فصل پنجم)

لگاریتم و خواص آن

دانشمندان اخیراً موفق به کشف دور ترین کهکشان در محدوده شناخته شده جهان هستی شدند. این کهکشان که JD 0647 MACS - نام گذاری شده، تقریبا 13 / 3 میلیارد سال نوری با ما فا صله دارد و از نظر اندازه، جزء کوچکی از کهک شان راه شیری ا ست. به گفته داذ شمندان با توجه به سرعت نور در فضا، آنچه که اکنون ما از زمین می‌بینیم، متعلق به زمانی است که دنیا تنها 420 میلیون سال سن داشته است. شاید جالب باشد بدانید که سن فعلی جهان حدود 13 / 75 میلیارد سال است. کار با این گونه اعداد بزرگ وقت و انرژی زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد: اختراع لوگارتم تا قبل از ظهر کامپیوتر کمک مؤثری در ت سهیل این محا سبات داشته است. امروزه در حسابداری، کیمیا، فیزیک و... مورد استفاده قرار می‌گیرد



روزی در دوران تحصیل استاد دانشگاه ما که دوکتورا از ریاضیات داشت گفت:

«چه کسی می‌داند کدام موضوع از ریاضیات است که به گفته لاپلاس طول عمر اختر شناسان را چند برابر کرده است؟»

او همچنین گفت: به نظر من این موضوع نه تنها طول عمر اختر شناسان، بلکه عمر دریانوردان ، بازرگانان ، کیمیا دانان، ریاضیدانان ، زمین شناسان و همه انسان های روی کره زمین را چند برابر کرده است.
طرح این سوال موجب تعجب همصنفی ها شده بود و همه کنجکاو بودند که این چه موضوعی از ریاضی است که موجب افزایش طول عمر می‌شود.
یکی از محصلین گفت: تا کنون فکر می‌کردم موضوعاتی که در زمینه افزایش طول عمر کار می‌شود مربوط به حوزه زیست‌شناسی است. برای شما باید جالب باشد بدانید ارتباط این موضوع با ریاضی چیست.

استاد دانشگاه گفت: این موضوع در بسیاری از شاخه های علوم نیز کاربرد دارد و برای آشنایی با این موضوع بهتر است

ابتدا به توابع نمایی یا اکسپوننشیل اشنا شویم تا بدانیم موضوعی بنام لوگارتم است که طول عمر انسان ها را زیاد کرده است .

فصل پنجم ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

۱ تابع نمایی و ویژگی‌های آن

معرفی تابع نمایی

هرگاه a یک عدد حقیقی مثبت و $a \neq 1$ باشد یعنی $(a>0, a\neq 1)$ در این صورت $f(x)=a^x$ را تابع نمایی به قاعده a می‌گوئیم.

$$a \in IR^+ - \{1\} \ x \in R \ f: IR \to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

به عنوان مثال توابع $f(x)=5^x, g(x)=3^{-x}, h(x)=(\sqrt[6]{5})^{3x}$ همگی توابع نمایی هستند و توابع $g(x)=(-\sqrt{x})^x$ و $h(x)=(1)^{2x-1}$ نمایی نمی‌باشند.

خواص توابع نمایی (اکسپوننشیل)

با استفاده از معلومات قبلی خواص توابع اکسپوننشیل را به شکل زیر بیان می کنیم:

1- در هر توابع اکسپوننشیل ناحیه تعریف اعداد حقیقی و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی مثبت است.

2- توابع اکسپوننشیل $f(x)=a^x$ یک به یک $(injective)$ می‌باشد.

3- هر توابع اکسپوننشیل برای $a>1$ متزاید و برای $a<1$ متناقص است.

4- گراف هر توابع اکسپوننشیل از نقطه $(0,1)$ می گذرد.

5- گراف های توابع اکسپوننشیل $f(x)=a^x$ و $g(x)=a^{-x}$ نظر به محور y متناظر واقع اند.

6- به این ترتیب هر توابع اکسپوننشیل معکوس دارند که به $\log_a x$ نشان داده می شود،
توابع $y=a^x$ و $y=\log_a^x$ معکوس یکدیگر اند.

مثال 1) اگر تابع $f(x)=\left(\frac{2a-1}{3}\right)^{-x}$ یک تابع نمایی باشد. حدود a را به دست آورید.

پاسخ:

شرط اول نمایی بودن، آن است که قاعده مثبت باشد:

$$\frac{2a-1}{3}>0\Rightarrow a>\frac{1}{2} \qquad (1)$$

شرط دوم نمایی بودن آن است که قاعده عدد یک نباشد:

$$\frac{2a-1}{3}\neq 1\Rightarrow a\neq 2 \qquad (2)$$

$$(1)\bigcap(2)\Rightarrow a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)-\{2\}$$

مثال 2) اگر تابع $f(x)=(a^2-2a)^{2x}$ یک تابع نمایی باشد، a در کدام انتروال قرار دارد؟

پاسخ:

شرط اول نمایی بودن، آن است که قاعده مثبت باشد: $a<0$ یا $a^2-2a>0\Rightarrow a>2$

شرط دوم نمایی بودن آن است که قاعده عدد یک نباشد: $a^2-2a\neq 1\Rightarrow a\neq 1\pm\sqrt{2}$

$$\boxed{(1)\bigcap(2)\Rightarrow a\in(-\infty,0)\bigcup(2,+\infty)-\left\{1\pm\sqrt{2}\right\}}$$

مثال 3) به کدام قیمت a ، تابع $f(x)=(2a-1)^x$ یک تابع نمایی است ؟

1) $(\frac{1}{2},+\infty)$ 2) $(\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$ 3) $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 4) R

✓ **پاسخ:** کافی است $(2a-1)$ عددی، مثبت و مخالف یک باشد.

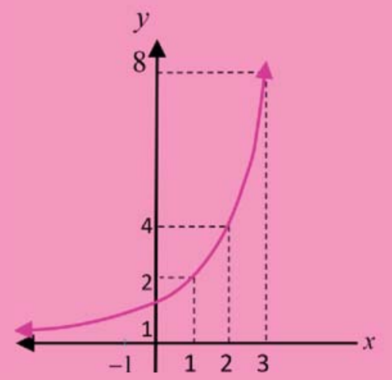
$$\begin{cases}2a-1\neq 1\Rightarrow 2a\neq 2\Rightarrow a\neq 1\\ 2a-1>0\Rightarrow 2a>1\Rightarrow a>\frac{1}{2}\Rightarrow a\in(\frac{1}{2},+\infty)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{a\neq 1} a\in(\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$$

گراف تابع نمایی $y=a^x$ را در دو حالت $(0<a<1)$ و $(a>1)$ مورد بررسی قرار می دهیم.

(1) رسم گراف $y=a^x$ با فرض $(a>1)$

اگر فرض کنیم $a=2$ باشد در این صورت گراف تابع $y=2^x$ را به کمک نقطه یابی در دستگاه مختصات دکارتی رسم می‌کنیم.

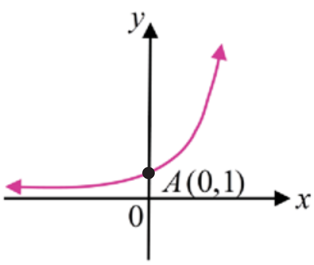


x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

نتایج مهم به دست آمده:

با توجه به شکل رسم شده بالا می توان نتایج کلی زیر را برای تابع $f(x)=a^x$ زمانیکه $(a>1)$ باشد به دست آورد.

(1) گراف کلی توابع که به شکل $y=a^x$ با فرض $(a>1)$ به صورت زیر است :



(2) این گراف همواره دارای عرض از مبدأ «1» خواهد بود.

(3) این گراف فاقد طول از مبدأ است و محور x ها را قطع نمی کند،
زیرا برای $y=a^x$, xای وجود ندارد که آن را صفر کند.

(4) تابعی یک به یک است ، زیرا هر خط موازی محور x ها،
گراف را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.

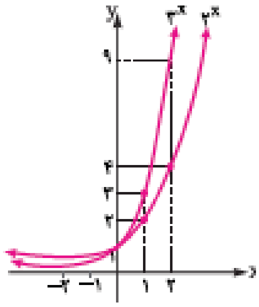
(5) این تابع در $\mathbb{R}$ معکوس پذیر است ، زیرا یک به یک است.

(6) صعودی است (متزاید) ، زیرا با افزایش مقادیر x ، مقادیر y نیز افزایش می‌یابد.

(7) دومین تابع برابر اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و رنج آن $(0,+\infty)$ است.

برای بررسی میزان رشد توابع نمایی و وضعیت قرارگیری توابع نمایی در دستگاه مختصات ، گراف توابع $g(x)=3^x , f(x)=2^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم و باهم مقایسه می‌کنیم .

x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲
۲^x	...	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
۳^x	...	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹



نتیجه‌ی مهم:

اگر $x>0$ باشد ، گراف 3^x بالاتر از 2^x است $\left(3^x>2^x\right)$ ولی اگر $x<0$ گراف 3^x پایین تر از 2^x است $\left(3^x<2^x\right)$. پس به عبارت دیگر در توابع $f(x)=a^x$ باشرط $(a>1)$ اگر عدد a بزرگ تـر شود، در توان های مثبت رشد آن نیز بیشتر شده و گراف آن نیز بالاتر قرار می گیرد ولی در توان های منفی رشد آن کمتر شده و گراف آن نیز پایین تر قرار می‌گیرد.

بیان ریاضی: در توابع $y=a^x$ و $y=b^x$ با شرط $(a>b>1)$

$$(1)\qquad x<0 \Rightarrow a^x<b^x$$
$$(2)\qquad x>0 \Rightarrow a^x>b^x$$

مثال 4) اگر $f(x)=3^x$ باشد، مقدار $f(x+2)-2f(x+1)$ را محاسبه کنید؟

✓ **پاسخ:**

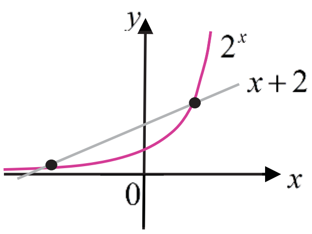
$$f(x+2)-2f(x+1)=3^{x+2}-2\left(3^{x+1}\right)=3^x\times3^2-2\left(3^x\times3^1\right)$$
$$=9\left(3^x\right)-6\left(3^x\right)=3^x(9-6)=3^x\times3=3f(x)=3^{x+1}$$

مثال 5) به کدام قیمت a تابع نمایی $f(x)=(2a-a^2)^x$ ، صعودی است؟

✓ **پاسخ:** شرط صعودی (متزاید) بودن تابع نمایی آن است که قاعده بزرگ تر از عددیک باشد $(a>1)$:

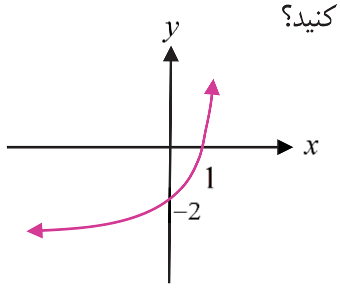
$$2a-a^2>1 \Rightarrow a^2-2a+1<0 \Rightarrow (a-1)^2<0$$ نشدنی و فاقد جواب

مثال 6) تعداد نقاط تلاقی خط $y=x+2$ و گراف تابع $f(x)=2^x$ را تعیین کنید؟



✓ **پاسخ:** تعداد نقاط تلاقی خط $y=x+2$ و تابع $f(x)=2^x$ همان تعداد جذر های معادله $2^x=x+2$ بوده که بهترین راه حل به شیوه رسم گراف (هندسی) است. که با توجه به شکل دارای 2 نقطه تلاقی است.

مثال 7) گراف تابع زیر دارای ضابطه $f(x)=a\times 2^{x+1}+b$ است. $a+b$ را محاسبه کنید؟



$$f(1)=0 \Rightarrow a\times 2^2+b=0 \Rightarrow 4a=-b \qquad (1)$$
$$f(0)=-2 \Rightarrow a\times 2^1+b=-2 \Rightarrow 2a=-b-2 \qquad (2)$$
$$\xrightarrow{(1),(2)} a=1, b=-4 \Rightarrow a+b=-3$$

مثال 8) در کدام یک از جدول های زیر، تابع f رفتار نمایی دارد؟

۱)

x	۱	۲	۴	۸
f(x)	۱	۳	۵	۷

۲)

x	۱	۲	۴	۸
f(x)	۱	۳	۹	۲۷

۳)

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۱	۳	۵	۷

۴)

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۱	۳	۹	۲۷

✓ **پاسخ:** در گزینه‌ی 4 به صورت منظم به فاصله‌ی یک واحد اضافه می‌شوند، هم‌چنین مقادیر $f(x)$ به صورت تغییر می‌کند:

$$1\xrightarrow{\times 3}3\xrightarrow{\times 3}9\xrightarrow{\times 3}27$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، مقادیر $f(x)$ با ضرب یک عدد ثابت در عدد قبلی به دست می‌آیند، لذا این داده ها می‌توانند بیان‌گر رفتار یک تابع نمایی باشند. پس گزینه 4 صحیح است.

مثال 9) با ذکر دلیل، مشخص کنید که آیا داده های زیر در هر جدول ، بیان گر یک تابع نمایی است یا خیر؟

الف)

x	−1	0	1	2
y	−15	1/5	−2	4

ب)

x	0	10	20	30	40	50
y	80	40	20	10	5	2/5

✓ **پاسخ:**

الف)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x	−1	0	1	2
y	−15	1/5	−2	4
	y_1	y_2	y_3	y_4

ملاحظه می‌کنید که مقادیر x , به صورت منظم به فاصله‌ی یک واحد اضافه می‌شود، اما:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2}{y_2}=\dfrac{1/5}{-15}=\dfrac{-1}{10} \\ \dfrac{y_3}{y_2}=\dfrac{-2}{1/5}=\dfrac{-2}{\frac{3}{2}}=\dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

چون $\dfrac{y_3}{y_2}\neq\dfrac{y_2}{y_1}$ ، پس این جدول نمی‌تواند بیان‌گر یک تابع نمایی باشد.

ب)

x	0	10	20	30	40	50
y	80	40	20	10	5	2/5

$$\times\frac{1}{2}\quad\times\frac{1}{2}\quad\times\frac{1}{2}\quad\times\frac{1}{2}\quad\times\frac{1}{2}$$

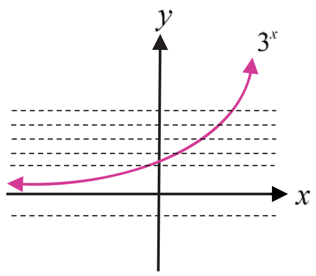
اولاً ملاحظه می‌کنید که مقادیر x به صورت منظم، به فاصله‌ی ده واحد اضافه می‌شود، ثانیاً مقدار هر y ، از ضرب y قبلی در عدد $\dfrac{1}{2}$ به دست می‌آید، پس این جدول ، بیان‌گر یک تابع نمایی است.

نکته: توابع $f(x)=a^x$ چه در حالت $(a>1)$ و چه در حالت $(0<a<1)$ همواره مثبت بوده و بالای محور x ها (خط $y=0$) هستند. همچنین به علت وجود این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که قدر مطلق روی آن ها تأثیری نمی‌گذارد و داریم:

$$f(x)=\left|2^x\right|=2^x \quad \text{و} \quad g(x)\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

مثال 10) معادله $\left|3^x\right|=K+1$ حداکثر دارای چند جذر است؟

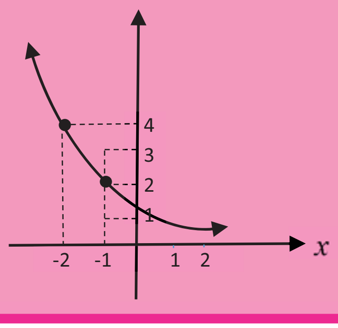
✓ **پاسخ:** بهترین شیوه رسم هردو سمت تساوی است و می دانیم که چون 3^x همواره مثبت است پس قدر مطلق اثری روی آن ندارد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حداکثر جواب یک جذر خواهد بود.



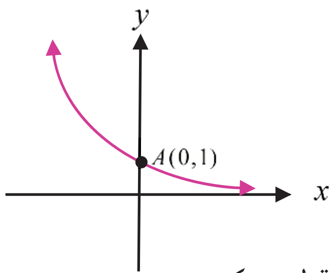
(2) رسم گراف $y = a^x$ $(0 < a < 1)$:

اگر فرض کنیم $a = \frac{1}{2}$ باشد، گراف $y = (\frac{1}{2})^x$ را به کمک نقطه یابی در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

x	$\dots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\dots$
y	$\dots$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\dots$



نتایج مهم به دست آمده:



(1) گراف کلی توابع $f(x) = a^x$ با شرط $(0 < a < 1)$ به صورت مقابل است:

(2) این تابع همواره دارای عرض از مبدأ است.

(3) این تابع فاقد طول از مبدأ است و محور x ها را قطع نمی کند ،
چون توانی از a با شرط $(0 < a < 1)$ وجود ندارد که برابر صفر شود.

(4) این تابع یک به یک است ، چون هر خط موازی محور x ها، آن را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.

