



**RIAZISARA**

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

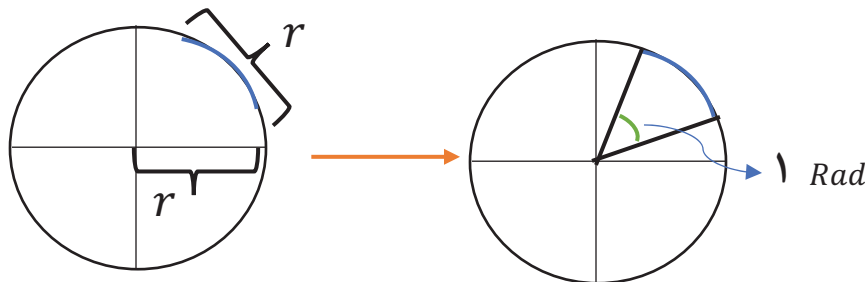
همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲



## واحدهای اندازه گیری زاویه

درجه: یک درجه زاویه مرکزی روبرو به کمانی از دایره است که طول آن  $\frac{1}{360}$  محیط دایره است.

رادیان: قسمتی از محیط دایره را انتخاب میکنیم که اندازه اش برابر شعاع دایره باشد، سپس زاویه ای مرکزی رسم میکنیم که از دو سر این قطعه بگذرد. به این زاویه یک رادیان میگوییم.



۱۸۰ درجه معادل با  $\pi$  رادیان است.

تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر:

برای تبدیل واحدهای زاویه به رادیان از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

↑      ↑  
درجه   رادیان

۱- در ساعت ۱۲ و ۱۵ دقیقه، زاویه بین عقربه ی ساعت شمار و دقیقه شمار چند درجه است؟

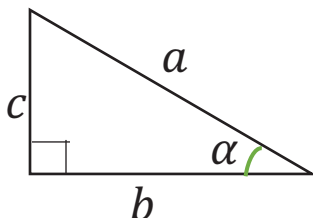
۲- زاویه های زیر را روی دایره مشخص کنید:

$$\alpha = \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{3}$$

## نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

در مثلث قائم الزاویه، نسبت های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  به شکل زیر تعریف میشود:



$$\sin \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

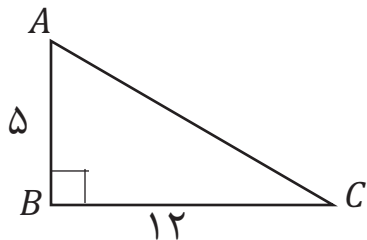
$$\cot \alpha = \frac{b}{c}$$

این هم سه نتیجه معروف و مهم از روابط بالا :

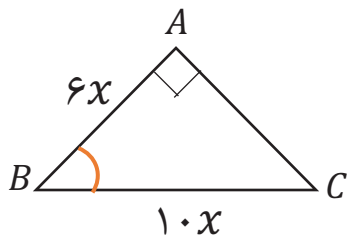
$$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

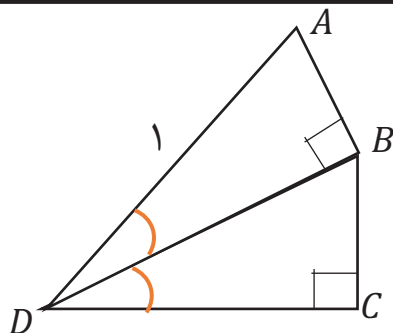
$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



۱- در شکل زیر  $\sin \hat{A} + \cos \hat{A}$  را بیابید.

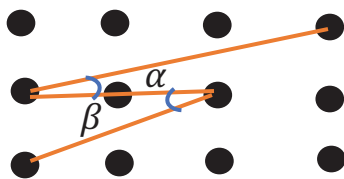


۲- با توجه به شکل،  $\tan \hat{B}$  را بیابید.



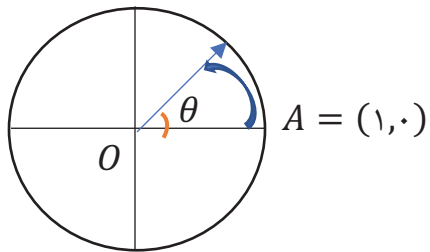
۳- با توجه به شکل زیر، طول BC را بیابید.

۴- در شکل زیر، نقاط روی شبکه مربعی هستند.  $\tan \beta$  چند برابر  $\cot \alpha$  است؟

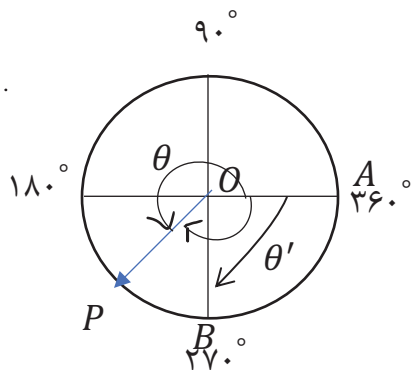


## دایره مثلثاتی

دایره ای است به شعاع واحد که مرکز آن  $O = (0, 0)$ ، نقطه ی شروع آن  $A = (1, 0)$  و جهت حرکت در این دایره خلاف جهت عقربه های ساعت است، این هم شکلش:

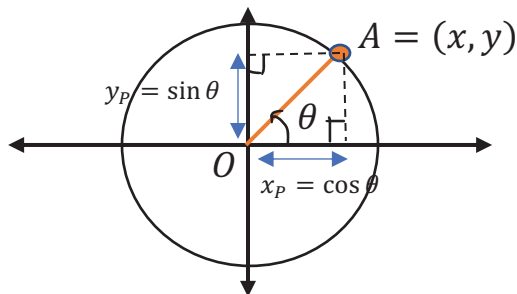


مطابق شکل اگر نقطه  $P$  از  $A$  شروع کند و در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت حرکت کنیم، زاویه  $\theta$  مثبت است و بر عکس اگر جهت حرکت  $P$ ، ساعت گرد باشد، زاویه  $\theta$  منفی میشود. به عنوان مثال، در دایره ی مثلثاتی زیر زاویه  $-۱۳۵^\circ$  را رسم کنیم،  $\widehat{AOP} = -۱۳۵^\circ$  است. دقت کنید کنید که اگر انتهای کمان یک زاویه مثلا در نقطه ی  $B$  باشد، این زاویه متناسب با این است که مثبت باشد یا منفی دو حالت دارد: مثبت باشد روی شکل میشود  $\theta$  که برابر  $۲۷۰^\circ$  است و اگر منفی باشد، میشود  $\theta'$  که  $-۹۰^\circ$  است.



### محور های سینوس و کسینوس

در دایره مثلثاتی، محور  $y$  ها را محور سینوس ها و محور  $x$  ها را محور کسینوس ها می نامیم. برای پیدا کردن نسبت های مثلثاتی یک زاویه، از نقطه ی نشان دهنده ی زاویه روی محیط دایره بر محورهای  $x$  و  $y$  عمود میکنیم. در این صورت از مرکز دایره، یعنی  $O$  تا پای عمودها،  $\sin$  یا  $\cos$  آن زاویه میشود.



اگر  $\theta$  زاویه ای در ربع دوم باشد، به طوری که  $\sin \theta = \frac{1}{5}$ ، سایر نسبت های مثلثاتی  $\theta$  را بیابید.

نسبت های مثلثاتی زوایای معروف که حفظ آن بر همه واجب است.

زاویه	۰	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تن	۰	تن	۰
cot	تن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تن	۰	تن

محدوده  $\cos \alpha$  و  $\sin \alpha$

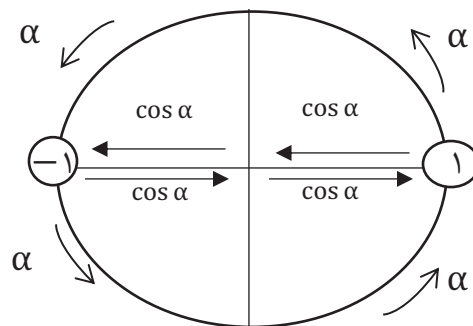
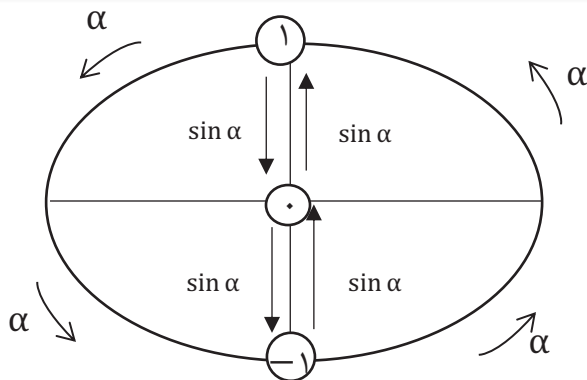
در دایره ی مثلثاتی زیر اگر عقربه ی  $\alpha$  رو هر چه قدر بچرخانیم،  $\sin \alpha$  حداکثر برابر ۱ و حداقل برابر -۱ میشود. این مطلب برای  $\cos \alpha$  هم صدق میکند.

