# جمع بندی مقاطع مخروطی و انتگرال (ویژه رشته تجربی)

## دایره

**معادله استاندارد :** معادلهٔ دایره ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و به شعاع $R$ عبارت است از:

$$\boxed{(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}=R^{2}}$$

**معادله گسترده :** اگر معادلهٔ دایره به صورت $x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0$ باشد آن را معادلهٔ گسترده می نامند. در این حالت مرکز و شعاع به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} f'_x=0 \Rightarrow 2x+a=0 \Rightarrow x=-\dfrac{a}{2} \\ f'_y=0 \Rightarrow 2y+b=0 \Rightarrow y=-\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \quad , \quad R=\sqrt{(\text{طول مرکز})^{2}+(\text{عرض مرکز})^{2}-c}}$$

---

سؤال ۱: دایره ای به معادلهٔ $a(x^{2}+y^{2})+b(x+y)=0$ از نقطهٔ (۱، ۱) می گذرد شعاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه۴

نقطهٔ $A(1,1)$ را درون معادله قرار می دهیم:

$$a(1^{2}+1^{2})+b(1+1)=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow a(x^{2}+y^{2})-a(x+y)=0$$

$$\Rightarrow x^{2}+y^{2}-x-y=0 \Rightarrow O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow R=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

**شرط دایره بودن :**

شرط دایره بودن یک معادله $Ax^{2}+By^{2}+Cx+Dy+E=0$ به شکل دو چیز است:

۱) ضریب $x^{2},y^{2}$ برابر باشد.

۲) وقتی شعاع را پیدا می کنیم زیر رادیکال مثبت باشد.

---

سؤال ۲: به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$ منحنی به معادلهٔ $2x^{2}+(a^{2}-7)y^{2}+4y+a=0$ یک دایره است؟

۱) $\{-3\}$ ۲) $\{3\}$ ۳) $\{-3,3\}$ ۴) $\phi$

پاسخ: گزینه۳

با توجه به توضیحات درسنامه برای دایره بودن باید ضرایب $x^{2},y^{2}$ برابر باشند بنابراین داریم:

$$2=a^{2}-7 \Rightarrow a^{2}=9 \Rightarrow a=3,-3$$

اگر $a=۳$ باشد داریم:

$$۲x^{۲}+۲y^{۲}+۴y+۳=۰ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲y+\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow[f'_y=۰]{f'_x=۰} O(۰,-۱) \Rightarrow R=\sqrt{۰+۱-\frac{۳}{۲}}$$ غ ق ق

ولی اگر $a=-۳$ باشد داریم:

$$۲x^{۲}+۲y^{۲}+۴y-۳=۰ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲y-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow[f'_y=۰]{f'_x=۰} O(۰,-۱) \Rightarrow R=\sqrt{۰+۱+\frac{۳}{۲}}$$ ق ق

## نوشتن معادلهٔ دایره :

برای نوشتن معادلهٔ دایره دو چیز لازم است: مرکز و شعاع که باید از اطلاعات مسأله این دو را پیدا کنیم و از رابطهٔ $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$ معادله را بنویسید:

توجه: در بسیاری مسائل گفته می شود مرکز دایره روی خط مثلاً $y=mx+h$ است و یا می گویند $y=mx+h$ یک قطره دایره است در این موارد مرکز را به صورت $O(\alpha,m\alpha+h)$ فرض می کنیم یعنی شناور روی خط.

---

**سؤال ۳:** شعاع دایره ای که از $B(۱,۲),A(۳,۰)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y=۲x-۱$ می باشد چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$  ۲) $\sqrt{۵}$  ۳) $\sqrt{۱۰}$  ۴) $\sqrt{۱۳}$

پاسخ: گزینه۳

چون مرکز روی خط $y=۲x-۱$ است فرض کنیم $O(\alpha,۲\alpha-۱)$ بنابراین باید فاصلهٔ مرکز از نقاط روی دایره یکسان باشد یعنی:

$$|OA|=|OB| \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۱)^{۲}+(۲\alpha-۳)^{۲}} \Rightarrow \alpha^{۲}-۶\alpha+۹+۴\alpha^{۲}-۴\alpha+۱$$
$$=\alpha^{۲}-۲\alpha+۱+۴\alpha^{۲}-۱۲\alpha+۹ \Rightarrow -۱۰\alpha=-۱۴\alpha \Rightarrow ۴\alpha=۰$$
$$\Rightarrow \alpha=۰ \Rightarrow R=|OA|=\sqrt{۳^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۱۰}$$

---

**سؤال ۴:** دایره از دو نقطهٔ $(۳,۱),(۰,۰)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادلهٔ $y=۲x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج ۸۶)

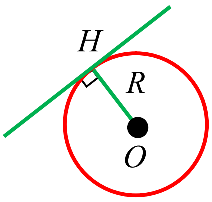
۱) $\sqrt{۳}$  ۲) ۲  ۳) $\sqrt{۵}$  ۴) ۳

پاسخ: گزینه۳

مرکز دایره روی خط $y=۲x$ قرار دارد پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha,۲\alpha)$ می باشد. چون این دایره از دو نقطهٔ $B(۳,۱),A(۰,۰)$ می گذرد لذا فاصلهٔ مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع است داریم:

$$OB=OA \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۰)^{۲}+(۲\alpha-۰)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲}}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^{۲}+۴\alpha^{۲}=(\alpha^{۲}-۶\alpha+۹)+(۴\alpha^{۲}-۴\alpha+۱) \Rightarrow ۵\alpha^{۲}=۵\alpha^{۲}-۱۰\alpha+۱۰$$
$$\Rightarrow \alpha=۱ \xrightarrow{O(\alpha,۲\alpha)} O(۱,۲) \Rightarrow R=OA=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۲-۰)^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}}=\sqrt{۵}$$

**یادآوری کاربردی :**




۱) فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر است با شعاع دایره.

۲) فاصله نقطهٔ $A(x_\circ , y_\circ)$ از خط $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

$$\boxed{|AH| = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}}$$

---

**سؤال ۵:** مرکز دایره ای بر روی نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(۳,۶)$ گذشته و بر خط $y = ۲x$ مماس شود شعاع آن کدام است؟ (داخل ۹۲)

۱) $\sqrt{۵}$   ۲) $\sqrt{۶}$   ۳) $۲\sqrt{۲}$   ۴) $\sqrt{۱۰}$

پاسخ: گزینه۱

چون گفته مرکز روی خط $y = x$ است آن را به صورت شناور روی خط یعنی $O(\alpha,\alpha)$ فرض می کنیم. فاصلهٔ مرکز از خط مماس برابر است با شعاع:

$$R = \frac{|۲\alpha - \alpha|}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{۵}} \Rightarrow (x-\alpha)^{۲} + (y-\alpha)^{۲} = \frac{\alpha^{۲}}{۵} \xrightarrow{A(۳,۶)} (۳-\alpha)^{۲} + (۶-\alpha)^{۲} = \frac{\alpha^{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow ۹ - ۶\alpha + \alpha^{۲} + ۳۶ - ۱۲\alpha + \alpha^{۲} = \frac{\alpha^{۲}}{۵} \Rightarrow ۹\alpha^{۲} - ۹۰\alpha + ۲۲۵ = \circ \Rightarrow (۳\alpha - ۱۵)^{۲} = \circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۵ \Rightarrow R = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

---

**سؤال ۶:** خط $x + ۳y + a = \circ$ دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} + ۴x + ۶y + ۳ = \circ$ را قطع نمی کند. حدود $a$ کدام است؟

۱) $\circ < a < ۵$   ۲) $a < \circ$ یا $a > ۵$   ۳) $a < ۱$ یا $a > ۲۱$   ۴) $۱ < a < ۲۱$

پاسخ: گزینه۳

اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $x + ۳y + a = \circ$ بیشتر از شعاع دایره باشد آنگاه خط دایره را قطع نمی کند.

$$x^{۲} + y^{۲} + ۴x + ۶y + ۳ = \circ \Rightarrow O'(-۲,-۳), r = \sqrt{۱۰}$$

$$\text{فاصلهٔ } O' \text{ تا خط} = d = \frac{|-۲-۹+a|}{\sqrt{۱+۹}} = \frac{|a-۱۱|}{\sqrt{۱۰}} > r = \sqrt{۱۰} \Rightarrow |a-۱۱| > ۱۰$$

$$\Rightarrow a - ۱۱ > ۱۰ \text{ یا } a - ۱۱ < -۱۰ \Rightarrow a > ۲۱ \text{ یا } a < ۱$$

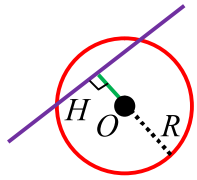
---

**سؤال ۷:** دایره ای از نقاط $A(۲,\circ), B(۱,-۱)$ گذشته و مرکز آن بر خط $y - x = ۳$ واقع است. فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره از خط $۳x - ۴y + ۶ = \circ$ کدام است؟

۱) $۱ + \sqrt{۱۳}$   ۲) $۱ + \sqrt{۷}$   ۳) $\sqrt{۱۰} - ۱$   ۴) $\sqrt{۱۳} - ۱$

پاسخ: گزینه۱

مرکز دایره به فرم $O(\alpha, \alpha + ۳)$ می باشد و فاصله اش از $A$ و $B$ برابر است:




$$R=|OA|=|\mathrm{OB}|\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۲)^{۲}+(\alpha+۳)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۱)^{۲}+(\alpha+۴)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^{۲}+۲\alpha+۱۳=۲\alpha^{۲}+۶\alpha+۱۷\Rightarrow\alpha=-۱$$

پس دایره به مرکز $O(-۱,۲)$ و شعاع $\sqrt{۱۳}$ می باشد. مطابق شکل فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا خط $۳x-۴y+۶=۰$ برابر $OH+R$ می باشد.

$$|\mathrm{OH}|=\frac{|-۳-۸+۶|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۵}{۵}=۱\Rightarrow \text{دورترین فاصله}=۱+\sqrt{۱۳}$$

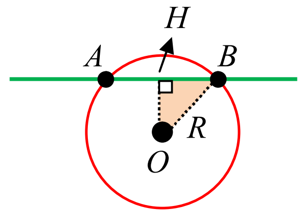
---

**سؤال ۸: خط $۵x+۱۲y=۱۴$ دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۸y=۸$ را در نقاط $A$ و $B$ قطع می کند. فاصله $A$ و $B$ از هم چقدر است؟**

۱) ۴　　۲) ۸　　۳) ۱۰　　۴) ۱۲

پاسخ: گزینه۲

ابتدا فاصلهٔ مرکز دایره را تا خط پیدا می کنیم سپس به کمک فیثاغورس $|HB|$ را پیدا کرده و دو برابر می کنیم:




$$\begin{cases}O(۱,۴)\\ \mathrm{R}=\sqrt{۱+۱۶+۸}=۵\end{cases}\Rightarrow|OH|=\frac{|۵+۴۸-۱۴|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=۳$$

$$\Rightarrow|\mathrm{HB}|=\sqrt{R^{۲}-OH^{۲}}=۴\Rightarrow|\mathrm{AB}|=۸$$

---

**سؤال ۹: مرکز دایره ای در زیر محور $x$ ها و بر محور $y$ ها واقع است. اگر این دایره بر دو خط به معادلهٔ $۲x-y+۶=۰$ و $x-۲y-۳=۰$ مماس باشد آنگاه شعاع آن کدام است؟**

۱) ۵　　۲) $۳\sqrt{۵}$　　۳) $۵\sqrt{۳}$　　۴) ۳

پاسخ: گزینه۲

چون مرکز این دایره بر محور $y$ ها واقع است پس مختصات آن را به صورت $\omega(۰,\beta)$ در نظر می گیریم از طرفی اگر خطی بر یک دایره مماس باشد فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط برابر با شعاع دایره است.

$$\begin{cases}\omega(۰,\beta)\\ L:۲x-y+۶=۰\end{cases}\Rightarrow R=\frac{|۲(۰)-\beta+۶|}{\sqrt{۲^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{|-\beta+۶|}{\sqrt{۵}}\quad(*)$$

$$\begin{cases}\omega(۰,\beta)\\ L':x-۲y-۳=۰\end{cases}\Rightarrow R=\frac{|۰-۲\beta-۳|}{\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}}}=\frac{|-۲\beta-۳|}{\sqrt{۵}}\quad(**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)}\frac{|-\beta+۶|}{\sqrt{۵}}=\frac{|-۲\beta-۳|}{\sqrt{۵}}\Rightarrow|-\beta+۶|=|-۲\beta-۳|\Rightarrow-\beta+۶=\pm(-۲\beta-۳)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\beta+۶=-۲\beta-۳\Rightarrow\beta=-۹\xrightarrow{(*)}R=\dfrac{|-(-۹)+۶|}{\sqrt{۵}}=\dfrac{۱۵}{\sqrt{۵}}=۳\sqrt{۵}\\ -\beta+۶=۲\beta+۳\Rightarrow\beta=۱\end{cases}$$

توجه کنید که اگر $\beta=1$ آنگاه مرکز این دایره بالای محور $x$ ها قرار می گیرد که خلاف فرض مسأله است. پس $\beta=1$ را نمی پذیریم.

---

## دایره مماس بر دو خط متقاطع :

اگر دایره ای بر دو خط متقاطع مماس باشد فاصلهٔ مرکز آن تا دو خط برابر است (در واقع مرکز روی یکی از نیمسازهای دو خط است.)

دایره ای که بر محورهای مختصات مماس است، مرکز آن روی $y=x$ یا $y=-x$ می باشد.

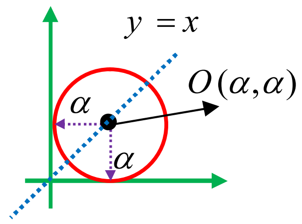
---

**سؤال ۱۰: دایره از $A(2,1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس اند. شعاع این دایره ها کدام است؟ (داخل ۸۷)**

۱) ۱، ۴　　۲) ۱، ۵　　۳) ۲، ۴　　۴) ۲، ۵

**پاسخ: گزینه۴**

چون دایره بر هر دو محور مماس است مرکز آن روی $y=x$ یا $y=-x$ است ولی چون از نقطه ای در ربع اول می گذرد مرکز روی $y=x$ است که آن را $O(\alpha,\alpha)$ خواهد بود در این صورت:




$$(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2 \xrightarrow{A(2,1)} (2-\alpha)^2+(1-\alpha)^2=\alpha^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2-6\alpha+5=0 \Rightarrow \alpha=1,5$$

---

**سؤال ۱۱: نقطهٔ $M(2\sqrt{5},b)$ مرکز دایره ای است که بر دو خط $x=2y\,,y=2x$ مماس است. شعاع دایرهٔ کوچکتر کدام است؟**

۱) ۱　　۲) ۱/۵　　۳) ۲　　۴) ۲/۵

**پاسخ: گزینه۳**

چون دایره بر دو خط متقاطع مماس است مرکز آن از این دو خط به یک فاصله است.

$$\left|\frac{2\sqrt{5}-2b}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{b-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right| \Rightarrow 2\sqrt{5}-2b=\pm(b-4\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} b=2\sqrt{5} \\ b=-2\sqrt{5} \end{cases}$$

حال شعاع برابر است با فاصلهٔ مرکز از خط مماس :

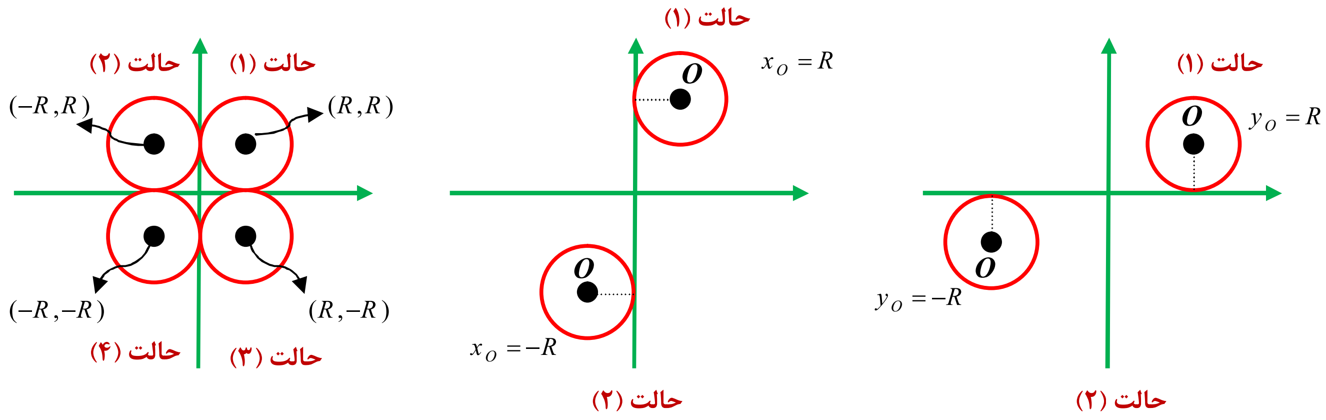
$$x-2y=0 \Rightarrow |\mathrm{MH}|=\frac{|2\sqrt{5}\pm4\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \begin{cases} MH=R=6 \\ MH=R=2 \end{cases}$$

## مماس بودن دایره بر محور یا محورهای مختصات :

الف) دایره بر محور $x$ ها مماس باشد.

ب) دایره بر محور $y$ ها مماس باشد.

ج) دایره بر هر دو محور $x$ , $y$ مماس باشد.




**مثال:** اگر دایره ای به شعاع۳ مماس بر هر دو محور و در ناحیهٔ سوم باشد مرکز آن $O(-R,-R)=(-۳,-۳)$ بوده و معادلهٔ آن برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \xrightarrow{O(\overset{\alpha}{\overbrace{-۳}},\overset{\beta}{\overbrace{-۳}})} (x+۳)^۲+(y+۳)^۲=۹$$

* برای نوشتن معادلهٔ دایره باید حواستان باشد دایره در کدام ناحیه بر هر دو محور مماس است تا مختصات مرکز را اشتباه ننویسید!

---

**سؤال ۱۲:** دایره ای از نقطهٔ (۲، ۱-) گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایرهٔ بزرگتر کدام است؟

۱) ۸    ۲) ۱۰    ۳) ۱۲    ۴) ۱۵    (تجربی داخل ۹۰)

**پاسخ: گزینه۲**

دایره از نقطه (۲، ۱-) که در ناحیه دوم است می‌گذرد، پس این دایره در ناحیهٔ دوم بر هر دو محور مختصات مماس است و مختصات مرکز دایره $O(-R,R)$ است داریم:

$$\text{معادله دایره}: (x-x_O)^۲+(y-y_O)^۲=R^۲ \xrightarrow{O(\overset{x_O}{\overbrace{-R}},\overset{y_O}{\overbrace{R}})} (x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

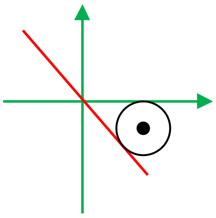
نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی دایره است پس در معادله صدق می‌کند:

$$(-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲ \Rightarrow ۱+R^۲-۲R+۴-۴R+R^۲ \Rightarrow ۲R^۲-۶R+۵=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} R=۱ \\ R=۵ : \text{شعاع دایرهٔ بزرگتر} \Rightarrow \text{قطر}=۲R=۱۰ \end{cases}$$

**سؤال ۱۳: دایره ای بر محور $x$ ها و خط به معادلهٔ $3x+4y=0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ چهارم و شعاع آن ۳ واحد باشد نقطهٔ مشترک آن با محور $x$ ها با کدام طول است؟**

۱) ۹　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۵



**پاسخ: گزینه۱**

با توجه به شکل مقابل مرکز دایره $O(\alpha,-3)$ می باشد می دانیم فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است پس:

$$|OH'|=3=\frac{|3(\alpha)+4(-3)|}{\sqrt{3^2+4^2}}\Rightarrow|\alpha-4|=5\Rightarrow\alpha=\begin{cases}9\\-1\end{cases}$$

غ ق ق زیرا در ناحیه دوم است.

بنابراین نقطهٔ مشترک دایره با محور  ها به طول ۹ می باشد.

---

**سؤال ۱۴: دایره ای از دو نقطهٔ $(1,-1),(0,6)$ گذشته و بر محور $y$ ها مماس است. شعاع دایره کدام است؟**

۱) ۲۷　　۲) ۲۵　　۳) ۲۴　　۴) ۲۰

**پاسخ: گزینه۲**

معادلهٔ دایره به مرکز $O'(h,k)$ و مماس بر محور $y$ ها به صورت $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$ است. با توجه به این که دایره در نقطهٔ $(0,6)$ بر محور $y$ ها مماس است مرکز آن روی خط $y=6$ قرار دارد و در نتیجه $k=6$ می باشد بنابراین معادلهٔ دایره به صورت $(x-h)^2+(y-6)^2=^2$ است.