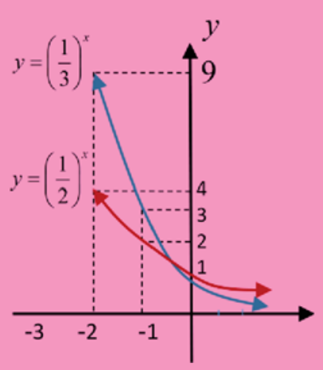
(5) در این تابع در $\mathbb{R}$ معکوس پذیر است ، چون یک به یک است.

(6) از چپ به راست نزولی(متناقص) است چون با افزایش مقادیر x ، مقادیر y مربوط به آن کاهش می‌یابد.

(7) دومین تابع اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و رنج آن اعداد حقیقی مثبت $(0, +\infty)$ است.

برای بررسی میزان رشد توابع نمایی و وضعیت قرارگیری توابع نمایی در دستگاه مختصات، گراف توابع
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده باهم مقایسه می‌کنیم.

x	$\dots$	-2	-1	0	1	2	$\dots$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\dots$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\dots$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\dots$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\dots$



نتیجه مهم:

اگر $x>0$ باشد، گراف $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ بالاتر از $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ است، $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$ و اگر $x<0$ باشد، گراف $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ بالاتر از گراف $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ است، $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$.

به عبارت دیگر در تابع $f(x)=a^x$ با شرط $(0<a<1)$ اگر عدد a بزرگ تر شود، رشد تابع به توان های مثبت بیشتر شده و در نتیجه گراف آن بالاتر قرار میگیرد و در توان های منفی رشد تابع کمتر شده و در نتیجه گراف آن پایین تر قرار می‌گیرد.

بیان ریاضی: در توابع $y=a^x$ و $y=b^x$ با شرط $(0<a<b<1)$ داریم:

$$1)\ x>0 \Rightarrow b^x>a^x$$
$$2)\ x<0 \Rightarrow a^x>b^x$$

نکته: برای مقایسه رشد یا نزول توابع نمایی با قاعده های متفاوت از نکات گفته شده درباره گراف های $f(x)=a^x\,(0<a<1), f(x)=a^x\,(a>1)$ استفاده می‌کنیم. ولی اگر قاعده ها یکسان باشند ویا قابلیت یکسان شدن را داشته باشند، می‌توان رشد یا نزول این توابع را به کمک رشد یا نزول توان های آن‌ها مقایسه کرد.

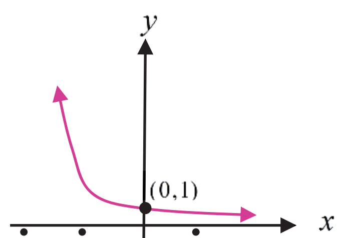
مثال 11 تابع نمایی f با ضابطه $f(x)=\left(\frac{1-a}{2a-1}\right)^x$ به ازای چه مقادیری از a نزولی است؟

✓ **پاسخ:** شرط نزولی بودن تابع نمایی آن است که قاعده آن بین صفر و یک باشد:

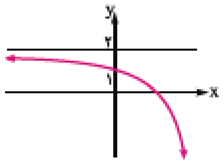
$$0<\frac{1-a}{2a-1}<1\Rightarrow\begin{cases}(1)\quad \frac{1-a}{2a-1}>0\Rightarrow\frac{1}{2}<a<1 \qquad (1)\\ (2)\quad \frac{1-a}{2a-1}<1\Rightarrow\frac{1-a}{2a-1}-1<0\Rightarrow\frac{1-a-2a+1}{2a-1}<0\Rightarrow a<\frac{1}{2}\ \text{یا}\ a>\frac{2}{3}\quad (2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a\in\left(\frac{2}{3},1\right)$$

مثال 12 اگر گراف تابع $y=a^{-x}$ به صورت زیر باشد. رنج تابع $y=-a^x+2$ به دست آورید.



✓ **پاسخ:** می‌دانیم $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ و چون تابع نزولی است، باید $0<\frac{1}{a}<1$ باشد و در نتیجه $a>1$ خواهد بود و تابع $y=-a^x+2$ به صورت زیر خواهد بود.



$\Rightarrow \mathbb{R}=(-\infty,۲)$

مثال 13) اگر در یک تابع نمایی $f(0)=5$ و $f(3)=40$ باشند $f(x)$ را به دست آورید:

✓ **پاسخ:**

$$(1)\quad f(0)=ka^0=5\Rightarrow k=5$$
$$(2)\quad f(3)=40\Rightarrow ka^3=40\Rightarrow 5a^3=40\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$
$$f(x)=5\times 2^x$$

مثال 14) در یک آزمایش مشاهده شده است که کتله یک باکتری در هر لحظه از رابطه $A_t=A_\circ\cdot a^t$ به دست می‌آید که A کتله اولیه A_t کتله باکتری پس از t ساعت می باشد اگر بدانیم کتله باکتری پس از 3 ساعت 729 برابر کتله اولیه اش می‌شود. a کدام است؟

✓ **پاسخ:**

$$t=3\Rightarrow A_3=A_\circ a^3=729A_\circ\Rightarrow a^3=729\Rightarrow a=9$$

مثال 15) در تابع $f(x)=ab^x(b>0)$ داریم $f(-2)=\frac{3}{32}$ و $f(0)=\frac{3}{2}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

1) 6   2) 8   3) 12   4) 24

پاسخ: گزینه 3 صحیح است.

$$(1)\quad f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow a\cdot b^0=a=\frac{3}{2}$$
$$(2)\quad f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow a\cdot b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}\times b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow b=4\Rightarrow f(x)=(\frac{3}{2})(4)^x$$
$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

مثال 16) اگر گراف تابع $f(x)=ab^x-1$ از دو نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $B(1,11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

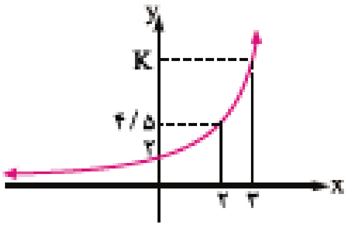
1) $-\frac{3}{4}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{1}{4}$ 4) $\frac{3}{4}$

✓ **پاسخ:**

$$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\Rightarrow a(b)^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow a(b)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow f(x)=3(4)^x-1\Rightarrow f(-1)=-\frac{1}{4}$$

$$f(1)=a(b)^1-1=11\Rightarrow a(b)=12$$

مثال 17) اگر گراف تابع نمایی $f(x)=mA^x$ به صورت زیر باشد، K را محاسبه کنید.



✓ **پاسخ:**

$$f(0)=2\Rightarrow m(A)^0=m=2\Rightarrow f(2)=2\times A^2=4/5\Rightarrow A^2=2/25\Rightarrow A=1/5$$

$$f(x)=2\left(\frac{3}{2}\right)^x\Rightarrow k=f(3)=2\left(\frac{27}{8}\right)=\frac{27}{4}=6/75$$

قوانین اعداد تـوان دار

(1) $a^0=1$	(2) $a^m\times a^n=a^{m+n}$	(3) $a^m\times b^m=(ab)^m$
(4) $a^1=a$	(5) $\frac{a^m}{a^n}=(a)^{m-n}$	(6) $\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m$
(7) $(a^m)^n=a^{mn}$	(8) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$	(9) $a^m\div b^n=\frac{a^m}{b^n}$

نکته:

1) توان طاق علامت عدد یا عبارت را حفظ می‌کند ولی توان جفت همواره خروجی‌اش دارای علامت مثبت است:

$$(1)(\pm a)^{2k}=+a^{2k}$$
$$(2)(\pm a)^{2k+1}=\pm a^{2k+1}$$

2)حاصل $(a^m)^n$ با حاصل a^{mn} برابر است؛ پس: $(a^m)^n\neq a^{m^n}$ و $(a^m)^n=(a^n)^m$

3) برای جمع یا تفریق اعداد توان دار، قوانین خاصی وجود ندارد.

مثال 18) حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $(2/5)^7\times(\frac{5}{2})^3$ ب) $8^{11}\times(\frac{5}{8})^{11}\times\frac{1}{25}$

ج) $(\frac{2}{3})^8\times 6^8\times 2^8$ د) $(0/25)^{10}\div(\frac{3}{4})^7$

✓ **پاسخ:**

الف) $(2/5)^7\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\left(\frac{5}{2}\right)^7\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\left(\frac{5}{2}\right)^{10}=(2/5)^{10}$

ب) $8^{11}\times(\frac{5}{8})^{11}\times\frac{1}{25}=8^{11}\times\frac{5^{11}}{8^{11}}\times\frac{1}{5^2}=5^9$

پ) $(\frac{2}{3})^8\times 6^8\times 2^8=\frac{2}{3^8}^8\times 2^8\times 3^8\times 2^8=2^{24}$

ت) $(0/25)^{10}\div\left(\frac{3}{4}\right)^7=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\div\left(\frac{3}{4}\right)^7=\frac{1}{4^{10}}\times\frac{4^7}{3^7}=\frac{1}{4^3\times 3^7}$

مثال 19) اگر $2^x=10$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

1) 16^{x-1} 2) 4^x+8^x 3) $(2^x-8)^x+2^{2x}$

✓ **پاسخ:**

(الف) $16^{x-1}=(2^4)^{x-1}=2^{4x-4}=2^{4x}\times 2^{-4}=(2^x)^4\times 2^{-4}=(10)^4\times 2^{-4}=\frac{10^4}{16}$

(ب) $4^x+8^x=(2^2)^x+(2^3)^x=(2^x)^2+(2^x)^3=10^2+10^3=1100$

(پ) $(2^x-8)^x+2^{2x}=(10-8)^x+(2^x)^2=2^x+(10)^2=10+10^2=110$

مثال 20) اگر $5^x=10$ باشد حاصل عبارت $\left[((5^x-5)^x-5)^x-5\right]^x$ را به دست آورید.

✓ **پاسخ:**

$$5^x-5=10-5=5\Rightarrow(5^x-5)^x=5^x=10\Rightarrow(10-5)^x=5^x=10\Rightarrow[10-5]^x=5^x=10$$

مثال 21) اگر $\frac{9^{x+y}}{3^{5y}}=243$ برقرار باشد، رابطه بین x و y را به دست آورید.

✓ **پاسخ:**

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}}=243\Rightarrow\frac{(3^2)^{x+y}}{3^{5y}}=243\Rightarrow\frac{3^{(2x+2y)}}{3^{5y}}=243\Rightarrow 3^{2x-3y}=3^5\Rightarrow 2x-3y=5$$

مثال 22) اگر $\frac{4^x}{2^{x+y}}=8$ برقرار باشد، رابطه بین x و y را به دست آورید.

✓ **پاسخ:**

$$\frac{4^x}{2^{x+y}}=8\Rightarrow\frac{(2^2)^x}{2^{x+y}}=\frac{2^{(2x)}}{2^{x+y}}=8\Rightarrow 2^{x-y}=8=2^3\Rightarrow x-y=3$$

مثال 23) اعداد زیر را از کمترین به بیشترین مقدار مرتب کنید.

الف) $2^{-1},\ 2^5,\ 2^{\frac{5}{2}},\ 2^{\frac{3}{2}}$

ب) $2^{-0/3}\ \ 2^{0/3},\ 2^{0/8},\ 2^0$

✓ **پاسخ:**

الف) $\Rightarrow 2^5>2^{\frac{5}{2}}>2^{\frac{3}{2}}>2^{-1}$

) $\Rightarrow 2^{0/8}>2^{0/3}>2^0>2^{-0/3}$

معادلات نمایی (اکسپوننشیل):

در معادلات نمایی پارامتر مجهول و یا عبارتی بر حسب آن در توان دیده می‌شود برای حل راحت‌تر این معادلات آن ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

حالت اول: معادلاتی که در آن پس از ساده سازی در دو طرف تساوی دو عبارت نمایی هم قاعده ایجاد می‌شوند $(a^{f(x)}=a^{g(x)})$ که چون قاعده ها برابر هستند با برابر قرار دادن توان ها مقدار مجهول به دست خواهد آمد.

$a^{f(x)}=a^{g(x)}$ قاعده ها برابر، پس توان ها برابر $\Rightarrow f(x)=g(x)$

حالت دوم: معادلاتی که در آن پس از ساده سازی در یک طرف تساوی یک عبارت نمایی و در طرف دیگر عددی ثابت قرار دارد $(a^{f(x)}=b)$ که برای حل آن نیاز به استفاده از قوانین لوگاریتم ها داریم که در قسمت لگاریتم ها به آن اشاره می‌شود:

$a^{f(x)}=b\Rightarrow$ نیازمند استفاده از قوانین لوگاریتم‌ها

نکته: اگر در معادلات نمایی پس از ساده سازی به یک تساوی دو عبارت نمایی با قاعده های مختلف و توان های مجهول متفاوت برسیم و قاعده ها قابلیت تبدیل شدن به یکدیگر را نداشته باشند. $(a^u = b^t)$ حتما باید توان ها همزمان صفر شوند.

$a^u = b^t \Rightarrow$ قاعده ها و توان ها نابرابر و مختلف $u = t = 0$

مثال 24) تعداد نقاط مشترک دو تابع $f(x) = 2(\frac{1}{2})^{2x+1}$ و $g(x) = \frac{1}{4}(4)^{1-x}$ را تعیین کنید.

✓ **پاسخ:** تعداد نقاط مشترک از برابری دوتابع و به دست آوردن جذر ها نتیجه می‌شود.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2(\frac{1}{2})^{2x+1} = \frac{1}{4}(4)^{1-x} \Rightarrow (2)(2)^{-2x-1} = 4^{-1}(4)^{1-x} \Rightarrow 2^{-2x} = 4^{-x}$$

$\Rightarrow 2^{-2x} = 2^{-2x} \Rightarrow -2x = -2x \Rightarrow$ دو گراف کاملا منطبق بوده و بی‌شمار نقطه مشترک دارند.

مثال 25) فاصله ی نقطه‌ی تلاقی گراف های دو تابع $y = 4^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

1) $\frac{1}{2}\sqrt{78}$ 2) $\frac{1}{2}\sqrt{87}$ 3) $\frac{1}{4}\sqrt{125}$ 4) $\frac{1}{4}\sqrt{137}$

✓ **پاسخ:**

$$\begin{cases} y = 4^x \\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \end{cases} \Rightarrow 4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$$

$$\Rightarrow 2^{2x} = 2^{-2x+3}$$

$$\Rightarrow 2x = -2x + 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

و از آنجا $y = 4^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی $\left(\frac{3}{4}, \sqrt{8}\right)$ از مبدأ برابر ست با:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \xlongequal{x=\frac{3}{4}, y=\sqrt{8}} \sqrt{\frac{9}{16} + 8} = \frac{1}{4}\sqrt{137}$$

گزینه 4 صحیح است

مثال 26) گراف های دو تابع $g(x)=(\frac{1}{9})^x$ و $f(x)=3^{ax+b}$ در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع هستند، اگر $f(2)=\frac{1}{3}$ باشد، $f^{-1}(27)$ را به دست آورید.

✓ **پاسخ:**

$$f(-1)=g(-1)\Rightarrow 3^{-a+b}=(\frac{1}{9})^{-1}=9^{+1}=3^2\Rightarrow b-a=2 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a=-1, b=1\Rightarrow f(x)=3^{-x+1}$$

$$f(2)=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{2a+b}=\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow 2a+b=-1 \qquad (2)$$

$$f^{-1}(27)=A\to f(A)=27\Rightarrow 3^{-A+1}=27=3^3\Rightarrow A=-2$$

مثال 27) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $3^{2x-3}=81$ ب) $4^{2x-1}=8^{x+1}$

پ) $5^{3n-1}=125^{2n+1}$ ت) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2}$

ث) $9^{3y-3}=27^{2y+1}$ ج) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}$

چ) $(0/2)^x=125$ ح) $3^x+3^{x+1}=36$

خ) $\frac{27^x\times 9^{x-2}}{(\frac{1}{3})^{1-x}\times 6^x}=2^{-x}$ د) $(3-2\sqrt{2})^{x^2}=(3+2\sqrt{2})^{-3x}$

✓ **پاسخ:**

الف) $3^{2x-3}=81\Rightarrow 3^{2x-3}=3^4\Rightarrow 2x-3=4\Rightarrow x=\frac{7}{2}$

ب) $4^{2x-1}=8^{x+1}\Rightarrow (2^2)^{2x-1}=(2^3)^{x+1}\Rightarrow 2^{4x-2}=2^{3x+3}\Rightarrow 4x-2=3x+3\Rightarrow x=5$

پ) $5^{3n-1}=125^{2n+1}\Rightarrow 5^{3n-1}=(5^3)^{2n+1}\Rightarrow 3n-1=6n+3\Rightarrow 3n=-4\Rightarrow n=\frac{-4}{3}$

(ت) $5^{3n-1}=125^{2n+1}\Rightarrow 5^{3n+1}\Rightarrow 5^{3n-1}=(5^3)^{2n+1}\Rightarrow 3n-1=6n+3\Rightarrow 3n=-4\Rightarrow n=\frac{-4}{3}$

(ث) $9^{3y-3}=27^{2y+1}\Rightarrow (3^2)^{3y-3}=(3^3)^{2y+1}\Rightarrow 3^{6y-6}=3^{6y+3}$

$\Rightarrow 6y-6=6y+3\Rightarrow -6=3$ فاقد جواب

ج) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}\Rightarrow(2^2)^{3x+2}=(2^{-6})^3\Rightarrow 2^{6x+4}=2^{-18}\Rightarrow 6x+4=-18\Rightarrow x=\frac{-11}{3}$

چ) $(0/2)^x=125\Rightarrow(\frac{1}{5})^x=125\Rightarrow 5^{-x}=5^3\Rightarrow x=-3$

ح) $3^x+3^{x+1}=36\Rightarrow 3^x+3^x\times3=36\Rightarrow 3^x(1+3)=36\Rightarrow 4\times3^x=36\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2$

خ) $\frac{27^x\times9^{x-2}}{(\frac{1}{3})^{1-x}\times6^x}=2^{-x}\Rightarrow\frac{3^{3x}\times3^{2x-4}}{3^{x-1}\times3^x\times2^x}=\frac{3^{5x-4}}{3^{2x-1}\times2^x}=2^{-x}\Rightarrow\frac{3^{3x-3}}{2^x}=2^{-x}\times3^{3x-3}=2^{-x}\Rightarrow 3^{3x-3}=1$

$3x-3=0\Rightarrow x=1$

د) می‌دانیم $\Rightarrow(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=1\Rightarrow(\frac{1}{3+2\sqrt{2}})^{x^2}=(3+2\sqrt{2})^{-3x}\Rightarrow -x^2=-3x\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$

لوگاریتم (LOGARITHM)

تعریف : لوگارتم عبارت از طرز ارائه نوع دیگر از طاقت میباشد و یا این که محاسبه توان مجهول را بنام لوگارتم یاد می کنند.