در ربع اول و دوم با افزایش  $\alpha$ ، مقدار  $\cos \alpha$  زیاد میشود.

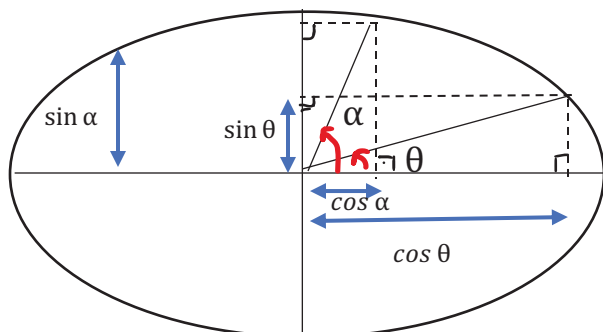
در ربع سوم و چهارم با افزایش  $\alpha$ ، مقدار  $\cos \alpha$  زیاد میشود.

در ربع اول و چهارم با افزایش  $\alpha$ ، مقدار  $\sin \alpha$  زیاد میشود.

در ربع دوم و سوم با افزایش  $\alpha$ ، مقدار  $\sin \alpha$  زیاد میشود.



به صورت کلی در دایره مثلثاتی هر نقطه ای که عرضش بیشتر باشد، سینوس هم بیشتر میشود و هر نقطه ای که طولش بیشتر باشد، کسینوسش بیشتر میشود.



$$\bullet \quad < \theta < \alpha < 90 \Rightarrow \sin \theta < \sin \alpha$$

$$\bullet \quad < \theta < \alpha < 90 \Rightarrow \cos \theta > \cos \alpha$$

اگر  $\alpha$  یک زاویه دلخواه باشد، حداکثر و حداقل هر یک از عبارت های زیر را بیابید.

$$\sin \alpha - 1$$

$$2 \cos \alpha + 3$$

$$\sin^2 \alpha + 1$$

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 4$$

در هر یک از موارد زیر با توجه به محدوده ی  $\alpha$ ، مقادیر  $m$  و  $n$  را تعیین کنید.

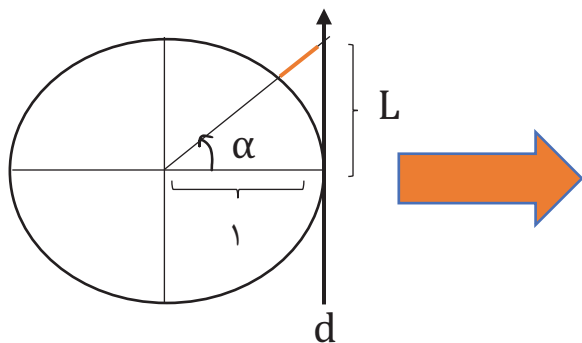
$$m \leq \cos \alpha \leq n, 30 \leq \alpha \leq 45$$

$$m \leq \sin \alpha \leq n, 30 \leq \alpha \leq 45$$

اگر  $30 \leq \theta \leq 150$  و  $\sin \theta = \frac{m-1}{2}$  باشد، برای  $m$  چند عدد صحیح وجود دارد؟  $\sin 150 = \frac{1}{2}$

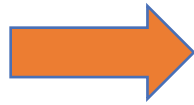
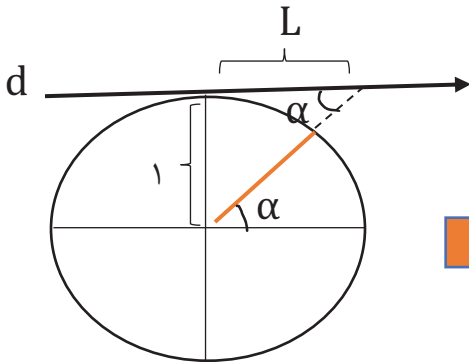
### محورهای $\tan$ و $\cot$

در دایره مثلثاتی، عقربه ای که حاوی زاویه  $\alpha$  هست را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل مشخص است خط  $d$  در سمت راست دایره، به دایره مماس است. اگر این عقربه را امتداد دهیم تا خط  $d$  را قطع کند، یک مثلث قائم الزاویه به دست می آید. طبق قرارداد  $\tan \alpha$  در مثلث قائم الزاویه زیر تعریف می شود:



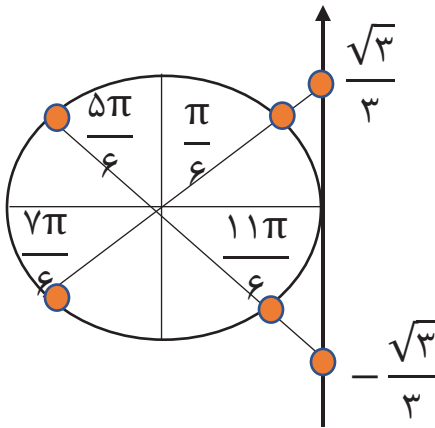
$$\tan \alpha = \frac{L}{1} \Rightarrow \tan \alpha = L$$

برای  $\cot \alpha$  باید خطی افقی بر روی دایره مماس کنیم. اگر عقربه رو امتداد دهیم تا خط  $d$  را قطع کند یک مثلث قائم الزاویه به دست می آید که طبق قرارداد  $\cot \alpha$  به شکل زیر تعریف می شود:



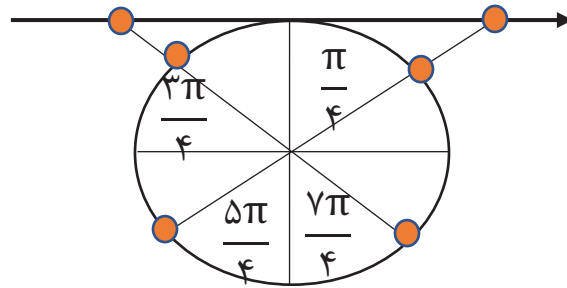
$$\cot \alpha = \frac{L}{1} \Rightarrow \cot \alpha = L$$

مقدار تانژانت و کتانژانت زاویه هایی که روی ضربدرها قرار دارند:



$$\tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

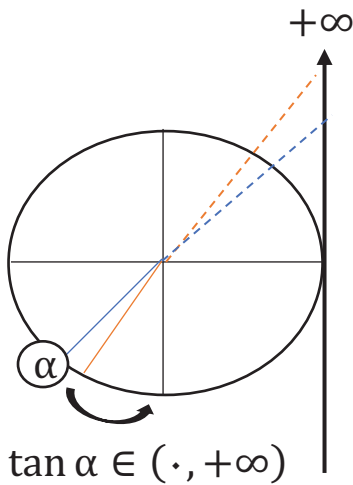
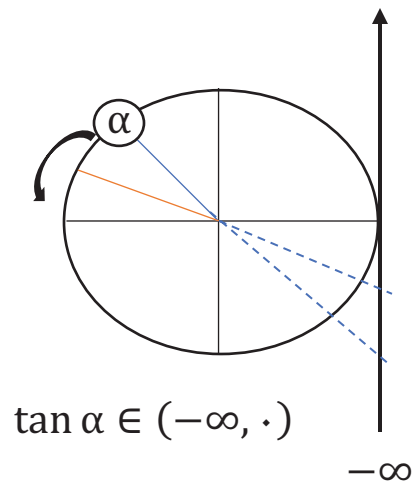
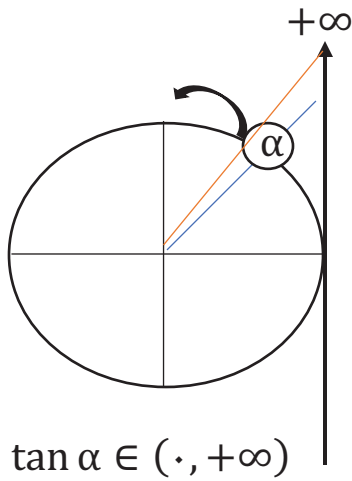


$$\cot \frac{\pi}{4} = \cot \frac{5\pi}{4} = 1$$

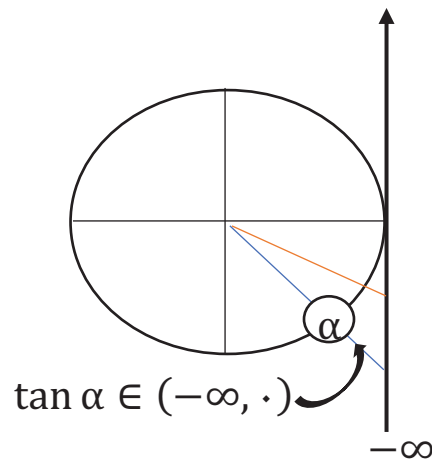
$$\cot \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{7\pi}{4} = -1$$

محدوده ی  $\cot$  و  $\tan$

با رسم شکل در پهنای ربع دایره مثلثاتی میتوان فهمید که با افزایش  $\alpha$  مقدار  $\tan \alpha$  زیاد میشود.