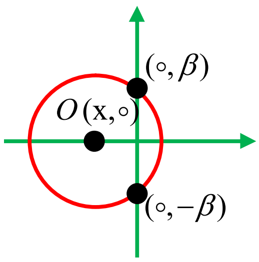
$$(1,-1)\Rightarrow(1-h)^2+(-1-6)^2=h^2\Rightarrow 2h=50\Rightarrow h=25\Rightarrow r=h=25$$ روی دایره قرار دارد

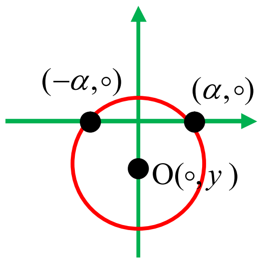
---

**عبور دایره از دو نقطهٔ متقارن:**

الف) اگر دایره ای از دو نقطهٔ متقارن $(-\alpha,0),(\alpha,0)$ بگذرد. آنگاه مرکز آن روی محور $y$ ها قرار دارد یعنی $x_{\text{مرکز}}=0$

ب) اگر دایره ای از دو نقطهٔ متقارن $(0,-\beta),(0,\beta)$ بگذرد.مرکز آن روی محور $x$ ها قرار دارد یعنی $y_{\text{مرکز}}=0$




---

**سؤال ۱۵: دایره ای از دو نقطهٔ $A(2,0),B(-2,0)$ گذشته و بر خط $y=1$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج ۸۸)**

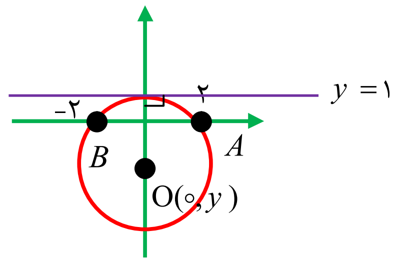
۱) $\frac{3}{2}$　　۲) $\sqrt{5}$　　۳) $\frac{5}{2}$　　۴) ۳

پاسخ: گزینه۳

چون دایره از دو نقطهٔ متقارن $A(۲,۰), B(-۲,۰)$ که عرض یکسان دارند می‌گذرد پس مرکز آن روی محور $y$ ها قرار دارد و می‌توان مختصات آن را به صورت $O(۰,y)$ در نظر گرفت. با توجه به شکل چون فاصلهٔ مرکز از تمام نقاط روی دایره یکسان و برابر شعاع است داریم:

$$\text{شعاع} = OB = OA = OH$$

حال برای محاسبه $y$ از تساوی $OA = OH$ استفاده می‌کنیم:




$$\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-y)^۲} = |۱-y| \Rightarrow \sqrt{۴+y^۲} = |۱-y|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴+y^۲ = ۱+y^۲-۲y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{مختصات مرکز}: O\left(۰,-\frac{۳}{۲}\right)$$

برای محاسبهٔ شعاع می‌توان $OA$ یا $OB$ یا $OH$ را پیدا نمود که $OH$ فرمول ساده تری دارد پس داریم:

$$= |۱-y| \xrightarrow{y=-\frac{۳}{۲}} \left|۱-\left(-\frac{۳}{۲}\right)\right| = \frac{۵}{۲}$$

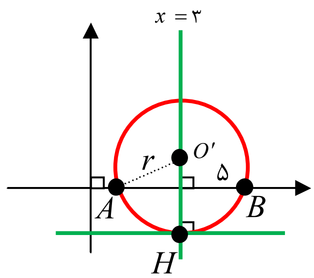
---

**سؤال ۱۶: دایره ای از دو نقطهٔ $(۱,۰),(۵,۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y=-۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه۴

مطابق شکل خطی که از وسط $AB$ و عمود بر خط $y=-۱$ می‌گذرد از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین طول $O'$ برابر ۳ است. فرض کنیم $O'(۳,k)$ باشد در این صورت:




$$O'H = O'A = r$$

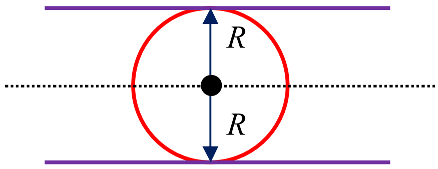
$$O'H = k+۱, O'A = \sqrt{(۳-۱)^۲+(k-۰)^۲} \Rightarrow \sqrt{۴+k^۲} = k+۱$$

$$\Rightarrow ۴+k^۲ = (k+۱)^۲ \Rightarrow ۴+k^۲ = k^۲+۲k+۱$$

$$\Rightarrow ۲k = ۳ \Rightarrow k = \frac{۳}{۲} \Rightarrow r = k+۱ = \frac{۵}{۲}$$

### دایرهٔ مماس بر دو خط موازی:

اگر دایره ای بر دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ مماس باشد مرکز آن روی خط میانگین آنها یعنی $ax+by=\frac{c+c'}{۲}$ قرار دارد و طول قطر دایره. برابر فاصلهٔ این دو خط موازی است. پس شعاع برابر نصف فاصلهٔ این دو خط موازی می باشد.




$$۲R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

---

**سؤال ۱۷:** **دایره ای که مرکز آن به طول ۱- بوده و بر دو خط $y=x$ و $y=x+۴$ مماس است، نیمساز ناحیهٔ دوم را در کدام نقطه قطع می کند؟**

۱) $(-۱,۱)$    ۲) $(-۲,۲)$    ۳) $\left(-\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$    ۴) $(-۳,۳)$

**پاسخ: گزینه۲**

چون دایره بر دو خط موازی $y=x$ و $y=x+۴$ مماس است پس مرکز آن روی خط میانگین یعنی $y=x+\frac{۴+۰}{۲}$ است. با توجه به اینکه طول مرکز ۱- است $O(-۱,۱)$ خواهد بود. از طرفی فاصلهٔ دو خط $y=x$ و $y=x+۴$ برابر $۲R$ است:

$$۲R=\frac{|۴+۰|}{\sqrt{۱+۱}}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲}\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\xrightarrow{y=-x}$$

$$(-y+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow x=-۲\Rightarrow A(-۲,۲)$$

---

**سؤال ۱۸:** **معادلهٔ دایره ای که بر دو خط $y=۱$ و $y=-۵$ مماس باشد و مرکز آن روی خط $y=x-۱$ قرار دارد کدام است؟**

۱) $x^۲+y^۲+۸x+۴y-۱=۰$    ۲) $x^۲+y^۲+۲x+۴y-۴=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۴x+۸y-۱=۰$    ۴) $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۴=۰$

**پاسخ: گزینه۲**

با توجه به اینکه دایره بر دو خط موازی مماس است بنابراین قطر دایره برابر فاصلهٔ بین این دو خط است. پس $۲R=۶\Rightarrow R=۳$ از طرفی مرکز دایره روی خط $y=-۲$ است. (زیرا خط $y=-۲$ به فاصلهٔ مساوی از دو خط $y=۱$ و $y=-۵$ قرار دارد.) پس:

$$\begin{cases} \text{مرکز روی خط } y=-۲ \text{ است.} \\ \text{مرکز روی خط } y=x-۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-۲ \\ y=x-۱\end{cases}\Rightarrow x=-۱$$

مرکز دایره: $(-۱,-۲)$

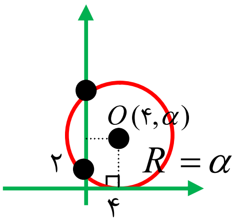
معادلهٔ دایره: $(x+۱)^۲+(y+۲)^۲=(۳)^۲\Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲+۴y+۴=۹$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۴y-۴=۰$$

**سؤال ۱۹: دایره ای بر دو نقطهٔ $(۴,۰),(۰,۲)$ گذشته و بر محور $x$ ها مماس است. این دایره محور $y$ ها را در نقطهٔ دیگر، با کدام عرض قطع می کند؟ (خارج ۸۵)**

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

پاسخ: گزینه۴




مطابق شکل طول مرکز ۴ و عرض آن نامعلوم است. یعنی مرکز روی خط $x=۴$ می باشد.

بنابراین فرض می کنیم $O(۴,\alpha)$ باشد پس:

$$(x-۴)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲ \xrightarrow{A(۰,۲)} (۰-۴)^۲+(۲-\alpha)^۲=\alpha^۲$$
$$\Rightarrow ۱۶+۴-۴\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=۵$$
$$(x-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵ \xrightarrow[x=۰]{\text{تقاطع با } oy} (۰-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵ \Rightarrow y-۵=\pm ۳ \Rightarrow y=۲,۸$$

---

## پیدا کردن معادلهٔ مکان هندسی:

برای پیدا کردن معادلهٔ یک مکان هندسی، یک نقطه مانند $M(x,y)$ در نظر می گیریم و تعریف مسأله را روی آن اجرا می کنیم. رابطهٔ به دست آمده بین $x$ , $y$ همان معادلهٔ مکان هندسی است.

## دایرهٔ آپولونیوس:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A$، $k$ برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $B$ باشد، یک دایره است. این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می نامند و شعاع آن برابر است با:

$$\boxed{R=\frac{k}{|k^۲-۱|}|AB|}$$

---

**سؤال ۲۰: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A(۲,۴)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصلهٔ آن از $B(۱,۲)$ می باشد یک دایره است. شعاع این دایره کدام است؟**

۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $\sqrt{۱۰}$　　۳) $\sqrt{۲۰}$　　۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۲

$$|MA|=\sqrt{۲}\,|MB| \xrightarrow{M(x,y)} \sqrt{(x-۲)^۲+(y-۴)^۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۸y+۲۰=۲(x^۲+y^۲-۲x-۴y+۵) \Rightarrow x^۲+y^۲=۱۰ \Rightarrow R=\sqrt{۱۰}$$

---

**سؤال ۲۱: اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ تا نقطهٔ $A(۶,۰)$ دو برابر فاصله اش تا نقطهٔ $B(۰,۳)$ باشد $M$ مکان هندسی دایره ای با کدام شعاع است؟**

۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $۲\sqrt{۵}$　　۳) $\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۲

$$\begin{cases} A(۶,۰) \\ B(۰,۳) \\ k=۲ \end{cases} \Rightarrow R=\frac{۲}{|۲^۲-۱|}\times\sqrt{(۶-۰)^۲+(۰-۳)^۲}=\frac{۲}{۳}\times\sqrt{۳۶+۹}=\frac{۲}{۳}(\sqrt{۴۵})=\frac{۲}{۳}(۳\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵}$$

---

**نوشتن معادلهٔ دایره به کمک سه نقطه :**

مختصات سه نقطهٔ داده شده را در معادلهٔ گستردهٔ دایره یعنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ قرار داده و مجهولات $a$ , $b$ , $c$ را می یابیم. با معلوم شدن $a,b$ , $c$ معادلهٔ دایره به دست آمده است.

**ترفند ویژه**: اگر مثلث حاصل از به هم وصل کردن سه نقطهٔ داده شده قائم الزاویه باشد آنگاه می توان شعاع دایره را بدون نوشتن معادله از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\text{شعاع}=\frac{\text{وتر مثلث}}{۲}$$

**تذکر**: تاکنون در اکثر تست های کنکور که از این درسنامه آمده اند سه پاره خط تشکیل مثلث قائم الزاویه می داده اند. پس این راه ارزش بررسی کردن را دارد. قائم الزاویه بودن مثلث را می توانید با محاسبهٔ شیب خطوط بررسی کنید.

---

**سؤال ۲۲: شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱),(-۲,۴),(۰,۰)$ می گذرد کدام است؟**

۱) ۲  ۲) ۲/۵  ۳) ۳  ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه۲

دایره از سه نقطه با مختصات $(۲,۱),(-۲,۴),(۰,۰)$ می گذرد لذا مختصات این سه نقطه در معادلهٔ گستردهٔ دایره صدق می کند داریم:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\to\begin{cases}\xrightarrow{(۰,۰)} c=۰\\ \xrightarrow{(-۲,۴)} ۴+۱۶-۲a+۴b=۰\\ \xrightarrow{(۲,۱)} ۴+۱+۲a+b=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-۲b=۱۰\\ ۲a+b=-۵\end{cases}\Rightarrow a=۰,b=-۵$$

حال با معلوم بودن مقادیر $a$ , $b$ , $c$ شعاع دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{۰^۲+\left(-\frac{۵}{۲}\right)^۲-۰}=\frac{۵}{۲}$$

---

**سؤال ۲۳: شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(۱,-۲),(۲,۱),(۰,۰)$ برابر کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$  ۲) $\sqrt{۳}$  ۳) $\sqrt{۵}$  ۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$

☜ پاسخ: گزینه۱

سه نقطه $A(0,0), B(2,1), C(1,-2)$ تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند. زیرا شیب های دو پاره خط **AC** و **BC** قرینه و معکوس هم هستند $\left(m_{AC}=-2, m_{AB}=\frac{1}{2}\right)$؛ $R=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{(2-1)^2+(1-(-2))^2}}{2}=\frac{\sqrt{1+9}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

---

📖 سؤال ۲۴: **دایره ای محور $x$ ها را با طول های (۱-) و ۳ و محور $y$ ها را با عرض ۱ قطع می کند. شعاع این دایره کدام است؟**

۱) $\sqrt{5}$　　۲) $2\sqrt{2}$　　۳) ۳　　۴) $\sqrt{6}$

☜ پاسخ: گزینه۱

معادلهٔ این دایره را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می گیریم از آنجا که این دایره محور **x** ها را با طول های (۱-) و ۳ و محور **y** ها را با عرض ۱ قطع می کند پس مختصات نقاط $(-1,0),(3,0),(0,1)$ در معادلهٔ آن صدق می کند:

$$\begin{cases}(-1)^2+0+a(-1)+b(0)+c=0\\ 3^2+0+a(3)+b(0)+c=0\\ 0+1^2+a(0)+b(1)+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-a+c=0\\ 9+3a+c=0\\ 1+b+c=0\end{cases}$$

از دو معادلهٔ اول نتیجه می شود:

$$\begin{cases}1-a+c=0\\ 9+3a+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow 1+b-3=0$$

$$\Rightarrow b=2\Rightarrow \text{معادله دایره}: x^2+y^2-2x+2y-3=0$$

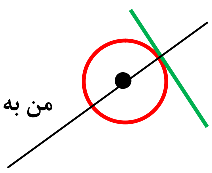
از طرفی شعاع هر دایره به معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ برابر با: $R=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+3}=\sqrt{5}$

---

## قائم بر دایره :

۱) هر خط که از مرکز دایره می گذرد بر دایره عمود است.

۲) دایره تنها منحنی است که قائم های بر آن همواره از نقطهٔ ثابتی (به نام مرکز) می گذرند.



من به دایره قائم شدم!!!

---

📖 سؤال ۲۵: **هر خط قائم بر یک دایره از نقطه (۱، ۲-) می گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y=x-1$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟**

۱) ۲　　۲) $2\sqrt{2}$　　۳) ۳　　۴) $3\sqrt{2}$

☜ پاسخ: گزینه۲

می دانیم مرکز دایره نقطه ای است که هر خط قائم بر دایره از آن می گذرد. پس نقطهٔ (۱، ۲-) مرکز دایره است. این دایره بر خط به معادلهٔ $y=x-1$ مماس است. پس فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است داریم:

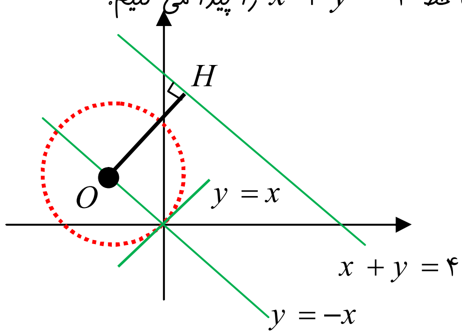
$$OH=R=\frac{|y_O-x_O+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\underline{\underline{O(\overbrace{-2}^{x_O},\overbrace{1}^{y_O})}}\Rightarrow\frac{|1-(-2)+1|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

**سؤال ۲۶:** اگر دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+mx-۲y=۰$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس باشد آنگاه فاصلهٔ نزدیکترین نقاط دایره تا خط $x+y=۴$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $\sqrt{۲}-۱$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۴

خط $y=-x$ بر خط $y=x$ در مبدأ مختصات (که همان نقطهٔ تماس است) عمود می باشد پس مرکز دایره یعنی $O\left(-\frac{m}{۲},۱\right)$ روی خط $y=-x$ قرار می گیرد.با جایگذاری $O$ در خط $y=-x$ مقدار $m$=۲ می شود حال نزدیکترین فاصله نقاط دایره تا خط $x+y=۴$ را پیدا می کنیم:




$$OH=\frac{|-۱+۱-۴|}{\sqrt{۱+۱}}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow OH-R$$
$$=۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

---

**سؤال ۲۷:** دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+kx-۲y=۰$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع اول و سوم مماس است شعاع دایره چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۴

مرکز دایره روی خط قائم بر دایره در مبدأ مختصات قرار دارد. لذا مرکز دایره روی خط $y=-x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) قرار دارد.

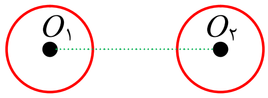
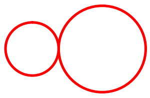
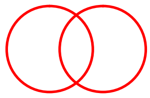
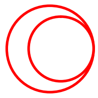
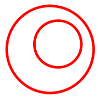
$$x^{۲}+y^{۲}+kx-۲y=۰\Rightarrow O'\left(-\frac{k}{۲},۱\right)$$
$$y=-x\Rightarrow ۱=\frac{k}{۲}\Rightarrow k=۲\Rightarrow r=\sqrt{\left(-\frac{k}{۲}\right)^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{(-۱)^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲}$$

---

## وضعیت دو دایره :

دو دایره نسبت به هم دارای ۵ وضعیت مختلف می باشند. برای تشخیص مراحل زیر را طی می کنیم:

۱) $O_۱$ و $R_۱$ را پیدا می کنیم.
۲) $O_۲$ و $R_۲$ را پیدا می کنیم.
۳) $d=|O_۱O_۲|$ را به دست می آوریم.
۴) $R_۱+R_۲$ و $|R_۱-R_۲|$ را محاسبه می کنیم.
۵) $d$ را با $R_۱+R_۲$ و $|R_۱-R_۲|$ مقایسه می کنیم.

| | | |
|---|---|---|
|  | متخارج | ۱) $d > R_1 + R_2$ |
|  | مماس خارج | ۲) $d = R_1 + R_2$ |
|  | متقاطع | ۳) $\lvert R_1 - R_2 \rvert < d < R_1 + R_2$ |
|  | مماس داخل | ۴) $d = \lvert R_1 - R_2 \rvert$ |
|  | متداخل | ۵) $d < \lvert R_1 - R_2 \rvert$ |

**سؤال ۲۸:** **دو دایره به معادلات** $C_1 : x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $C_2 : x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ **نسبت به هم چگونه اند؟**

**۱) مماس خارج**   **۲) مماس داخل**   **۳) متقاطع در دو نقطه**   **۴) یکی خارج دیگری**

☜ پاسخ: گزینه۲

حال مراحل ۵ گانه را اجرا می کنیم یعنی مرکزها و شعاع های دو دایره را پیدا می کنیم، طول خط المرکزین را محاسبه و آن را با تفاضل و جمع شعاع ها مقایسه می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ O_1(2,-2) \Rightarrow R_1 = \sqrt{4+4+1} = 3 \\ 2)\ O_2(2,-4) \Rightarrow R_2 = \sqrt{4+16-19} = 1 \\ 3)\ d = \lvert O_1O_2 \rvert = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(4)} \begin{cases} R_1 + R_2 = 4 \\ \lvert R_1 - R_2 \rvert = 2 \end{cases} \xrightarrow{(5)} d = \lvert R_1 - R_2 \rvert \Rightarrow \text{مماس داخل}$$

**سؤال ۲۹:** **به ازای کدام مقدار $b$ دو دایره به معادلات** $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ **مماس داخل اند؟**

**۱) ۵-**   **۲) ۴-**   **۴) ۳-**   **۴) ۲-**

☜ پاسخ: گزینه۲

باید $d = \lvert R_1 - R_2 \rvert$ باشد بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} O_1(-1,1) \Rightarrow R_1 = \sqrt{2} \\ O_2(0,2) \Rightarrow R_2 = \sqrt{4-b} \\ d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2} = \lvert \sqrt{2} - \sqrt{4-b} \rvert \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{4-b} \Rightarrow b = 4 \\ \sqrt{2} = \sqrt{4-b} - \sqrt{2} \Rightarrow 8 = 4 - b \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $b = 4$ شعاع دایره دوم صفر می شود.