هرگاه $y=a^x$ داده شده باشد درصورت که و $a\neq1$ باشد درینصورت معادله اکسپوننشیل فوق را به شکل ذیل نیز ارائه کرده می توانیم.

۲ تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

درک شهودی لگاریتم و منطق آن

در ریاضیات پاسخ این سؤال که به عنوان مثال 25 توان چندم عدد 5 است؟» یا « عدد 81 توان چندم عدد 3 است؟» را به کمک لگاریتم تعریف می کنند و برای مورد اول می‌نویسند $\log_5 25=2$ و برای مورد نظر می‌نویسند $\log_3 81=4$ که آن ها ما را به ترتیب لگاریتم 25 در قاعده 5 و لگاریتم 81 در قاعده 3 می‌خوانیم.

مثال 28) حاصل لگاریتم زیر را به کمک منطق آن به دست آورید.

الف) $\log_2 128$ ب) $\log_7 49$ ج) $\log_{10}100$

✓ **پاسخ:**

الف) $\log_2 128=\log_2 2^7=7$ ب) $\log_7 49=\log_7 7^2=2$ ج) $\log_{10}100=\log_{10}10^2=2$

تعریف توابع لوگاریتمی

معکوس تابع اکسپوننشیل به نام تابع لوگاریتمی یاد می شود و هر تابع اکسپوننشیل نیز به نام تابع لوگاریتمی یاد می‌شود.

$f: IR \to R^{+}\ ,\ f(x)=a^{x} \qquad a>0\ ,\ a\neq 1$

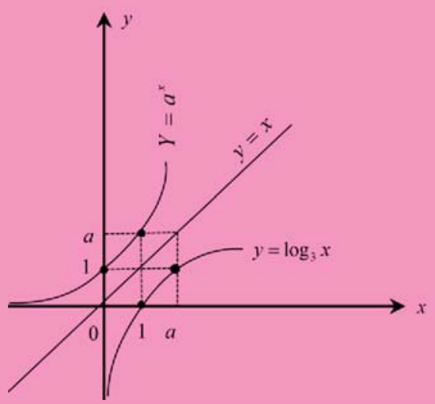
عبارت از تابع لوگاریتمی که قاعده آن a بوده و به شکل ذیل نشان داده می‌شود.

$f^{-1}: IR^{+} \to IR\ ,\ f^{-1}(x)=\log_{a} x \quad , \quad a\in IR^{+} \quad , \quad a\neq 1$

$f(x)=y=a^{x}$

$f^{-1}(x)=x=a^{y}=\log_{a} x=y$

در شکل گراف $f(x)=a^{x}$ و $f(x)=\log_{a}^{x}$ رسم شده ، دیده میشود متناظر همدیگر اند .



خواص تابع لوگاریتمی

1- ساحه تحول تابع لوگاریتمی ست اعداد حقیقی می‌باشد.

2- قسمی که $\log_{a} 1=0$ برای هر قاعده اختیاری است ، پس به این اساس تابع لوگاریتمی تنها یک جذر حقیقی $x_{0}=1$ دارد. بدین ترتیب گراف تابع لوگاریتمی در سیستم مختصات قائم از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد.

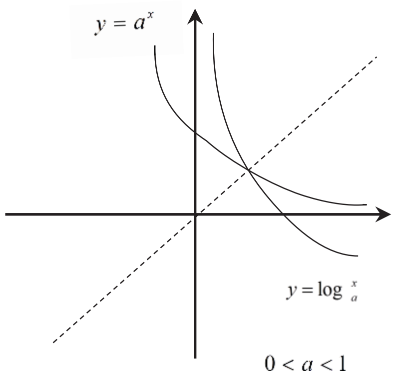
3- هر تابع لوگاریتمی تابعی یک به یک بوده یعنی برای هر $x_{1}\neq x_{2}$ همیشه $f(x_{1})\neq f(x_{2})$ است.

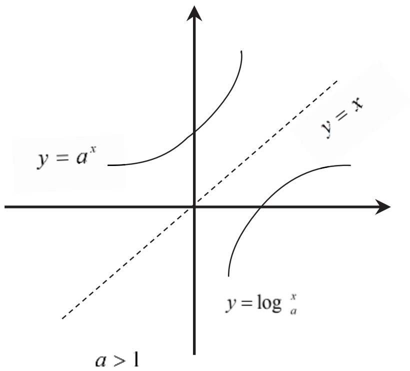
ویژه گی های لوگاریتمی

✓ ترکیب تابع لگاریتم و تابع نمایی، تابع همانی یا عینیت است. یعنی:

ب. $\log_{a}^{a^{x}}=x \quad , \quad x\in R$ الف. $a^{\log_{a}^{x}}=x, x>0$

✓ گراف تابع لگاریتم قرینه گراف $y=a^{x}$ نسبت به خط $y=x$ است.





✓ لگاریتم هر عدد در قاعده خودش 1 است. یعنی $\log_a^a = 1$

✓ لگاریتم یک در هر قاعده که خلاف یک باشد صفر میشود. یعنی $\log_a^1 = 0$

✓ لگاریتم حاصل ضرب دو عدد با مجموع لگاریتم های آنها برابر است. یعنی

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y \quad , \quad x, y > 0$$

✓ لگاریتم خارج قسمت دوعدد برابر است با لگاریتم صورت کسر منفی لگاریتم مخرج کسر. یعنی:

$$\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y \quad , \quad x, y > 0$$

✓ قاعده تغییر قاعده در لگاریتم به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_{a^n}^{x^m} = \log_a^{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{m}{n}\log_a^x$$

✓ اگر قاعده لگاریتم 10 باشد، لگاریتم را اعشاری می‌نامیم. در این صورت نوشتن قاعده ضروری نیست.

✓ اگر قاعده لگاریتم e باشد، لگاریتم را لگاریتم طبیعی یا نپر می‌نامیم و با $\ln$ نمایش می‌دهیم. بنابر این داریم:

$$Lnx = \log_e^x \quad , \quad \log x = \log_{10}^x$$

✓ اعداد منفی لوگارتم ندارند.

✓ لوگارتم صفرتعریف نشده است .

مثال 29) رابطه های نمایی داده شده را به صورت لگاریتمی بنویسید.

1) $3^4 = 81$ 2) $10^{-3} = 0/001$ 3) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ 4) $2^0 = 1$

✓ **پاسخ:**

الف) $3^4=81 \Rightarrow 4=\log_3 81$ ب) $10^{-2}=0/001 \Rightarrow -3=\log_{10} 0/001$

ج) $5^{-2}=\frac{1}{25} \Rightarrow -2=\log_5 \frac{1}{25}$ د) $2^0=1 \Rightarrow 0=\log_2 1$

مثال 30) رابطه های لوگاریتمی داده شده را به صورت نمایی بنویسید.

1) $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2 \Rightarrow 9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 2) $\log_{10}100=2 \Rightarrow 100=10^2$

3) $\log_{64}\frac{1}{8}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8}=(64)^{-\frac{1}{2}}$ 4) $\log_{32}2=\frac{1}{5} \Rightarrow 2=(32)^{\frac{1}{5}}$

مثال 31) مقدار x را چنان تعیین کنید که رابطه $\log_4^{32}=2x-1$ برقرار باشد .

$$32=4^{2x-1} \Rightarrow 2^5=\left(2^2\right)^{2x-1} \Rightarrow 2^5=2^{4x-2} \Rightarrow 5=4x-2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{4}}$$

✓ **پاسخ**

مثال 32) اگر $\log_{16}N=\frac{3}{2}$, N را بدست آورید.

✓ **پاسخ:** با توجه به تعریف لگاریتم داریم:

$$Log_{16}N=\frac{3}{2} \Rightarrow N=16^{\frac{3}{2}}=(2^4)^{\frac{3}{2}}=2^6=64$$

مثال 33) لگاریتم x در قاعده 9 برابر $\frac{3}{2}$ است، $\sqrt[3]{x}$ را محاسبه کنید.

✓ **پاسخ:**

$$\log_9 x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=9^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{به توان } \frac{1}{3}} (x)^{\frac{1}{3}}=\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{x}=9^{\frac{1}{2}}=3$$

مثال 34) اگر $\log_{12}y=\frac{1}{2}$ و $\log_{27}x=\frac{1}{2}$ باشد، x را محاسبه کنید.

✓ **پاسخ:**

$$\left.\begin{array}{l}\log_{27}x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=27^{\frac{1}{2}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}\\ \log_{12}y=\frac{1}{2} \Rightarrow y=12^{\frac{1}{2}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x+y=5\sqrt{3}}$$

مثال 35) اگر $y-x=6$ و $\log_x y=2$ باشد، x را محاسبه کنید.

✓ **پاسخ:**

$$\log_x y=2 \Rightarrow \boxed{y=x^2} \quad (1)$$

$$y-x=6 \xrightarrow{(1)} x^2-x=6$$

$$\Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow \boxed{y=9} \\ x=-2 \Rightarrow \end{cases}$$

نادرست است قاعده لگاریتم باید بزرگتر از 0 باشد

تابع لوگاریتمی

مشاهده شد که تابع نمایی $y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$ در $\mathbb{R}$ یک به یک و معکوس پذیر است. معکوس این تابع همان تابع لگاریتمی است که بصورت $y=\log_a x$ نمایش می‌دهیم.

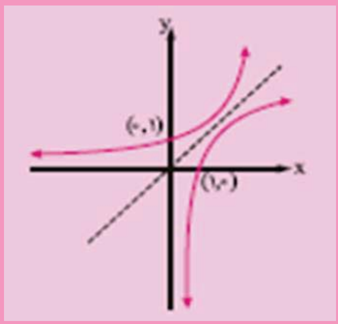
$$y=a^x \xrightarrow[\text{تعریف لگاریتم بدست می آید}]{x \text{ بر حسب } y \text{ با}} x=\log_a y \xrightarrow[\text{عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} y=\log_a x$$

در نتیجه تابع لگاریتمی به عنوان معکوس تابع نمایی تعریف می شود و قاعده آن عدد a همچنان باید دارای شرایط $a>0$ ، $a\neq 1$ بوده و x عدد مثبت باشد.

رسم توابع لوگاریتمی

چون تابع لگاریتمی معکوس تابع نمایی است، بنابر این گراف آن قرینه گراف $y=a^x$ نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ می باشد، که همانند تابع نمایی ، گراف آن در دو حالت $a>0$ (صعودی) و $0<a<1$ (نزولی) مورد بررسی قرار می‌دهیم:

1) **حالت اول : اگر** $a>1$ **باشد** :



با توجه به گراف رسم شده نکات ذیل بدست میآید:

1) این تابع دارای عرض از مبدأ نبوده چرا که لوگاریتم عدد صفر در هیچ قاعده تعریف نمی‌شود

2) این تابع دارای طول از مبدأ 1 است.

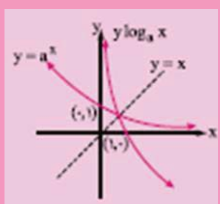
3) این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است، چرا که هر خط موازی محور x های آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه معکوس پذیر است

4) همه‌ی توابع به شکل $y=\log_a x$ ، $(a>1)$ دارای گرافی به شکل داده شده زیر است

5) این تابع از چپ به راست صعودی است، چرا که با افزایش مقادیر x مقادیر y نیز افزایش می‌یابد.

6) $\boxed{R_f=\mathbb{R}}$ و $\boxed{D_f=(0,+\infty)}$

حالت دوم : اگر $0<a<1$:



با توجه به گراف نتایج زیر بدست آید:

1) این تابع فاقد عرض از مبدأ است.

2) این تابع دارای طول از مبدأ 1 است.

3) این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است. چرا که هر خط موازی محور x آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه معکوس پذیر است.

4) همه توابع به فرم $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ دارای گرافی به شکل مقابل هستند.

5) این تابع از چپ به راست نزولی است.

چرا که با افزایش مقادیر x، مقادیر y کاهش می یابند.

6) $\boxed{D_f=(0+\infty)}$ و $\boxed{R_f=R}$

نکته : از صعودی و نزولی بودن توابع لگاریتمی میتوان به نتایج زیر رسید:

الف) $y=\log_a x\left(0<a<1\right)$	ب) $y=\log_a x\left(a>1\right)$

د) $0<a<1: x_2>x_1 \Rightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$	ج) $a>1: x_2>x_1 \Rightarrow \log_a x_2>\log_a x_1$

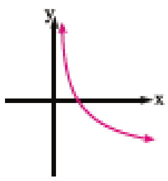
نکته: در هر دو گراف توابع لوگاریتمی ، گراف ها هیچ گاه به خط $x=0$ نمی‌رسند.

نکته: با توجه به آن که گراف های توابع لگاریتمی و نمایی نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند، اگر نقطه $A(a,b)$ روی تابع نمایی باشد، نقطه $A'(b,a)$ روی تابع لگاریتمی معکوس آن خواهد بود.

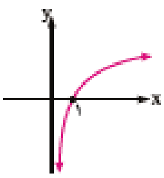
مثال 36) نمودار توابع $f(x)=\log_3 x$ و $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کرده دومین و رنج آن ها را تعیین کنید.

✓ **پاسخ:**

$g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$
$D_g=(0,+\infty)$
$R_g=\mathbb{R}$



$f(x)=\log_3 x$
$D_f=(0,+\infty)$
$R_f=\mathbb{R}$



مثال 37) گراف تابع $y=1+\log_5(x-2)$ محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

✓ **پاسخ:**

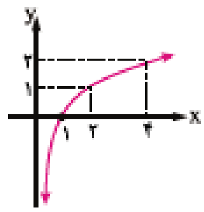
$$y=0 \Rightarrow 1+\log_5(x-2)=0 \Rightarrow \log_5(x-2)=-1 \Rightarrow x-2=5^{-1}=\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{x=\frac{11}{5}}$$

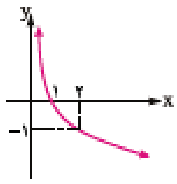
مثال 38) اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x)=\log_a x$ و $f(25)=2$ باشد، $f\left(\sqrt[3]{5}\right)$ را محاسبه کنید.

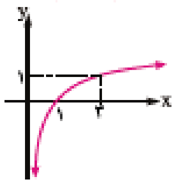
✓ **پاسخ:**

$$f(25)=2 \Rightarrow \log_a 25=2 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5} \Rightarrow f(x)=\log_5 x \Rightarrow f(\sqrt[3]{5})=\log_{5^3}\sqrt{5}=\frac{1}{3}$$

مثال 39) اگر توابع زیر لگاریتمی باشند، ضابطه آن را بنویسید.