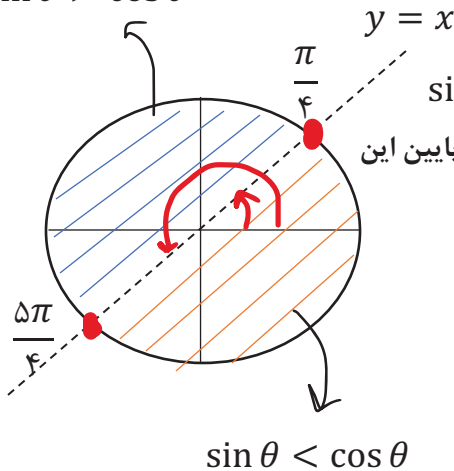


$\alpha$



برای  $\cot \alpha$  در هر ۴ ربع با افزایش  $\alpha$  مقدار  $\cot \alpha$  کم میشود. رسم شکل بر عهده دانش آموزان

$\sin \theta > \cos \theta$



رابطه  $\sin$  و  $\cos$  روی نیمساز ربع (اول و سوم) - (دوم و چهارم)

نقطی که روی نیمساز ربع اول و سوم باشد ( $y = x$ )، یعنی  $\sin \theta = \cos \theta$

نقطی که بالای این خط هستند، عرضشان از طولشان بیشتر است و نقطی که پایین این

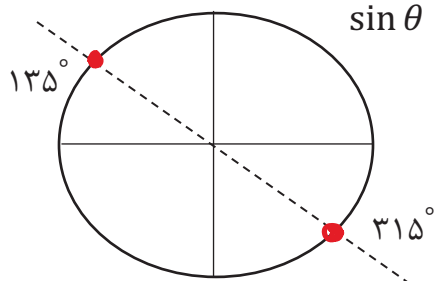
خط هستند طولشان از عرضشان بیشتر است و خواهیم داشت:

$0 < \theta < 45 \Rightarrow \tan \theta < \cot \theta$

$45 < \theta < 90 \Rightarrow \tan \theta > \cot \theta$



$$y = -x$$



نقطاتی که روی نیمساز ربع دوم و چهارم هستند  $y = -x$ ، یعنی  $\sin \theta = -\cos \theta$  مجموع  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  در این نقاط صفر خواهد بود.

## مثلثات در مثلث

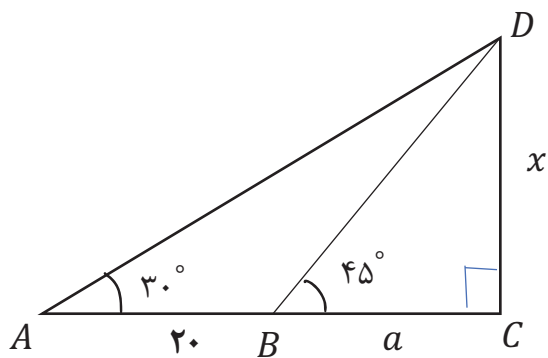
در مثلث قائم الزاویه سه رابطه مهم خواهیم داشت:

۱- ضلع روبرو به زاویه  $30^\circ$  درجه، نصف وتر است.

۲- ضلع روبرو به  $60^\circ$ ،  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وتر است.

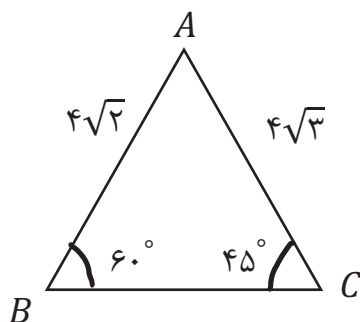
۳- ضلع روبرو به  $45^\circ$ ،  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  وتر است.

افراد  $A$  و  $B$  که از هم به فاصله  $20$  متر و در یک طرف برجی هستند. بالاترین نقطه  $D$  این برج را به ترتیب با زوایای  $30^\circ$  و  $45^\circ$  میبینند. ارتفاع برج را بیابید.

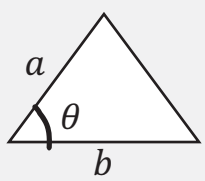
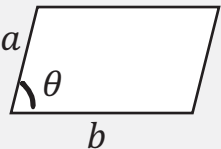
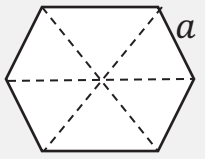
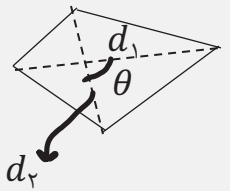


یک موشک در ارتفاع  $20$  متری از سطح زمین با زاویه  $30^\circ$  درجه پرتاب میشود. پس از طی  $3000$  متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی میرسد؟

در شکل زیر، اندازه ضلع  $BC$  و ارتفاع وارد بر آن را بیابید.



مساحت شکل‌های زیر را حفظ باشید .

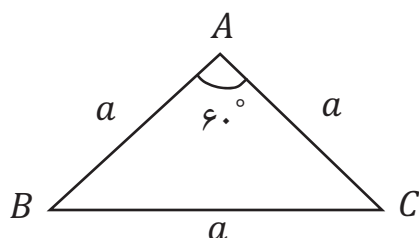
نام	مثلث	متوازی الاضلاع	شش ضلعی منتظم	چهارضلعی دلخواه
شرایط	داشتن ۲ ضلع و زاویه بین	داشتن ۲ ضلع و زاویه بین	داشتن ضلع	داشتن ۲ قطر و زاویه بین
مساحت	$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$	$S = ab \sin \theta$	$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \theta$
شکل				

مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع ۶ را بیابید.

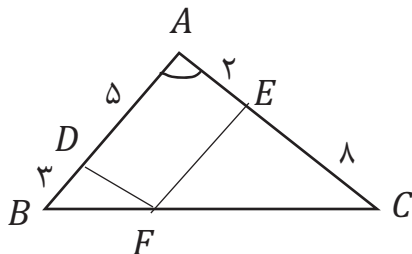
$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

نشان دهید مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع  $a$  برابر است با

مساحت مثلث زیر را بیابید.

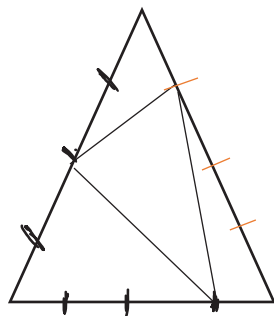


در شکل زیر، مساحت متوازی الاضلاع چه کسری از مثلث است؟



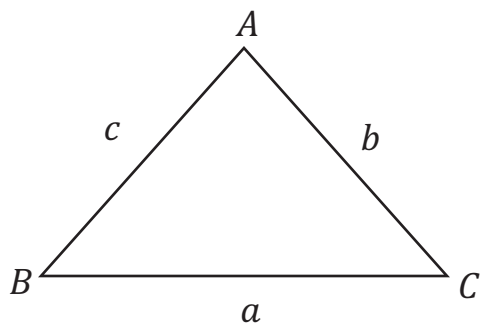
هشت ضلعی منتظمی درون دایره ای به شعاع ۲ قرار دارد. مساحت آن را بیابید.

در شکل زیر، ضلع مثلث متساوی الاضلاع چهار قسمت شده است. مساحت قسمت رنگ شده چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟



## قضیه سینوس ها

این قضیه برای تمام مثلث ها برقرار است و میگوید: نسبت هر ضلع به سینوس زاویه ی مقابلش عددی ثابت است.

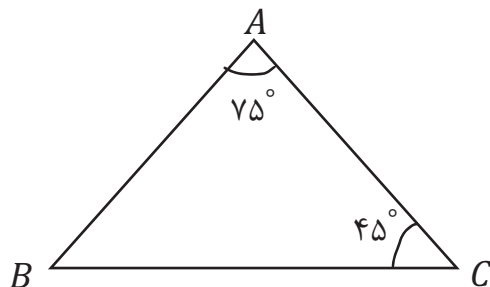


$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \rightarrow b \sin \hat{A} = a \sin \hat{B} \rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

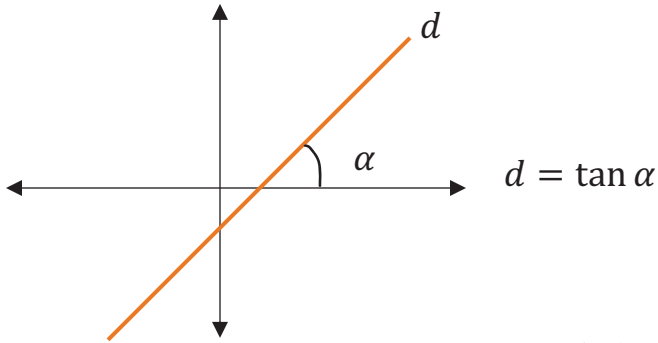


در مثلث زیر، نسبت  $\frac{AB}{AC}$  را بیابید.



## شیب خط و تانژانت

مقدار تانژانت زاویه، همان شیب خط است.