**سؤال ۳۰:** دایرهٔ $C$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴$ مماس خارج است و هر خط قائم بر دایرهٔ $C$ از نقطهٔ $(۸,۷)$ می گذرد. شعاع دایره $C$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۶)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه۲

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴ \xrightarrow{\text{مرکز دایره}} O_۱(۲,-۱)$$

$$R_۱=\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲+۴}=\sqrt{۹}=۳$$

چون هر خط قائم بر دایره $C$ از نقطهٔ $(۸,۷)$ می گذرد، مرکز دایرهٔ $C$، $(۸,۷)$ است پس: $O_۲=(۸,۷)$

در ضمن دو دایره مماس خارج هستند یعنی: $O_۱O_۲=R_۱+R_۲$

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۷-(-۱))^۲}=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$$

$$۱۰=۳+R_۲ \Rightarrow R_۲=۷$$

---

**سؤال ۳۱:** دو دایره به مرکز مبدأ مختصات که بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۸y+۲۴=۰$ مماسند را در نظر بگیرید نسبت شعاع دایرهٔ بزرگ به شعاع دایرهٔ کوچکتر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۲

$$C:x^۲+y^۲-۶x+۸y+۲۴=۰ \Rightarrow C:(x^۲-۶x)+(y^۲+۸y)+۲۴=۰$$

$$\Rightarrow C:(x-۳)^۲-۹+(y+۴)^۲-۱۶+۲۴=۰ \Rightarrow C:(x-۳)^۲+(y+۴)^۲=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایرهٔ } C : \omega(۳,-۴) \\ \text{شعاع دایرهٔ } C : R=۱ \end{cases}$$

فرض می کنیم که دایرهٔ $C'$ به مرکز $O(۰,۰)$ و شعاع $R'$ بر دایرهٔ $C$ مماس است دو حالت امکان پزیر است.

۱) $C',C$ مماس خارج باشند:

$$O\omega=R+R' \Rightarrow \sqrt{(۳-۲)^۲+(-۴-۰)^۲}=۱+R' \Rightarrow ۵=۱+R' \Rightarrow R'=۴$$

۲) $C',C$ مماس داخل باشند:

$$O\omega=|R-R'| \Rightarrow ۵=|۱-R'| \Rightarrow \pm ۵=۱-R'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵=۱-R' \Rightarrow R'=-۴<۰ \quad \text{غ ق ق} \\ -۵=۱-R' \Rightarrow R'=۶ \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده شعاع دایرهٔ بزرگتر $R'_۲=۶$ و شعاع دایرهٔ کوچکتر برابر با $R'_۲=۴$ است پس:

$$\frac{R'_۱}{R'_۲}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

### روش ویژه برای محاسبهٔ معادلهٔ وتر مشترک :

اگر بخواهیم معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ را به دست آوری، کافی است این دو معادله را در یک دستگاه قرار داده $x^2$ و $y^2$ را حذف کنیم در این صورت معادلهٔ باقیمانده همان معادلهٔ وتر مشترک دو دایره است:

مثلاً : $\begin{cases} x^2+y^2+8x+2y-82=0 \\ 2x^2+2y^2+8x+12y+20=0 \end{cases} \to$

*برای حذف $x^2$ و $y^2$ معادلهٔ بالایی را در ۲- ضرب کرده و سپس دو معادله را با هم جمع می کنیم:*

$$\begin{cases} -2x^2-2y^2-16x-4y+164=0 \\ 2x^2+2y^2+8x+12y+20=0 \end{cases}$$

*معادلهٔ وتر مشترک* $: -8x+8y+184=0$

**تذکر**: اگر معادلهٔ دایره ها به صورت گسترده بیان نشده باشند قبل از هر کاری باید آنها را تبدیل به فرم گسترده نمود.

---

### روش ویژه برای محاسبهٔ طول وتر مشترک :

ابتدا معادلهٔ عمود مشترک را یافته و سپس آن معادله و یکی از معادلات دایره ها را در یک دستگاه حل می کنیم تا دو نقطهٔ ابتدا و انتهای وتر مشترک یعنی $A$ و $B$ در شکل بالا حاصل شود و در انتها به کمک فرمول $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ طول عمود مشترک را می یابیم.

---

**سؤال ۳۲**: **معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1,2)$ و $(2,1)$ به شعاع های مساوی ۲ واحد کدام است؟**

۱) $y=2x$ ۲) $y=3x$ ۳) $3y=2x$ ۴) $2y=3x$

**پاسخ: گزینه۲**

*ابتدا معادلهٔ دو دایره را نوشته و سپس معادلهٔ این دو دایره را از هم کم می کنیم داریم:*

دایره به مرکز (۲، ۱-) و شعاع ۲ $: (x+1)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow x^2+y^2+2x-4y+1=0$

دایره به مرکز (۱، ۲) و شعاع ۲ $: (x-2)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow x^2+y^2-4x-2y+1=0$ $\Rightarrow$

*طرفین تساوی را از هم کم می کنیم* $6x-2y=0 \Rightarrow y=3x$

---

**سؤال ۳۳**: **طول وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x=0$ و $x^2+y^2-4x+3=0$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه۳**

*ابتدا معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را می یابیم:*

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-2x=0 \\ x^2+y^2-4x+3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ *دو معادله را از هم کم می کنیم* $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ *: معادله وتر مشترک*

حال معادلهٔ وتر مشتر را با معادلهٔ یکی از دایره ها در یک دستگاه قرار داده تا دو نقطه ابتدا و انتهای وتر مشترک به دست آید:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x^2+y^2-2x=0 \xrightarrow{(*)} \left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2-2\left(\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

با مشخص شدن مختصات دو سر وتر مشترک طول آن را حساب می کنیم:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2}=\sqrt{0+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

---

**سؤال ۳۴:** **طول وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2-2x+y^2-4=0$ و $x^2+2x+y^2=0$ کدام است؟**

۱) ۱    ۲) ۳    ۳) ۲    ۴) ۴

**پاسخ: گزینه۳**

*ابتدا نقاط برخورد دو دایره را به دست می آوریم:*

$$-\begin{cases} x^2-2x+y^2-4=0 \\ x^2+2x+y^2=0 \end{cases}$$

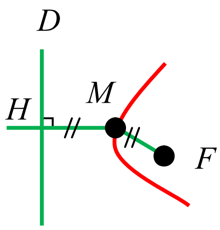
$$-4x-4=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1)^2+2(-1)+y^2=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

*بنابراین نقاط برخورد دو دایره $B(-1,-1), A(-1,1)$ هستند بنابراین طول وتر مشترک برابر است با:*

$$|AB|=\sqrt{(-1-(-1))^2+(1-(-1))^2}=2$$

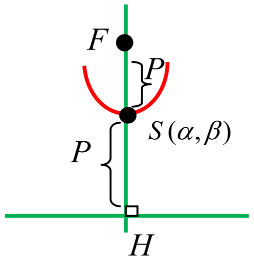
## سهمی

**تعریف :** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $F$ و خط $D$ با هم برابر است. نقطهٔ $F$ را کانون و خط $D$ را هادی سهمی می نامند.




**توجه**: خطی که از کانون سهمی می گذرد و بر خط هادی آن عمود است محور تقارن سهمی می باشد. این خط سهمی را در $S(\alpha,\beta)$ قطع می کند که این نقطه رأس سهمی نام دارد. فاصلهٔ رأس تا کانون و رأس تا هادی را با $p$ یا $a$ نمایش می دهند و پارامتر سهمی نام دارد.

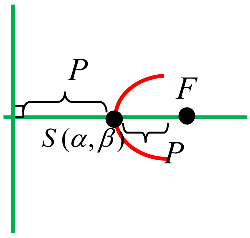
### ۱ـ معادلهٔ سهمی قائم : ($P > 0$ رو به بالا و $P < 0$ رو به پایین)




معادلهٔ سهمی قائم به رأس $S(\alpha,\beta)$ و پارامتر $P$ به صورت زیر است:

$$\boxed{(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)}$$

### ۲ـ معادلهٔ سهمی افقی : ($P > 0$ رو به راست و $P < 0$ رو به چپ)




معادلهٔ سهمی افقی به رأس $S(\alpha,\beta)$ و پارامتر $P$ به صورت زیر است:

$$\boxed{(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)}$$

### ۳ـ تعیین کانون و هادی :

**تذکر**: اگر در معادلهٔ سهمی $x^2$ وجود داشت **سهمی قائم** است و اگر در معادلهٔ سهمی $y^2$ وجود داشت **سهمی افقی** است.

برای تعیین کانون ابتدا رأس را از معادله پیدا می کنیم، سپس یکی از مؤلفه های آن را با $p$ جمع می کنیم اما کدام مؤلفه؟! مؤلفه ای که در معادلهٔ درجه یک است. مثلاً در سهمی قائم عرض با $p$ جمع می شود و در سهمی افقی طول و اما برای پیدا کردن خط هادی همان مؤلفه را از $p$ کم می کنیم یعنی:

$$\text{سهمی افقی} \Rightarrow \begin{cases} F(\alpha+p,\beta) \rightarrow \text{کانون} \\ x=\alpha-p \rightarrow \text{خط هادی} \end{cases} \qquad \text{سهمی قائم} \Rightarrow \begin{cases} F(\alpha,\beta+p) \rightarrow \text{کانون} \\ y=\beta-p \rightarrow \text{خط هادی} \end{cases}$$

### ۴ـ استاندارد کردن سهمی :

اگر سهمی گسترده باشد برای استاندارد کردن اولین کار این است که ضریب درجهٔ ۲ را تبدیل به ۱ کنیم (با تقسیم). سپس طرف اول را به صورت مربع کامل در آورده (از اتحاد $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $= x^2+ax$ استفاده می کنیم) و $\frac{a^2}{4}$ را به طرف دوم اضافه می کنیم و سپس از ضریب درجهٔ یک در طرف دوم فاکتور می گیریم.

---

**سؤال ۳۵**: در سهمی به معادلهٔ $3x^2+4y-6x+11=0$ مختصات کانون و معادله خط هادی را بنویسید.

$$3x^2-6x=-4y-11 \Rightarrow x^2-2x=-\frac{4}{3}y-\frac{11}{3} \Rightarrow (x-1)^2=-\frac{4}{3}y-\frac{11}{3}+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=-\frac{4}{3}(y+2) \Rightarrow \begin{cases} S(1,-2) \\ P=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(1,-2+\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\left(1,-\frac{7}{3}\right) \\ y=-2-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

**سؤال ۳۶:** در سهمی $x^{۲}+۶x+۸y=۷$ مختصات کانون کدام است؟

۱) $(-۳,۰)$   ۲) $(-۳,۴)$   ۳) $(-۱,۲)$   ۴) $(-۵,۲)$

پاسخ: گزینه۱

ابتدا سهمی را استاندارد می کنیم تا رأس سهمی و $p$ مشخص شود:

$$x^{۲}+۶x=-۸y+۷ \Rightarrow (x+۳)^{۲}=-۸y+۷+۹ \Rightarrow (x+۳)^{۲}=-۸(y-۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(-۳,۲) \\ p=-۲ \end{cases} \Rightarrow F(-۳,۲+(-۲))=(-۳,۰)$$

---

**سؤال ۳۷:** در سهمی به معادلهٔ $y^{۲}+۴y+۲x+۱=۰$ خط هادی آن از نقطه ای با کدام مختصات می گذرد؟ (تجربی۸۸)

۱) $(۱,-۲)$   ۲) $(۱,۲)$   ۳) $(۲,۱)$   ۴) $(۰,۳)$

پاسخ: گزینه۳

ابتدا معادلهٔ سهمی را استاندارد می کنیم:

$$y^{۲}+۴y+۲x+۱=۰ \Rightarrow (y+۲)^{۲}-۴=-۲x-۱ \Rightarrow (y+۲)^{۲}=-۲\left(x-\frac{۳}{۲}\right)$$

$$\begin{cases} S\left(\frac{۳}{۲},-۲\right) \\ ۴p=-۲ \end{cases} \Rightarrow \text{هادی}: x=\alpha-p=\frac{۳}{۲}-\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۲ \Rightarrow$$ از نقطه ای می گذرد که طول آن $x=۲$ باشد

---

**سؤال ۳۸:** به ازای کدام مقدار $a$ در سهمی به معادلهٔ $y^{۲}=ay+۲x+۵$ معادلهٔ خط هادی به صورت $x=-\frac{۷}{۲}$ است؟

۱) $\pm ۱$   ۲) $\pm ۲$   ۳) $\pm ۳$   ۴) $\pm ۴$

پاسخ: گزینه۲

$$y^{۲}-ay=۲x+۵ \Rightarrow \left(y-\frac{a}{۲}\right)^{۲}=۲x+۵+\frac{a^{۲}}{۴} \Rightarrow \left(y-\frac{a}{۲}\right)^{۲}=۲x+\frac{۲۰+a^{۲}}{۴}$$

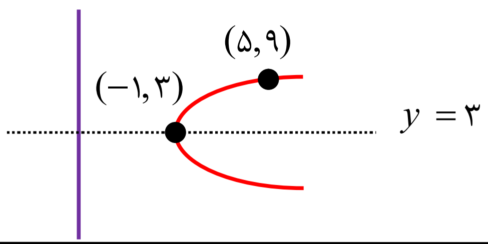
$$\Rightarrow \left(y-\frac{a}{۲}\right)^{۲}=۲\left(x+\frac{۲۰+a^{۲}}{۸}\right) \Rightarrow x=-\frac{۲۰+a^{۲}}{۸}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۷}{۲} \Rightarrow \frac{۲۰+a^{۲}}{۸}=۳ \Rightarrow a=\pm ۲$$

---

**سؤال ۳۹:** محور تقارن یک سهمی با رأس (۳، ۱-) موازی محور $x$ ها است. اگر این سهمی از نقطهٔ (۹، ۵) بگذرد. فاصلهٔ کانون تا خط هادی کدام است؟ (داخل تجربی ۹۶)

۱) ۲/۵   ۲) ۳   ۳) ۳/۵   ۴) ۴

پاسخ: گزینه۲




معادلهٔ سهمی: $(y-۳)^{۲}=۴p(x+۱)$

از نقطهٔ $(۵,۹)$ می‌گذرد:

$$\Rightarrow (۹-۳)^۲ = ۴p(۵+۱) \Rightarrow ۶^۲ = ۴p \times ۶ \Rightarrow p = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

فاصلهٔ کانونی تا خط هادی: $۲p = ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$

---

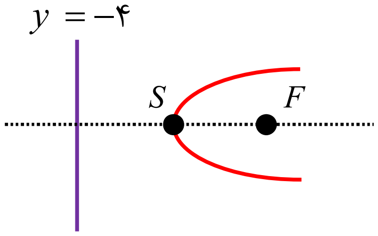
**📖 سؤال ۱۴۰:** **سهمی با کانون $F(۲,۳)$ و خط هادی به معادلهٔ $x=-۴$ محور $x$ ها را با کدام طول قطع می کند.**

۱) $-\frac{۱}{۲}$　　۲) $-\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$　　**(خارج از کشور تجربی ۹۶)**

☜ **پاسخ: گزینه۲**

چون معادلهٔ خط هادی، $x=-۴$ است پس سهمی افقی است. و چون کانون سهمی جلوتر از خط $x=-۴$ است یعنی دهانهٔ سهمی به سمت راست است.

$$S = \left(\frac{-۴+۲}{۲}, ۳\right) = (-۱,۳)$$




$$\begin{cases} S(-۱,۳) \\ F(۲,۳) \end{cases} \to p = ۳$$

معادلهٔ سهمی: $(y-۳)^۲ = ۴p(x+۱) \xrightarrow{p=۳} (y-۳)^۲ = ۱۲(x+۱) \xrightarrow[y=۰]{\text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها}} ۹ = ۱۲(x+۱)$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۲} = x+۱ \Rightarrow \frac{۳}{۴} = x+۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴}$$

---

**📖 سؤال ۱۴۱:** **سهمی به کانون $F(۳,۲)$ و خط هادی به معادلهٔ $x=-۱$ محور $x$ ها را در نقطهٔ $A$ قطع می کند. فاصلهٔ نقطهٔ $A$ تا کانون سهمی کدام است؟**

۱) ۲/۲۵　　۲) ۲/۵　　۳) ۲/۷۵　　۴) ۳

☜ **پاسخ: گزینه۲**

به کمک کانون و خط هادی مختصات رأس و پارامتر سهمی را به دست می آوریم:

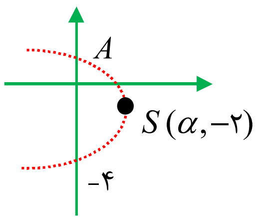
$$F(۳,۲), x=-۱ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \beta = ۲ \\ p = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(\alpha,\beta) = (۱,۲) \\ p = ۲ \end{cases} \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۸(x-۱)$$

$$\xrightarrow{y=۰} ۴ = ۸(x-۱) \Rightarrow x-۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow A\left(\frac{۳}{۲}, ۰\right) \Rightarrow |FA| = \sqrt{\frac{۹}{۴}+۴} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

**سؤال ۴۲:** فاصلهٔ کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور $y$ها را در دو نقطه به عرض های ۱ و ۵- قطع می کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه۳




سهمی محور $y$ ها را در دو نقطه قطع می کند یعنی افقی است و عرض رأس سهمی برابر میانگین عرض این دو نقطه است بنابراین $S(\alpha,-۲)$ می باشد. از طرفی فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $۲p$ می باشد پس: $p=۱$ با توجه به اینکه طول رأس با علامت مثبت خواسته شده پس سهمی رو به چپ است یعنی $p=-۱$ حال معادلهٔ سهمی را می نویسیم:

$$(y+۲)^۲=-۴(x-\alpha)\xrightarrow{A(۰,۱)}۹=۴\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۹}{۴}$$

---

**سؤال ۴۳:** یک سهمی که محور تقارن آن موازی یکی از محورهای مختصات است محور $y$ها را در دو نقطه به عرض ۱ و ۵ قطع می کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیهٔ اول است. فاصلهٔ کانون سهمی تا خط هادی کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه۱

سهمی محور $y$ ها را در نقاط به عرض ۱ و ۵ قطع می کند پس محور تقارن آن $y=۳$ و چون رأس آن روی نیمساز ناحیهٔ اول است $S(\alpha,\alpha)$ پس $S(۳,۳)$ است.

$$(y-۳)^۲=۴p(x-۳)\xrightarrow{A(۰,۱)}۴=۴p(۰-۳)\Rightarrow p=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$

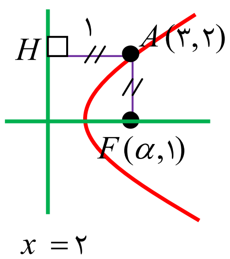
$$\text{فاصلهٔ کانون تا خط هادی}=۲|p|=\frac{۲}{۳}$$

---

**سؤال ۴۴:** خط به معادلهٔ $y=۱$ محور تقارن و خط $x=۲$ خط هادی سهمی هستند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۳,۲)$ بگذرد فاصلهٔ کانون تا خط هادی کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۱




$$|AH|=|AF|\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۳)^۲+۱^۲}=۱$$

$$\Rightarrow\alpha=۳\Rightarrow F(۳,۱)\Rightarrow \text{فاصلهٔ کانون تا خط هادی}=۱$$

📖 سؤال ۴۵: محور $y$ خط هادی سهمی ای است که کانون آن روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. اگر سهمی از نقطهٔ $M\ (۲,۴)$ بگذرد و $M$ رأس سهمی نباشد، فاصلهٔ کانونی سهمی کدام است؟

۱) ۴  ۲) ۳  ۳) ۲  ۴) ۱

☜ پاسخ: گزینه۴

محور $y$ خط هادی سهمی است لذا محور تقارن بر محور $y$ ها عمود است و در نتیجه موازی محور $x$ ها می باشد پس سهمی افقی است. کانون سهمی روی خط $y=x$ قرار دارد بنابراین مختصات $F$ به صورت $F(\beta,\beta)$ است. طبق تعریف سهمی فاصلهٔ $M\ (۲,۴)$ از کانون و خط هادی $(x=۰)$ یکسان است بنابراین:

$$MF=MH\Rightarrow\sqrt{(\beta-۲)^۲+(\beta-۴)^۲}=۲\Rightarrow(\beta-۲)^۲+(\beta-۴)^۲=۴$$

$$\Rightarrow(\beta^۲-۴\beta+۴)+(\beta-۸\beta+۱۶)=۴\Rightarrow\beta^۲-۶\beta+۸=۰$$

$$\Rightarrow(\beta-۲)(\beta-۴)=۰\Rightarrow\beta=۲\ \text{یا}\ \beta=۴$$

نقطهٔ $(۲,۴)$ رأس سهمی نمی باشد لذا $\beta=۴$ غیرقابل قبول است و در نتیجه:

$$\beta=۲\Rightarrow F(۲,۲)\Rightarrow ۲p=\text{فاصلهٔ } F \text{ تا خط هادی}=۲\Rightarrow p=۱$$

---

📖 سؤال ۴۶: به ازای کدام مقدار $a$ کانون سهمی به معادلهٔ $۲y^۲+ay-۳x=۰$ بر روی محور $y$ ها است؟