الف)


ب)


ج)


✓ **پاسخ:**

الف) $f(x)=\log_a x \Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow \log_a 2=1 \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{f(x)=\log_2 x}$

ب) $f(x)=\log_a x \Rightarrow f(2)=-1 \Rightarrow \log_a 2=-1 \Rightarrow a^{-1}=2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x}$

ج) $f(x)=\log_a x \Rightarrow f(3)=1 \Rightarrow \log_a 3=1 \Rightarrow \boxed{a=3} \Rightarrow f(x)=\log_3 x$

دومین توابع لوگارتمی :

می دانیم که در توابع لوگارتمی $y=\log_a^x$ ، (a به دومین ربطی ندارد و مجموعه ی x نام دومین را به خود میگیرد) قاعده باید مثبت و مخالف یک باشد $(a>0 \;,\; a\neq 1)$ وهم چنین لوگارتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می شود ، پس محاسبه دومین توابع لوگارتمی باید سه شرط ۱) $a>0$ ۲) $x>0$ ۳) $a\neq 1$ هم زمان برقرار باشد . با این شکل نوشتن اشتباه است (چرا که یعنی قاعده هم یک تابع باشد که در این صورت تابع لوگارتمی (مثلا $\log_{\sin x}^x$ لوگارتمی نیست)

مثال 40) دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\log_5\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\dfrac{2x-1}{3}>0\Rightarrow \boxed{x>\dfrac{1}{2}} & \\ 2)5>0 & \checkmark \\ 3)5\neq 1 & \checkmark \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x>\dfrac{1}{2}}$$

ب) $y=\log_{(2x-2)}(x-5)$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x-5>0\Rightarrow \boxed{x>5} \\ 2)\ 2x-2>0\Rightarrow \boxed{x>1} \\ 3)\ 2x-2\neq 1\Rightarrow \boxed{x\neq \dfrac{3}{2}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x>5}$$

پ) $y=\log_{(x^2-9)}(x^2-4)$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x^2-4>0\Rightarrow |x|>2\Rightarrow \boxed{x>2 \quad \text{یا} \quad x<-2} \\ 2)\ x^2-9>0\Rightarrow |x|>3\Rightarrow \boxed{x>3 \quad \text{یا} \quad x<-3} \\ 3)\ x^2-9\neq 1\Rightarrow \boxed{x\neq \pm\sqrt{10}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} (x>3 \quad \text{یا} \quad x<-3)-\left\{\pm\sqrt{10}\right\}$$

خواص یا قوانین لوگاریتم

قانون اول

لوگاریتم یک به هر قاعده ای مساوی به صفر می باشد: $\log_a 1=0$

ثبوت: می دانیم که: $\forall a\in IR^+-\{1\}\ a^0=1$

$a^0=1\Leftrightarrow \log_a 1=0$

یعنی: $a^0=1\Rightarrow \log_a 1=0$

سوال: حاصل $\log_7 1$ را بیابید. **جواب:** $\log_7 1=0$

قانون دوم

لوگاریتم هر عدد به قاعده خودش مساوی به یک است. $\log_a a=1$

ثبوت: می دانیم که $\forall a\in IR^+-\{1\}\ a^1=a$

$\Leftrightarrow \log_a a = 1$

یعنی: $a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$

سوال: حاصل $\log_5 5$ را بیابید. **جواب:** $\log_5 5 = 1$

قانون سوم

لوگاریتم حاصل ضرب برابر است به حاصل جمع لوگاریتم ها و برعکس $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

ثبوت: برای ثبوت $x = a^p$ و $y = a^q$ قرار می دهیم:

$$a^p = x \Leftrightarrow \log_a x = p ....I$$
$$a^q = y \Leftrightarrow \log_a y = q ....II$$

روابط یک و دو را طرف به طرف ضرب نموده، که $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

از اطراف رابطهٔ فوق لوگارتم می گیریم، به جای p و q قیمت های آن را قرا می دهیم:

$$\log_a (x \cdot y) = p + q$$
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

مثال: $\log 50 = ?$

حل:

$$\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$$

قانون چهارم

لوگاریتم حاصل تقسیم دو عدد برابر است به حاصل تفریق لوگاریتم ها.

یعنی:
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: برای ثبوت $x = a^p$ و $y = a^q$ قرار می دهیم:

$$a^p = x \Leftrightarrow \log_a x = p ....I$$
$$a^q = y \Leftrightarrow \log_a y = q ....II$$

روابط یک و دو را طرف به طرف تقسیم نموده داریم که: $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a_q} = a^{p-q} \Leftrightarrow \log_a (\frac{x}{y}) = p - q$

به جاهای p و q قیمت های آن را وضع می کنیم. $\log_4 (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

مثال: $\log \frac{5}{2}$ را محاسبه کنید در صورتی که $\log 2 = 0.3010, \log 5 = 0.6900$ باشد.

حل:

$$\log 2 = 0.3010, \log 5 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$$

قانون پنجم

توان عدد لوگاریتمی ضریب لوگاریتم قرار می گیرد $\log_a x^n = n \log_a x$

ثبوت:

$$\log_a x^n = \log_a (x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + ... + \log_a x}_{n \log_a x \text{ دفعه}}$$

در نتیجه: $\log_a x^n = n\log_a x$

بااستفاده از قانون 5 می توان نوشت: $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$

مثال: حاصل $\log 100$ را بیابید.

حل: $\log 100 = \log 10^2 = 2\cdot\log 10 = 2$

مثال: $\log_3 \sqrt[3]{9} = ?$

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

قانون ششم

توان قاعده لوگاریتم به شکل معکوس ضریب لوگاریتم قرار می گیرد: $\log_a x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: برای ثبوت $\log_a x = m$ قرار داده آن را به شکل نمایی بنویسید.

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

از رابطه فوق لوگاریتم می گیریم: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n}\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\cdot m$

قیمت m را به جای آن در رابطهٔ فوق وضع می کنیم: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

از قانون فوق نتیجه زیر را می توان به دست آورد.

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل: $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = 6(-3)\log_3 3 = -18\cdot 1 = -18$

قانون هفتم

تبدیل قاعده لوگارتم

با استفاده از خاصیت ذیل می توانیم قاعده لوگاریتم را به شکل دلخواهی تبدیل نمائیم.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

ثبوت: برای ثبوت $\log_b m = y$ را قرار می دهیم به شکل نمایی آن را می نویسیم $m = b^y$

از اطراف به قاعده a لوگاریتم می گیریم: $\log_a m = \log_a b^y \Rightarrow \log_a m = y\log_a b$

قیمت y را در رابطهٔ فوق وضع می کنیم: $\log_a m = \log_b m\cdot\log_a b \Rightarrow \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$

از قانون فوق برای تبدیل قاعدهٔ لوگارتم می توان استفاده کرد.

مثال: $\log_9 27 = ?$

حل:
$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

✍ قانون هشتم

معکوس لوگایتم یک عدد مساویست به: $\log_a M = \dfrac{1}{\log_M a}$

ثبوت: برای ثبوت $\dfrac{1}{\log_M a} = x$ قرار می دهیم:

$$\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I}$$

در رابطه یک بجای عدد 1 قیمت آن را وضع می کنیم.

$$1 = \log_M M = \log_M a^x = \log_M M \Rightarrow a^x = M$$
$$\log_a M = x$$
$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

از اطراف رابطهٔ فوق لوگاریتم به قاعده a می گیریم در رابطهٔ فوق به جای x قیمت آنرا وضع می کنیم:

مثال: $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل:
$$\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$$

✍ قانون نهم

می توانیم بنویسیم که: $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$

مثال: $10(\log_2 4)(\log_4 2) = 10(1) = 10$

✍ قانون دهم

داریم که: $(x)^{\log_b a} = (a)^{\log_b x}$

مثال: حاصل لوگارتم ذیل را بیابید.

$$(2)^{1-\log_2 3} = (2)^{\log_2 2-\log_2 3} = (2)^{\log_2 \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}$$

گرتو ز آموختن سر نتابی

بجوید سرتوهمی سروری را

(ناصرخسرو بلخی)

خلاصه قوانین لوگارتم

جهت انجام عملیات بالای افاده های لوگارتمی از قوانین ذیل استفاده می گردد، که همه آنها را بخاطر بسپارید.

1. $\log_a 1 = 0$	16. $\log_a (\frac{M}{N}) = \log_a M + co\log_a N$
2. $\log_a a = 1$	17. $\log_c \log_b \log_a x = n \Leftrightarrow x = a^{b^{c^n}}$
3. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$	18. $\log_y x = \frac{a}{b} \quad x^b \quad y^a$
4. $\log_a (\frac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$	19. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
5. $\log_a b^n = n\log_a b$	20. $a^{\log_b^x} = x^{\log_b a}$
6. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$	21. $a^{\log_a^x = x}$
7. $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$	22. $a^{\log_a x + \log_a^y} = xy$
8. $\log_b a = \log_{b^n} a^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a} = \log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a}$	23. $a^{\log_a x - \log_a^y} = \frac{x}{y}$
9. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	24. $e^{x\ln a} = a^x$
10. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$	25. $a^{\log_a xy} = \text{antilog}_a(\log_a x + \log_a y)$
11. $\frac{\log_a m}{\log_{ab} m} = 1 + \log_a b$	26. $a^{\log_a \frac{x}{y}} = \text{antilog}_a(\log_a x - \log_a y)$
12. $\log_{ab} c = \frac{1}{\log_c a + \log_c b}$	27. $\log_a 0 = -\infty \quad a > 1$
13. $\log_b a \times \log_a b = 1$	28. $\log_b 0 = \infty \quad 0 > a > 1$
14. $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \cdots \times \log_n d = \log_n a$	29. $\log_a \infty = -\infty \quad 0 > a > 1$
15. $\log_a (\frac{1}{b}) = -\log_a b = co\log_a b$	30. $\log_a \infty = \infty \quad a > 1$

انواع لوگارتیم

لوگارتم نظر به قاعده خود دسته بندی می گردد بناً انواع لوگارتم زیاد است از جمله دو نوع آن بیشتر قابل اهمیت می باشد.

لوگاریتم اعشاری یا معمولی

لوگارتم اعشاری یا معمولی لوگارتم است که قاعده آن 10 باشد این لوگارتم را بنام لوگارتم (Briggs) می گوئیم.

$$\log_{10} x = \log x$$

لوگارتم طبیعی

لوگارتم است که قاعده آن e باشد (عدد e یک عدد گنگ بوده که بنام عدد اولی یاد می گردد قیمت تقریبی آن عبارت از 2.7182 است) لوگارتم طبیعی بنام لوگارتم نیپرینی نیز یاد می شود (گرفته شده از نام نیپرین اسکاتلندی اولین کسی که جدول لوگارتمی را ابداء کرده است)

لوگارتم طبیعی به شکل $\log_e^x = linx$ نمایش داده می شود.

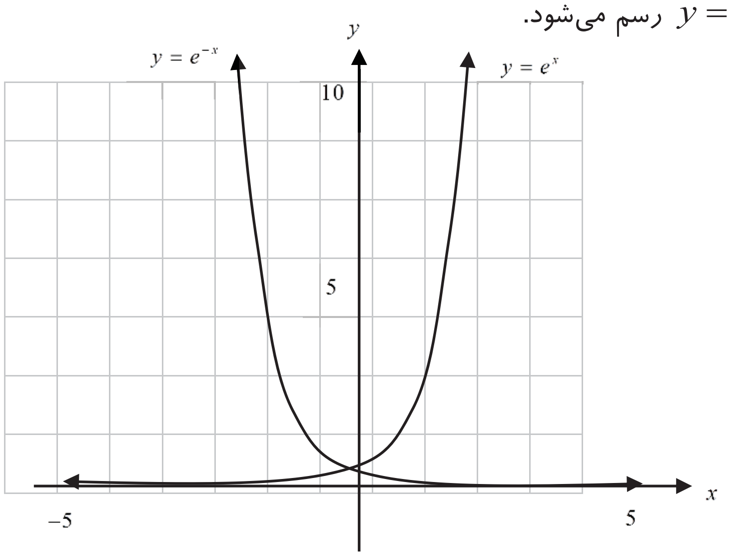
عدد اویلر

یکی از اعداد فوق العاده مهم در ریاضیات ، عدد $e = 2,7182818284...$

می باشد ، این عدد بنام عدد اویلر یاد می‌گـردد و تابع $f(x) = e^x$

را به نام تابع اکسپوننشیل طبیعی می‌گویند ، بعضیا می نویسند. $\exp(x) = e^x$

این تابع در مسایل افزایش نفوس ، تکثر میکروب ها، تبخیر و ذخیره آبها ، ربح مرکب و غیره استعمال می‌گردد و گراف تابع $y = e^x$ شبیه $y = 2^x$ رسم می‌شود.



واضع است که تابع e^x نیز دارای خواص شبیه a^x است

$$e^0 = 1 \quad , \quad e^x e^y = e^{x+y} \quad , \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

برای هر عدد حقیقی x , $y = e^x$ متزاید و $y = e^{-x}$ متناقص می‌باشد. راجع به عدد اویلر و استفاده از آن در بحث لیمت توابع معلومات بیشتری ارایه می گردد.

رابطه بین لوگارتم معمولی و طبیعی

با در نظر داشت قاعده های این دو لوگارتم یعنی اعداد 10 و e با استفاده از رابطه $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ که b, a و x اعداد مثبت و a, b خلاف یک باشند.

اگر $a = 10$ و $\log_e^x = \text{lin} x$ وضع شود، می دانیم $\log_e x = \ln x$ است، بنابر آن:

$$\ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} x$$

چون $\log_{10} e = \log_{10} 2.71,... = 0.4343$ است:

$$\ln x = \frac{1}{0.4343} \log x$$
$$\ln x = 2.3026 \log x$$

مثال: $\ln 4.69 = ?$ را دریافت کنید.

حل: می دانیم که:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$
$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$
$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

مثال: هرگاه $\log 2 = 0.301$ باشد درینصورت $lin 2$ را بدست آورید.

$$\text{lin} 2 = \frac{\log 2}{0.4343} \Rightarrow$$
$$\text{lin} 2 = \frac{0.301}{0.4343} \Rightarrow \text{lin} 2 = \frac{3010}{4343}$$
$$\Rightarrow \text{lin} 2 = 0.693$$

نکته

باید متوجه بود که قوانین $\log x$ و $\ln x$ یک چیز می باشد.

مثال: افاده های ذیل را ساده سازید.

$$\text{lin} x^3 + \text{lin} x^2 \Rightarrow \text{lin} x^3 \cdot x^2 \Rightarrow \text{lin} x^5 = 5\text{lin} x$$

$$\text{lin}_e^{-5} + \text{lin}^{\frac{1}{e^2}} \Rightarrow -5\text{line} + \text{line}^{-2} \Rightarrow$$
$$-5\text{line} - 2\text{line} \Rightarrow -5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -5 - 2 \Rightarrow -7$$

انتی لوگاریتـم

تعریف: هرگاه $\log_a y = x$ باشد، پس y را به نام انتی لوگاریتم x می نامند، یعنی: $y = \text{antilog}\, x$ مثلاً اگر $\log 34 = 1.5315$ باشد، انتی لوگارتم 1.5315 مساوی به عدد 34 است.

$$y = \log_a x \Rightarrow x = \text{antilog}_a\, y$$

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = \text{antilog}_2\, 3$$

$$a = \text{antilog}_{10} 5 \Rightarrow \log_{10} a = 5 \Rightarrow a = 10^5 \Rightarrow$$

$$x = \text{antilog}\ 2.3010 \Rightarrow \log_{10} x = 2.3010$$

$$100 < x < 1000$$

Co log

منفی لوگاریتم یک عدد را کولوگاریتم آن می گوئیم: $-\log_a x = \text{co}\log_a x$

جواب لوگاریتم

جواب لوگاریتم عددیست که در صورت رساندن قاعده به آن توان عدد لوگارتمی بدست آید جواب لوگارتم متشکل از دو قمست است قسمت صحیح جواب لوگارتم را کرکترستیک را مشخصه و قسمت اعشاری جواب لوگارتم را مانتیس را Montes یا می گوئیم.

مثال:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65.10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس   کرکترستیک

طریقه دریافت مشخصه

دو حالت ذیل را در نظر می گیریم

حالت اول

هرگاه عدد لوگاتمی از یک بزرگتر باشد درینصورت مشخصه یک واحد کمتر از ارقام عدد می باشد.

تعداد ارقام عدد $C = n - 1$ مشخصه

حالت دوم

درصورت که عدد لوگارتمی از یک کوچکتر باشد و n تعداد صفرها بعد از علامه اعشاری تا اولین رقم را نشان دهد درینصورت،مشخصه را از رابطه ذیل بدست می آوریم. $c = -(n+1)$

مثال: مشخصه لوگارتم ذیل را بدست آورید.

1) $\log 754 \Rightarrow c = n-1 \Rightarrow c = 3-1 \Rightarrow c = 2$

2) $\log 20000 \Rightarrow c = n-1 \Rightarrow c = 5-1 \Rightarrow c = 4$

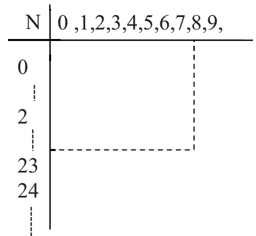
3) $\log 34.5 \Rightarrow c = n-1 \Rightarrow 21 \Rightarrow c = 1$

4) $\log 0.003547 \Rightarrow c = -(n+1) \Rightarrow$
$c = -(2+1) \Rightarrow c = -(3) = -3$

5) $\log 2.0071 \Rightarrow c = n-1 \Rightarrow 1-1 \Rightarrow c = 0$

6) $\log \frac{3}{5} \Rightarrow \log^{0.6} \Rightarrow c = -(n+1) \Rightarrow$
$c = -(0+1) \Rightarrow c = -(1) \Rightarrow c = -1$

قسمت اعشاری جواب لوگارتم با مانتیس از جدولی بنام جدول لوگارتمی دریافت می گردد در جدول لوگارتمی مانتیس اعداد ذکر شده است مانتیس ها ذکر شده در جدول مثبت است برای دریافت مانتیس یک عدد رقم اول را از سطر و متباقی ارقام را از ستون می یابیم عددیکه این سطر و ستون را با هم وصل می کند مانتیس عدد مورد نظر می باشد.



$\log 235 = 0.724$

در لوگارتم های اعشاری اعداد که به توان های از 10 ضرب و یا تقسیم می گردند دارای مانتیس های مساوی و مشخصه های متفاوت می باشند.