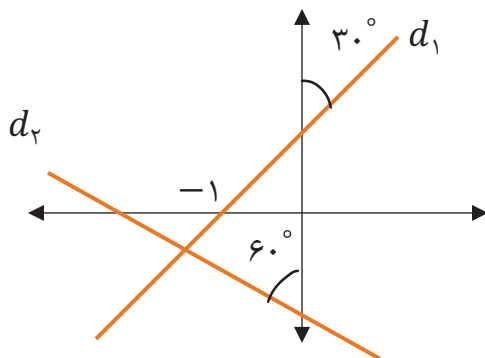
به عنوان مثال در خط  $y = x + 1$  چون شیب خط برابر با 1 است پس  $\tan \alpha = 1$  یعنی خط محور  $x$  ها را با زاویه  $45^\circ$  قطع میکند.

معادله خطی بنویسید که با محور  $x$  ها زاویه  $45^\circ$  بسازد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

خط  $4mx + (3m - 2)y = 1$  با محور  $x$  ها زاویه  $45^\circ$  میسازد  $m$  را بیابید.

خطی که با محور  $x$  ها زاویه  $30^\circ$  بسازد و محور  $y$  ها را در نقطه ای با عرض  $-\sqrt{3}$  قطع کند، معادله اش به چه صورت خواهد بود؟

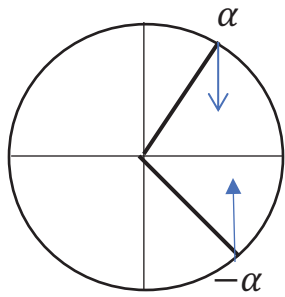
در شکل زیر، عرض نقطه به طول 1 روی خط  $d_1$  چند برابر شیب خط  $d_2$  است؟



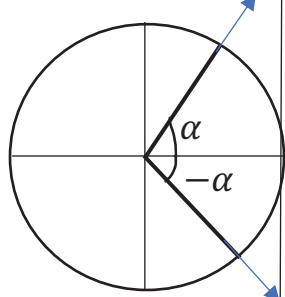
## دو زاویه قرینه

دایره مثلثاتی زیر به خوبی دو زاویه قرینه را نمایش میدهد.

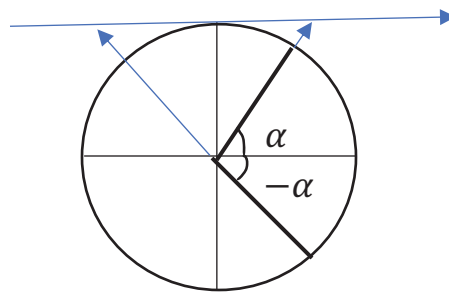
به زبان ساده میتوان گفت که  $\cos$  منفی خوره و  $\sin, \tan, \cot$  منفی انداز هستند.



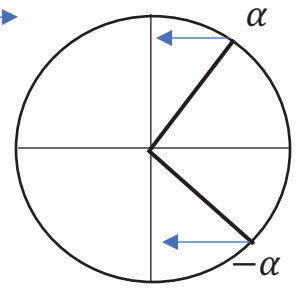
$$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$$



$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$



$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$2 \cos\left(\frac{-125\pi}{4}\right) - 3 \tan\left(-\frac{125\pi}{4}\right) + 4 \cot\left(\frac{-125\pi}{4}\right) =$$

## دو زاویه مکمل

اگر مجموع دو زاویه برابر با  $180^\circ$  درجه شود آن دو زاویه مکمل هستند.

مکمل زاویه  $\alpha$  برابر با  $\pi - \alpha$  است، زیرا:  $(\alpha) + (\pi - \alpha) = \pi$

مکمل زاویه های داده شده را بیابید.

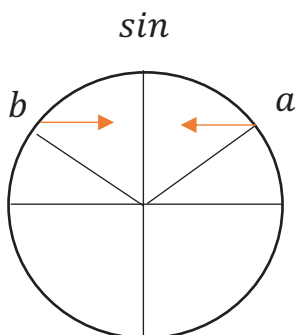
$$\alpha - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{4} - \gamma$$

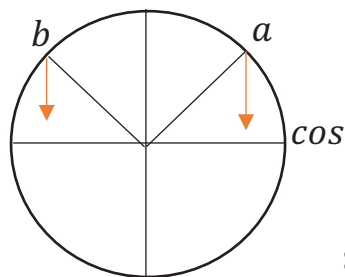
$$\beta + \frac{2\pi}{5}$$

دایره مثلثاتی زیر به خوبی روابط دو زاویه مکمل را نمایش میدهد. به زبان ساده دو زاویه مکمل  $\sin$

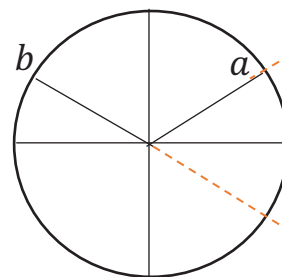
هاشون با هم برابر است اما  $\cos$  ها،  $\tan$  ها و  $\cot$  هاشون قرینه ی یکدیگر هستند.



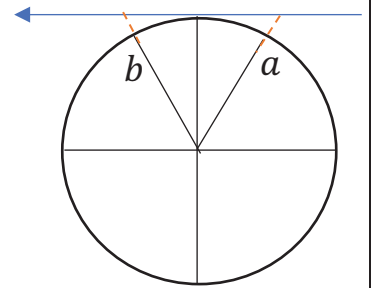
$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$$



$$\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$



$$\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha)$$



$$\cot \alpha = -\cot(\pi - \alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

در دو زاویه مکمل داریم:

$$\cos a + \cos b = \cdot$$

$$\tan a + \tan b = \cdot$$

$$\cot a + \cot b = \cdot$$

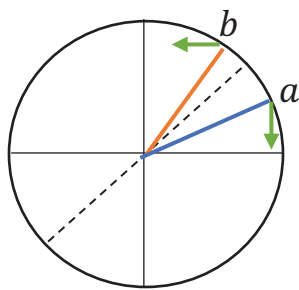
حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} =$$

$$\sin \frac{5\pi}{8} + \cot \left( \alpha + \frac{3\pi}{8} \right) + \sin \frac{3\pi}{8} + \cot \left( \frac{5\pi}{8} - \alpha \right) =$$

## دو زاویه متمم

دو زاویه متمم در دایره مثلثاتی نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند و به زبان ساده  $\sin$  ها با  $\cos$  ها برابر هستند و  $\tan$  با  $\cot$  ها.



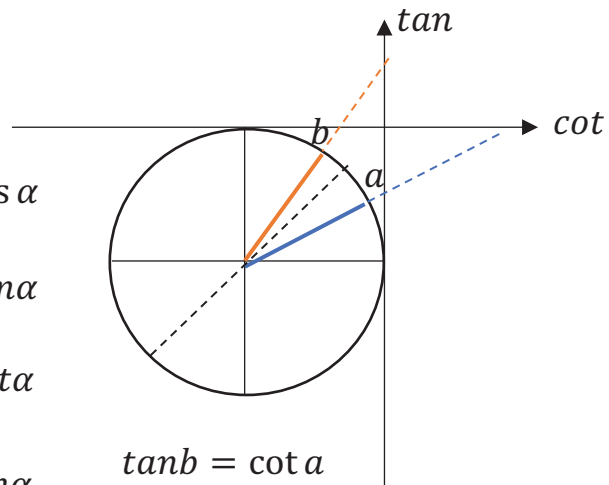
$$\sin b = \cos a$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha$$

$$\cot \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \tan \alpha$$



$$\tan b = \cot a$$

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\sin \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right) - \cos \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sin \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right)$$

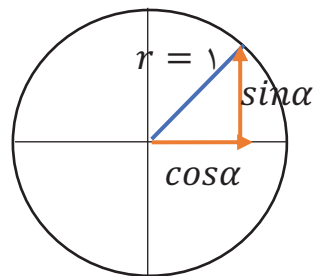
$$A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 88^\circ \tan 89^\circ$$

$$\frac{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}}{\cot \hat{B} + \cot \hat{C}} = 1$$

در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  که  $\hat{A} = 90^\circ$  است ثابت کنید:

## روابط بین نسبت های مثلثاتی

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$



$$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{cases}$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha)^3 + 3(\sin^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha) + 3(\sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^3$$

$$\rightarrow 1 = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$\rightarrow \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

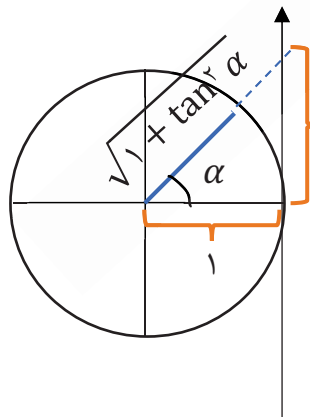
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{\cancel{\sin^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cancel{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cancel{\sin^2 \alpha}} + \frac{\cancel{\cos^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

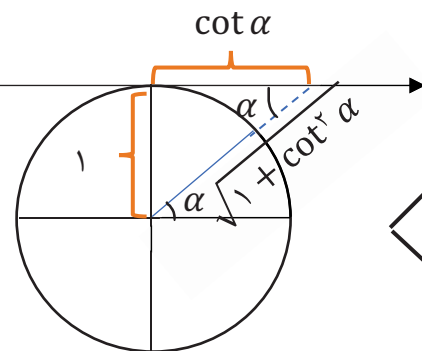
$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \end{aligned}$$

حاصل عبارات زیر را ساده کنید .

$$\left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right) \times \cos x =$$

$$\tan x + \cot x =$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin x \cos x} =$$



$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \sin x \cos x =$$

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha =$$

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} =$$

$$\frac{\tan x + \cot x}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}} =$$

$$\left( \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) =$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} =$$

اگر  $\alpha$  در ربع دوم باشد، ساده شده عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} =$$

اگر  $\tan x = 2$  باشد، حاصل کسر  $\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$  را بیابید.