۱) $\pm۲$  ۲) $\pm۶$  ۳) $\pm۴$  ۴) $\pm۳$

☜ پاسخ: گزینه۴

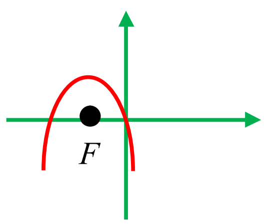
کانون روی محور $y$ ها است یعنی طول کانون صفر است:

$$y^۲+\frac{a}{۲}y=\frac{۳}{۲}x\Rightarrow\left(y+\frac{a}{۴}\right)^۲=\frac{۳}{۲}x+\frac{a^۲}{۱۶}\Rightarrow\left(y+\frac{a}{۴}\right)^۲=\frac{۳}{۲}\left(x+\frac{a^۲}{۲۴}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S\left(-\frac{a^۲}{۲۴},-\frac{a}{۴}\right)\\ p=\frac{۳}{۸}\end{cases}\Rightarrow F\left(-\frac{a^۲}{۲۴}+\frac{۳}{۸},-\frac{a}{۴}\right)\Rightarrow\frac{a^۲}{۲۴}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=\pm۳$$

---

📖 سؤال ۴۷: معادلهٔ سهمی نمودار مقابل به صورت $x^۲+۲x=ay$ است. $a$ کدام است؟




۱) $-۲$
۲) $-۱$
۳) $۱$
۴) $۲$

☜ پاسخ: گزینه۱

شکل به ما نشان می دهد عرض کانون صفر است و هم چنین چون سهمی رو به جهت منفی محور هاست $p<۰$ است.

$$x^{2}+2x=ay \Rightarrow (x+1)^{2}=ay+1 \Rightarrow (x+1)^{2}=a\left(y+\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\left(-1,-\frac{1}{a}\right) \\ p=\frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow F\left(-1,-\frac{1}{a}+\frac{a}{4}\right) \Rightarrow a^{2}=4 \Rightarrow a=\begin{cases} a=2 & \text{غ ق ق} \\ a=-2 \end{cases}$$

---

📖 **سؤال ۴۸:** **دهانهٔ سهمی به معادلهٔ $y^{2}+a(x-y)=0$ رو به راست باز می شود و فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟ (سراسری تجربی)**

۱) $(-1,-2)$　　۲) $(0,-2)$　　۳) $(0,-1)$　　۴) $(1,2)$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

*فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2p$ است:* $2p=2 \Rightarrow p=1$

*در معادلهٔ گسترده اگر ضریب متغیر درجهٔ ۲، یک باشد آنگاه ضریب متغیر درجهٔ ۱ برابر $4p$ است بنابراین:*

$$4p=-a \Rightarrow a=-4 \Rightarrow y^{2}+4y-4x=0 \Rightarrow y^{2}+4y+4=4x+4$$

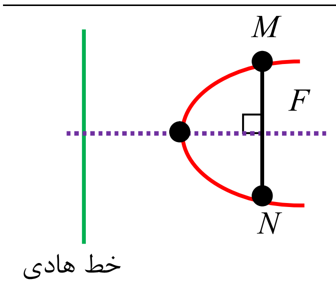
$$\Rightarrow (y+2)^{2}=4(x+1)$$

*مرکز سهمی افقی نقطهٔ $S(-1,-2)$ است و داریم:*

$$F(\alpha+p,\beta)=(0,-2)$$

---

📚 **وتر کانون سهمی :**




پاره خط $MN$ را که در کانون بر محور تقارن سهمی عمود می باشد وتر کانونی سهمی نامیده که اندازهٔ آن برابر $4|p|$ است.

※ ☺ فقط یک تمرین کتاب درسی به وتر کانون سهمی پرداخته است و عیناً از آن تمرین در کنکور سراسری تست مطرح شد. پس به تمرینات این فصل توجه ویژه ای داشته باشید.

⌛ **نکته:** اگر وتر کانونی سهمی قطر یک دایره باشد در این صورت:

۱) شعاع دایره برابر $2|p|$ است.

۲) مرکز دایره همان نقطهٔ کانون سهمی است.

۳) این دایره بر خط هادی سهمی مماس است.

---

📖 **سؤال ۴۹:** **وتری از سهمی به معادلهٔ $y^{2}=4(x+y)$ که از کانون بر محور آن عمود باشد قطری از یک دایره است. معادلهٔ این دایره کدام است؟**

۱) $x^{2}+y^{2}-4y=0$　　۲) $x^{2}+y^{2}+4y=0$

۳) $x^{2}+y^{2}-2y=2$　　۴) $x^{2}+y^{2}-2x+2y=2$

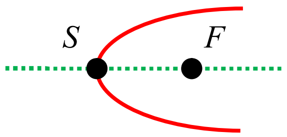
☜ پاسخ: گزینه۱

$$y^{۲} = ۴(x + y)$$

$$y^{۲} - ۴y = ۴x \xrightarrow{+۴} y^{۲} - ۴y + ۴ = ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow (y - ۲)^{۲} = ۴(x + ۱) \Rightarrow ۴p = ۴ \Rightarrow p = ۱$$

سهمی افقی است با رأس $(-۱,۲)$ که به دهانهٔ سهمی رو به راست است.




$$\Rightarrow F = (-۱+۱,۲) = (۰,۲)$$

شعاع دایره $۲ = |p| ۲$ است و مرکز دایره $(۰,۲)$

$$(x - ۰)^{۲} + (y - ۲)^{۲} = ۲^{۲} \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} - ۴y + ۴ = ۴ \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} - ۴y = ۰$$

---

📖 سؤال ۵۰: معادلهٔ دایره ای که مرکز آن کانون سهمی به معادلهٔ $y = \frac{۱}{۸}(۴ + ۴x - x^{۲})$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد کدام است؟

۱) $x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۲y - ۱۱ = ۰$

۲) $x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۲y - ۳ = ۰$

۳) $x^{۲} + y^{۲} - ۴x - ۲y - ۱ = ۰$

۴) $x^{۲} + y^{۲} + ۴x + ۲y - ۲ = ۰$

☜ پاسخ: گزینه۱

شعاع دایره ای که مرکز آن کانون سهمی باشد و بر خط هادی مماس باشد برابر $r = ۲p$ ا

$$y = \frac{۱}{۸}(۴ + ۴x - x^{۲}) \Rightarrow ۸y = ۴ + ۴x - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۴x = -۸y + ۴$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^{۲} = -۸y + ۸ = -۸(y - ۱)$$

نوع سهمی قائم و رو به پایین است لذا:

$$۸ = ۴p, S(۲,۱) \Rightarrow F(\alpha, \beta - p) = (۲,-۱)$$

بنابراین معادلهٔ دایره به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع $r = ۲p = ۴$ به صورت زیر است:

$$(x - ۲)^{۲} + (y + ۱)^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۲y - ۱۱ = ۰$$

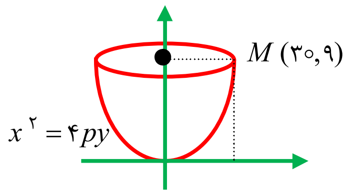
---

📖 سؤال ۵۱: عمق یک آینهٔ سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعدهٔ آن ۶۰ واحد است. فاصلهٔ کانون تا رأس آن کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

۱) ۱۵    ۲) ۲۰    ۳) ۲۲/۵    ۴) ۲۵

☜ پاسخ: گزینه۴

با توجه به شکل مقابل داریم:

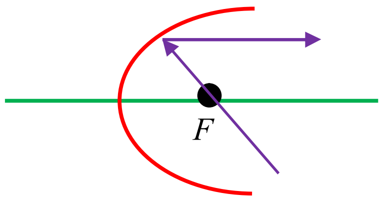



$$x^۲ = ۴py \xrightarrow{\text{روی سهمی قرار دارد } M} ۹۰۰ = ۴p \times ۹$$
$$\Rightarrow p = ۲۵$$

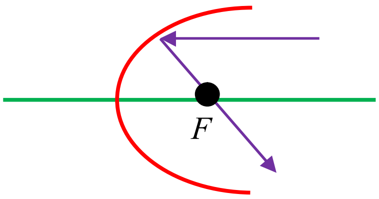
فاصلهٔ کانون تا رأس برابر $p = ۲۵$ است.

---

### ویژگی بازتابندگی سهمی ها :




**الف) اگر پرتویی از کانون سهمی $(F)$ عبور کرده و به سهمی برخورد کند پرتو بازتاب موازی محور تقارن سهمی است.**




**ب) اگر پرتو موازی محور تقارن سهمی به سهمی برخورد کند پرتو بازتاب از کانون سهمی $(F)$ عبور می کند.**

* ☺ هر وقت کلمهٔ «اشعه» یا «پرتو» در تستی مربوط به سهمی ملاحظه کردید سریعاً یاد این ویژگی افتاده و با محاسبهٔ $p$ و رأس مختصات کانون سهمی را بیابید. به احتمال زیاد خواستهٔ مسأله همان مختصات کانون سهمی است. ☺

---

**سؤال ۵۲: یک اشعهٔ نورانی را در امتداد خط $x = ۳$ و اشعهٔ دیگر را در امتداد خط $x = -۱$ از داخل سهمی به معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۴y + ۹ = ۰$ بر آن می تابانیم مختصات نقطهٔ تلاقی بازتاب این دو پرتو کدام است.**

۱) $(۱,۳)$  ۲) $(۱,۴)$  ۳) $(۲,۲)$  ۴) $(۲,۳)$

☜ پاسخ: گزینه۱

هر دو اشعه به موازات محور $y$ ها (یعنی به موازات محور تقارن سهمی قائم $x^۲ - ۲x - ۴y + ۹ = ۰$) بر آن تابیده شده است پس نقطهٔ تلاقی دو پرتو کانون سهمی می باشد. پس در واقع تست به طور غیرمستقیم مختصات کانون را خواسته است.

$$x^۲ - ۲x - ۴y + ۹ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ - ۴y + ۸ = ۰$$
$$(x-۱)^۲ = ۴y - ۸ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۴(y-۲)$$

پس یک سهمی قائم رو به بالا است که $p = ۱$ است پس:

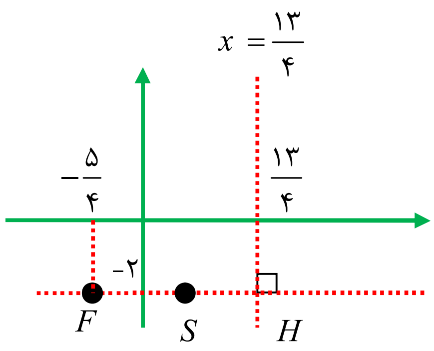
$$\Rightarrow F(۱, ۲+۱) = (۱,۳)$$

**سؤال ۵۳:** **خط هادی یک سهمی به معادلهٔ $x=\frac{۱۳}{۴}$ است. هر پرتوی که از نقطهٔ $\left(-۲,-\frac{۵}{۴}\right)$ بر این سهمی بتابد در امتداد محور $x$ ها باز می تابد. این سهمی محور $x$ ها را با کدام طول قطع می کند؟ (سراسری تجربی ۹۴)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

**پاسخ: گزینه۳**

*با توجه به ویژگی بازتابندگی سهمی نقطهٔ $\left(-۲,-\frac{۵}{۴}\right)$ کانون سهمی است.*




$$S=\frac{F+H}{۲}=\left(\frac{-\frac{۵}{۴}+\frac{۱۳}{۴}}{۲},-۲\right)=(۱,-۲)$$

$$P=SF=۱+\frac{۵}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

$$\text{معادلهٔ سهمی}: (y+۲)^۲=-۴\times\frac{۹}{۴}(x-۱)\xrightarrow{y=۰}۴=-۹(x-۱)\Rightarrow x-۱=-\frac{۴}{۹}\Rightarrow x=\frac{۵}{۹}$$

---

**سؤال ۵۴:** **دو اشعه به موازات محور $x$ ها بر سهمی $y^۲-۴y=۶x+۲$ می تابند. این دو اشعه پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع هستند؟**

۱) $\left(۳,\frac{۱}{۲}\right)$ ۲) $\left(۲,\frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

**پاسخ: گزینه۲**

*بازتاب پرتوهایی که به موازات محور سهمی بر سهمی می تابند از کانون سهمی می گذرند. با توجه به اینکه سهمی افقی (متغیر $y$ از درجهٔ ۲ است) است لذا محور سهمی موازی محور $x$ ها است و در نتیجه بازتاب دو اشعه در کانون متقاطع هستند. برای به دست آوردن کانون معادله را به صورت استاندارد می نویسیم:*

$$(y-۲)^۲=۶x+۶=۶(x+۱)$$

*نوع سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت راست است.*

$$S(-۱,۲),۴p=۶\Rightarrow p=\frac{۳}{۲}\Rightarrow F(\alpha+p,\beta)=\left(-۱+\frac{۳}{۲},۲\right)=\left(\frac{۱}{۲},۲\right)$$

**سؤال ۵۵: یک پرتو از کانون سهمی به معادلهٔ $y^2+2y-6x+4=0$ تابیده و بامحور $x$ ها زاویهٔ $45^\circ$ می سازد معادلهٔ بازتاب آن کدام است؟ (سراسری تجربی)**

۱) $y=2+3\sqrt{2}$ ۲) $y=3+\sqrt{2}$ ۳) $y=2+2\sqrt{3}$ ۴) $y=2+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه۱

معادلهٔ استاندارد سهمی به صورت $(y+1)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$ است نوع سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت راست، با رأس $S\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $4p=6$ است لذا:

$$F(\alpha+p,\beta)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2},-1\right)=(2,-1)$$

پرتو از کانون گذشته و با محور $x$ ها زاویهٔ $45^\circ$ ساخته است لذا:

$$m=\tan 45^\circ=1, F(2,-1)\Rightarrow y+1=1(x-2)\Rightarrow y=x-3$$

پرتوها پس از برخورد به سهمی به موازات محور سهمی بازتاب می شوند. محل تلاقی خط $y=x-3$ و سهمی را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases}(y+1)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ y=x-3\Rightarrow x=y+3\end{cases}\Rightarrow (y+1)^2=6\left(y+3-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y^2-4y-14=0$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=72\Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm 6\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=2+3\sqrt{2} \text{ یا } y=2-3\sqrt{2}$$

---

**سؤال ۵۶: نقطهٔ $S(-1/6,-1)$ رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور $x$ ها بر این سهمی بتابد به نقطهٔ $(0/9,-1)$ باز می تابد. این سهمی محور $y$ ها را با کدام عرض قطع می کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)**

۱) ۴، ۶- ۲) ۳، ۵- ۳) ۲، ۴- ۴) صفر و ۲-

پاسخ: گزینه۲

با توجه به ویژگی های بازتابندگی سهمی نقطهٔ $(0/9,-1)$ کانون سهمی است.

$$S(-1/6,-1), F(0/9,-1)\Rightarrow \mathrm{p}=\mathrm{SF}=0/9-(-1/6)=2/5$$

$F$ , $S$ روی خط $y=-1$ قرار دارند لذا سهمی افقی و با توجه به موقعیت نقطه های $S$ , $F$ دهانهٔ آن به سمت راست است لذا:

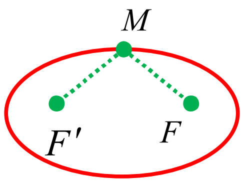
$$\text{معادله سهمی}: (y+1)^2=10(x+1/6)\xrightarrow{x=0}(y+1)^2=16$$

$$\Rightarrow y^2+2y-15=0\Rightarrow (y+5)(y-3)=0\Rightarrow y=3, y=-5$$

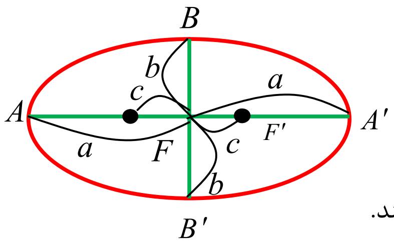
# بیضی

**تعریف :** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت $F$ و $F'$ به نام کانون های بیضی، مقدار ثابت $2a$ است که $2a$ طول قطر بزرگ بیضی است.

$$\boxed{|MF|+|MF'|=2a}$$




## نقاط و اعداد مهم در بیضی :




۱) **مرکز**: نقطهٔ $O$ وسط و مرکز بیضی نام دارد.

۲) **رأس های کانونی**: نقاط $A$ و $A'$ دو سر قطر بزرگ را رأس های کانونی می نامند.

۳) **رأس های ناکانونی**: نقاط $B$ و $B'$ دو سر قطر کوچک را رأس های ناکانونی می نامند.

۴) **کانون ها**: نقاط $F$ و $F'$ را کانون های بیضی و $|FF'|=2c$ را فاصلهٔ کانونی می نامند.

## رابطهٔ طلایی :

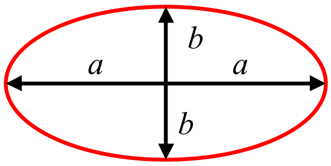
اگر در بیضی $|AA'|=2a$, $|BB'|=2b$ و $|FF'|=2c$ باشد آنگاه همواره داریم: $\boxed{a^2=b^2+c^2}$

## معادلهٔ استاندارد بیضی :

۱) **بیضی افقی**: معادلهٔ بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور $x$ ها باشد به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

عدد بزرگه زیر $x$

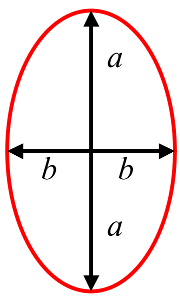



*: در بیضی افقی، عرض های رأس و کانون ها یکسان است.

۲) **بیضی قائم**: معادلهٔ بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور $y$ ها باشد به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$

عدد بزرگه زیر $y$




*: در بیضی قائم، طول های رأس و کانون ها یکسان است.

**توجه**: $a^2$ همیشه عدد بزرگتر بین دو مخرج و $b^2$ همیشه عدد کوچکتر بین دو مخرج است.

**سؤال ۵۷: به ازای کدام مقادیر $a$ بیضی $\frac{x^2}{a-1}+\frac{y^2}{2-a}=1$ یک بیضی قائم است؟**

۱) $0<a<1/5$ ۲) $1<a<2$ ۳) $1<a<1/5$ ۴) $1/5<a<2$

پاسخ: گزینه۳

در بیضی قائم باید عدد زیر $y^2$ بزرگتر از عدد زیر $x^2$ باشد: $2-a>a-1\Rightarrow 2a<3\Rightarrow a<1/5$

همچنین شرط بیضی بودن این است که $2-a>0$ و $a-1>0$ باشد بنابراین با اشتراک از این سه نامساوی داریم:

$1<a<1/5$

---

**سؤال ۵۸: نقاط $F'(5,-1),F(1,-1)$ کانون های یک بیضی هستند که طول قطر کوچک آن ۲واحد است. اگر $M$ نقطه ای واقع بر بیضی باشد حاصل $MF+MF'$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه۳

$$\begin{cases}2c=FF'=5-1=4\Rightarrow c=2\\ BB'=2b=2\Rightarrow b=1\end{cases}\Rightarrow a^2=b^2+c^2=1+4=5\Rightarrow a=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MF+MF'=2a=2\sqrt{5}$$

---

**سؤال ۵۹: اگر بیضی $\frac{x^2}{k^2}+k^2y^2=k^2$ قائم باشد آنگاه:**

۱) $-1<k<1$ ۲) $0<k\le 1$ ۳) $k\neq 0$ ۴) $0<|k|<1$

پاسخ: گزینه۴

معادلهٔ استاندارد بیضی را می نویسیم:

$$\frac{x^2}{k^2}+k^2y^2=k^2\xrightarrow{\div k^2}\frac{x^2}{k^4}+\frac{y^2}{1}=1$$

در معادلهٔ استاندارد بیضی قائم، عدد مفرج کسر شامل $x^2$ (یعنی $k^4$) باید کوچکتر از عدد مفرج کسر شامل $y^2$ باشد لذا:

$$k^4<1\Rightarrow |k|<1\xrightarrow{k\neq 0}0<|k|<1$$

---

**استاندارد کردن:**

اگر معادلهٔ یک بیضی به صورت $Ax^2+By^2+Cx+Dy=E$ (که $A\neq B$) باشد برای درآوردن آن به شکل استاندارد با مشتق ضمنی نسبت به $x$ و $y$ و صفر گذاشتن آنها، مرکز را پیدا می کنیم. سپس معادله را به صورت $A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2$ می نویسیم و در طرف دوم اعداد $B\beta^2,A\alpha^2$ را به $E$ اضافه کرده و طرفین را بر عدد به دست آمده تقسیم می کنیم. (به جای $x$ و $y$ در پرانتزهای طرف اول صفر بگذارید، $B\beta^2,A\alpha^2$ به دست می آید.)