$\log 2 = 0.3010$	$\log 2000 = 3.3010$
$\log 20 = 2.3010$	$\log 0.2 = \bar{1}.3010$
$\log 200 = 2.3010$	$\log 0.02 = \bar{2}.3010$

مثال: هرگاه $\log 2492.734$ باشد درینصورت $\log 0.0249$ را بدست آورید.

$\log 0.0249 = \bar{2}.734$

$c = -(n+1) \Rightarrow c = -(1+1) = -2$

$\bar{2}.734 \Rightarrow -2 + 0.734 = -1.266$

لوگارتم منفی یک عدد را $co\log$ (مانندکالک) آن عدد می گوئیم.

$-\log_y x co \log_y x$

$-\log_y x = \log_y \frac{1}{x} = co\log_y x$

مثال: افاده ذیل را ساده سازید.

$\log_6 36 - co\log_5 25 + \log_2 16 \Rightarrow$

$\log_6 36 + \log_5 25 - \log_2 16 \Rightarrow \log_6 6^2 + \log_5 5^2 - \log_2 2^4$

$\Rightarrow 2 + 2 - 4 \Rightarrow 0$

مثال: هرگاه $\operatorname{co}\log x = 2.54$ باشد درینصورت $\log x$ را بیابید.

$$\operatorname{co}\log x = 2.54 \Rightarrow -10x = 2.54$$
$$\log x = -2.54$$

انترپولیشن خطی

عملیهٔ دریافت یک عدد نامعلومی که بین دو عدد معلوم واقع باشد به نام انترپولیشن خطی یاد می کنند.

هرگاه یک عدد پنج رقمی مانند عدد 1.2345 داشته باشیم نمی توانیم لوگاریتم آن را از جدول چهار رقمی دریافت کنیم، پس لوگاریتم این قسم اعداد در صورتیکه جدول پنج رقمی نداشته باشیم توسط طریقهٔ انترپولیشن خطی دریافت کرده می توانیم.

مثال: $\log 5.235$ را دریافت کنید.

حل: واضح است که این عدد در جدول لوگاریتم چهار رقمی وجود ندارد اما می توانیم که عدد 5.235 بین اعداد 5.230 و 5.240 قرار داشته، که مانتیس آن ها در جدول وجود دارد، طور زیر دریافت می کنیم.

$$\log 5.235 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$
$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$

چون: $5.230 < 5.235 < 5.240$ می باشد.

پس: $0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$

هرگاه $\log 5.235$ وضع شود در آن صورت داریم: $0.7185 < x < 0.7193$

تفاوت بین مانتیس ها اعداد رادر نظر می گیریم.

$$\begin{array}{c} \\ 0.010 \end{array}\left[\begin{array}{ccc} & \text{اعداد} & \text{مانتیس} \\ & 5.240 & 0.7193 \\ 0.005 & \left[\begin{array}{c} 5.235 \\ 5.230 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} x \\ 0.7185 \end{array}\right] d \end{array}\right] 0.0008$$

در طریقه انترپولیشن خطی فرض می شود که این چهار عدد با هم متناسب اند، یعنی:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.005 \cdot 0.0008}{0.010} \Rightarrow d \approx 0.0004$$

حالا قیمت d را با مانتیس عدد کوچک جمع می کنیم درحقیقت لوگاریتم عدد 5.235 به دست می آید.

$$0.0004 + 0.7185 = 0.7189$$

بدین ترتیب $\log 5.235 = 07189$

مثال: $\log 0.0007957$ را دریافت کنید.

حل: می دانیم که:

$$\begin{aligned} \log 0.007957 &= \log(7.957 \cdot 10^{-4}) \\ &= \log 7.957 + \log 10^{-4} \\ &= \log 7.957 - 4\log 10 \\ &= \log 7.957 - 4 \end{aligned}$$

کرکترستیک آن $4-$ است.

عددی 7.957 در جدول لوگاریتم وجود ندارد، اما لوگاریتم 7.95 و 7.96 را از جدول دریافت می کنیم.

$$\log 7.96 = 0.9009$$
$$\log 7.95 = 0.9004$$

چون: $7.950 < 7.957 < 7.960$ است، پس $\log 7.950 < \log 7.957 < \log 7.960$ هرگاه $\log 7.957 = x$ وضع شود و آن را توسط انترپولیشن دریافت کرد.

$$\begin{array}{ccc} & \text{مانتیس} & \text{اعداد} \end{array}$$
$$0.01\left[\begin{array}{ccc} & 7.96 & 0.9009 \\ 0.007 & \left[\begin{array}{c} 7.957 \\ 7.950 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} x \\ 0.9004 \end{array}\right]d \end{array}\right]0.0005$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01}$$

$$d = 0.0005 \cdot \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

حالا قیمت d را با مانتیس عدد کوچک جمعی می کنیم.

$$0.9004 + 0.004 = 0.9008$$

در نتیجه مانتیس تخمینی لوگاریتم عدد 0.0007957 حاصل می شود.

$$\log 0.0007957 = 0.9008 - 4 = \bar{4}.9008$$

مثال: انتی لوگاریتم 4.5544 را دریافت کنید.

هرگاه $x = \operatorname{anti}\log 4.5544$ وضع شود، x را باید دریافت کرد. از رابطهٔ فوق نتیجه زیررا می نویسیم:

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$
$$= \log(t \cdot 10^4) \Rightarrow \log t + \log 10^4 = \log t + 4$$

مانتیس 0.5544 در جدول موجود نیست، اما مانتیس های 0.5539 و 0.5551 در جدول موجود است وانتی لوگاریتم آنها ا دریافت و به کمک انترپولیشن قیمت x را دریافت می کنیم.

$$\operatorname{anti}\log 0.5551 = 3.59$$
$$\operatorname{anti}\log 0.5539 = 3.58$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{اعداد} & \text{مانتیس} \end{array}$$
$$0.01\left[\begin{array}{ccc} & 3.59 & 0.5551 \\ d & \left[\begin{array}{c} t \\ 3.58 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.5544 \\ 0.5539 \end{array}\right]0.0005 \end{array}\right]0.0012$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01\frac{0.0005}{0.0012} = 0.0042$$

برای دریافت t قیمت d را با عدد کوچک جمع می کنیم.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.45842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

وقتیکه لوگاریتم های دو عدد با هم مساوی باشند خود اعداد نیز با هم مساوی اند، پس: $x = 35842$

معادلات لوگاریتمی

افاده های لوگاریتمی که در آن مجهول موجود باشد به نام معادلات لوگاریتمی یاد می گردد و برای دریافت قیمت مجهول از یک معادله لوگاریتمی اولاً معادلهٔ داده شده را نظر به قوانین و قضایای لوگاریتم ساده ساخته، سپس در مطابقت به قوانین الجبری و یا معادلات نمائی می توان قیمت مجهول را محاسبه کرد.

مثال: از معادله لوگاریتمی زیر قیمت x را دریافت کنید: $\log_2(x^2-1)=3$

حل: به شکل نمایی می نویسیم:

$$\log_2(x^2-1)=3$$
$$x^2-1=2^3$$
$$x^2=1+8 \quad \Rightarrow x^2=9$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{9} \Rightarrow x=\pm 3$$

مثال: قیمت x را از معادلهٔ $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ دریافت کنید.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$
$$x+2=9^2 \Rightarrow x+2=81$$
$$x=810-2=79 \Rightarrow x=79$$

مثال: قیمت x را از معادلهٔ $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ دریافت کنید.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$
$$x+2=9^2 \Rightarrow x+2=81$$
$$x=81-2=79 \Rightarrow x=79$$

مثال: قیمت x را از معادلهٔ $\log_{\sqrt5} x-\log_{\sqrt5} 3-\log_{\sqrt5} 5+\log_{\sqrt5} 4=0$

حل:

$$\log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 4 = 0$$
$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4$$
$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}}(3\cdot 5) - \log_{\sqrt{5}} 4$$
$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4} - \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4}$$
$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4}, \quad x = \frac{15}{4}$$

چون لوگاریتم های هر دو طرف با هم مساوی اند، لذا خود اعداد باهم مساوی اند.

مثال: از معادلهٔ $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ قیمت x را دریافت کنید.

حل: معادلهٔ فوق را به شکل طاقت می نویسیم:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Leftrightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$
$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3\cdot 3^{x} + 2 = 0$$

$3^x = t$ قرار می دهیم:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$
$$t-1 = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$t-2 = 0 \Rightarrow t = 2$$
$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$3^x = 2 \Leftrightarrow x_2 = \log_3 2$$

مثال: از معادلهٔ $\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$ قیمت x را دریافت کنید.

حل:

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$
$$\log(x^2+36) - \log(-x)^2 = 1$$
$$\log\frac{x^2+36}{(-x)^2} = 1 \Rightarrow \log\frac{x^2+36}{x^2} = \log 10$$
$$\frac{x^2+36}{x^2} = 10 \Rightarrow x^2+36 = 10x^2 \Rightarrow 9x^2 = 36$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

سیستم معادلات دو مجهوله لوگاریتمی

1: **الف** سیستم معادلات $\begin{cases} \log^{x^2} - \log = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots I \\ 3\log^{x} + 2\log^{y} = 5 \ldots\ldots\ldots II \end{cases}$ ، **ب**: $\begin{cases} \log^{x} + \log^{y} = 2 \\ \log^{x} = \log^{200} - \log^{2} \end{cases}$ را حل کنید.

حل: **الف**: معادله (I) را ضرب 2 کرده و با معادله II جمع می کنیم داریم:

$$\begin{cases} 2\log^{x^2} - 2\log^{y} = 2 \\ 3\log^{x} + 2\log^{y} = 5 \end{cases} => 2\log^{x^2} + 3\log^{x} = 7$$

$$=> \log^{x^4} + \log^{x^3} = 7$$

$$=> \log^{x^4 x^3} = 7 => \log x^7 = 7 => 7\log^{x} = 7$$

$$=> \log^{x} = 1 => x = 10$$

$x = 10$ در معادله $y(I)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log 10^2 - \log y = 1 => \log y = 2 - 1 = 1 => y = 10$$

ب: از معادله (I) نتیجه می گیریم که:

$$\log^{x} = \log^{2\cdot 100} - \log^{2} = \log^{2} + \log^{100} - \log^{2} = 2$$

$$=> \log^{x} = 2 => x = 100$$

از معادله (I) نتیجه می گیریم:

$$2 + \log^{y} = 2$$

$$=> \log^{y} = 0 => y = 1$$

2: سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را حل کنید:

$$\begin{cases} x^3 = y \\ x\log^{8} = (x+y)\log^{2} \end{cases}$$

حل:

$$x^3 = y = x\log^{8} = (x+y)\log^{2}$$

$$=> 3x\log^{2} = (x+y)\log^{2}$$

$$3x = x + y => 2x = y$$

$$2x = x^3 => x(2 - x^2) = 0$$

ست $= \{x = 0$ یا $x = \pm\sqrt{2}\}$

3: سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را حل کنید

$$\begin{cases} \log_2(3x - y - 1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots I \\ \log(x + y - 4) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots II \end{cases}$$

حل 1:

$$\log_2(3x-y-1)=0 \Rightarrow 3x-y-1=2^0=1$$
$$=3x-y=2 \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$\log_2(x+y-4)=1 \Rightarrow x+y-4=2^1=2$$
$$\Rightarrow x+y=6 \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

معادلات I و II را باهم جمع می‌کنیم: $4x=8 \Rightarrow x=2$

قیمت x را در معادله II وضع نموده قیمت y حاصل می‌گردد. $y=4$

هر یک از معادلات ذیل را به شکل بیان که شامل لوگاریتم نباشد.

استفاده از لوگاریتم در اجرای عملیه های ریاضی

دریافت حاصل ضرب توسط لوگاریتم

حاصل ضرب دو یا چند عدد را به کمک لوگاریتم بنابر قانون $\log M\cdot N=\log M+\log N$ دریافت کرده می توانیم.

مثال: می خواهیم که حاصل ضرب $3.17\cdot 88\cdot 2$ را به کمک لوگاریتم دریافت کنیم.

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

در جدول دیده می شود که مانتیس 0.4466 در جدول وجود ندارد، اما در بین مانتیس های 0.4456 , 0.4472 قرار دارد.

از جدول دیده می شود:

$$\text{antilog}\,0.4472=2.80$$
$$\text{antilog}\,0.4456=2.79$$

$$\begin{array}{cc} \text{اعداد} & \text{مانتیس} \end{array}$$
$$0.01\left[\begin{array}{ll} & 2.79 \quad 0.4456 \\ d & \left[\begin{array}{ll} t & 0.4466 \\ 2.80 & 0.4472 \end{array}\right]0.0006 \end{array}\right]0.0016$$

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}$$
$$d=\frac{0.01\cdot 0.0006}{0.0016}=\frac{0.0006}{0.0016}=0.00375$$
$$t=2.79+0.00375=2.79375$$
$$\log x=\log(2.79375\cdot 10^2)$$
$$x=279.375$$
$$\text{antilog}\,2.4466=279.375$$
$$3.17\cdot 88.2=279.375$$

آیا می دانید؟

برای ضرب دو یا چند عدد، حاصل جمع لوگاریتم های آن ها را حاصل می کنیم و سپس انتی لوگاریتم این حاصل جمع را که عبارت از حاصل ضرب به دست می آوریم.

دریافت خارج قسمت ها به کمک لوگاریتم

با استفاده از قانون دو لوگاریتم $\log\dfrac{M}{N}=\log M-\log N$ ما می توانیم که خارج قسمت یک عملیهٔ تقسیم را حاصل کنیم.

مثال: می خواهیم که خارج قسمت $\dfrac{8750}{3.49}$ را به کمک لوگاریتم حاصل کنیم.

حل:

$$\log\frac{8750}{3.49}=\log 7850-\log 3.49$$

از جدول لوگاریتم داریم:

$$\log 8750=3.9420$$
$$\log 3.49=05428$$
$$\log 8750-\log 3.49=3.9420-0.5428=3.3992$$

حال آنکه از جدول $\operatorname{anti}\log 3.3992=2507$ محاسبه می شود، بنابر آن $\dfrac{8750}{3.49}$ می شود.

آیا می دانید؟

جهت دریافت خارج قسمت دو عدد، نخست لوگاریتم مقسوم علیه را از لوگاریتم مقسوم تفریق کرده، سپس انتی لوگاریتم این فرق را که عبارت از خارج قسمت مطلوب است، حاصل می کنیم.

دریافت طاقت ها به کمک لوگاریتم

برای دریافت طاقت های که نماهای آنها اعداد مثبت، تام یا کسری باشند، از قانون سوم لوگاریتم استفاده می کنیم.

مثال: می خواهیم که قیمت $(1.05)^6$ را دریافت کنیم.

حل:

$$\log(1.05)^6=6\log 1.05=6\cdot(0.0212)$$
$$=0.1272$$

حال آنکه: $\operatorname{anti}\log 0.1272=1.340$

بنابرآن: $(1.05)^6=1.340$

به یاد داشته باشید برای دریافت قیمت یک طاقت، نخست لوگاریتم قاعده را به نمای آن ضرب می کنیم، انتی لوگاریتم این حاصل ضرب عبارت از قیمت طاقت است.

✓ لوگارتم صفرتعریف نشده است .

کاربرد لوگاریتم در مسائل صوت و زلزله

زلزله = واحد سنجش شدت زلزله ریشتر است و به ازای هر واحد قدرت 10 برابر می‌شود. قدرت زلزله 4 ریشتر از 10 برابر زلزله 5 ریشتر است.

ژول $E_0=10^{4.4}$ مبنای استاندارد قدرت زلزله

شدت زلزله $\leftarrow M=\frac{2}{3}Log\frac{E}{E_0}$

E انرژی آزاد شده بر حسب ژول

نکته 1) اگر انرژی آزاد شده را از ما بخواهند و شدت زلزله را به ما داده باشند از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم

نکته 2) اگر $M<4/5$ زلزله ضعیف و $4/5<M<5/5$ متوسط و $M>7/5$ قوی می‌باشد.

مثال) اگر انرژی آزاد شده زلزله‌ای در حدود $64\times10^{13/4}$ ژول باشد قدرت زلزله را حساب کنید.

$$M=\frac{2}{3}Log\frac{64\times10^{13.4}}{10}$$

$$M=\frac{2}{3}Log\frac{64\times10^{13.4}}{10^{4.4}}=\frac{2}{3}Log^{64\times10^{9}}=\frac{2}{3}(Log^{64}+Log^{10^9})=\frac{2}{3}(Log_{10}^{2^6}+9Log_{10}^{10})$$

$$\frac{2}{3}(6Log_{10}^{2}+9)=\frac{2}{3}(6\times0.3+9)=\frac{2}{3}(10.8)->M=7.2$$

مثال) اگر قدرت زلزله‌ای 6 ریشتر باشد، انرژی آزاد شده را محاسبه کنید.

$$E=\frac{3M}{10^2}+4.4 \qquad M=6 \quad \to E=\frac{3(6)}{10^2}+4.4\to E=10^{9+4.4}\to E=10^{13.4}$$

شدت صدا = شدت صدا بر حسب وات بر متر مربع می‌باشد $(\frac{W}{M^2})$ و با نماد I نمایش داده می‌شود.