اگر  $\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$  باشد،  $\sin x \cos x$  را بیابید.

اگر  $\alpha$  در ربع اول و  $\sin \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ ، مقدار  $\tan \alpha$  را بیابید.

اگر  $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$  و  $\alpha$  زاویه ای در ناحیه چهارم باشد،  $\sin \alpha$  را بیابید.

مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که عبارت زیر، یک اتحاد مثلثاتی باشد:

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{a}{\cos^2 x}$$

در اتحادی زیر،  $A - B$  را بیابید.

$$1 - \cos^2 x = \frac{A}{\sin^2 x} + \frac{B}{\sin^4 x}$$

اتحاد بودن تساوی های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan^2 x - \cos^2 x = \tan^2 x \cos^2 x$$

حاصل  $(1 + \sin x + \cos x)^2$  چند برابر  $(1 + \sin x)(1 + \cos x)$  است؟

حاصل  $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$  چند برابر  $\frac{\tan x}{\cos x}$  است؟

## روابط بین نسبت های مثلثاتی

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(45^\circ + \beta) = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta}$$

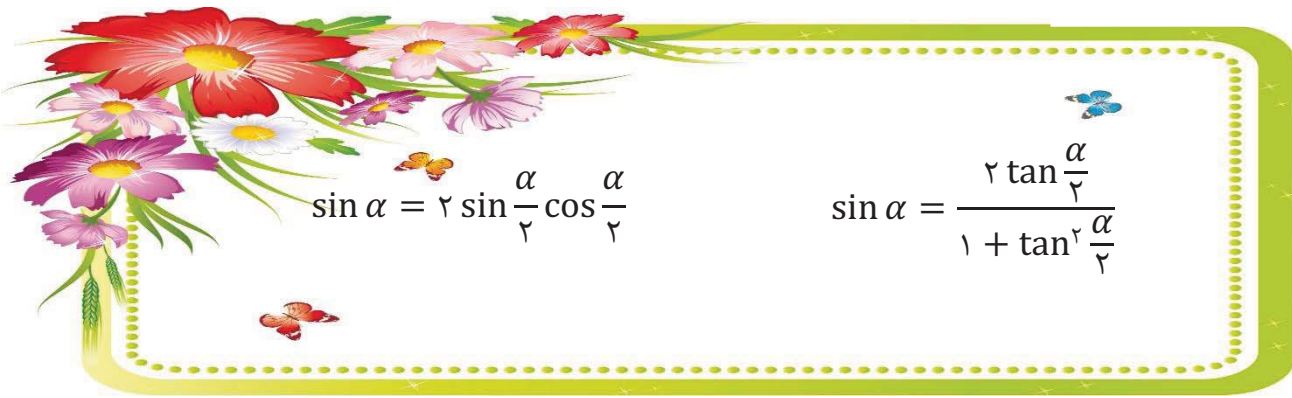
$$\tan(45^\circ - \beta) = \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta}$$

روابط مخفی و کاربردی

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}} \cdot \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} \longrightarrow \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$$

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} \cdot \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} \longrightarrow \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \tan(45^\circ - \alpha)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \times \cos \alpha = 2 \tan \alpha \times \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \implies \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

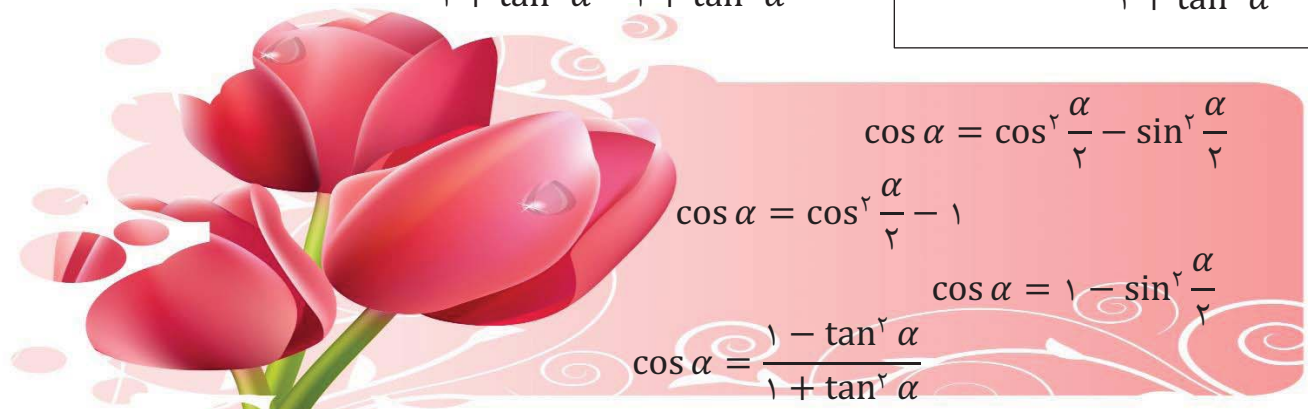


$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ 
 $\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 \longrightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \longrightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \longrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$



$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ 
 $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ 
 $\cos \alpha = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ 
 $\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

در مثلثی رابطه ی  $\sin B \cos A (\cot B - \tan A) = 0$  برقرار است. نوع مثلث چیست؟

حاصل کسر زیر را بیابید.

$$\frac{\tan(x + y) + \tan(x - y)}{1 - \tan(x + y) \cdot \tan(x - y)} =$$

بیشترین مقدار عبارت زیر را بیابید.

$$(\sin x + \sin 2x)^2 + (\cos x + \cos 2x)^2 =$$

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{1 - \tan 2\delta}{1 + \tan 2\delta} =$$

$$\frac{\sin 1\delta + \cos 1\delta}{\sin 1\delta - \cos 1\delta} =$$

$$\sin 1\delta \cos 1\delta =$$

$$\frac{\tan \gamma/\delta}{1 + \tan^2 \gamma/\delta} =$$

$$\frac{\tan a \cot 2a}{1 - \tan^2 a} =$$

$$\text{اگر } \frac{1}{3} = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \text{ باشد، مقدار } \tan 2x \text{ را بیابید.}$$

## روابط فرعی $2a$

$$(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$$

$$(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$$

$$\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$$

$$\tan a - \cot a = -2 \cot 2a$$

$$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 2a$$

$$\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \\ \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \end{array} \right. \longrightarrow \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

## روابط فرعی $3a$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

اثبات بر عهده دانش آموزان

## تبدیل ضرب به جمع و برعکس

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{array} \right. \rightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{array} \right. \rightarrow 2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right. \rightarrow 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right. \rightarrow -2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

به روابط بالا که تولید شده است تبدیل ضرب به جمع گفته میشود .

حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 5x \cos 2x + \sin 7x$$

مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$\sin 75 \sin 15 =$$

## تبدیل جمع به ضرب

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$\frac{\cos 6x + \cos 2x}{\sin 6x + \sin 2x} =$$

## پیدا کردن سریع نسبت ها

با اضافه و کم کردن مضارب زوج  $\pi$  به یک کمان، سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت آن تغییر نمیکنند. به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح  $k$  داریم:

$$\sin(2k\pi \pm \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(2k\pi \pm \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cot(2k\pi \pm \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{21\pi}{4} = \tan \left( 5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

روش سریع

۱- زاویه مورد نظر را به صورت  $k\pi \pm \alpha$  یا  $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$  بنویسید.

۲-  $\alpha$  را در ربع اول فرض کنید و ناحیه مربوط به کمان مورد نظر را مشخص کنید ..

۳- علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه ی به دست آمده را درج کنید .

۴- عبارت  $k\pi \pm$  یا  $\frac{k\pi}{2} \pm$  را حذف کنید .