**مثال:**

$$6x^2+5y^2-12x+20y=4 \Rightarrow O(1,-2) \Rightarrow 6(x-1)^2+5(y+2)^2$$
$$=4+6+20 \xrightarrow{\div 30} \frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{6}=1$$

---

📖 **سؤال ۶۰:** **در بیضی به معادلهٔ $3x^2+4y^2+18x-16y=5$ مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن کدام است؟**

۱) $4\sqrt{2}$　　۲) ۶　　۳) $4\sqrt{3}$　　۴) ۸

☜ پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases} 6x+18=0 \Rightarrow x=-3 \\ 8y-16=0 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$$O(-3,2) \Rightarrow 3(x+3)^2+4(y-2)^2=\underbrace{5+27+16}_{48} \xrightarrow{\div 48} \frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

$$\Rightarrow |MF|+|MF'|=2a=2\times 4=8$$

---

📖 **سؤال ۶۱:** **کانون های بیضی به معادلهٔ $2x^2+7y^2-4x=12$ دو سر قطری از دایره اند. این دایره نیمساز ناحیهٔ اول را با کدام طول قطع می کند؟**

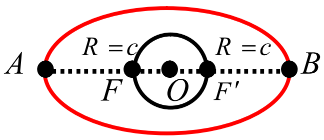
۱) ۲　　۲) $1+\sqrt{2}$　　۳) $\frac{5}{2}$　　۴) ۳

☜ پاسخ: گزینه۱

مرکز دایره همان مرکز بیضی و شعاع دایره، $c$ بیضی است. پس بیضی را استاندارد می کنیم تا $c$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} 4x-4=0 \Rightarrow x=1 \\ 7y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

$$O(1,0) \Rightarrow 2(x-1)^2+7(y-0)^2=12+2 \xrightarrow{\div 14} \frac{(x-1)^2}{7}+\frac{y^2}{2}=1$$




$$R=c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow R=\sqrt{7-2}=\sqrt{5}$$

دایره: $(x-1)^2+y^2=5 \Rightarrow \xrightarrow{y=x} (x-1)^2+x^2=5 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$

---

📖 **سؤال ۶۲:** **معادلهٔ بیضی به کانون های $F'(1,-1), F(1,1)$ و قطر بزرگ $2\sqrt{5}$ کدام است؟**

۱) $5x^2+4y^2-10x=15$　　۲) $5x^2+4y^2+10x=15$

۳) $4x^2+5y^2-8x=16$　　۴) $4x^2+5y^2+8x=16$

☜ پاسخ: گزینه۱

با نقاط $F',F$ سه چیز از چهار چیز لازم به دست می آید اولاً عرض آنها تغییر کرده که نشان می دهد بیضی قائم است. در ضمن،

$$O=\frac{F+F'}{۲}\Rightarrow O(۱,۰)$$

$$\begin{cases}۲c=FF'=۲\Rightarrow c=۱\\ ۲a=۲\sqrt{۵}\Rightarrow a=\sqrt{۵}\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۵-۱}=۲\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۵}=۱$$

چون بیضی قائم است عدد بزرگتر (بین $a^۲$ و $b^۲$) را زیر $y^۲$ می‌گذاریم و اما گزینه ها گسترده است پس معادله را باز می کنیم:

$$۵(x^۲-۲x+۱)+۴y^۲=۲۰\Rightarrow ۵x^۲+۴y^۲-۱۰x=۱۵$$

---

📖 **سؤال ۶۳: مختصات یکی از کانون های بیضی $۲x^۲+۶y^۲+۴x-۱۲y=۴$ کدام است؟**

۱) $(۱,-۳)$   ۲) $(۳,۱)$   ۳) $(-۲,۱)$   ۴) $(-۳,۱)$

☜ پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases}۴x+۴=۰\Rightarrow x=-۱\\ ۱۲y-۱۲=۰\Rightarrow y=۱\end{cases}$$

$$O(-۱,۱)\Rightarrow ۲(x+۱)^۲+۶(y-۱)^۲=۴+۲+۶\xrightarrow{\div ۱۲}\frac{(x+۱)^۲}{۶}+\frac{(y-۱)^۲}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{۶-۲}=۲$$

بیضی افقی $\Rightarrow F,F'(-۱\pm ۲,۱)\Rightarrow \begin{cases}F(۱,۱)\\ F'(-۳,۱)\end{cases}$

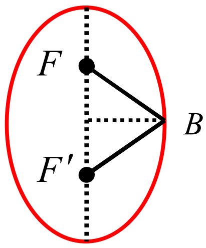
---

📖 **سؤال ۶۴: بیشترین مساحت از بین مثلث هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادلهٔ $۴x^۲+y^۲-۴x=۳$ و دو رأس دیگر آن کانون های این بیضی باشند، کدام است؟**

۱) ۲   ۲) ۳   ۴) $\sqrt{۲}$   ۴) $\sqrt{۳}$

☜ پاسخ: گزینه۴

بیشترین مساحت هنگامی حاصل می شود که نقطهٔ $M$ روی رأس ناکانونی بیضی قرار گیرد چون در این حالت ارتفاع مثلث **max** می شود و در نتیجه $S_{\max}=\frac{۱}{۲}(۲c)(b)=bc$ می باشد بنابراین باید **c,b** را پیدا کنیم:




$$\begin{cases}۸x-۴=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\\ ۲y=۰\Rightarrow y=۰\end{cases}$$

$$O\left(\frac{۱}{۲},۰\right)\Rightarrow ۴\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲+(y-۰)^۲=۳+۱+۰\xrightarrow{\div ۴}$$

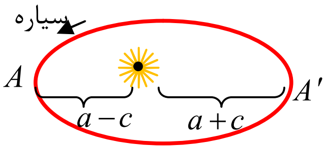
$$\frac{(x-۰/۵)^۲}{۱}+\frac{y^۲}{۴}=۱\Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۴-۱=۳$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{۳}\Rightarrow S_{\max}=bc=۱\times\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

### قانون اول کپلر :

مسیر حرکت سیارات به دور خورشید، یک بیضی است که خورشید در یکی از کانون های این بیضی قرار دارد.

دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ سیاره از خورشید $a+c$ و $a-c$ در این بیضی است که همان فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس و نزدیکترین رأس هستند.




---

**سؤال ۶۵: دورترین نقطه از بیضی به معادلهٔ $۲x^۲+y^۲+۴x-۴y+۲=۰$ تا مرکز آن به کدام مختصات است؟ (تجربی خارج ۸۶)**

۱) $(-۱-\sqrt{۲},۲)$    ۲) $(-۲,۲+\sqrt{۲})$    ۳) $(-۱,۴)$    ۴) $(-۱,۶)$

☜ **پاسخ: گزینه۳**

*دورترین نقطهٔ بیضی از مرکز همان رأس های کانونی هستند.*

$$\begin{cases} ۴x+۴=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ ۲y-۴=۰ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

$$O(-۱,۲) \Rightarrow ۲(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=-۲+۲+۴ \xrightarrow{\div ۴} \frac{(x+۱)^۲}{۲}+\frac{(y-۲)^۲}{۴}=۱$$

$$\text{بیضی قائم} \Rightarrow A, A'(-۱,۲\pm ۲) \qquad \begin{cases} (-۱,۴) \\ (-۱,۰) \end{cases}$$

---

**سؤال ۶۶: اگر معادلهٔ مدار گردش یکی از سیارات منظومهٔ شمسی به دور خورشید به صورت $x^۲+۲y^۲-۲x+۸y+۷=۰$ باشد مختصات نقطهٔ قرار گرفتن خورشید کدام می تواند باشد؟**

۱) $(۲,-۲)$    ۲) $(۱+\sqrt{۲},-۲)$    ۳) $(۱,-۱)$    ۴) $(۲,-۱)$

☜ **پاسخ: گزینه۱**

*خورشید روی یکی از کانون ها قرار می گیرد پس:*

$$\begin{cases} ۲x-۲=۰ \Rightarrow x=۱ \\ ۴y+۸=۰ \Rightarrow y=-۲ \end{cases}$$

$$x^۲+۲y^۲-۲x+۸y+۷=۰ \Rightarrow O(۱,-۲) \Rightarrow (x-۱)^۲+۲(y+۲)^۲=-۷+۹$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۲}+\frac{(y+۲)^۲}{۱}=۱ \Rightarrow c=\sqrt{۲-۱}=۱$$

*با توجه به افقی بودن بیضی $F(۲,-۲), F'(۰,-۲)$ کانون ها می باشند.*

---

**سؤال ۶۷: در بیضی به معادلهٔ $۳x^۲+۴y^۲-۶x+۴y=۴۴$ فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس آن کدام است؟**

۱) ۵    ۲) ۶    ۳) ۱    ۴) $۴+۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه۲

باید $a+c$ را در این بیضی پیدا کنیم بنابراین بیضی را استاندارد می کنیم:

$$\begin{cases} 6x-6=0 \Rightarrow x=1 \\ 8y+4=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$O\left(1,-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3(x-1)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=44+3+1 \xrightarrow{\div 48}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+0/5)^2}{12}=1 \Rightarrow c=\sqrt{16-12}=2 \Rightarrow a+c=4+2=6$$

## خروج از مرکز بیضی :

در هر بیضی نسبت $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و همواره $0<e<1$ است. این نسبت میزان چاقی و لاغری بیضی را نشان می دهد. (هرچه کمتر چاق تر)

$$1)\ \frac{c}{a} \to 1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 \Rightarrow c^2 \Leftrightarrow a^2 \Rightarrow c^2 \Leftrightarrow b^2+c^2 \Rightarrow b^2 \to 0$$

یعنی قطر کوچک بیضی به سمت صفر میل می کند پس بیضی به خط نزدیک می شود.

$$2)\ \frac{c}{a} \to 0 \xrightarrow[\text{ثابت است}]{\text{پارامتر } a \text{ همواره مقداری}} c \to 0 \Rightarrow a^2-b^2 \Rightarrow 0 \Rightarrow a^2 \Leftrightarrow b^2 \Rightarrow a \leftrightarrow b$$

یعنی مقدار گستردگی در جهت افقی با مقدار گستردگی در جهت قائم به هم نزدیک می شود یعنی بیضی به دایره نزدیک می شود.

پس اگر در یک بیضی ضریب $x^2$ و $y^2$ به هم نزدیک تر باشند بیضی به دایره نزدیک تر است.

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

## خروج از مرکز بیضی گسترده :

اگر معادلهٔ گستردهٔ بیضی را بدهند برای پیدا کردن خروج از مرکز نیازی به استاندارد کردن نیست و فقط به ضرایب $x^2$ و $y^2$ نگاه می کنیم که همواره یکی کوچکتر است و یکی بزرگتر. در این صورت:

$$e=\sqrt{1-\frac{\text{کوچکتر}}{\text{بزرگتر}}}$$

**سؤال ۶۸:** به ازای کدام مقادیر $k$ خروج از مرکز بیضی $x^2+ky^2=4x$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؟

۱) ۲، ۴  ۲) ۲-، ۴-  ۳) $2,\frac{1}{2}$  ۴) $4,\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه۴

چون بین $k$ و ۱ نمی دانیم کدام بزرگتر است و کدام کوچکتر هر دو حالت را در نظر می گیریم:

$$e=\sqrt{1-\frac{1}{k}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{k}=\frac{3}{4}\Rightarrow k=4$$

$$e=\sqrt{1-k}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 1-k=\frac{3}{4}\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

---

📖 سؤال ۶۹: مختصات دو سر قطر کوچک بیضی $B'(-1,-1),B(-1,3)$ است. این بیضی از نقطهٔ $M(-4,2)$ می گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$   ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$   ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$   ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☜ پاسخ: گزینه۳

با $B'<B$ سه چیز از چهار چیز لازم برای نوشتن معادلهٔ بیضی معلوم می شود. در این حالت می گوییم چون عرض تغییر کرده بیضی افقی است و در ضمن:

$$\begin{cases}O=\frac{B+B'}{2}\Rightarrow O(-1,1)\\ 2b=BB'=4\Rightarrow b=2\end{cases}\Rightarrow\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1\xrightarrow{M(-4,2)}\frac{9}{a^2}+\frac{1}{4}=1$$

$$\Rightarrow a^2=12\Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{12}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

---

📖 سؤال ۷۰: بیضی به کانون های $(1,-1),(1,1)$ و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$، خط $y=2x$ را با کدام طول قطع می کند؟

(تجربی خارج ۹۶)

۱) $-\frac{1}{2},1$   ۲) $-\frac{1}{4},1$   ۳) $-1,\frac{1}{2}$   ۴) $-\frac{1}{2},2$

☜ پاسخ: گزینه۱

چون طول کانون های بیضی برابر است پس بیضی قائم است.

$$O=(1,0)\quad,\quad 2c=2\Rightarrow c=1$$

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

$$\frac{y^2}{4}+\frac{(x-1)^2}{3}=1\xrightarrow{y=2x}\frac{4x^2}{4}+\frac{(x-1)^2}{3}=1\Rightarrow x^2+\frac{(x-1)^2}{3}=1$$

$$\Rightarrow 3x^2+(x-1)^2=3\Rightarrow 3x^2+x^2-2x+1=3\Rightarrow 4x^2-2x-2=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-x-1=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x=1\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

**سؤال ۷۱:** دو نقطهٔ $(۳,۰),(-۳,۰)$ دو سر کوتاهترین قطر یک بیضی با خروج از مرکز ۰/۵ هستند. معادلهٔ این بیضی کدام است؟

۱) $۲x^۲+۳y^۲=۱۸$    ۲) $۳x^۲+۲y^۲=۱۸$

۳) $۳x^۲+۴y^۲=۳۶$    ۴) $۳y^۲+۴x^۲=۳۶$

**پاسخ: گزینه۴**

رئوس ناکانونی بیضی دو سر کوتاهترین قطر بیضی هستند پس:

$$B(۳,۰),B'(-۳,۰)$$

چون پس بیضی قائم بوده و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$\text{مرکز بیضی}:\omega\left(\frac{x_B+x_{B'}}{۲},\frac{y_B+y_{B'}}{۲}\right)=\left(\frac{۳-۳}{۲},\frac{۰+۰}{۲}\right)=(۰,۰)$$

$$BB'=۲b\Rightarrow|۳-(-۳)|=۲b\Rightarrow b=۳$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{a^۲-۹}{a^۲}\Rightarrow۴a^۲-۳۶=a^۲\Rightarrow۳a^۲=۳۶\Rightarrow a^۲=۱۲$$

چون $y_B=y_{B'}$ پس بیضی قائم بوده و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$\frac{(y-y_\omega)^۲}{a^۲}+\frac{(x-x_\omega)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{y^۲}{۱۲}+\frac{x^۲}{۹}=۱\xrightarrow{\times۳۶}۳y^۲+۴x^۲=۳۶$$

---

**سؤال ۷۲:** مختصات دو سر بزرگترین قطر یک بیضی $(۲,۵),(۲,-۱)$ است. این بیضی از نقطهٔ $(۱,۳)$ نیز می گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۱۳}{۲}}$    ۲) $\sqrt{\frac{۷}{۸}}$    ۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$    ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$

**پاسخ: گزینه۲**

با توجه به اینکه $A(۲,۵),A'(۲,-۱)$ دو سر قطر بزرگ بیضی هستند بنابراین بیضی قائم است. بنابراین این بیضی نقطهٔ $O(۲,۲)$ است. از طرفی:

$$AA'=۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$\text{معادلهٔ بیضی قائم}:\frac{(y-y_o)^۲}{a^۲}+\frac{(x-x_o)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{(y-۲)^۲}{۹}+\frac{(x-۲)^۲}{b^۲}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{(۳-۲)^۲}{۹}+\frac{(۱-۲)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{۱}{b^۲}=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow b^۲=\frac{۹}{۸}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{\frac{۹}{۸}}{۹}}=\sqrt{\frac{۷}{۸}}$$

سؤال ۷۳: به ازای کدام مقدار $k$ شکل ظاهری بیضی به معادلهٔ $4x^2 + ky^2 = 48$ به دایره نزدیکتر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۴

روش اول) هر چه قدر ضریب $x^2$، $y^2$ به هم نزدیک تر باشند به دایره نزدیک تر است. پس گزینه (۴) درست است.

روش دوم) می دانیم که در هر بیضی خروج از مرکز عددی بین صفر و یک است. هرچقدر خروج از مرکز به یک نزدیکتر شود بیضی کشیده تر و هرچقدر خروج از مرکز به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره شبیه تر می شود. از طرفی اگر معادلهٔ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ $(A, B > 0)$ یک بیضی را مشخص کند آنگاه خروج از مرکز بیضی از رابطهٔ زیر محاسبه می شود:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\min\{A, B\}}{\max\{A, B\}}}$$

گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$1)\ e = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad 2)\ e = \sqrt{1 - \frac{4}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3)\ e = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 4)\ e = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

ملاحظه می شود که کمترین مقدار برای خروج از مرکز در گزینه «۴» به دست می آید.

---

## تشکیل معادلهٔ بیضی از روی دایره :

اگر عرض نقاط واقع بر دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ را به نسبت $k$ تقسیم کنیم، شکل حاصل یک بیضی به معادلهٔ $x^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = R^2$ خواهد شد.

---

سؤال ۷۴: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که عرض نقطه های واقع بر دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 = 16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کند کدام است؟

۱) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ۲) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$ ۳) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ۴) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

پاسخ: گزینه۱

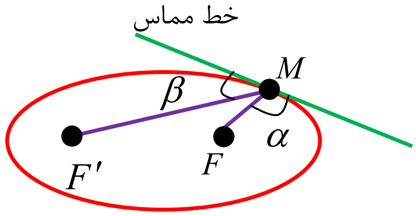
$$x^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = 16 \xrightarrow{k = \frac{3}{4}} x^2 + \left(\frac{y}{\frac{3}{4}}\right)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{4y}{3}\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{16y^2}{9} = 16 \xrightarrow{\div 16} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

### ویژگی بازتابندگی بیضی :

۱) اگر پرتویی از یکی از کانون ها به بیضی بتابد پرتو بازتاب آن از کانون دیگر عبور می کند.

۲) اگر در نقطهٔ $M$ روی بیضی مماسی رسم کنیم و سپس از $M$ به دو کانون وصل کنیم آنگاه زوایای $\beta,\alpha$ با هم مساوی خواهند بود $(\alpha,\beta)$.




---

**سؤال ۷۵:** اگر یک شعاع نورانی از نقطهٔ $(۴,-۱)$ بر بیضی $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$ بتابد پرتو بازتاب الزاماً از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

۱) $(-۳,-۱)$  ۲) $(-۵,-۱)$  ۳) $(-۴,-۱)$  ۴) $(-۲,-۱)$

پاسخ: گزینه۳

*صحبت از شعاع نورانی شد احتمالاً نقطهٔ داده شده باید کانون بیضی باشد که اگر حدسمان درست باشد پرتو بازتاب طبق ویژگی بیان شده حتماً از کانون دیگر بیضی خواهد گذشت. پس مختصات کانون ها را می یابیم:*

$$\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱\Rightarrow\begin{cases}O(۰,-۱)\\ a^۲=۲۵\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲=۲۵=۹+c^۲\Rightarrow c^۲=۱۶\Rightarrow c=۴\\ b^۲=۹\end{cases}$$

*بیضی افقی بوده و لذا کانون های بیضی به اندازهٔ $c$ واحد جلوتر و عقب تر از مرکزند:*

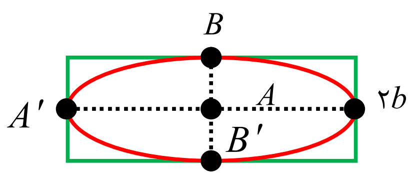
$$F' \xrightarrow[O(۰,۱)]{\text{۴ واحد عقب} \qquad \text{۴ واحد جلو}} F \Rightarrow F(۴,-۱),F'(-۴,-۱)$$

*پس درست حدس زدیم شعاع نورانی از یکی از کانون ها یعنی $(۴,-۱)$ به بیضی تابیده شده بود و در نتیجه پرتو بازتاب از کانون دیگر یعنی $(-۴,-۱)$ می گذرد.*

---

### معادلهٔ خطوط مماس و قائم بر بیضی :

خطوط مماس بر رئوس بیضی، خطوطی افقی یا عمودی بوده که شکل حاصل از برخورد آنها یک مستطیل به ابعاد $۲a$ و $۲b$ می باشد. پس برای یافتن مساحت یا محیط مستطیل حاصل از برخورد خطوط مماس بر رأس بیضی باید $b,a$ را بیابیم.