مقیاس دسی دبل = یک مقیاس برای سنجش شدت صدا است. $D=10Log^{\frac{I}{I_0}}$

$I_0=10^{-12}$ آستانه شنوایی

نکته) اگر در یک مسئله شدت صدا I را بخواهند از رابطه $I=10^{\frac{D}{10}-12}$ استفاده می‌کنیم.

مثال) شدت صوتی که در حدود 25 دسی بل است، چقدر می‌باشد

$$I=10^{\frac{25}{10}-12}=10^{2.5-12}=10^{-9.5}\ \frac{m}{M^2}$$

مثال) تعداد واحد دسی بل صوتی که 7×10^{-4} شدت دارد را محاسبه کنید.

$$D=10Log\frac{7\times10^{-4}}{10^{-12}}=10\log^{7\times10^{8}}=10(Log_{10}^{10^8})=10(\log_{10}^{7}+8Log_{10}^{10})$$

$$10(0.845+8)=10(8.845)=88.45$$

سوالات ویژه

1. اگر $Log_4^A=\frac{3}{2}$ ، مقدار A کدام است؟

1) $\frac{1}{8}$ 2) 8 3) $\frac{1}{16}$ 4) 16

2. حاصل $\log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}}$ چقدر است؟

1) $-\frac{5}{4}$ 2) $-\frac{4}{5}$ 3) $\frac{4}{5}$ 4) $\frac{5}{4}$

3. حاصل $\log_{x\sqrt[x]{x}}^{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{9}{8}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{8}{9}$

4. اگر $\log_5^8=a$ باشد، $\log_{10}^2$ چه قدر است؟

1) $a+3$ 2) $\frac{a}{a+3}$ 3) $3a$ 4) $\frac{1}{3a}$

5. اگر $\log_4^{20}=k$ باشد، حاصل $\log_4^5$ چه قدر است؟

1) $\frac{1+k}{k}$ 2) $\frac{k}{1-k}$ 3) $\frac{k-1}{k}$ 4) $\frac{1-k}{k}$

6. اگر $A=\log2$ را در نظر میگیریم، حاصل $\log\sqrt[5]{200}$ برابر می‌شود به:

1) $\frac{2a+1}{5}$ 2) $\frac{3a+2}{5}$ 3) $\frac{4a+2}{5}$ 4) $\frac{A+2}{5}$

7. اگر $\log_2^{\sqrt[5]{e^2}}$ ، حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{32}$ کدام است؟

1) $\frac{A}{4}$ 2) $\frac{A}{2}$ 3) $\frac{2}{A}$ 4) $\frac{4}{A}$

8. حاصل عبارت $\left|\log_{\frac{1}{2}} 8\right| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

1) $\frac{19}{6}$ 2) $\frac{17}{6}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $-\frac{1}{6}$

9. حاصل کسر $\frac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{\log 2 + \frac{1}{2}\log 6}$ کدام است؟

1) $2\sqrt{6}$ 2) 24 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

10. حاصل $\log_6^{2\sqrt{6}} + \log_6^{3\sqrt{2}}$ کدام است؟

1) 2 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 3

11. اگر $\log_{12}^{2} + \log_{12}^{3} + \log_{12}^{4} = a$ باشد، حاصل $\log_{12}^{3} + \log_{12}^{6} + \log_{12}^{16}$ کدام است؟

1) a 2) $a+2$ 3) $a+1$ 4) $2a+1$

12. حاصل $\log_2^{\frac{8}{9}} + \log_2^{\frac{9}{10}} + \log_2^{\frac{10}{11}} + \ldots + \log_2^{\frac{31}{32}}$ کدام است؟

1) صفر 2) -2 3) 3 4) -3

13. حاصل عبارت $\log_3^2 \times \log_4^3 \times \log_5^4 \times \ldots \times \log_{128}^{127}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{7}$ 2) 7 3) $-\frac{1}{7}$ 4) -7

14. حاصل عبارت $\log_a^b \cdot \log_b^a + \log_b^c \cdot \log_c^b$ برابر است با:

1) $a+b$ 2) 1 3) $b+c$ 4) 2

15. اگر $x = y^3 = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\frac{1}{3}\log_a^x + \frac{1}{2}\log_a^y$ چه‌قدر است؟

1) $\frac{4}{5}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{2}{3}$

16. اگر $4a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $4a+1$ در پایه‌ی 4 کدام است؟

1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) 2 4) $\frac{3}{2}$

17. حاصل $a^{x\log_x^b - b^{x\log_x^a}}$ کدام است؟

1) 0 2) $a^a - b^b$ 3) $a^b - b^a$ 4) $a-b$

18. اگر $\log 2 = x$ و $\log 3 = y$ باشد، حاصل $\log_{18}^{96}$ کدام است؟

1) $\frac{2y+3x}{5y+2x}$ 2) $\frac{y+5x}{3y+x}$
3) $\frac{y+5x}{2y+x}$ 4) $\frac{2y+x}{5y+2x}$

19. حاصل $\frac{1}{\log_2^{35!}}+\dots+\frac{1}{\log_{34}^{35!}}+\frac{1}{\log_{35}^{35!}}$ برابر است با:

1) 0 2) 1 3) 35 4) نامعین

20. حاصل $\log\tan 10^0+\log\tan 20^0+\dots+\log\tan 80^0$ کدام است؟

1) 0 2) -1 3) 1 4) 2

21. اگر a و b ریشه های معادله‌ی $x^2-10x+0/1=0$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

1) -1 2) 0 3) 1 4) -2

22. گر $\log_2^{\sin 20}=a$ مقدار $\log_2^{\left(\frac{\sin 10+\sin 50}{\sin 40}\right)}$ کدام است ؟

1) $-1-a$ 2) $-1+a$ 3) $1-a$ 4) $1+a$

23. اگر $\log 2 = 0.30103$ فرض شود، عدد 2^{30} چند رقمی است ؟

1) 9 2) 10 3) 11 4) 12

24. اگر $\log(3x-2)=\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}$ ، مقدار x کدام است؟

1) 1 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) $\frac{3}{2}$

25. جواب معادله‌ی $\log_3^{\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{3}}^{3}=\log_9^{x}$ کدام است؟

1) $x=3^2$ 2) $x=3^3$ 3) $x=3^5$ 4) $x=3^4$

26. معادله ی $\log(x-1)+\log(x-2)=\log(x^3+2)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

1) 0 2) 1 3) 3 4) 2

27. اگر $2\log(x-2)=\log(x+10)$ ، آنگاه $\log_4(x+2)$ کدام است؟

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{3}{2}$

28. اگر $\log(x-2)=2\log 2-\log(x-4)$ ، حاصل $\log_5(x-3)$ کدام است؟

1) 0 2) 1 3) -1 4) $\frac{1}{2}$

29. اگر $\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه 8 کدام است؟

1) $\frac{-2}{3}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

30. از معادله لوگاریتمی $2\log x = 1+\log(x+\frac{12}{5})$ ، مقدار $\log_5^{(2x+1)}$ کدام است؟

1) -1 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) 2

سوالات کانکوری لوگارتم همراه با حل آنها

مثال 1: اگر $x=\log_{\sqrt5-2}^{\sqrt5+2}$ آنگاه مقدار x کـدام است؟

1) $x=14$ 2) $x=\frac{3}{2}$ 3) $x=\frac{-3}{2}$ 4) $x=-1$

$$\overbrace{(\sqrt5+2)(\sqrt5-2)}=1 \Rightarrow \sqrt5+2=\frac{1}{\sqrt5-2} \Rightarrow \boxed{\sqrt5+2=(\sqrt5-2)^{-1}} \quad (1)$$

$$\log_{\sqrt5-2}^{\sqrt5+2}=x \xrightarrow{\text{حذف } Log} \log_{\sqrt5-2}^{(\sqrt5+2)^{-1}}=x \xrightarrow{\text{با توجه به (1)}} (\sqrt5-2)^{-1}=(\sqrt5-2)^x \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

مثال 2: عبارت $\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{n}{n+1}$ را تا حد امکان ساده کنید.

روش 1) $(\log1-\log2)+(\log2-\log3)+...+(\log n-\log(n+1))=\underbrace{\log1}_{0}-\log(n+1)=-\log(n+1)$

روش 2) $\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{n}{n+1}\right)=\log\frac{1}{n+1}=\underbrace{\log(1)}_{0}-\log(n+1)=-\log(n+1)$

مثال 3: اگر $a_n=\log_2\frac{n}{n+1}$ به طوری که $a_1+a_2+...+a_n=-4$ باشد مقدار n کدام است؟

1) 7 2) 8 3) 15 4) 16

پاسخ: گزینه 3

$$a_1+a_2+...+a_n=\log_2\frac{1}{1+1}+\log_2\frac{2}{1+2}+\log_2\frac{3}{3+1}+...+\lg\frac{n}{n+1}=-4$$
$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{1+1}\times\frac{2}{2+1}\times\frac{3}{3+1}\times...\times\frac{n}{n+1}\right)=-4 \Rightarrow \log_2\frac{1}{n+1}=-4$$
$$\Rightarrow \log_2(n+1)=4 \Rightarrow n+1=16 \Rightarrow n=15$$

مثال 4: اگر a , b ریشه های معادله $x^2-10x+0/1=0$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

1) -2 2) -1 3) صفر 4) 1

پاسخ: گزینه 1

در هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ حاصل جمع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ وحاصل ضرب ریشه ها $\frac{c}{a}$ است پس اگر a , b ریشه های معادله $x^2-10x+0/1=0$ باشند داریم:

$$S=a+b=10$$
$$P=ab=0/1$$

در نتیجه:

$$\log a+\log b-\log(a+b)=\log(ab)-\log(a+b)$$
$$=\log\frac{ab}{a+b}=\log\frac{0/1}{10}=\log\frac{1}{100}=-2$$

مثال 5: اگر $\log^2=a$ باشد مقدار $\log 50$ را بر حسب a بنویسید.

داده مسئله $\log^2=a$ هست بنابر این خواسته مسئله رو طوری باز می کنیم تا بر حسب داده مسئله درست بشه.

$$\log_{10}^{50}\underbrace{\log_{10}^{10\times5}}=\log_{10}^{10}+\log_{10}^{5}=1+(1-\underbrace{\log_{10}^{2}})=1+1-a=2-a$$

مثال 6: مقدار $\log^2+\log^{\frac{3}{2}}+\log^{\frac{4}{3}}+\log^{\frac{5}{4}}$ برابر است با:

1) $\log^5$ 2) $\log^2$ 3) $-1+\log^2$ 4) $1-\log^2$

$$\log^2+\log^{\frac{3}{2}}+\log^{\frac{4}{3}}+\log^{\frac{5}{4}}=\log_{10}^{\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\right)}=\log_{10}^{5}=1-\log_{10}^{2}$$

مثال 7: اگر $\log^3=0/4,\log^2=0/3$ باشد حاصل $\log^{15}$ کدام است؟

1) $0/11$ 2) $1/1$ 3) $1/6$ 4) $0/16$

$$\log^{15}=\log^{3(5)}=\log^3+\log^5=\log^3+(1-\log^2)=0/4+(1-0/3)=0/4+0/7=1/1$$

مثال 8: اگر لوگاریتم 12 در پایه 6 برابر a باشد آنگاه لگارتم 3 در پایه 6 کدام است؟

1) $2-a$ 2) $a-2$ 3) $1-a$ 4) $a-1$

پاسخ: گزینه 1

$$\log_6^{12}=\log_6^{(2\times6)}=\log_6^2+1=a\Rightarrow\log_6^2=a-1$$
$$\log_6^3=\log_6^{\frac{6}{2}}=1-\log_6^2=1-(a-1)=2-a$$

مثال 9: با فرض $\log^2 = a$ مقدار $\log^{1/25}$ کدام است؟

از اعداد اعشاری نترسید هر جا اعداد اعشاری دیدید سریعاً به صورت کسر در بیاورین پس در این سوال داریم:

$$\log^{1/25} = \log^{\frac{125}{100}} = \log^{125} - \log^{100} = \log^{5^3} - \log^{10^2} = 3\log^5 - 2 = 3(1-\log^2) - 2 = 3(1-a) - 2$$

مثال 10: اگر $\log_a^{3\sqrt{3}} = \dfrac{3}{4}$ باشد $\log_4^{(a-1)}$ کدام است؟

1) $-\dfrac{3}{2}$ 2) $-\dfrac{2}{3}$ 3) $\dfrac{2}{3}$ 4) $\dfrac{3}{2}$

$$\log_a^{3\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{حذف log}} 3\sqrt{3} = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 3(3^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 3^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{4}} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم } \frac{4}{3}]{\text{طرفین را به توان}} \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow 3^2 = a \Rightarrow a = 9 \Rightarrow \log_4^{(a-1)} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2}$$

مثال 11: اگر $3^a = A$ باشد $\log_3 9A^2$ کدام است؟

1) $2+2a$ 2) $3+2a$ 3) $2+a^2$ 4) $3+a^2$

پاسخ: گزینه 1

$$\log_3 9A^2 \Rightarrow \log_3 9 + \log_3 A^2 \Rightarrow 2 + 2\log_3 A \Rightarrow 2 + 2\log_3 A = 2 + 2\log_3 3^a = 2 + 2a$$

تـذکـر:

$\log_c ab = \log_c a + \log_c a + \log_c b \quad (1)$

$\log_b a^n = n\log_b a \quad (2),(3)$

مثال 12: اگر $\log 5 = 3k$ باشد $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

1) $1-4k$ 2) $2-5k$ 3) $1-2k$ 4) $1-k$

پاسخ: گزینه 1

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 = 3k \Rightarrow \log 2 = 1 - 3k$$

به کمک خاصیت $\log_b \log_b a^n = n\log_b a$ ، $\log\dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ داریم:

$$\log\sqrt[3]{1/6} = \log 1/6^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 1/6 = \frac{1}{3}(\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3}(\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3}(4\log 2 - 1)$$

با توجه به تساوی $\log 2 = 1 - 3k$ داریم:

$$\log\sqrt[3]{1/6}=\frac{1}{3}(4\log 2-1)=\frac{1}{3}(4(1-3k)-1)=\frac{1}{3}(3-12k)=1-4k$$

مثال 13: با فرض $\log_{9\sqrt[3]{9}} 3\sqrt{3}=a$ حاصل لگارتم $16(a+1)$ در چه پایه‌ای برابر 4 است؟

1) 5 2) $\sqrt{5}$ 3) 3 4) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه 2

$$\begin{cases}3\sqrt{3}=3^1\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\\ 9\sqrt[3]{9}=3^2\times 3^{\frac{2}{3}}=3^{2+\frac{2}{3}}=3^{\frac{8}{3}}\end{cases}\Rightarrow \log_{9\sqrt[3]{9}} 3\sqrt{3}=\log_{3^{\frac{8}{3}}} 3^{\frac{3}{2}}$$

با توجه به خاصیت $\log_{b^m} a^n=\frac{n}{m}\log_b a(a,b>0,b\neq 1)$ داریم:

$$\log_{3^{\frac{8}{3}}} 3^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{3}}\log_3 3=\frac{9}{16}$$

پس $a=\frac{9}{16}$ است. فرض می کنیم لگاریتم $16(a+1)$ در پایه m برابر 4 است در نتیجه:

$$\log_m(16(a+1))=4\Rightarrow \log_m\left(16\left(\frac{9}{16}+1\right)\right)=4\Rightarrow \log_m 25=4$$
$$\Rightarrow 25=m^4\Rightarrow m=\pm\sqrt{5}\xrightarrow{m>0} m=\sqrt{5}$$

مثال 14: اگر $a=2\log(1+\sqrt{3})+\log(4-2\sqrt{3})$ باشد حاصل $\log 25$ بر حسب a کدام است؟

1) $4-a$ 2) $4-2a$ 3) $2-a$ 4) $2-2a$

پاسخ: گزینه 3

بنابر خاصیت $\log_b a^n=n\log_b a(a,b>0,b\neq 1)$ داریم:

$$a=2\log(1+\sqrt{3})+\log(4-2\sqrt{3})=\log(4+2\sqrt{3})+\log(4-2\sqrt{3})$$

پس $a=\log 4$.