دقت شود در مرحله ی قبل از حذف  $\frac{k\pi}{2} \pm$  نسبت های مثلثاتی به صورت زیر تغییر میکنند.

cot  $\rightarrow$  tan

tan  $\rightarrow$  cot

cos  $\rightarrow$  sin

sin  $\rightarrow$  cos

مثال:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$



حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) =$$

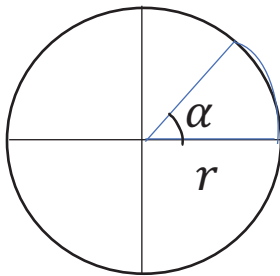
$$\cos(765^\circ) =$$

$$\tan\left(\frac{101\pi}{3}\right) =$$

$$\frac{3 \sin 18^\circ + \sin 162^\circ - 2 \sin 198^\circ}{2 \cos 72^\circ + 3 \cos 108^\circ + \sin 342^\circ} =$$

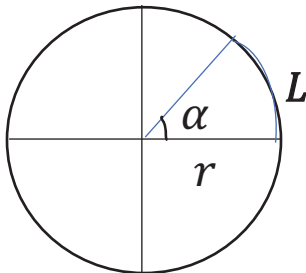
## چند کاربرد مثلثات در دایره

۱- مساحت قطاع



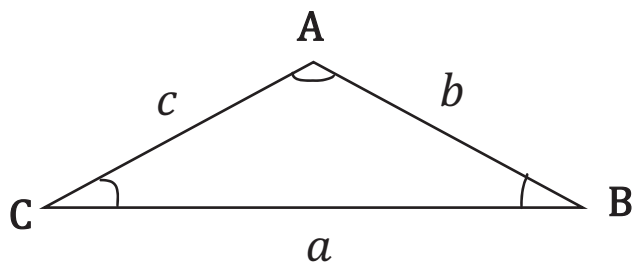
$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{S} \rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

۲- طول کمان



$$L = r \times \alpha$$

## قضیه کسینوس ها

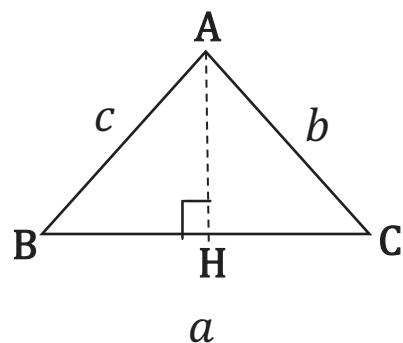


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

همچنین خواهیم داشت:



$$\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = c \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \rightarrow HC = b \cos \hat{C}$$

$$BC = BH + HC \rightarrow a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$$

در یک ۸ ضلعی منتظم به طول ضلع واحد، طول قطر کوچک را بیابید. (به کمک قضیه کسینوس ها)

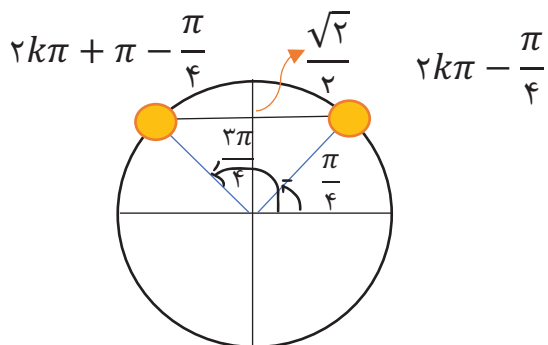
## معادله مثلثاتی

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

به معادله ساده ی زیر دقت کنید:

اولین جوابی که به ذهنتان می آید  $x = \frac{\pi}{4}$  یا  $x = \pi - \frac{\pi}{4}$  هستند. درسته. ولی یک سوال. جوابهای دیگری ندارد؟

با کمی دقت در شکل مشخص میشود بیشتر جواب دیگر هم وجود دارد که انتهای کمان آن ها بر همین دو جواب منطبق است.



بنابراین تمامی جوابهای معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$$

$k$  عدد صحیح و دلخواه

$\sin x = \sin \alpha$ $x = 2k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$ $x = 2k\pi + \pi + \alpha$	$\cos x = \cos \alpha$ $x = 2k\pi \pm \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$\tan x = \tan \alpha$ $x = k\pi \pm \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\cot x = \cot \alpha$ $x = k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$

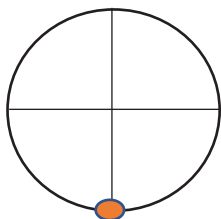
### معادلات خاص

به معادله  $\cos x = 1$  توجه کنید. جواب این معادله را میتوان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \cos 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \rightarrow x = 2k\pi$$

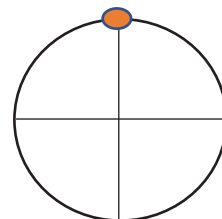
$$\sin x = -1$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$



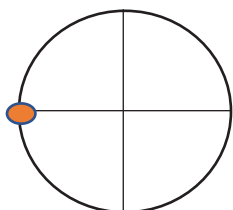
$$\sin x = 1$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$



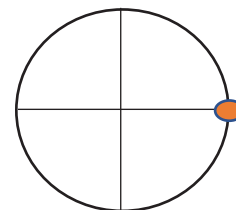
$$\cos x = -1$$

$$x = (2k + 1)\pi$$



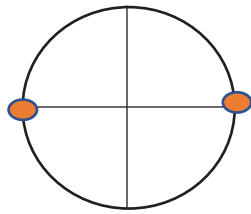
$$\cos x = 1$$

$$x = 2k\pi$$



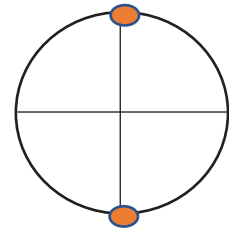
$$\sin x = \cdot$$

$$x = k\pi$$



$$\cos x = \cdot$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



جواب کلی معادلات زیر را بیابید .

$$\cot x = \sqrt{3}$$

$$\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$$

$$\sin 3x = \sin 2x$$

$$\tan 4x = \tan 2x$$

$$\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$$

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3}$$

$$2 \sin x + 1 = 0$$

جواب معادله های زیر را در فاصله ی  $[0, 2\pi]$  مشخص کنید.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan^2 x = 3$$

$$\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

جواب معادله ی  $\tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3}$  در بازه ی  $[0, \pi]$  چند نقطه دارد؟

نمودار  $y = -3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  در بازه ی  $[-\pi, \pi]$  چند بار دارای بیشترین مقدار است؟

معادله ی  $\cos 4x + \cos x = 0$  چند جواب متمایز در بازه ی  $[0, \pi]$  دارد؟

معادله ی  $\tan 3x = \cot 5x$  در بازه ی  $[0, \pi]$  دارای چند جواب است؟

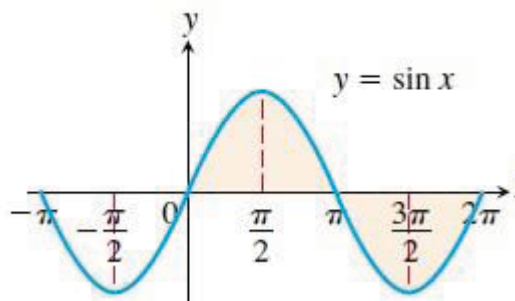
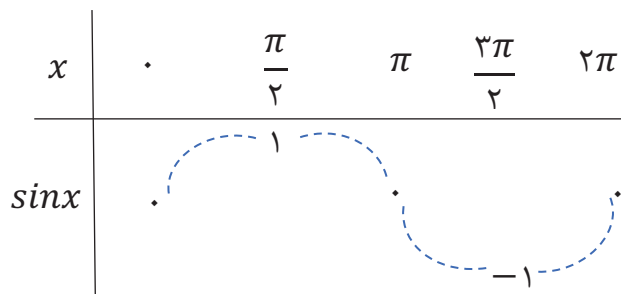
معادله ی  $\tan 3x \tan x = 1$  در بازه ی  $[0, \pi]$  دارای چند جواب است؟

جواب های معادله ی  $9 - 13 \sin x = 6 \cos 2x$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  روی دایره مثلثاتی چند نقطه را مشخص میکند؟

معادله ی  $\cot 4x = \cot x$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

# نمودار توابع مثلثاتی

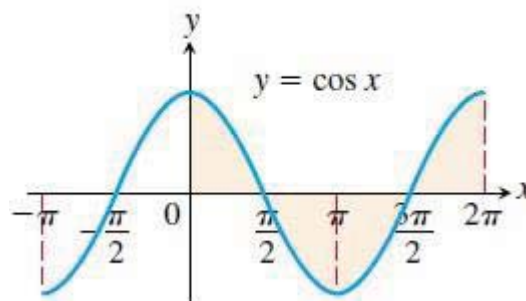
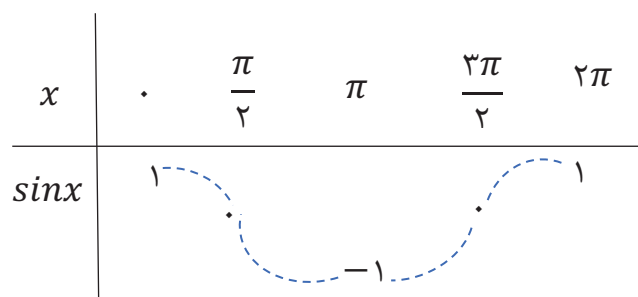
رسم نمودار  $y = \sin x$



$$Df = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$Rf = [-1, 1]$$

رسم نمودار  $y = \cos x$



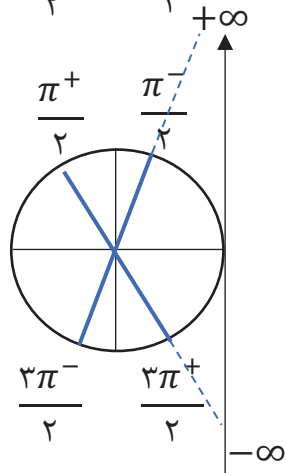
$$Df = [0, \pi]$$

$$Rf = [-1, 1]$$

رسم نمودار  $y = \tan x$

در نقاط  $\tan \frac{\pi}{2}$  و  $\tan \frac{3\pi}{2}$  تعریف نشده است. ولی باید بدانیم در همسایگی بسیار نزدیک  $\tan \frac{\pi}{2}$  و  $\tan \frac{3\pi}{2}$