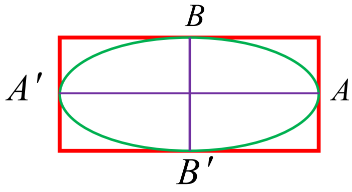


**سؤال ۷۵**: مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی $x^{2}+4y^{2}-4x=4$ در هر رأس کانونی و غیرکانونی آن کدام است؟ (سراسری تجربی۹۰)

۱) ۸    ۲) ۱۲    ۳) ۱۶    ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه۳

خطوط مماس بر بیضی در رأس های آن مطابق شکل تشکیل یک مستطیل به ابعاد $2a$ و $2b$ می دهند که مساحت آن برابر $4ab$ می باشد.




$$x^{2}+4y^{2}-4x=4$$
$$\Rightarrow (x-2)^{2}+4y^{2}=8$$
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^{2}}{8}+\frac{y^{2}}{2}=1$$

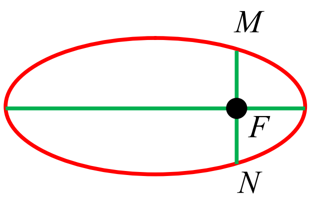
بنابراین $a^{2}=8\,,\,b^{2}=2$ و در نتیجه $a^{2}b^{2}=16$ و نهایتاً: $S=4ab=4\times4=16$

---

**وتر کانون بیضی :**

وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر محور کانونی عمود است، وتر کانونی بیضی نامیده می شود و طول آن از فرمول زیر به دست می آید:

$$\boxed{MN=2b\sqrt{1-e^{2}}} \quad \text{یا} \quad \boxed{MN=\frac{2b^{2}}{a}}$$




---

**سؤال ۷۶**: در بیضی به معادلهٔ $16y^{2}+5x^{2}-10x=75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی بیضی را در $M\,,\,N$ قطع می کند. اندازهٔ $MN$ کدام است؟ (داخل تجربی ۹۶)

۱) ۲    ۲) ۲/۵    ۳) ۳    ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه۲

$$\begin{cases}10x-10=0\Rightarrow x=1\\ 32y=0\Rightarrow y=0\end{cases}\Rightarrow 5(x-1)^{2}+16y^{2}=75+5\xrightarrow{\div 80}$$

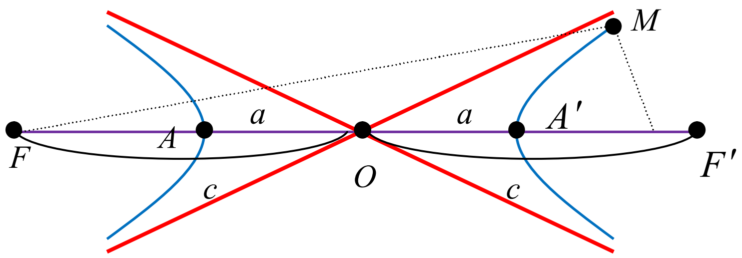
$$\frac{(x-1)^{2}}{16}+\frac{y^{2}}{5}=1\Rightarrow\begin{cases}a^{2}=16\Rightarrow a=4\\ b^{2}=5\Rightarrow b=\sqrt{5}\end{cases}\xrightarrow{\text{وتر کانونی}}\frac{2b^{2}}{a}=\frac{2(\sqrt{5})^{2}}{4}=\frac{10}{4}=2/5$$

# هذلولی

## هذلولی :

مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصله های آن ها از دو نقطهٔ ثابت به نام کانون ها مقدار ثابتی است این مقدار ثابت $2a$ قطر هذلولی است و آن دو نقطهٔ ثابت کانون های هذلولی می باشند.

هذلولی فقط دو رأس دارد که $A$ و $A'$ هستند و اندازهٔ $AA'$ قطر هذلولی است.




$$|MF - MF'| = 2a$$

## معادلهٔ استاندارد هذلولی :

### ۱ـ هذلولی افقی :

معادلهٔ هذلولی افقی به مرکز $O(\alpha,\beta)$ به صورت مقابل است: $\boxed{\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$

### هذلولی قائم :

معادلهٔ هذلولی افقی به مرکز $O(\alpha,\beta)$ به صورت مقابل است: $\boxed{\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} - \dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1}$

**توجه :** فرق هذلولی افقی با قائم در این است که در هذلولی افقی پرانتز شامل $x$ اول می آید و در قائم پرانتز شامل $y$ در ضمن همیشه عدد زیر کسر اول و $a^2$ عدد زیر کسر دوم است و مثل بیضی عدد بزرگتر الزاماً $b^2$ نیست.

**رابطهٔ طلایی :** در هذلولی رابطهٔ بین $a$ , $b$ , $c$ به شکل مقابل است: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ یا $\boxed{c^2 = \text{مجموع مخرج ها}}$

در هذلولی $c > a$ ,$c > b$ و اما در مورد مقایسهٔ $a$ , $b$ چیزی نمی توان گفت.

**نکته:** کمترین فاصلهٔ نقاط دو شاخهٔ هذلولی برابر $2a$ است که همان قطر هذلولی می باشد.

**خروج از مرکز :** در هذلولی نیز خروج از مرکز از رابطهٔ $e = \dfrac{c}{a}$ بدست می آید.

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}$$

سؤال ۷۷: دو نقطهٔ $M$ , $N$ هر کدام بر روی یکی از دو شاخهٔ هذلولی به معادلهٔ $4y^2-9x^2+18x+16=0$ حرکت می کند. کمترین فاصلهٔ $MN$ کدام است؟ (داخل ۸۲)

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه۱

کمترین فاصلهٔ $MN$ همان قطر هذلولی است. بنابراین هذلولی را استاندارد می کنیم تا $a$ معلوم شود. در ضمن روش استاندارد کردن هذلولی گسترده هم مثل بیضی است:

$$\begin{cases}-18x+18=0\Rightarrow x=1\\ 8y=0\Rightarrow y=0\end{cases}$$

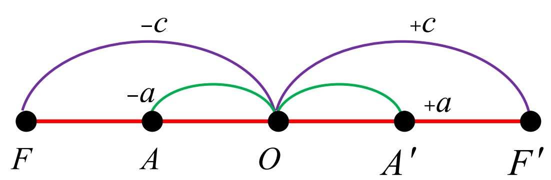
$$O(1,0)\Rightarrow 4(y-0)^2-9(x-1)^2=-16+0-9\xrightarrow{\div(-25)}\frac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}}-\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{25}{9}\Rightarrow a=\frac{5}{3}\Rightarrow 2a=\frac{10}{3}$$

---

## پیدا کردن مختصات رأس ها و کانون ها :

روش پیدا کردن مختصات رأس ها و اکنون ها در بیضی و هذلولی یکسان است. اگر هذلولی افقی باشد طول نقاط نسبت به مرکز تغییر می کند و اگر قائم باشد عرض آنها. در $A$ و $A'$ طول یا عرض $\pm a$ و در کانون طول یا عرض $\pm c$ می شود.




---

سؤال ۷۸: در هذلولی به معادلهٔ $4y^2-5x^2+8y+20x+4=0$ مختصات یکی از کانون ها کدام است؟

۱) $(-2,-1)$ ۲) $(-1,-1)$ ۳) $(2,-1)$ ۴) $(2,2)$

پاسخ: گزینه۲

هذلولی را استاندارد می کنیم تا $c$ به دست آید:

$$\begin{cases}-10x+20=0\Rightarrow x=2\\ 8y+8=0\Rightarrow y=-1\end{cases}$$

$$O(2,-1)\Rightarrow 4(y+1)^2-5(x-2)^2=-4+4-20\xrightarrow{\div(-20)}\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=3\Rightarrow F,F'(2\pm 3,-1)\to\begin{cases}F(5,-1)\\ F'(-1,-1)\end{cases}$$

📖 سؤال ۷۹: در هذلولی به معادلهٔ $۴y^۲-۵x^۲+۸y+۲۰x=-۴$ مختصات یکی از کانون ها کدام است؟ (تجربی خارج ۸۵)

۱) $(-۲,-۱)$ ۲) $(-۱,-۱)$ ۳) $(۲,-۱)$ ۴) $(۲,۲)$

پاسخ: گزینه۲

$$\begin{cases}-۱۰x+۲۰=۰\Rightarrow x=۲\\ ۸y+۸=۰\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

$$O(۲,-۱)\Rightarrow ۴(y+۱)^۲-۵(x-۲)^۲=-۴+۴-۲۰\xrightarrow{\div(-۲۰)}\frac{(x-۲)^۲}{۴}-\frac{(y+۱)^۲}{۵}=۱$$

$$\Rightarrow a^۲=۴,b^۲=۵\Rightarrow c^۲=۹\Rightarrow c=۳$$

$$O(۲,-۱)\Rightarrow F,F'(۲\pm۳,-۱)\Rightarrow\begin{cases}F(۵,-۱)\\ F'(-۱,-۱)\end{cases}$$

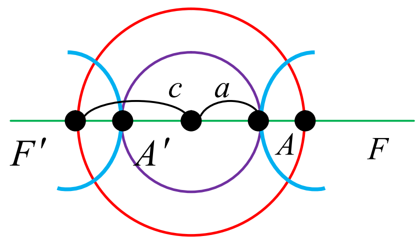
---

📖 سؤال ۸۰: مساحت بین دو دایره یکی به قطر فاصلهٔ دو رأس و دیگری به قطر فاصلهٔ دو کانون هذلولی به معادلهٔ $۹x^۲-۴y^۲-۱۸x-۸y=۳۱$ کدام است؟ (خارج ۹۱)

۱) $۴\pi$ ۲) $۵\pi$ ۳) $۶\pi$ ۴) $۹\pi$

پاسخ: گزینه۴

مساحت بین دو دایره $\pi c^۲-\pi a^۲$ است بنابراین باید هذلولی را استاندارد کرده و $c,a$ را پیدا کنیم:




$$\begin{cases}۱۸x-۱۸=۰\Rightarrow x=۱\\ -۸y-۸=۰\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

$$O(۱,-۱)\Rightarrow ۹(x-۱)^۲-۴(y+۱)^۲=۳۱+۹-۴$$

$$\xrightarrow{\div۳۶}\frac{(x-۱)^۲}{۴}-\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$$

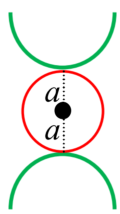
$$\pi c^۲-\pi a^۲=\pi(c^۲-a^۲)=\pi\underbrace{(c^۲-a^۲)}_{b^۲}=\pi(۹)=۹\pi$$

---

📖 سؤال ۸۱: رأس های هذلولی $۲x^۲-y^۲-۴x+۲y=-۶$ دو سر قطری از یک دایره اند. این دایره خط $x+y=۵$ را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۱




$$\begin{cases}۴x-۴=۰\Rightarrow x=۱\\ -۲y+۲=۰\Rightarrow y=۱\end{cases}$$

$$O(۱,۱)=۲(x-۱)^۲-(y-۱)^۲=-۶+۲-۱$$

$$\xrightarrow{\div(-۵)}\frac{(y-۱)^۲}{۵}-\frac{(x-۱)^۲}{\frac{۵}{۲}}=۱$$

حال مرکز دایره همان مرکز هذلولی و شعاع آن $a$ ی هذلولی است:

$$\begin{cases} R=\sqrt{5} \\ O(1,1) \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=5 \xrightarrow{x+y=5} (x-1)^2+(4-x)^2=5 \Rightarrow x=2$$

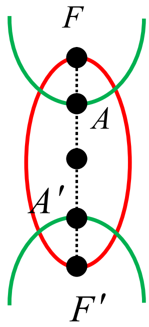
**سؤال ۸۲: هذلولی به معادلهٔ $5y^2-4x^2-20y=0$ مفروض است. معادلهٔ یک بیضی که کانون های آن منطبق بر رأس های هذلولی و رأس های آن در کانون های این هذلولی باشد کدام است؟ (تجربی ۹۴)**

۱) $5y^2+9x^2-20y=25$   ۲) $5y^2+9x^2-10y=36$

۳) $4y^2+5x^2-16y=4$   ۴) $9y^2+5x^2-36y=9$

پاسخ: گزینه۱

با توجه به شکل مقابل فاصلهٔ کانون بیضی برابر $2a$ هذلولی و قطر بزرگ آن برابر $2c$ هذلولی است بنابراین $2a$ و $2c$ را در هذلولی پیدا می کنیم:




$$\begin{cases} -8x=0 \Rightarrow x=0 \\ 10y-20=0 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$$5y^2-4x^2-20y=0 \Rightarrow \overset{\text{هذلولی}}{O}(0,2) \Rightarrow 5(y-2)^2-4x^2=20$$

$$\xrightarrow{\div 20} \frac{(y-2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1 \Rightarrow \begin{cases} \overset{\text{هذلولی}}{a}=2 \\ c=\sqrt{5+4}=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

با توجه به شکل مرکز بیضی و هذلولی یکسان است و معادلهٔ آن عبارت است از:

$$\frac{(x-0)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1 \xrightarrow{\times 45} 9x^2+5(y^2-4y+4)=45 \Rightarrow 9x^2+5y^2-20y=25$$

**سؤال ۸۳: رأس های کانونی بیضی $9x^2+4y^2-18x=27$ کانون های یک هذلولی هستند. اگر فاصلهٔ یک کانون هذلولی تا نزدیکترین رأس آن ۱ باشد فاصلهٔ یک کانون تا دورترین رأس چقدر است؟**

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

پاسخ: گزینه۳

$$\begin{cases} 18x-18=0 \Rightarrow x=1 \\ 8y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

$$O(1,0) \Rightarrow 9(x-1)^2+4y^2=27+9 \xrightarrow{\div 36} \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

بنابراین $a_{\text{بیضی}}=3$ است یعنی $c_{\text{هذلولی}}=3$ خواهد بود همچنین فاصلهٔ یک کانون از نزدیکترین رأس هذلولی $c-a=1$ است

بنابراین $a_{\text{هذلولی}}=2$ خواهد بود و در نتیجه فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس برابر است با: $c+a=5$

**سؤال ۸۴:** نقطهٔ $A'(0,0), A(2,0)$ دو رأس و $F(1+\sqrt{5},0)$ یکی از کانون های هذلولی است. معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $y^2=4(x^2-2x)$ ۲) $x^2=2(x^2-2x)$

۳) $x^2=4(y^2-2y)$ ۴) $x^2=2(y^2-2y)$

پاسخ: گزینه۱

هذلولی افقی است چون طول $A', A$ تغییر کرده است:

$$\begin{cases} O=\dfrac{A+A'}{2}\Rightarrow O(1,0) \\ 2a=|AA'|=2\Rightarrow a=1 \\ |OF|=c=\sqrt{5}\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow 4(x^2-2x+1)-y^2=4$$

$$\Rightarrow y^2=4(x^2-2x)$$

---

**سؤال ۸۵:** به ازای کدام مقدار $k$ خروج از مرکز هذلولی به معادلهٔ $kx^2-2y^2+4y=4$ برابر $\sqrt{3}$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (سراسری تجربی ۹۵)

پاسخ: گزینه۴

ابتدا معادله داده شده را استاندارد می کنیم:

$$kx^2-2y^2+4y=4\Rightarrow kx^2-2(y^2-2y)=4\Rightarrow kx^2-2(y^2-2y+1-1)=4$$

$$\Rightarrow kx^2-2((y-1)^2-1)=4\Rightarrow kx^2-2(y-1)^2=2\xrightarrow{\div 2}\frac{kx^2}{2}-(y-1)^2=1$$

می دانیم در معادلهٔ استاندارد پشت $x^2, y^2$ نباید عددی باشد پس معادله را به فرم $\dfrac{x^2}{\frac{2}{k}}-(y-1)^2=1$ می نویسیم که در این صورت $b^2=1, a^2=\dfrac{2}{k}$ می شود از طرفی خروج از مرکز $\sqrt{3}$ است بنابراین:

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{\frac{2}{k}}}=\sqrt{3}\Rightarrow 1+\frac{k}{2}=3\Rightarrow\frac{k}{2}=2\Rightarrow k=4$$

---

**سؤال ۸۶:** در یک هذلولی به مرکز $O(1,2)$ نقطهٔ $A(1,3)$ رأس و $F(1,4)$ کانون است. دایره ای بر هر دو کانون هذلولی گذشته و مرکز آن روی نیمساز ناحیهٔ اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه۴

$$O=\frac{F+F'}{2}\Rightarrow F'=2O-F=(2,4)-(1,4)\Rightarrow F'(1,0)$$

حال مرکز دایره ای که مرکز آن روی نیمساز ناحیهٔ اول است به صورت $O'(\alpha,\alpha)$ است که باید فاصلهٔ آن از $F$ و $F'$ برابر باشد:

$$O'F = O'F' \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+\alpha^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2+(\alpha-4)^2} \Rightarrow \alpha^2 = (\alpha-4)^2$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow R = O'F = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

---

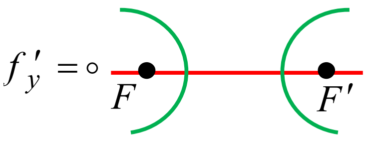
### تشخیص هذلولی :

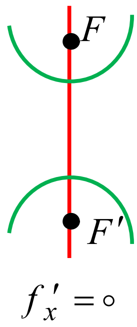
شرط این که رابطهٔ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ هذلولی باشد آن است که $AB<0$ باشد یعنی ضریب $x^2, y^2$ ناهم علامت باشند.

---

### تشخیص هذلولی افقی از قائم :

در هذلولی افقی محور تقارن افقی (ریشهٔ $f'_y=0$) و در هذلولی قائم محور تقارن قائم (ریشهٔ $f'_x=0$) هذلولی را قطع می کند.




---

📖 سؤال ۸۷: **هر دو کانون هذلولی به معادلهٔ $ax^2+4x+y^2-2y=0$ بر روی خطی موازی $x$ ها است. مجموعهٔ مقادیر $a$ کدام است؟**

۱) $-8<a<-4$    ۲) $-4<a<0$    ۳) $-2<a<0$    ۴) $0<a<8$

☜ پاسخ: گزینه۲

اولاً برای هذلولی بودن باید $(a)(1)<0$ باشد.

ثانیاً چون گفته شده هذلولی افقی است بنابراین محور تقارن افقی باید هذلولی را قطع کند:

$$f'_y=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow ax^2+4x-1=0 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow 16+4a>0 \Rightarrow a>-4$$

---

📖 سؤال ۸۸: **هر یک از دو شاخهٔ هذلولی به معادلهٔ $x^2+ax-4y^2+4=0$ محور $y$ ها را در یک نقطه قطع می کند. مجموعهٔ مقادیر $a$ به کدام صورت است؟**

۱) $|a|<2$    ۲) $|a|>2$    ۳) $|a|<4$    ۴) $|a|>4$

☜ پاسخ: گزینه۳

هر یک از شاخه ها محور $y$ ها را در یک نقطه قطع می کند یعنی هذلولی قائم است. شرط هذلولی بودن خود به خود برقرار است ولی شرط قائم بودن این است که محور تقارن قائم هذلولی را قطع کند یا محور تقارن افقی را قطع نکند (پیدا کردن محور تقارن افقی در این جا راحت تر است.)

$$f'_y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+ax+4=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow a^2-16<0 \Rightarrow |a|<4$$

**سؤال ۸۹:** نمایش هندسی $(a+2)x^2+(a-2)y^2=-2$ به ازای کدام مقادیر $a$ یک هذلولی است؟

۱) $0<a<2$  ۲) $-2<a<0$  ۳) $-2<a<2$  ۴) $a>2$

پاسخ: گزینه۳

باید $(a+2)(a-2)<0$ باشد پس: $(a+2)(a-2)<0 \Rightarrow -2<a<2$

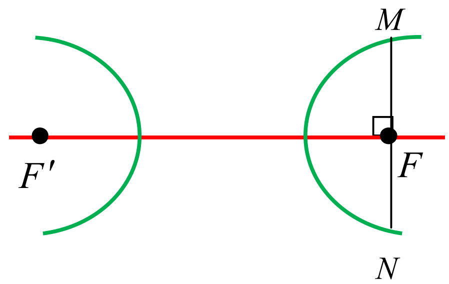
از طرفی مرکز تقارن آن یعنی $(0,0)$ در معادله صدق نمی کند.

---

## وتر کانونی هذلولی :

وتر گذرنده از کانون هذلولی و عمود بر محور کانونی آن را وتر کانونی هذلولی می نامند و طول آن را از فرمول زیر به دست می آورند:

$$\boxed{MN=2b\sqrt{e^2-1}} \quad \text{یا} \quad \boxed{MN=\frac{2b^2}{a}}$$




---

**سؤال ۹۰:** در هذلولی به معادلهٔ $2x^2-4y^2-6x-9=0$ طول وتری از آن گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

۱) ۱  ۲) $\sqrt{7}$  ۳) ۳  ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه۳

طول وتر کانونی برابر $MN=\frac{2b^2}{a}$ است معادله را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$3(x^2-2x)-4y^2-9=0 \Rightarrow 3(x-1)^2-4y^2=12$$

$$\xrightarrow{\div 12} \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=3 \Rightarrow MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{6}{2}=3$$

---

## مجانب های هذلولی :

هر هذلولی دارای دو مجانب است که از مرکز هذلولی می گذرد و به رو شهای زیر می توان معادله آنها را از روی معادلهٔ هذلولی به دست آورد:

### ۱ـ وقتی معادلهٔ هذلولی استاندارد باشد :

در این حالت کافی است از تک تک کسرها جذب بگیرید و بین آنها $\pm$بگذارید و برابر صفر قرار دهید:

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b}=0}$$

**نتیجه:**

۱) شیب دو مجانب هذلولی (چه افقی و چه قائم) همواره قرینهٔ هم است. یعنی اگر شیب یک مجانب ۲ باشد شیب مجانب دیگر ۲- است.