می‌دانیم $\frac{100}{4}=25$ در نتیجه: $\log 25=\log\frac{100}{4}=\log 100-\log 4=2-\log 4=2-a$

تذکر: $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$

مثال 15: اگر $\log 2=k$ باشد حاصل $\log(6-2\sqrt{5})+2\log(1+\sqrt{5})$ کدام است؟

1) $2k$ 2) $4k$ 3) $1+k$ 4) $2+4k$ =

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم $n\log_b a=\log_b a^n$ در نتیجه:

$$2\log(1+\sqrt{5})=\log(1+\sqrt{5})^2=\log(6+2\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow \log(6-2\sqrt{5})+2\log(1+\sqrt{5})=\log(6-2\sqrt{5})+\log(1+2\sqrt{5})$$
$$=\log(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})=\log(36-20)=\log 16$$

اگر $\log 2=k$ باشد داریم، $\log 163=\log 2^4=4\log 2=4k$

مثال 16: اگر $x=\dfrac{\sqrt{33}-5}{2}$ باشد حاصل $\log_4(x^2+5x+6)$ برابر است با:

1) $\frac{5}{2}$ 2) 2 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه 4

به کمک مربع سازی x^2+5x+6 داریم:

$$x^2+5x+6=(x^2+5x)+6=\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)+6=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

حاصل عبارت (x^2+5x+6) به ازای $x=\dfrac{\sqrt{33}-5}{2}$ برابر است و در نتیجه:

تـذکر: $(1)\quad \log_{b^m} a^n=\dfrac{n}{m}\log_b a(a,b>0,b\neq 1)$

$$\log_4 8=\log_{2^2} 2^3\xrightarrow{(1)}\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$$

مثال 17: اگر $\log 2=a$, $\log 15=b$ باشد مقدار $\log 24$ بر حسب b,a کدام است؟

1) $2a+b-1$ 2) $2a+b+1$ 3) $4a-1-b$ 4) $4a+b-1$

پاسخ: گزینه 4

روش اول

$$\log 2=a\Rightarrow \log\frac{10}{5}=a\Rightarrow \log 10-\log 5=a\Rightarrow \log 5=1-a \qquad (I)$$
$$\log 15=b\Rightarrow \log 5+\log 3=b\xrightarrow{(I)}1-a+\log 3=b\Rightarrow \log 3=b+a-1 \qquad (II)$$
$$\log 24=\log 8+\log 3=\log 2^3+\log 3=3\log 2+\log 3\xrightarrow{(II)}$$
$$a$$
$$=3a+b+a-1=4a+b-1$$

روش دوم

$$\log 24=\log\frac{240}{1}=\log 240-1=\log 15+\underbrace{\log 16}_{4\log 2}-1=b+4a-1$$

مثال 18: اگر $\log 13=m,\log 7=n$ آنگاه حاصل $\log_7^{\sqrt{9/1}}$ کدام است؟

1) $\frac{m+n}{2n-1}$ 2) $\frac{m+n-1}{2n}$ 3) $\frac{m-n+1}{n}$ 4) $\frac{m-n-1}{2n}$

پاسخ: گزینه 2

با توجه به خواص $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$, $\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$, $\log_c^{a^n}=n\log_c^a$, $\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$ داریم:

$$\log_7^{\sqrt{9/1}}=\log_7^{(9/1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\log_7^{9/1}=\frac{1}{2}\log_7^{\frac{91}{10}}=\frac{1}{2}\left(\log_7^{91}-\log_7^{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\log 91}{\log 7}-\frac{\log 10}{\log 7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\log(7\times 13)}{\log 7}-\frac{1}{\log 7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\log 7+\log 13}{\log 7}-\frac{1}{\log 7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{m+n-1}{2n}$$

مثال 19: هرگاه $\log\frac{a+b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}$ آنگاه حاصل $\frac{a^2+b^2-3ab}{a^2+b^2+3ab}$ کدام است؟

1) $\frac{13}{16}$ 2) $\frac{13}{14}$ 3) $\frac{11}{17}$ 4) $\frac{11}{15}$

پاسخ: گزینه 3

$$\log\frac{a+b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}\Rightarrow 2\log\frac{a+b}{4}=\log ab\Rightarrow \log\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=\log ab$$

چون log تابع یک به یک است :

$$\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=ab\Rightarrow a^2+b^2+2ab=16ab\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2-3ab=11ab\\ a^2+b^2+3ab=17ab\end{cases}$$

$$\frac{a^2+b^2-3ab}{a^2+b^2+3ab}=\frac{11ab}{17ab}=\frac{11}{17}$$

مثال 20: هرگاه $\log\frac{x-y}{2}=\frac{\log x+\log y}{2}$ مقدار x^2+y^2 کدام است؟

1) $2xy$ 2) $6xy$ 3) $5xy$ 4) $13xy$

پاسخ: گزینه 2

$$\log_c a+\log_c b=\log_c ab(a,b,c>0,c\neq 1)$$
$$\log x+\log y=\log xy$$

بنابر خاصیت $n\log_b a=\log_b a^n$ داریم:

$$\log\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\log xy}{2}\Rightarrow 2\log\frac{x-y}{2}=\log xy$$
$$\log\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\log xy\Rightarrow\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy\Rightarrow\frac{(x-y)^2}{4}=xy\Rightarrow(x-y)^2=4xy$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=4xy\Rightarrow x^2+y^2=6xy$$

مثال 21: اگر $a=\log_3^{18}$ باشد حاصل 9^{a-2} کدام است؟

1) $\sqrt{2}$ 2) 2 3) 3 4) 4

پاسخ: گزینه 4

روش اول

$$\log_3 18=a\Rightarrow a-2=(\log_3 18)-2=\log_3 18-\log_3 3^2=\log_3\frac{18}{9}\Rightarrow a-2=\log_3 2$$
$$9^{a-2}=3^{2(a-2)}=3^{2\log_3 2}=3^{\log_3 4}=4$$

روش دوم

$$\log_3 18=a\Rightarrow 3^a=18$$
$$9^{a-2}=3^{2a-4}=\frac{(3^a)}{3^4}=\frac{18^2}{3^4}=\frac{18^2}{9^2}=\left(\frac{18}{9}\right)^2=4$$

مثال 22: اگر $3^b=24, 2^a=12$ باشد حاصل $(a-2)(b-1)$ برابر کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

پاسخ: گزینه 3

روش اول

$$2^a = 12 \Rightarrow a = \log_2^{12} \Rightarrow a-2 = \left(\log_2^{12}\right) - 2 = \log_2^{12} - \log_2^4 = \log_2^{\frac{12}{4}} = \log_2^3$$

$$3^b = 24 \Rightarrow b = \log_3^{24} \Rightarrow b-1 = \left(\log_3^{24}\right) - 1 = \log_3^{24} - \log_3^3 = \log_3^{\frac{24}{3}} = \log_3^8 = 3\log_3^2$$

$$(a-2)(b-1) = \log_2^3 \times 3\log_3^2 = 3 \times \underbrace{\log_2^3 \log_3^2}_{1} = 3$$

روش دوم

$$\left.\begin{aligned} &2^a = 12 \Rightarrow 2^{a-2} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow (a-2) = \log_2^3 \\ &3^b = 24 \Rightarrow 3^{b-1} = 8 \Rightarrow (b-1) = \log_3^8 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (a-2)(b-1) = \log_2^3 \times \log_3^8 = \log_2^8 = 3$$

مثال 23: اگر $\log_{bc}^{ab} = 2$ و $\log_b^{ac} = 3$ باشد حاصل $\log_b^c$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) 2 3) 1 4) $\frac{3}{7}$

پاسخ: گزینه 3

حل):

$$\begin{cases} \log_{bc}^{ab} = 2 \Rightarrow ab = (bc)^2 = b^2c^2 \\ \log_b^{ac} = 3 \Rightarrow ac = b^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = b^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \log_b^c = \log_b^{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}$$

مثال 24: ساده شده $\left(\log_{21}^3\right)^2 + \left(\log_{21}^7\right).\left(\log_{21}^{63}\right)$ کدام است؟

1) $\log_3^7$ 2) $\log_7^3$ 3) 1 4) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه 3

$$\log_{21}^7 = \log_{21}^{\frac{21}{3}} = \log_{21}^{21} - \log_{21}^3 = 1 - \log_{21}^3$$

$$\log_{21}^{63} = \log_{21}^{(21\times 3)} = \log_{21}^{21} + \log_{21}^3 = 1 + \log_{21}^3$$

$$\left(\log_{21}^3\right)^2 + \log_{21}^7 \times \log_{21}^{63} = \left(\log_{21}^3\right)^2 + \left(1 - \left(\log_{21}^3\right)\right)\left(1 + \log_{21}^3\right)$$

$$= \left(\log_{21}^3\right)^2 + \left(1 - \left(\log_{21}^3\right)^2\right) = 1$$

مثال 25: حاصل $(\log_{ba} a)^2+(\log_{ba} b)(\log_{ba} a^2b)$ کدام است؟

1) $\log_b a$ 2) $\log_a b$ 3) 1 4) a

پاسخ: گزینه 3

روش اول

$$(\log_{ba} a)^2+\log_{ba} b\times\log_{ba} a^2b=(\log_{ab} a)^2+\log_{ba} b\times(2\log_{ab} a+\log_{ba} b)$$
$$=(\log_{ab} a)^2+2\log_{ab} a\times\log_{ba} b+(\log_{ba} b)^2=(\log_{ab} a+\log_{ab} b)^2=(\log_{ab} ab)^2=1$$

روش دوم

$$(\log_{ba} a)^2+\log_{ba}\left(\frac{ba}{a}\right)\times\log_{ba}\left(ba\times a\right)=(\log_{ba} a)^2+(1-\log_{ba} a)(1+\log_{ba} a)$$
$$=(\log_{ab} a)^2+1-(\log_{ba} a)^2=1$$

مثال 26: حاصل $(a^{\log_x^b}-b^{\log_x^a})$ کدام است؟

1) a^a-b^b 2) صفر 3) a^b-b^a 4) $a-b$

برای حل این سؤال خیلی قشنگ میشود از رابطه سوم استفاده کرد و حتی با دیدن سوال سریع گفت که جواب سوال برابر صفر میشود.

$$a^{\log_x^b}-b^{\log_x^a}=b^{\log_x^a}-b^{\log_x^a}=0$$

مثال 27: اگـر $A=\sqrt{5}^{(\log_5^{12}+\log_5^3)}$ باشد آنگاه $(A+1)$ برابر است با:

1) $\frac{1}{7}$ 2) 7 3) 37 4) $\frac{1}{37}$

$$A=\sqrt{5}^{(\log_5^{12}+\log_5^3)}=\sqrt{5}^{(\log_5^{36})}=5^{\frac{1}{2}(\log_5^{36})}=5^{\log_5^{\sqrt{36}}}=6\Rightarrow A+1=7$$

مثال 28: حاصل $\left(\frac{1}{2}\log 15-\log 3\right)$ کدام است؟

1) $\frac{\sqrt{4}}{3}$ 2) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ 3) $3\sqrt{5}$ 4) $\sqrt{15}$

$$10^{\left(\log_{10}^{(15)^{\frac{1}{2}}}-\log_{10}^{3}\right)}=10^{\log_{10}^{\frac{\sqrt{15}}{3}}}=\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

مثال 29: اگر $b^{\log_a^c} = 64, \log_b a = \frac{1}{3}$ باشد مقدار c کدام است؟

1) 2 2) 4 3) $2\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$

بنابر این:

$$\left.\begin{array}{l} b^{\log_a^c} = 64 \Rightarrow c^{\log_a^b} = 64 \\ \text{فرض سوال} \quad : \log_b a = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_a b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^3 = 64 \Rightarrow c = 4$$

مثال 30: ساده شده $2^{\log_4^9} - 16^{\log_2^3}$ برابر است با:

1) -78 2) -84 3) -13 4) صفر

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (یعنی جای a , b را می‌توان عوض کرد.) پس:

$$2^{\log_4^9} = 9^{\log_4^2} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$
$$16^{\log_2 3} = 3^{\log_2 16} = 3^4 = 81$$
$$2^{\log_4 9} - 16^{\log_2^3} = 3 - 81 = -78$$

مثال 31: با توجه به تساوی $\log_9^{64} \times \log_x^3 = 2^{2\log_2^{\sqrt{3}}}$ مقدار x کدام است.

$$\log_{3^2}^{8^2} \times \log_x^3 = 2^{2\log_2^{\sqrt{3}}} \Rightarrow \log_3^8 \times \log_x^3 = 2^{\log_2^{(\sqrt{3})^2}} \Rightarrow \log_x^8 = 2^{\log_2^3} \Rightarrow \log_x^8 = 3 \Rightarrow 8 = x^3 \Rightarrow x = 2$$

مثال 32: حاصل $5^{(\log_3^2 \times \log_4^3 \times \log_5^4)}$ کدام است؟

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2

$$10^{(\log^2{}_{\cancel{3}} \times \log_{\cancel{4}}^{\cancel{3}} \times \log_5^{\cancel{4}})} = 5^{\log_5^2} = 2$$

مثال 33: اگر $\log_3^{12} = a + 1$ باشد حاصل $\log_3^2 \times \log_4^3 \times \ldots \times \log_{27}^{26}$ برابر است با:

1) $\frac{6}{a}$ 2) $\frac{a-1}{6}$ 3) $\frac{6}{a-1}$ 4) $\frac{a}{6}$

خواسته مسئله: $\log_{\cancel{3}}^2 \times \log_{\cancel{4}}^{\cancel{3}} \times \log_{\cancel{5}}^{\cancel{4}} \times \ldots \times \log_{27}^{26} = \log_{27}^2 = \log_{3^3}^2 = \frac{1}{3}\log_3^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{6}$

داده مسئله $\boxed{\log_3^{12} = a+1 \Rightarrow \log_3^{2^2\times 3} = a+1 \Rightarrow 2\log_3^2 + \log_3^3 = a+1 \Rightarrow \log_3^2 = \frac{a}{2}}$

مثال 34: حاصل $\frac{\log_3^{\sqrt{24}}}{\log_3^{\sqrt{2}}} - \frac{\log^{36}}{\log^4}$ کدام است؟

1) 2 2) 3 3) $\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{3}$

$$\frac{\log_3^{\sqrt{24}}}{\log_3^{\sqrt{2}}} - \frac{\log^{36}}{\log^4} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{24}} - \log_4^{36} \longrightarrow \log_2^{24} - \log_2^6 \xrightarrow{\text{رابطه } 1} \log_2^{\frac{24}{6}} = \log_2^4 = 2 \quad \text{نتیجه } 2$$

مثال 35: با فرض $\log_{b^3}^{a^2}$ مقدار $\frac{\log^a}{\log^b}$ چقدر است؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

$$\log_{b^3}^{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{2}{3}\log_b^a = 4 \Rightarrow \log_b^a = 6 \xrightarrow{\text{تزریق مبنای } 10} \frac{\log^a}{\log^b} = 6$$

مثال 36: حاصل عبارت $\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$ کدام است؟

1) 1 2) 2 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ در نتیجه:

$$\frac{1}{\log_2 30} = \log_{30} 2, \frac{1}{\log_2 30} = \log_{30} 3, \frac{1}{\log_4 30} = \log_{30} 5 \Rightarrow \frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$$
$$= \log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5 = \log_{30}(2\times 3\times 5) = \log_{30} 30 = 1$$

مثال 37: اگر $\log_b^a = \frac{4}{3}$ باشد مقدار $\log_{a^3}^{b^2}$ کدام است؟

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

$$\log_{a^3}^{b^2} = \frac{2}{3}\log_a^b = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\log_b^a = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_a^b = \frac{3}{4}}$$

مثال 38: اگر $x^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{3}$ باشد لگاریتم $x-1$ در کدام پایه برابر $\frac{6}{5}$ می‌باشد؟

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه 4

ابتدا با استفاده از تساوی داده شده مقدار x را پیدا می‌کنیم و سپس به محاسبه مطلوب مسئله می‌پردازیم:

$$x^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 3^2 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow x-1 = 8$$

با استفاده از رابطه $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ داریم:

$$\log_a x-1 = \frac{6}{5} \Rightarrow \log_\alpha 8 = \frac{6}{5} \Rightarrow \log_8 \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = 8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$$

مثال 39: اگر $\log = a$, $\log 3 = b$ باشد حاصل $\log_{18} 24$ کدام است؟

1) $\frac{2a+b}{b+2a}$ 2) $\frac{a+3b}{2b+a}$ 3) $\frac{3a+b}{2b+a}$ 4) $\frac{a+3b}{2a+b}$

پاسخ: گزینه 3

بنابر خاصیت $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ مبنای عبارت $\log_{18} 24$ را به مبنای 10 می‌بریم:

$$\log_{18} 24 = \frac{\log 24}{\log 18} = \frac{\log(2^3 \times 3)}{\log(3^2 \times 2)} = \frac{\log 2^3 + \log 3}{\log 3^2 + \log 2} = \frac{3\log 2 + \log 3}{2\log 3 + \log 2} = \frac{3a+b}{2b+a}$$

مثال 40: اگر $\log_8^{18} = a$ باشد مقدار $\log_4^6$ بر حسب a کدام است؟

1) $\frac{3a-1}{4}$ 2) $\frac{3a}{4}$ 3) $\frac{3a+1}{4}$ 4) $\frac{3a-1}{2}$

پاسخ: گزینه 3

$$\log_8^{18}=a\Rightarrow \log_{2^3}^{3^2\times 2}=a\Rightarrow \frac{1}{3}(2\log_2^3+\log_2^2)=a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\log_2^3+\frac{1}{3}=a\Rightarrow \log_2^3=\frac{3a-1}{2}$$

$$\log_4^6=\log_{2^2}^{2\times 3}=\frac{1}{2}(\log_2^2+\log_2^3)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3a+1}{4}$$

مثال 41: اگر $\log_b ac=3 \ ,\log_b c^3=\frac{3}{2}$ باشد حاصل $\log_{bc} ab$ کـدام است؟

1) $\frac{5}{3}$ 2) 2 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه 4

با توجه به آن که $\log_c ac=3$ پس:

$\log_b a+\log_b c=3$ از طرفی $\log_b c^3=\frac{3}{2}$ پس $\log_b c=\frac{1}{2}$ به این ترتیب $\log_b a=\frac{5}{2}$ پس:

$$\log_{bc} ab=\frac{\log_b ab}{\log_b bc}=\frac{\log_b a+\log_b b}{\log_b b+\log_b c}=\frac{\frac{5}{2}+1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{7}{3}$$