مقدار به چه سمتی می‌رود. یعنی:



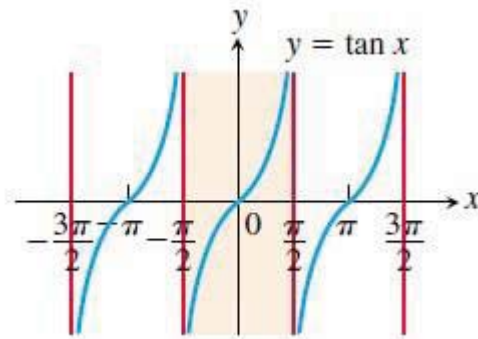
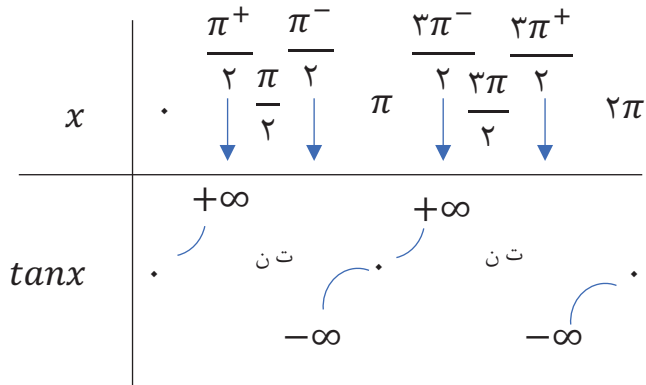
$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\pi^-}{2} &= +\infty \\ \tan \frac{\pi^+}{2} &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{3\pi^-}{2} &= +\infty \\ \tan \frac{3\pi^+}{2} &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\pi^-}{2} &= +\infty \\ \tan \frac{3\pi^+}{2} &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{3\pi^-}{2} &= +\infty \\ \tan \frac{\pi^+}{2} &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

برای رسم نمودار  $y = \tan x$  علاوه بر اینکه از ۵ نقطه  $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  استفاده میکنیم از  $(\frac{\pi^-}{2}, \frac{\pi^+}{2}, \frac{3\pi^-}{2}, \frac{3\pi^+}{2})$  هم کمک میگیریم یعنی:  $\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{3\pi}{2}$

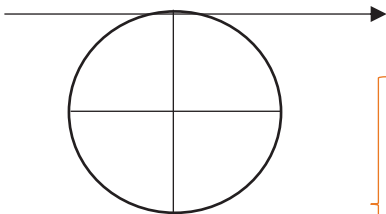


$$Df = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$Rf = \mathbb{R}$$

رسم نمودار  $y = \cot x$

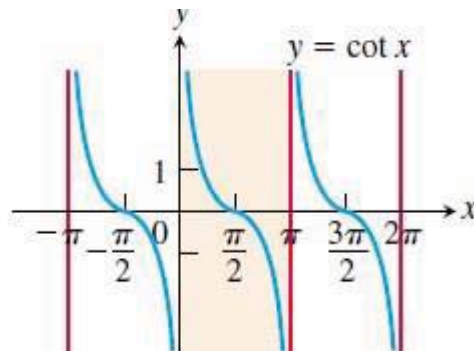
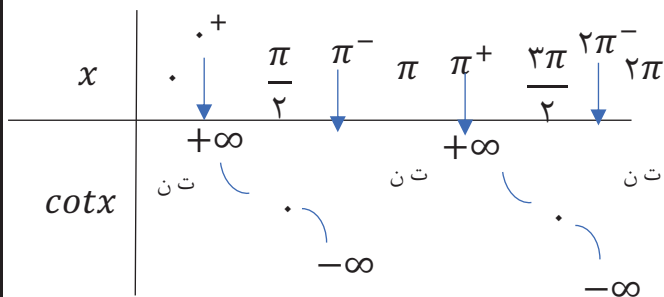
کتابخانه در نقاط  $\pi, 2\pi$  و  $0$  تعریف نشده است. ولی باید بدانیم در همسایگی بسیار نزدیک  $\pi$  و  $2\pi$  مقدار به چه سمتی میرود. یعنی:



$$\left. \begin{aligned} \cot \cdot^+ &= +\infty \\ \cot \cdot^- &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cot \pi^+ &= +\infty \\ \cot \pi^- &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cot 2\pi^+ &= +\infty \\ \cot 2\pi^- &= -\infty \end{aligned} \right\}$$



$$Df = [0, \pi]$$

$$Rf = \mathbb{R}$$

# دامنه و برد توابع مثلثاتی

$$y = \sin(f(x)) \quad Dy = Df$$

$$y = \cos(f(x)) \quad Dy = Df$$

$$y = \tan(f(x)) \quad Dy = \left\{x \mid f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$y = \cot(f(x)) \quad Dy = \{x \mid f(x) \neq k\pi\}$$

دامنه توابع زیر را بیابید .

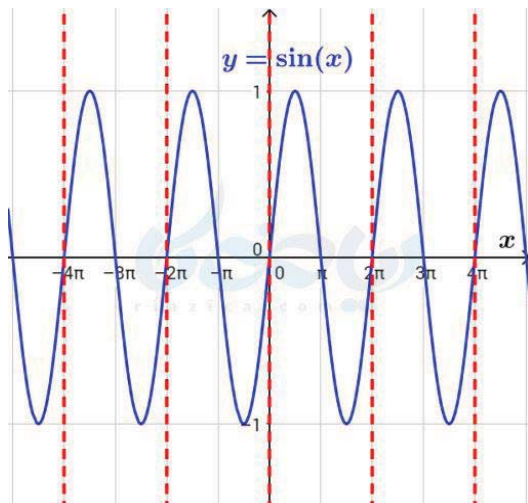
$$y = \sin(\sqrt{x^2 + 2x})$$

$$y = \tan(2x)$$

$$y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

## دوره تناوب

به تابع  $y = \sin x$  زیر توجه کنید:



همانطور که در شکل میبینید اگر نمودار تابع را در بازه ی

$[0, 2\pi]$  تکرار کنیم، نمودار کل تابع به دست می آید .

بازه هایی به طول  $[2\pi, 4\pi]$ ،  $[-2\pi, 0]$ ،  $[4\pi, 6\pi]$  و

... نیز این خاصیت را دارند. تناوب یعنی همین. یعنی **تکرار**



اگر به منحنی بین خط‌چین‌های قرمز رنگ نگاه کنید، می‌بینید که نمودار بین هر دو خط‌چین قرمز رنگ، دائماً تکرار می‌شود. به چنین توابعی توابع متناوب گفته و کوچکترین بازه‌ای که تابع دارای این خاصیت باشد، **دوره تناوب** می‌گوییم.

$$T_{\sin} = 2\pi$$



**دوره تناوب**

دوره تناوب توابع زیر را با رسم شکل مناسب به دست آورید.

$$y = 2 \sin x$$

$$y = \sin(2x)$$

$$y = \sin(2x + 3)$$

$$y = \sin\left(\frac{-x}{3}\right)$$

$$y = 2 \sin(x) + 3$$

$$y = 2 \sin(x + 3)$$

از روی شکل ها در صفحات قبل میتوان دریافت که:

$$T_{\cos} = 2\pi$$

$$T_{\tan} = \pi$$

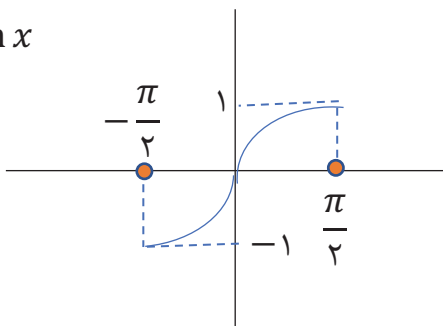
$$T_{\cot} = \pi$$

## توابع معکوس مثلثاتی

می دانیم که معکوس یک تابع یعنی قرینه ی آن تابع نسبت به خط  $y = x$ . معکوس تابع  $f$  در صورتی تابع خواهد بود که خود تابع  $f$  یک تابع یک به یک باشد.