۲) شیب مجانب های هذلولی افقی $\pm\frac{b}{a}$ و شیب مجانب های هذلولی قائم $\pm\frac{a}{b}$ است.

❖**مثال: معادلهٔ مجانب های هذلولی $\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$ را بنویسید.**

$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{y-1}{2}\pm\frac{x+1}{3}=0 \Rightarrow \begin{cases} 3(y-1)+2(x+1)=0 \Rightarrow 3y+2x=1 \\ 3(y-1)-2(x+1)=0 \Rightarrow 3y-2x=5 \end{cases}$$

**۲ـ وقتی معادلهٔ هذلولی گسترده باشد :**

در این حالت مرکز هذلولی را با مشتق گیری پیدا کرده و شیب مجانب ها را با حذف جمله های ضعیف (غیر درجهٔ۲) به دست می آوریم و معادلهٔ خطوط گذرا از مرکز و با شیب پیدا شده را می نویسیم.

❖**مثال: معادلهٔ مجانب های هذلولی $4x^2-9y^2-8x+6y+5=0$ را بنویسید.**

به کمک مشتق گیری $O\left(1,\frac{1}{3}\right)$ به دست می آید. حال کافی است شیب مجانب ها را پیدا کنیم:

$$4x^2-9y^2-8x+6y+5=0 \Rightarrow 4x^2-9y^2=0 \Rightarrow y^2=\frac{4}{9}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{2}{3}x \Rightarrow m=\pm\frac{2}{3}$$

معادلهٔ مجانب ها عبارتند از:

$$\begin{cases} y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \\ y-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+1 \end{cases}$$

---

**سؤال ۹۱: یک هذلولی افقی معادلهٔ مجانب ها به صورت $y=-2x\,,y=2x-4$ می باشند خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟**

۱) $\frac{3}{2}$    ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$    ۳) $\sqrt{3}$    ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه۴

در هذلولی افقی شیب مجانب ها به صورت $\pm\frac{b}{a}$ است اگر به معادلات مجانب که به صورت $y=-2x\,,y=2x-4$ هستند توجه کنید نتیجه می گیریم که $\pm\frac{b}{a}=\pm2$ است از طرفی با توجه به فرمول خروج از مرکز داریم:

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\xrightarrow{\frac{b}{a}=2}\sqrt{1+(2)^2}=\sqrt{5}$$

سؤال ۹۲: در هذلولی به کانون های $F'(1-\sqrt{5},-2),F(1+\sqrt{5},-2)$ فاصلهٔ دو رأس آن برابر ۲ واحد است معادلهٔ مجانب آن با شیب منفی کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) $2y+x=0$ ۲) $y+2x=0$ ۳) $y+2x=1$ ۴) $2y+x=-3$

پاسخ: گزینه۲

هذلولی افقی است چون طول کانون ها تغییر کرده است بنابراین شیب مجانب ها $\pm\frac{b}{a}$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}2c=FF'=2\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}\\ 2a=AA'=2\Rightarrow a=1\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5-1}=2\Rightarrow m=\pm\frac{b}{a}=\pm2$$

$$O=\frac{F+F'}{2}\Rightarrow O(1,-2)\Rightarrow \text{مجانب}\ y+2=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x\Rightarrow y+2x=0$$

---

سؤال ۹۳: مجانب های هذلولی به معادلهٔ $\frac{1}{4}x^2-y^2+ax+by=1$ در نقطهٔ $(-2,1)$ متقاطع اند. عرض از مبدأ خط مجانب آن با شیب مثبت کدام است؟ (داخل ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: گزینه۲

شیب مجانب های هذلولی با حذف جمله های ضعیف به دست می آید:

$$\frac{1}{4}x^2-y^2=0\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}x\Rightarrow y-1=+\frac{1}{2}(x+2)\xrightarrow{x=0}y-1=\frac{1}{2}(0+2)\Rightarrow y=2$$

---

سؤال ۹۴: خط به معادلهٔ $y+2x=4$ یکی از مجانب های هذلولی به کانون $F(3,2)$ است که محور کانونی آن موازی محور $x$ ها است. معادلهٔ خط مجانب دیگر هذلولی کدام است؟ (تجربی داخل ۷۹)

۱) $y=2x$ ۲) $y=2x-2$ ۳) $y=2x-4$ ۴) $2y=x+3$

پاسخ: گزینه۱

چون محور کانونی هذلولی موازی محور $x$ ها است پس هذلولی افقی می باشد. حال خط افقی گذرا از $F$ یعنی $y=2$ را با مجانب قطع می دهیم تا مرکز تقارن پیدا شود:

$$\begin{cases}y=2\\ y+2x=4\end{cases}\Rightarrow O(1,2)$$

از طرف دیگر گفتیم که شیب دو مجانب هذلولی قرینهٔ هم هستند پس شیب مجانب دیگر ۲+ است که از مرکز $O(1,2)$ نیز می گذرد پس معادلهٔ مجانب دیگر به صورت زیر است:

$$y-2=+2(x-1)\Rightarrow y=2x$$

سؤال ۹۵: به ازای کدام مقدار $k$ در هذلولی به معادلهٔ $3x^2-y^2+4y+k=5$ فاصلهٔ یکی از کانون ها از نقطهٔ تلاقی مجانب ها برابر ۲ است؟ (داخل دهه ۷۰)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۱

نقطهٔ تلاقی مجانب ها یعنی مرکز هذلولی و فاصلهٔ کانون از مرکز برابر است با $c$ بنابراین باید $c=2$ باشد ابتدا هذلولی را استاندارد می کنیم:

$$\begin{cases} 6x=0\Rightarrow x=0 \\ -2y+4=0\Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$$O(0,2)\Rightarrow 3x^2-(y-2)^2=5-k-4\xrightarrow{\div(1-k)}\frac{x^2}{\frac{1-k}{3}}-\frac{(y-2)^2}{1-k}=1$$

$$\xrightarrow[c=2]{a^2+b^2=c^2}\frac{1-k}{3}+1-k=2^2\Rightarrow\frac{4-4k}{3}=4\Rightarrow 4k=-8\Rightarrow k=-2$$

---

سؤال ۹۶: در یک هذلولی معادلهٔ محور کانونی $x=-3$ و معادلهٔ یکی از مجانب ها $y=\frac{4}{3}x+2$ است. خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه۴

چون محور کانونی روی خط $x=-3$ قرار دارد (موازی محور $y$ ها ست) پس هذلولی قائم است می دانیم که در هذلولی قائم شیب مجانب های $\pm\frac{a}{b}$ است. پس:

$$y=\frac{4}{3}x+2\Rightarrow \text{شیب خط}: m=\frac{4}{3}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} e=\frac{c}{a} \\ c=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$$

---

سؤال ۹۷: دو خط به معادلات $y=-x+3, y=x+1$ مجانب های یک هذلولی و $(1,5)$ یکی از نقاط آن می باشد. فاصلهٔ دو کانون این هذلولی کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه۲

مرکز هذلولی با حل دستگاه $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-x+3 \end{cases}$ به دست می آید:

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=-x+3 \end{cases} \Rightarrow x+1=-x+3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{y=x+1} y=2 \Rightarrow O'(1,2)$$

خطوط $x=\alpha, y=\beta=2$ محورهای تقارن هذلولی می باشند و نقطهٔ $(1,5)$ روی خط $x=1$ قرار دارد بنابراین نقطه $(1,5)$ یکی از رأس های هذلولی است و داریم:

$$O'(1,2), A(1,5) \Rightarrow a=O'A=3$$

از طرفی شیب مجانب ها مایل هذلولی قائم برابر $\pm\frac{a}{b}$است:

$$\pm\frac{a}{b}=\pm1 \Rightarrow a=b=3 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=18 \Rightarrow c=3\sqrt{2}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کانون هذلولی برابر $2c=6\sqrt{2}$ است.

---

📖 **سؤال ۹۸: در یک هذلولی قائم معادلهٔ یکی از مجانب ها $y-2x+3=0$ و مختصات یکی از کانون های آن $(-1,4)$ است. فاصلهٔ کانونی هذلولی کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۸

☜ پاسخ: گزینه۴

در هذلولی قائم خط $x=\alpha$ محور کانونی هذلولی است از طرفی $F(-1,4)$ یکی از کانون های هذلولی است، بنابراین خط $x=-1$ محور کانونی هذلولی می باشد:

$$\begin{cases} y-2x+3=0 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow y=-5 \Rightarrow O'(-1,-5), F(-1,4) \Rightarrow c=O'F=9$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی هذلولی برابر $2c=18$ است.

---

📖 **سؤال ۹۹: در یک هذلولی افقی معادلهٔ مجانب ها به صورت $y=2x-4\,, y=-2x$ می باشند خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۵)**

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{5}$

☜ پاسخ: گزینه۴

شیب مجانب های مایل در هذلولی افقی برابر $\pm\frac{b}{a}$است بنابراین:

$$\pm\frac{b}{a}=\pm2 \Rightarrow \frac{b}{a}=2 \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

**سؤال ۱۰۰:** دو خط به معادلات $y=2x-1$, $y=-2x+7$ مجانب های یک هذلولی هستند. اگر این هذلولی از نقطهٔ $(4,3)$ بگذرد، فاصلهٔ دو کانون آن کدام است؟ (سراسری خارج۹۵)

۱) $2\sqrt{3}$    ۲) $2\sqrt{5}$    ۳) $4\sqrt{3}$    ۴) $4\sqrt{5}$

☜ پاسخ: گزینه۴

ابتدا دو مجانب را تقاطع می دهیم تا مرکز هذلولی مشخص شود:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-2x+7 \end{cases} \Rightarrow 2x-1=-2x+7 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=3$$

پس $O(2,3)$مرکز هذلولی می باشد. از آنجایی که نقطه‌ی $(4,3)$ روی هذلولی قرار دارد و هم چنین عرض آن با عرض مرکز هذلولی برابر است پس این نقطه حتماً باید رأس کانونی هذلولی باشد و هذلولی فوق یک هذلولی افقی است.

$$a=4-2=2$$

هذلولی افقی: شیب خط مجانب $\pm\frac{b}{a}$ است پس:

$$\pm\frac{b}{a}=\pm 2 \Rightarrow \frac{b}{a}=2 \Rightarrow \frac{b}{2}=2 \Rightarrow b=4 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=2^2+4^2=20$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

فاصله‌ی دو کانون: $2c=4\sqrt{5}$

---

**سؤال ۱۰۱:** دو خط به معادلات $2y-x+1=0$, $2y+x-1=0$ مجانب های یک هذلولی گذرا بر نقطهٔ $(3,0)$ هستند معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $4x^2-y^2-8x=0$    ۲) $y^2-4x^2+8y=8$

۳) $x^2-4y^2-2x=3$    ۴) $4y^2-x^2+2x=5$

☜ پاسخ: گزینه۳

ابتدا دو مجانب را تقاطع می دهیم تا مرکز هذلولی بدست آید:

$$\begin{cases} 2y-x+1=0 \\ 2y+x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

پس $O(1,0)$ مرکز هذلولی می باشد.

از آنجایی که نقطهٔ $(3,0)$ روی هذلولی قرار دارد و هم چنین عرض آن با عرض مرکز هذلولی برابر است پس این نقطه حتماً باید عرض آن با عرض مرکز هذلولی برابر است پس این نقطه حتماً باید رأس کانونی هذلولی باشد و هذلولی فوق یک هذلولی افقی است.    $a=3-1=2$

هذلولی افقی: شیب خط مجانب است $\pm\frac{b}{a}$ پس: $\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow b=1$

معادلهٔ هذلولی:

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1 \xrightarrow{\times 4} (x-1)^2-4y^2=4 \Rightarrow x^2-2x+1-4y^2=4 \Rightarrow x^2-4y^2-2x=3$$

**نکته:** در هر هذلولی همواره فاصلهٔ کانون ها از خطوط مجانب برابر است با : $b$

مثلاً $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=۰ \Rightarrow bx \pm ay=۰ \xrightarrow{F(\pm c,۰)} FH=\left|\frac{b(\pm c)\pm ۰}{\sqrt{b^۲+a^۲}}\right|=\frac{bc}{c}=b$

---

سؤال ۱۰۲: در هذلولی به معادلهٔ $۸x^۲-y^۲+۴y=۱۲$ فاصلهٔ یک کانون از خط مجانب آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳ (سراسری داخل۹۵)

پاسخ: گزینه۳

فاصلهٔ کانون از خط مجانب هذلولی برابر $b$ می باشد پس:

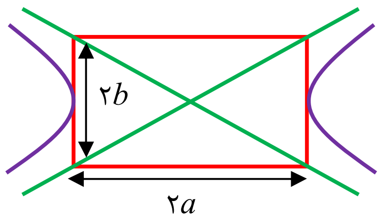
$$\begin{cases} ۱۶x=۰ \Rightarrow x=۰ \\ -۲y+۴=۰ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

$$O(۰,۲) \Rightarrow ۸(x-۰)^۲-(y-۲)^۲=۱۲-۴ \Rightarrow \frac{(x-۰)^۲}{۱}-\frac{(y-۲)^۲}{۸}=۱ \Rightarrow b=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

---

## رسم هذلولی :

برای رسم هذلولی افقی مرکز را مشخص می کنیم، سپس یک مستطیل به ابعاد $۲a$ و $۲b$ طوری رسم می کنیم که $O$ مرکز مستطیل باشد. قطرهای این مستطیل مجانب های هذلولی هستند و هذلولی در وسط اضلاع بر مستطیل مماس می شود. در این حالت $۲a$ در امتداد افق و $۲b$ در امتداد قائم رسم می شود ولی اگر هذلولی قائم باشد $۲a$ را عمودی و $۲b$ را افقی رسم می کنیم.




مهم: **هذلولی همواره بر ضلع $۲b$ مستطیل مماس می شود. طول قطر مستطیل $۲c$ است یعنی اگر به مرکز هذلولی و شعاع $c$ یک دایره رسم کنیم این دایره از رأس های مستطیل می گذرد. در واقع بر مستطیل درون دایره محاط می شود.**

---

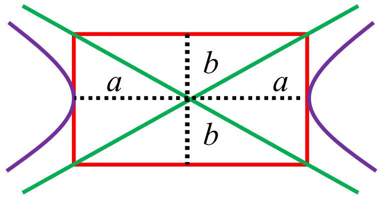
سؤال ۱۰۳: مساحت مستطیلی که قطرهای آن مجانب های هذلولی $۴x^۲-y^۲+۴y=۸$ بوده و ضلع آن بر هذلولی مماس باشد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه۴

همانطور که در شکل ملاحظه می کنید این مستطیل همان جعبهٔ رسم هذلولی است که مساحت آن برابر است با:

$$S=(۲a)(۲b)=۴ab$$




بنابراین باید هذلولی را استاندارد کنیم و **a** , **b** را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}۸x=۰\Rightarrow x=۰\\ -۲y+۴=۰\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

$$O(\underbrace{۰}_{f'_x=۰},\underbrace{۲}_{f'_y=۰})\Rightarrow ۴(x-۰)^۲-(y-۲)^۲=۸+۰-۴\xrightarrow{\div ۴}\frac{x^۲}{۱}-\frac{(y-۲)^۲}{۴}=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۱\\ b^۲=۴\end{cases}\Rightarrow S=۴ab=۴\times ۱\times ۲=۸$$

---

**سؤال ۱۰۴: مجانب های یک هذلولی منطبق بر دو قطر یک مستطیل به ابعاد ۶ و ۸ واحد است. اگر این هذلولی بر ضلع بزرگتر مستطیل مماس باشد خروج از مرکز آن کدام است؟**

۱) $\frac{۵}{۴}$    ۲) $\frac{۴}{۳}$    ۳) $\frac{۳}{۲}$    ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه۴

می دانیم هذلولی همواره بر ضلع **۲b** مستطیل مماس می شود که طبق فرض ضلع بزرگ مستطیل بوده که ۸ واحد است پس $۲b=۸\Rightarrow b=۴$ و ضلع دیگر مستطیل هم برابر $۲a=۶\Rightarrow a=۳$ است. بنابراین:

$$e=\sqrt{۱+\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}=\frac{۵}{۳}$$

# انتگرال نامعین

## یافتن تابع اولیه :

منظور از تابع اولیهٔ $f(x)$ توابعی به صورت $F(x)+C$ هستند به طوری که $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x)+C$$

**مثال:** منظور از $\int ۲x dx$ تمام توابعی است که مشتق آنها ۲x می شود که می توان به $x^۲$ یا $x^۲+۱$ یا $x^۲-۵$ یا... و به طور کلی $x^۲+C$ اشاره کرد. پس یک تابع مانند $f(x)=۲x$ دارای بی شمار تابع اولیه است که اختلاف آنها در عدد ثابتشان است.

---

## فرمول های انتگرال گیری :

### ❖ دستهٔ اول: توابع چند جمله ای و نمایی

۱) $\int k dx = kx + C$

۲) $\int x^n dx = \left\{ \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + C , n \neq -۱ \right. \xrightarrow{\text{نتیجه مهم}} \left\{ \begin{array}{l} \int \sqrt{x}\, dx = \frac{۲}{۳} x\sqrt{x} + C \\ \int \frac{۱}{\sqrt{x}} dx = ۲\sqrt{x} + C \end{array} \right.$

۳) $\int (ax+b)^n dx = \frac{۱}{a}\left(\frac{(ax+b)^{n+۱}}{n+۱}\right) + C , n \neq -۱$

۴) $\int (ax+b)^{-۱} dx = \frac{۱}{a} \ln|ax+b| + C$

۵) $\int e^{ax+b} dx = \frac{۱}{a} e^{ax+b} + C$

---

**سؤال ۱۰۵:** اگر $\int \left(\frac{x^۲+\sqrt{x}+۱}{۲x^۲}\right) dx = \frac{f(x)}{۲x} + C$ در این صورت $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۲+\sqrt{x}-۲$  ۲) $x^۲-۲\sqrt{x}+۲$

۳) $x^۲-۲\sqrt{x}-۱$  ۴) $x^۲-\sqrt{x}+۲$

پاسخ: گزینه۳

$$\int \left(\frac{x^۲+\sqrt{x}+۱}{۲x^۲}\right) dx = \int \left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲x^۲}\right) dx = \frac{۱}{۲}\int \left(۱+x^{-\frac{۳}{۲}}+x^{-۲}\right) dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(x-\frac{۲}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x}\right)+C = \frac{\overbrace{x^۲-۲\sqrt{x}-۱}^{f(x)}}{۲x}+C$$

سؤال ۱۰۶: اگر $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3-1}{x}dx = 3\sqrt{x}f(x)+C$ باشد $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}x+3\sqrt{x}+2$ ۲) $\frac{2}{3}x+\sqrt{x}+6$

۳) $\frac{2}{9}x+3\sqrt{x}+6$ ۴) $\frac{2}{9}x+\sqrt{x}+2$

پاسخ: گزینه۴

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3-1}{x}dx = \int \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}-1}{x}dx = \int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+3+\sqrt{x}\right)dx$$

$$=3(2\sqrt{x})+3x+\frac{2}{3}x\sqrt{x} = 3\sqrt{x}\underbrace{\left(2+\sqrt{x}+\frac{2}{9}x\right)}_{f(x)}$$

---

سؤال ۱۰۷: اگر $\int \sqrt{\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4}\,dx = \frac{f(x)}{3x}+C$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^4-3$ ۲) $x^3-4$ ۳) $x^3+4$ ۴) $x^4+3$

پاسخ: گزینه۱

$$A=\int\sqrt{\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4}\,dx = \int\sqrt{x^4+\frac{1}{x^4}-2+4}\,dx = \int\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = \int\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|dx$$

حال با توجه به اینکه $x^2+\frac{1}{x^2}>0$ می باشد می توان نوشت:

$$A=\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C = \frac{x^4-3}{3x}+C = \frac{f(x)}{3x}+C \Rightarrow f(x)=x^4-3$$

---

سؤال ۱۰۸: اگر $\int \frac{1-x}{x\sqrt{x}}dx = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}}+C$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۱)

۱) $-x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x+1$ ۴) $2x-1$

پاسخ: گزینه۱

$$\int\frac{1-x}{x\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{x}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C = \frac{-2-2x}{\sqrt{x}}+C = \frac{2(-1-x)}{\sqrt{x}}+C$$

پس $f(x)=-1-x$ است.