مثال 42: اگر $\log_5^x+\log_3^x=1$ باشد مقدار $\log_x 5$ برابر کـدام است؟

1) $\log_{15} 3$ 2) $\log_{15} 5$ 3) $\log_5 15$ 4) $\log_3 15$

پاسخ: گزینه 4

$$\log_5^x+\log_3 x=1\xrightarrow{+\log_5 x}1+\frac{\log_3 x}{\log_5 x}=\frac{1}{\log_5^x}\Rightarrow 1+\log_3 5=\log_x 5$$

$$\Rightarrow \log_x 5=\log_3(3\times 5)=\log_3 15 \qquad \boxed{\frac{\log_x a}{\log_y a}=\log_x y}$$

مثال 43: واسطه حسابی دو عدد $\log_c a,\log_b a$ با مربع واسطه هندسی آنها برابر است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

1) $2a=b+c$ 2) $2b=a+c$ 3) $a^2=bc$ 4) $b^2=ac$

پاسخ: گزینه 3

واسطه حسابی دو عدد a , b به صورت $\frac{a+b}{2}$ و واسطه هندسی آن ها برابر $\sqrt{ab}$ است بنابر این:

$$\frac{\log_c a+\log_b a}{2}=(\sqrt{\log_c a\times\log_b a})^2\Rightarrow \log_c a+\log_b a=2\log_c a\log_b a$$

$$\xrightarrow{\times\log_a c\times\log_a b}\underbrace{\log_c a\log_a c}_{1}\log_a b+\log_a c\underbrace{\log_a b\log_b a}_{1}=2\underbrace{\log_c a\log_a c}_{1}\underbrace{\log_b a\log_a b}_{1}$$

مثال 44: اگر $\log_3^x+\log_{12}^x=2\log_3^x.\log_{12}^x$ باشد کدام است؟

1) 4 2) 6 3) 18 4) 2

پاسخ: گزینه 2

راه حل اول) طبق تست بالا $x^2=12\times3=36\Rightarrow x=6$

راه حل اول) طرفین تساوی را در $\log_x^3.\log_x^{12}$ ضرب می‌کنیم:

$$\log_x^3.\log_x^{12}\left(\log_3^x+\log_{12}^x\right)=2(\log_3^x.\log_x^3)(\log_{12}^x.\log_x^{12})$$

$$\Rightarrow\log_x^{12}+\log_x^3=2\Rightarrow\log_x^{36}=2\Rightarrow x^2=36\Rightarrow\boxed{x=6}$$

مثال 45: اگر $\log_6 4=a$ باشد حاصل $\log_{12}18$ کدام است؟

1) $\frac{4-a}{2+a}$ 2) $\frac{2+a}{1+a}$ 3) $\frac{3+a}{1+a}$ 4) $\frac{1+a}{4+a}$

پاسخ: گزینه 1

روش اول)

$$\log_{12}18=\frac{\log_6 18}{\log_6 12}=\frac{\log_6 6+\log_6 3}{\log_6 6+\log_6 2}=\frac{1+\log_6\frac{6}{2}}{1+\log_6 2}=\frac{1+1-\log_6 2}{1+\log_6 2}=\frac{2-\frac{a}{2}}{1+\frac{a}{2}}=\frac{\frac{4-a}{2}}{\frac{a+2}{2}}=\frac{4-a}{a+2}$$

روش دوم)

$$\log_{12}18=\log_{12}6+\log_{12}3=\log_{12}6+\log_{12}6-\log_{12}2=\frac{2}{\log_6 12}-\frac{1}{\log_2 12}$$

$$=\frac{2}{\log_6^6+\log_6 2}-\frac{1}{\log_2 2+\log_2 6}=\frac{2}{1+\log_6 2}-\frac{1}{1+\log_2 6}=\frac{2}{1+\frac{1}{2}\log_4 6}$$

$\boxed{\text{فرض}}$ $:\log_6 4=a\Rightarrow\frac{2}{1+\frac{1}{2}a}-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}=\frac{4}{2+a}-\frac{a}{a+2}=\frac{4-a}{2+a}$

مثال 46: اگـر $3^{\log a} = b^{\log 2}$ حاصل $9^{\log_b a}$ کدام است؟

1) a^3b^2 2) a^3 3) b^2 4) 4

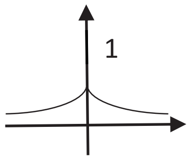
پاسخ: گزینه 4

پـس: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ روش اول می‌دانیم

$b^{\log 2} = 2^{\log b}$

$3^{\log a} = b^{\log 2} = 2^{\log b} \Rightarrow 3^{\log a} = 2^{\log b}$

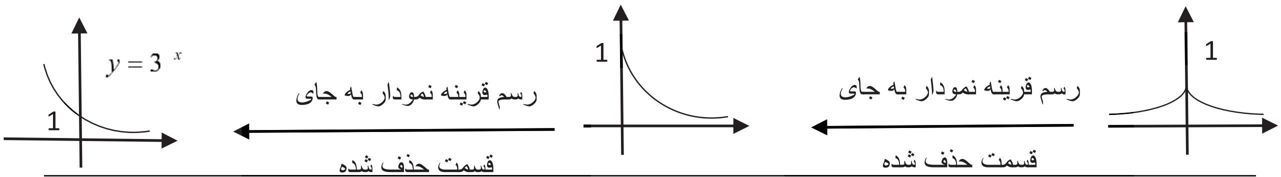
مثال 47: نمودار شکل مقابل معرف کدام تابع است؟



1) $y = 3^{-|x|}$ 2) $y = |3^x|$ 3) $y = 3^{|x|}$ 4) $y = |3^{-x}|$

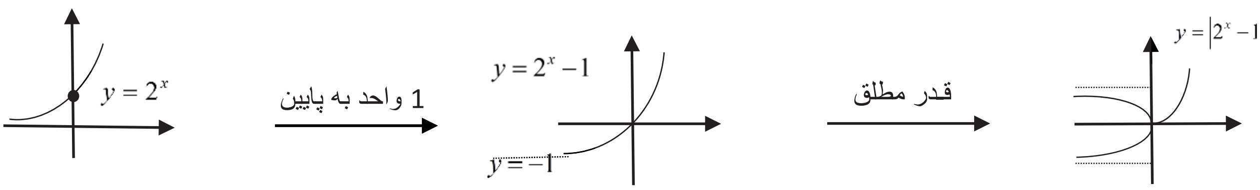
هست. پس برای رسم به روش عمل می‌کنیم: $y = f(|x|)$ همان $y = 3^{-|x|}$ تابع

$y = 3^{-|x|}$



مثال 48: نمودار تابع $y = |2^x - 1|$ در کدام اکیداً صعودی است؟

1) $(-\infty, 1]$ 2) $\mathbb{R}$ 3) $[0, +\infty)$ 4) $[-1, 1]$



تمرین فصل پنجم کتاب مکتب

سوالات زیر را به دقت خوانده برای هر سوال چهار جواب داده شده، جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1. عدد لوگاریتمی $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوی است.

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2. در رابطهٔ $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ قیمت b عبارت است از:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3. قیمت افادهٔ $\log_3 81-\log 0.01$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 6$ $d)\ 9$

4. قیمت x در معادلهٔ $\log 18-\log 2x=\log 3$ مساوی است به:

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 13.5$

5. $\log_2 16=?$ عبارت است از:

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$ عبارت است از:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ عبارت است از:

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8. قیمت x در معادلهٔ $3^{x-1}=9$ عبارت است از:

$a)\,x$ $b)\ x=9$ $c)\ x=-9$ $d)\ x=3$

9. مشخصهٔ $\log 234.21$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10. معکوس لوگاریتم یک عدد مساویست به:

$a)\ \log_a m=\frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m\frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m=-\frac{1}{\log_a m}$ $d)$ هیچکدام

سوالات زیر را حل کنید

1. در معادلات زیر قیمت x را دریافت کنید.

a) $3^x=3^{3x+2}$ b) $3^{2x}=9^{4x-1}$

c) $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ d) $16^{x+1}=64^{x-2}b$

e) $15^{2x-1}=7^{x+1}$ f) $\log\sqrt{x+1}=1-\frac{1}{2}\log x$

g) $\log(4x-3)=2-\log 20$ h) $\log_5(x-1)-\log_5(x-2)=\log_5 2$

2. افاده های لوگاریتمی زیر را با استفاده از قوانین لوگاریتم ساده سازید.

$a)\ \log_3(12x^2)-\log_3(8x^3y^2)+\log_3(2xy^2)=?$

$b)\ \log_5(\frac{4ab}{x})+\log_5(\frac{x}{100ab})b=?$

$c)\ \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4^3\sqrt{2}}=?$

3. لوگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

$a)\ \log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\quad b)\ \log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10} \sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\ \log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\quad e)\ \log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

4. انتی لوگاریتم های زیر ار دریافت کنید.

$a)\ 1.7300$ $\quad b)\ 0.8950$ $\quad c)\ 4.5682$ $\quad d)\ \bar{2}.1987$

5. لوگاریتم هر یک از اعداد زیر ار دریافت کنید.

$a)\ 89500$ $\quad b)\ 91$ $\quad c)\ 65.3$ $\quad d)\ \log 0.002$

6. به کمک لوگاریتم حاصل ضرب اعداد زیر را محاسبه کنید.

$a)\ 2.01 \cdot 52 \cdot 99$ $\quad b)\ (0.0062)\cdot(-34.8)$

7. خارج قسمت های داده شدهٔ زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید.

$a)\ 0.888 \div 256$ $\quad b)\ 17.3 \div 7.47$

8. هریک از افاده های زیر را به کمک لوگاریتم دریافت کنید.

$a)\ (7.42)^3$ $\quad b)\ (-84.7)^2$

تمرین

1. افاده های ذیل را با استعمال مفهوم لوگاریتم به افاده های معادل آن ها بنویسید.

$a)\ 4^3 = 64$ $\quad b)\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$c)\ 27^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{3}$ $\quad d)\ 10^3 = 1000$

$e)\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ $\quad f)\ (32)^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{2}$

2. روابط لوگاریتمی ذیل را به افاده های معادل اکسپوننشیل بنویسید.

$a)\ \log_9 81 = 2$ $\quad b)\ \log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$

$c)\ \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$ $\quad d)\ \log_4 256 = 4$

$e)\ \log 0.001 = -3$ $\quad f)\ \log_4 256 = 4$

3. معادلات ذیل را برای x حل کنید.

$a)\ \log_2 x = 5$ $\quad b)\ \log_x 0.001$

$c)\ \log_{10} x = -1$ $\quad d)\ \log_{12} x = 4$

4. افاده های ذیل را ساده سازید.

$a)\ \log_2 x = 5$ $\quad b)\ \log_x(\log_x x)$

$c)\ \log_x\left(\log_a a^x\right)$

5. افاده های ذیل را ساده سازید.

$a)\ \log\sqrt{xy}$ $\quad b)\ \log_b\left(\frac{r^2 s}{t^2}\right)$

$c)\ \log_b u^{\frac{-4}{5}}$ $\quad d)\ \log 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$e)\ \log\left(\sqrt[4]{x^3}\sqrt[3]{y}\right)$ $\quad f)\ \log_b 3r^2$

6. افاده های ذیل را توحید نمائید.

$a)\ \log_b x+\log_b y=\log_b z$

$b)\ 4\log_b m-\frac{2}{3}\log_b y$

$c)\ \log_b(x^2-9)-\log_b(x+3)$

7. معادلات ذیل را حل کنید.

$a)\ \log x+\log(x-3)=1$

$b)\ \log_b(x-9)+\log_b x=2$

$c)\ \log_b x=\frac{1}{2}\log_b 36-2\log_b 3+\frac{3}{2}\log_b 16$

8. در معادلات ذیل عدد x را معین بسازید.

$a)\ 2^x=128$ $\quad b)\ 4^{-x}=10$ $\quad c)\ 3^{x^2}=8$

9. مشخصه های لوگاریتم های ذیل را بنویسید.

$a)\ \log 738$ $\quad b)\ \log 73.8$ $\quad c)\ \log 0.738$

$d)\ \log(13.10^4)$ $\quad e)\ \log(9.10^0)$ $\quad f)\ \log(5.10^{-2})$

10. لوگاریتم های ذیل را از جدول لوگاریتم دریافت کنید.

$a)\ \log 0.738$ $\quad b)\ \log 23.4$ $\quad c)\ \log 300$

$d)\ \log(0.000316)$ $\quad e)\ \log(14.10^7)$ $\quad f)\ \log 999$

11. عدد N را مشخص کنید در صورتیکه

$a)\ \log N=5$ $\quad b)\ \log N=-5$ $\quad c)\ \log N=-1$

12. عدد P را بدست آرید هرگاه

$a)\ \ln P=2$ $\quad b)\ \ln p=-1$ $\quad c)\ \ln p=0$

جدول لوگاریتم که مانتیس آن چهار رقم اعشاری دارد

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

نکات مهم فصل پنجم

تعریف: هرگاه a یک عدد مثبت و $a \neq 1$ باشد، $f(x) = a^x$ را به نام تابع اکسپوننشیل به قاعدهٔ a می نامند.

خواص توابع اکسپوننشیل

با استفاده از معلومات قبلی خواص توابع اکسپوننشیل را به شکل زیر بیان می کنیم:

1- در هر تابع اکسپوننشیل ناحیهٔ تعریف اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌ها اعداد حقیقی مثبت است.

2- قسمی که ناحیه تعریف هر تابع اکسپوننشیل برای هر x , $f(x) > 0$ است.

3- هر تابع اکسپوننشیل تابع یک به یک(injective) است یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1) \neq f(x_2)$

4- هر تابع اکسپوننشیل برای $a > 1$ متزاید و برای $a < 1$ متناقص است.

5- گراف هر تابع اکسپوننشیل از نقطه $(0,1)$ می گذرد.

6- گراف های توابع اکسپوننشیل $g(x) = a^{-x}$, $f(x) = a^x$ نظر به محور y متناظر اند.

لوگاریتم

تعریف: لوگاریتم عبارت از طرز ارائه نوع دیگر از طاقت می باشد و یا اینکه محاسبهٔ توان مجهول را بنام لوگاریتم یاد میکنند. $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$

تابع لوگاریتمی: معکوس تابع اکسپوننشیل به نام تابع لوگاریتمی یاد میشود.

خواص تابع لوگاریتمی

1- ساحهٔ قیمت های تابع لوگاریتمی ست اعداد حقیقی مثبت می باشد.

2- قسمی که $\log_a 1 = 0$ است برای هر قاعده اختیاری می باشد؛ پس به این اساس تابع لوگاریتمی تنها یک جذر حقیقی $x_0 = 1$ دارد. بدین ترتیب گراف تابع لوگاریتمی در سیستم مختصات قایم از نقطهٔ (1.0) می گذرد.

3- هر تابع لوگاریتمی تابع یک به یک است یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1) \neq f(x_2)$ است.

4- گراف های توابع لوگاریتمی $f(x) = \log_a x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ نظر به محور x متناظر اند.

انواع لوگاریتم

لوگاریتم معمولی(عام): لوگاریتمی که قاعده آن عدد 10 باشد به نام لوگاریتم عام یا Briggs system نامیده می شود،که به سمبول log نمایش داده می شود.

لوگاریتم طبیعی

لوگاریتمی که قاعدهٔ آن e است به نام لوگاریتم طبیعی یاد گردیده و طور زیر نشان داده می شود.

$$\log_e x = \ln x$$

قوانین لوگاریتم

قانون اول: $\log_a a = 1$

قانون دوم: $\log_a 1 = 0$

قانون سوم: $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$

قانون چهارم: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

قانون پنجم: $\log_a x^n = n\log_a x$

قانون ششم: $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$

قانون هفتم: $\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$

قانون هشتم: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

کرکترستیک و مانتیس

کرکترستیک: هرگاه $\log x = n + \log s$, $1 \le S < 10$ باشد n یک عدد تام که به نام مشخصه یا کرکترستیک یاد می شود که از روی خود عدد تعیین می شود.

مانتیس: قسمت اعشاری (logs) به نام مانتیسا یاد می شود که از روی جدول تعیین می گردد. مانتیس یک عددی مثبت بین صفر ویک قرار دارد.

انتـــی لوگـــاریتم: هرگـاه $\log_a y = x$ باشـد؛پس y را بـه نـام انتـی لوگـاریتم x مـی نامنـد؛ یعنی: $y = anti \log x$

انترپولیشن خطی: اگر یک عدد نامعلوم بین دو عدد معلوم واقع باشد به کمک آن اعداد معلوم می توان عدد نامعلوم را دریافت کرد در این صورت این طریقه به نام انترپولیشن خطی یاد می شود.

معادلات نمایی و لوگاریتمی

معادلات نمائی: معادلهٔ که دارای نمایی مجهول باشد به نام معادلهٔ نمائی یاد می گردد. برای دریافت مجهول از قوانین طاقت ها استفاده می کنیم.

معادلات لوگاریتمی: افاده های لوگاریتمی که در آن مجهول موجود باشد به نام معادلات لوگاریتمی یاد می گردد.

عملیه های ریاضی به کمک لوگاریتم

دریافت حاصل ضرب به کمک لوگاریتم

دریافت حاصل تقسیم به کمک لوگاریتم

دریافت طاقت به کمک لوگاریتم