حالا اگر بخواهیم تابع  $y = \sin^{-1} x$  که معکوس تابع  $y = \sin x$  میباشد را به دست آوریم، متوجه خواهیم شد که تابع  $y = \sin x$  به یک نیست پس معکوس آن نمیتواند یک تابع باشد. قبول. ولی تابع  $y = \sin x$  در بازه ی  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  یک تابع یک به یک است پس معکوس پذیر خواهد بود.

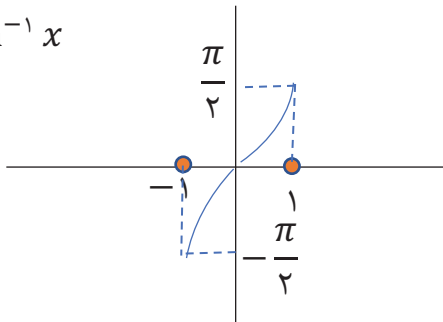
$$y = \sin x$$



$$Df = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$Rf = [-1, 1]$$

$$y = \sin^{-1} x$$



$$Df^{-1} = [-1, 1]$$

$$Rf^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \sin^{-1}(x)$$

$$Dy = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$$

$$y = \sin^{-1}(g(x))$$

$$Dy = \{x \mid -1 \leq g(x) < 1\}$$

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\sin^{-1}(\cdot) =$$

$$\sin^{-1}(1/2) =$$

$$\sin^{-1}(-1) =$$

$$\sin^{-1}(1^+) =$$

$$\sin^{-1}(1) =$$

$$\sin^{-1}(-1^-) =$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

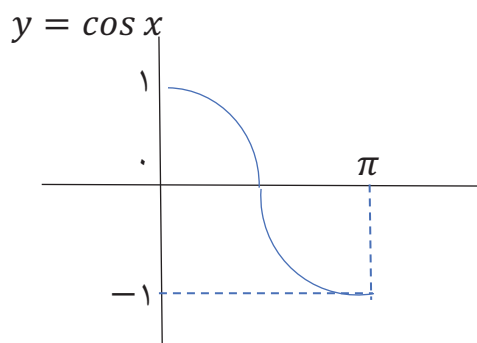
$$\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) =$$

دامنه توابع زیر را بیابید.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$y = \sin^{-1}(\sqrt{4-x^2})$$

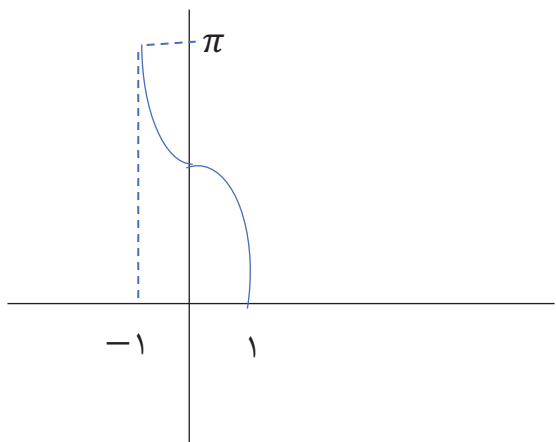
نمودار و تابع  $y = \cos^{-1} x$



$$Df = [0, \pi]$$

$$Rf = [-1, 1]$$

$$y = \cos^{-1} x$$



$$Df^{-1} = [-1, 1]$$

$$Rf^{-1} = [0, \pi]$$

$$y = \cos^{-1}(x)$$

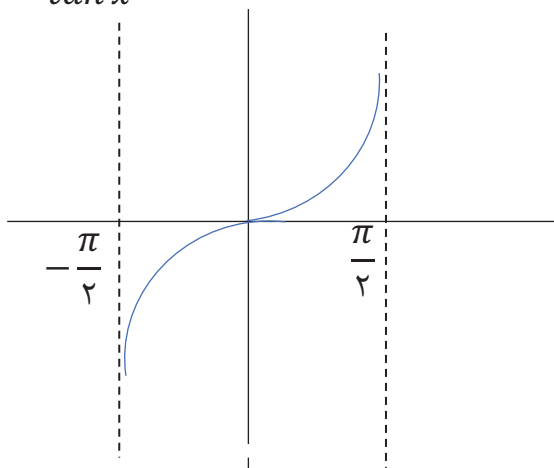
$$Dy = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$$

$$y = \cos^{-1}(g(x))$$

$$Dy = \{x \mid -1 \leq g(x) < 1\}$$

نمودار و تابع  $y = \tan^{-1} x$      $y = \text{Arc tan } x$

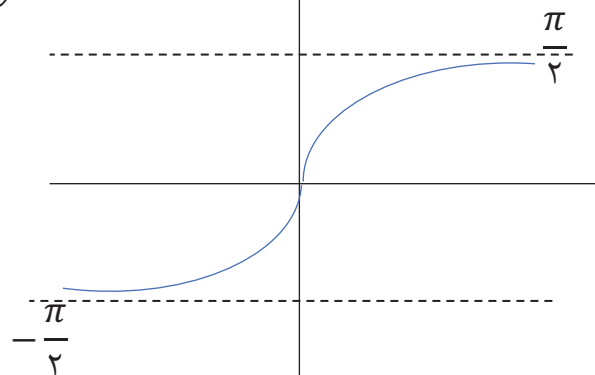
$$y = \tan x$$



$$Df = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Rf = \mathbb{R}$$

$$y = \tan^{-1} x$$



$$Df^{-1} = \mathbb{R}$$

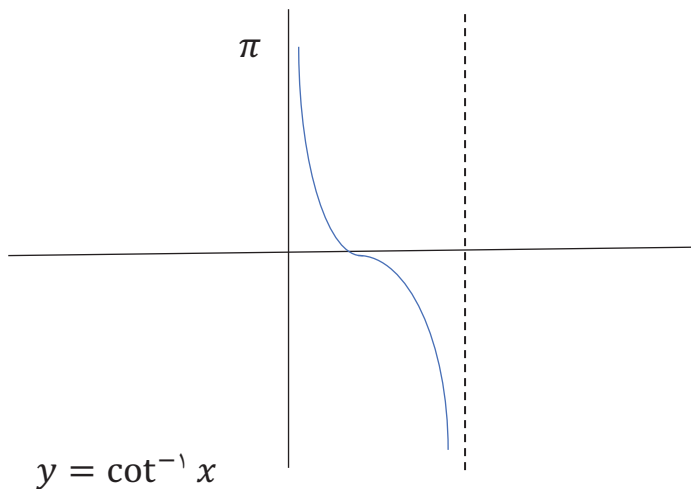
$$Rf^{-1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cot x$$

نمودار و تابع  $y = \text{Arc cot } x$   $y = \cot^{-1} x$

$$Df = [\cdot, \pi]$$

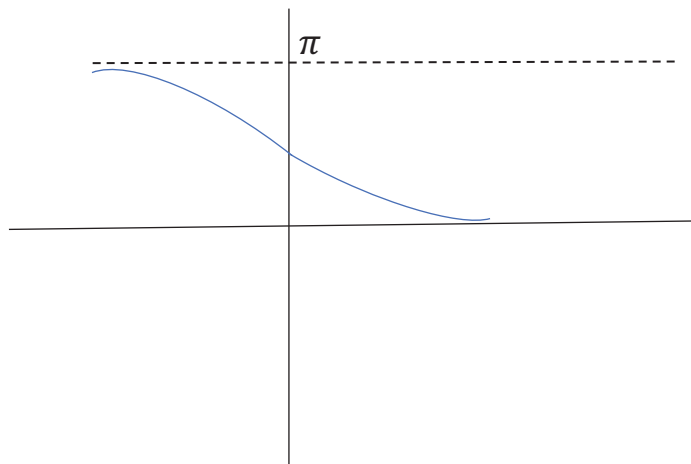
$$Rf = \mathbb{R}$$



$$y = \cot^{-1} x$$

$$Df^{-1} = \mathbb{R}$$

$$Rf^{-1} = [\cdot, \pi]$$



$$y = \tan^{-1}(g(x)) \longrightarrow Dy = Dg$$

$$\cos^{-1}(-1^{-1})$$

$$y = \cot^{-1}(g(x)) \longrightarrow Dy = Dg$$

$$\cos^{-1}(-1^{-1}) =$$

$$\tan^{-1} x =$$

$$x \rightarrow -\infty$$

حاصل عبارت های زیر را بیابید.  
 $\cot^{-1}(1) =$

$$\cos^{-1}(\cdot) =$$

$$\tan^{-1} x =$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\cot^{-1}(-1) =$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{r}}{r}\right) =$$

$$\tan^{-1}(-\sqrt{r}) =$$

$$\cot^{-1}(\cdot) =$$

برد توابع زیر را بیابید .

$$f(x) = \sqrt{3} \tan^{-1} x + \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1$$

$$f(x) = \cos^{-1} x \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

دامنه ی توابع زیر را بیابید.

$$y = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5-x}} \right)$$

$$y = \cot^{-1} \left( \frac{1}{x + |x|} \right)$$

مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$\sin \left( \frac{\pi}{4} \cot^{-1} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \cos(2 \cot^{-1}(\cdot)) =$$

به یال پدرم

که تنها خاطراتش با من است ..