سؤال ۱۰۹: اگر $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\sqrt{x}\,f(x)+C$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $3x-1$　۲) $3x-2$　۳) $2x-2$　۴) $x-2$

پاسخ: گزینه۳

روش اول

$$\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \Rightarrow 3\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)-\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+C$$

$$=3\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+C=2x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C=2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C=\sqrt{x}(2x-2)+C$$

$$\Rightarrow f(x)=2x-2$$

روش دوم) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \Rightarrow 3\times\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C=2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C=\sqrt{x}(2x-2)+C$

---

سؤال ۱۱۰: اگر $\int\frac{7x^2-4x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=3\sqrt[3]{x}\,f(x)+C$ باشد آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}x^2-2x$　۲) $\frac{2}{3}x^2-1$　۳) $x^2-x$　۴) $x^2-2$

پاسخ: گزینه۴

$$\int\frac{7x^2-4x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{7x^2-4x}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\int\left(\frac{7x^2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{4x}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int\left(7x^{2-\frac{2}{3}}-4x^{1-\frac{2}{3}}\right)dx$$

$$=\int\left(7x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}\right)dx=7\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}-4\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C\Rightarrow 7\times\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-4\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C$$

$$=3x^{\frac{7}{3}}-3x^{\frac{4}{3}}+C=3x^{\frac{1}{3}}(x^2-x)+C\Rightarrow f(x)=x^2-x$$

---

سؤال ۱۱۱: اگر $\int\frac{(1+\sqrt{x})^2-x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,f(x)+C$ باشد آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{x}$　۲) $1+2\sqrt{x}$　۳) $2+\sqrt{x}$　۴) $2+2\sqrt{x}$

پاسخ: گزینه۴

*ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله ای عبارت صورت کسر را ساده کرده و سپس از تفکیک کسر استفاده می کنیم:*

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{(1+2\sqrt{x}+x)-x}{\sqrt{x}}dx \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right)dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2x + C = 2\sqrt{x}+2x+C \Rightarrow \sqrt{x}(2+2\sqrt{x})+C \Rightarrow f(x) = 2+2\sqrt{x}$$

---

📖 سؤال ۱۱۲: اگر $\int\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{x}f(x)+C$ باشد آنگاه $f(x)$ کدام است؟(تجربی ۹۶)

۱) $3x^3+6x^2-1$ ۲) $3x^3+3x-1$

۳) $3x^4+3x^2-1$ ۴) $3x^4+6x^2-1$

☜ پاسخ: گزینه۴

$$\int\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{x}\times f(x)+C \Rightarrow \int\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\left(9x^2+\frac{1}{x^2}+6(x)\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$$

$$= \int(9x^2+x^{-2}+6)dx = 3x^3+\frac{-1}{x}+6x = \frac{1}{x}\times f(x)+C \xrightarrow{\times x} 3x^4-1+6x^2 = f(x)$$

---

📖 سؤال ۱۱۳: اگر $\int\frac{x-1}{x^3}dx = \frac{1}{2x^2}f(x)+C$ باشد آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۶)

۱) $-2x+1$ ۲) $-x+2$ ۳) $x-2$ ۴) $2x-1$

☜ پاسخ: گزینه۱

$$\int\frac{x-1}{x^3}dx \Rightarrow \int(x^{-2}-x^{-3})dx = \frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+C = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$$

$$= \frac{-2x+1}{2x^2}+C = \frac{1}{2x^2}\underbrace{(-2x+1)}_{f(x)}+C \Rightarrow f(x) = -2x+1$$

---

📖 سؤال ۱۱۴: اگر $\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \sqrt[3]{x}f(x)+C$ باشد آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x-4$ ۲) $x-2$ ۳) $2x-1$ ۴) $4x-1$

☜ پاسخ: گزینه۱

$$\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \frac{4}{3}\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \frac{4}{3}\int\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{4}{3}\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right)+C$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}\right)+C = x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}+C = \sqrt[3]{x}\underbrace{(x-4)}_{f(x)}+C$$

می توانیم از طرفین مشتق بگیریم تا انتگرال از بین برود:

$$\frac{۴x-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{f(x)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}+\sqrt[۳]{x}f'(x)\xrightarrow{\times\sqrt[۳]{x^۲}}\frac{۴x-۴}{۳}=\frac{f(x)}{۳}+xf'(x)$$

حال اگر در رابطهٔ فوق $x=۰$ را قرار دهیم $f'(x)$ هم جذب می شود و داریم:

$$x=۰\Rightarrow-\frac{۴}{۳}=\frac{f(۰)}{۳}\Rightarrow f(۰)=-۴$$

---

📖 **سؤال ۱۱۵:** اگر $\int\frac{۳x}{\sqrt{x-۱}}dx=f(x)\sqrt{x-۱}+C$ باشد $f(x)$ کدام است؟

۱) $۲x-۴$　　۲) $x-۴$　　۳) $x+۴$　　۴) $۲x+۴$

☜ **پاسخ: گزینه۴**

$$۳\int\frac{x}{\sqrt{x-۱}}dx=۳\int\frac{x-۱+۱}{\sqrt{x-۱}}dx=۳\int\left(\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}+\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}\right)dx=۳\int\left(\sqrt{x-۱}+(x-۱)^{-\frac{۱}{۲}}\right)dx$$

$$=۳\left(\frac{۲}{۳}(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}+۲(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}\right)+C=(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}\underbrace{(۲(x-۱)+۶)}_{۲x+۴}+C=\sqrt{x-۱}\underbrace{(۲x+۴)}_{f(x)}+C$$

---

📖 **سؤال ۱۱۶:** اگر $\int\frac{۳x}{\sqrt{x-۱}}dx=f(x).\sqrt{x-۱}+C$ باشد $f(x)$ کدام است؟

۱) $۲x+۱$　　۲) $۲x+۲$　　۳) $۲x+۳$　　۴) $۲x+۴$

☜ **پاسخ: گزینه۴**

با مشتق گیری از دو طرف رابطهٔ داده شده داریم:

$$\int\frac{۳x}{\sqrt{x-۱}}dx=f(x).\sqrt{x-۱}+C\Rightarrow\frac{۳x}{\sqrt{x-۱}}=f'(x)\sqrt{x-۱}+\frac{f(x)}{۲\sqrt{x-۱}}\xrightarrow{\times\sqrt{x-۱}}$$

$$۳x=f'(x)(x-۱)+\frac{f(x)}{۲}\qquad(*)$$

در هر چهار گزینه داده شده است. $f'(x)=۲$ با جای گذاری این مقدار در $(*)$ داریم:

$$۳x=۲x-۲+\frac{f(x)}{۲}\Rightarrow f(x)=۲x+۴$$

---

📖 **سؤال ۱۱۷:** ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در هر نقطهٔ $M(x,y)$ واقع بر آن برابر با معکوس مجذور طول آن نقطه است. اگر نمودار آن دارای خط مجانب به معادلهٔ $y=۲$ باشد نمودار آن از کدام نقطه می گذرد.

(خارج ریاضی ۸۶)

۱) $(۱,-۱)$　　۲) $(۱,۱)$　　۳) $(۲,۱)$　　۴) $(۲,۲)$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

$$f'(x)=\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{x^{۲}}\Rightarrow f(x)=\frac{-۱}{x}+C$$

حال با توجه به اینکه خط $y=۲$ مجانب افقی منحنی $f$ می باشد داریم:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=۲\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(C-\frac{۱}{x}\right)=۲\Rightarrow C=۲\Rightarrow f(x)=۲-\frac{۱}{x}$$

از میان نقاط داده شده در گزینه ها تنها نقطهٔ (۱،۱) در ضابطهٔ تابع $f$ صدق می کند.

---

📖 سؤال ۱۱۸: نمودار یکی از توابع اولیه های $f(x)=۳x^{۲}-۲x-۵$ محور $y$ ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع می کند. مقدار این تابع اولیه در نقطهٔ ماکسیمم نسبی آن کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا با استفاده از انتگرال گیری فرم کلی توابع اولیه تابع $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x)=۳x^{۲}-۲x-۵\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(۳x^{۲}-۲x-۵)dx$$

$$\Rightarrow F(x)=x^{۳}-x^{۲}-۵x+C$$

نقطهٔ $A(۰,۳)$ روی تابع اولیهٔ مورد نظر است بنابراین:

$$A(۰,۳)\in F\Rightarrow F(۰)=۳\Rightarrow ۳=۰-۰-۰+C\Rightarrow C=۳\Rightarrow F(x)=x^{۳}-x^{۲}-۵x+۳$$

حال با مشتق گیری و تعیین نقاط بحرانی طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $F$ را پیدا می کنیم:

| $x$ | $-\infty$ | | $-۱$ | | $\frac{۵}{۳}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'$ | | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ | |
| $F$ | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

$$\Rightarrow x_{max}=-۱\Rightarrow F(-۱)=(-۱)^{۳}-(-۱)^{۲}-۵(-۱)+۳\Rightarrow F(-۱)=۶$$

---

📖 سؤال ۱۱۹: منحنی یکی از توابع اولیهٔ $f(x)=۴x-۱$ بر خطی به معادلهٔ $y-۷x+۹=۰$ مماس است حاصل ضرب ریشه های این منحنی کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $-\frac{۱}{۲}$

☜ پاسخ: گزینه۴

اول فرم کلی تمام توابع اولیهٔ تابع $f(x)=۴x-۱$ را می نویسیم:

توابع اولیه $f$: $F(x)=\int f(x)dx=\int(۴x-۱)dx=۲x^{۲}-x+C$

چون قرار است خط $y=7x-9$ بر تابع $F(x)=2x^2-x+C$ مماس شود پس معادلهٔ تقاطع آنها باید ریشهٔ مضاعف بدهد:

$$F(x)=y \Rightarrow 2x^2-x+C=7x-9 \Rightarrow 2x^2-8x+9+C=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow 64-4(2)(9+C)=0 \Rightarrow 64-8(9+C)=0 \xrightarrow{\div 8} 8-(9+C)=0 \Rightarrow C=-1$$

پس تابع اولیهٔ مورد نظر برابر است با: $F(x)=2x^2-x-1$

حاصل ضرب ریشه های تابع درجه دوم فوق برابر است با: $-\frac{1}{2}$

## انتگرال مثلثاتی

### چند فرمول مهم در انتگرال گیری :

| نتیجه | یادآوری | شماره |
|---|---|---|
| $\int \cos x dx=\sin x+C$ | $(\sin x)'=\cos x$ | ۱ |
| $\int \sin x dx=-\cos x+C$ | $(\cos x)'=-\sin x$ | ۲ |
| $\int (1+\tan^2 x)dx=\tan x+C$ | $(\tan x)'=1+\tan^2 x$ | ۳ |
| $\int (1+\cot^2 x)dx=-\cot x+C$ | $(\cot x)'=-(1+\cot^2 x)$ | ۴ |
| $\int e^x dx=e^x+C$ | $(e^x)'=e^x$ | ۵ |
| $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ | $(a^x)'=a^x\ln a$ | ۶ |
| $\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$ | $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ | ۷ |

**دقت کنید حاصل $\int \tan x dx$ برابر $\cot x+C$ نیست. در واقع محاسبهٔ این انتگرال نیاز به روش های پیشرفته تری دارد که فعلاً کاری با آن نداریم.**

**برای انتگرال گیری از توابع مثلثاتی، ابتدا تا حد امکان تابع داخل انتگرال را به کمک فرمول های مثلثاتی، ساده می نماییم.**

## توابع مثلثاتی :

$$1)\ \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$2)\ \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$3)\ \int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}Ln\,|\cos ax| + C$$

$$4)\ \int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}Ln\,|\sin ax| + C$$

$$5)\ \int (1+\tan^2 ax)\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax + C$$

$$6)\ \int (1+\cot^2 ax)\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax + C$$

---

سؤال ۱۲۰: با شرط $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ حاصل $\int \sqrt{1+\tan^2 x}\,\sin 2x\,dx$ کدام است؟

۱) $-2\cos x + C$ ۲) $-2\sin x + C$ ۳) $2\cos x + C$ ۴) $2\sin x + C$

پاسخ: گزینه۳

$$\int \sqrt{1+\tan^2 x} \times \sin 2x\,dx \xrightarrow{1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \times \sin 2x\,dx = \int \frac{1}{|\cos x|}\sin 2x\,dx$$

$$\xrightarrow{\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0} \int \frac{1}{-\cos x} \times 2\sin x\,\cos x\,dx = \int -2\sin x\,dx = -2\int \sin x\,dx$$

$$= \int -2(-\cos x) + C = 2\cos x + C$$

---

سؤال ۱۲۱: حاصل $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $x + \sin x + C$ ۲) $x - \sin x + C$

۳) $-x + \cos x + C$ ۴) $x - \cos x + C$

پاسخ: گزینه۱

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}dx$$

$$= \int (1+\cos x)\,dx = x + \sin x + C$$

سؤال ۱۲۲: با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$ کدام است؟

۱) $\sin x - \cos x + C$ ۲) $\sin x + \cos x + C$

۳) $-\sin x + \cos x + C$ ۴) $-\sin x - \cos x + C$

پاسخ: گزینه۱

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx \Rightarrow \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)}dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + C$$

---

## مشتق گیری از انتگرال:

برای محاسبهٔ مشتق تابع $\int_a^x f(t)dt$ کافی است تابع داخل انتگرال را نوشته وس پس به جای همه $t$ ها $x$ قرار دهیم:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

مثلاً $\left(\int_5^x (t^2)dt\right)' = x^2$

**توجه**: $a$ هر عددی باشد تأثیری در جواب نداشته و کلاً الکی می باشد!

قبل از مشتق گیری حتماً به حدود انتگرال گیری دقت کنید یعنی اگر در مثال فوق حدود انتگرال جابه جا باشد باید به روش زیر عمل کنیم:

مثلاً $\left(\int_x^5 t^2 dt\right)' \xrightarrow[\text{بتوانیم از فرمول استفاده کنیم}]{\text{حدود را جابه جا کرده تا}} \left(-\int_5^x t^2 dt\right)' = -x^2$

---

سؤال ۱۲۳: اگر $G(x) = \int_2^x \frac{\cos \pi t}{1+t^2}dx$ و $y = xG\left(\frac{1}{x}\right)$ مقدار $y'$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه۱

$$G(x) = \int_2^x \frac{\cos \pi t}{1+t^2}dx \Rightarrow G'(x) = \frac{\cos \pi x}{1+x^2}$$

حال مشتق $y$ را می گیریم: $y = xG\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = G\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}G'\left(\frac{1}{x}\right)$

به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ خواهیم داشت: $y'=G(۲)-۲G'(۲)=۰-۲\left(\frac{\cos ۲\pi}{۱+۴}\right)=-\frac{۲}{۵}$

---

📖 **سؤال ۱۲۴:** **اگر $G$ تابع مساحت با ضابطهٔ $G(x)=\int_{۱}^{x}(۱-t)dt$ و $y=\frac{x}{G(x)}$ باشد شیب خط مماس بر تابع $y$ در نقطه ای به طول $x=۲$ کدام است؟**

۱) $-۶$    ۲) $۴$    ۳) $-۴$    ۴) $۶$

☜ **پاسخ: گزینه۴**

شیب خط مماس بر تابع $y$ در همان $y'(۲)$ است پس داریم:

$$y=\frac{x}{G(x)}\Rightarrow y'=\frac{۱\times G(x)-G'(x)\times x}{(\mathrm{G(x)})^{۲}}\xrightarrow{x=۲}y'(۲)=\frac{G(۲)-G'(۲)\times ۲}{(\mathrm{G(۲)})^{۲}}\qquad (*)$$

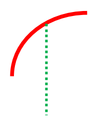
حال باید با توجه به $G(x)$ مقادیر $G'(۲),G(۲)$ را بیابیم:

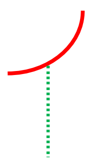
$$G(x)=\int_{۱}^{x}(۱-t)dt\Rightarrow\begin{cases}G(۲)=\int_{۱}^{۲}(۱-t)dt=t-\frac{t^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۲}=\left(۲-\frac{۴}{۲}\right)-\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)=۰-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}\\ G'(x)=۱-x\Rightarrow G'(۲)=۱-۲=-۱\end{cases}$$

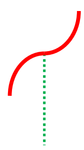
$$\Rightarrow y'(۲)=\frac{-\frac{۱}{۲}-(-۱)\times ۲}{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۲}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=۶$$

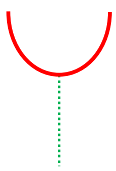
---

📖 **سؤال ۱۲۵:** **اگر $\int_{۰}^{x}\frac{dt}{۱+t^{۳}}$ نمودار $f$ در مجاورت $x=۰$ کدام است؟**

۱)

$x=۰$

۲)

$x=۰$

۳)

$x=۰$

۴)

$x=۰$

☜ **پاسخ: گزینه۱**

برای تعیین رفتار $f$ در اطراف $x=۰$، $f'(۰)$، $f''(۰)$ را می یابیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+x^{۳}},f''(x)=\frac{-۳x^{۲}}{(۱+x^{۳})^{۲}}\Rightarrow f'(۰)=۱,f''(۰)=۰$$

یعنی شیب مماس صفر نیست پس (۴) جواب نیست. و نیز $f''(۰)$ صفر است ولی $f''$ در صفر تغییر علامت نمی دهد پس تقعر نمودار عوض نمی شود بنابراین (۳) صحیح نیست. از آن جا که $f'$ در اطراف صفر باید رو به پایین باشد پس (۱) صحیح است.

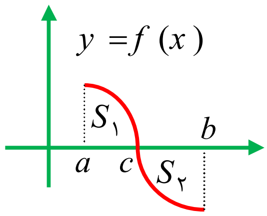
# قضیه اساسی دوم (انتگرال معین)

## قضیهٔ اساسی دوم (انتگرال معین) :

اگر $F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد در این صورت:

$$F(x)=\int f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

در واقع انتگرال تابع $f$ در بازهٔ $[a,b]$ مساحت علامت دار ناحیهٔ بین نمودار $f$ و محور $x$ ها می باشد:




$$\Rightarrow \begin{cases} \int_a^c f(x)dx = S_1 \\ \int_c^b f(x)dx = -S_2 \end{cases} \Rightarrow \int_c^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

## خواص انتگرال معین :

۱) هرگاه حدود انتگرال گیری با هم مساوی باشند ( $a=b$ ) حاصل انتگرال معین صفر است:

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

۲) برای شکستن یک انتگرال به دو یا چند انتگرال دیگر از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

۳) اگر جای حدود انتگرال گیری با هم عوض شود حاصل انتگرال قرینه می شود.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

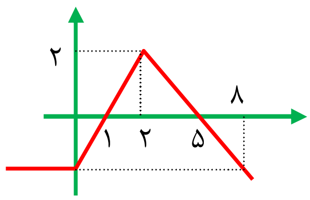
📖 سؤال ۱۲۶: شکل مقابل نمودار تابع $f$ است. حاصل $\int_{-3}^{8} f(x)dx$ کدام است؟

۱) $-4$

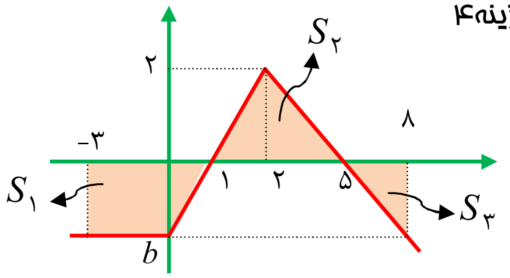
۲) $-5$

۳) $-3$

۴) $-6$



☜ پاسخ: گزینه۴




$$\frac{2}{-b}=\frac{1}{1}\Rightarrow b=-2 \quad \text{طبق تالس}$$

$$\int_{-3}^{8} f(x)dx=-S_1+S_2-S_3$$

$$=-\frac{(4+3)(2)}{2}+\frac{4\times 2}{2}-\frac{3\times 2}{2}=-6$$

---

📖 سؤال ۱۲۷: حاصل $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$   ۲) $\frac{5}{8}$   ۳) $\frac{7}{8}$   ۴) $\frac{9}{8}$

☜ پاسخ: گزینه۳

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int_{-2}^{-1}(x^{-2}-x^{-3})dx=\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{3}{2}-\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$$

---

📖 سؤال ۱۲۸: حاصل $\int_{1}^{2}\frac{(x+2)^3}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{70}{3}+4Ln2$   ۲) $\frac{70}{3}+8Ln2$   ۳) $\frac{50}{3}+4Ln2$   ۴) $\frac{50}{3}+8Ln2$

☜ پاسخ: گزینه۲

$$\int_{1}^{2}\frac{(x+2)^3}{x}dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x}\right)dx=\int_{1}^{2}\left(x^2+6x+12+\frac{8}{x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+3x^2+12x+8Lnx\right)\Bigg|_{1}^{2}=\frac{70}{3}+8Ln2$$

---

📖 سؤال ۱۲۹: حاصل انتگرال $\int_{1}^{4}\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+1}\,dx$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

☜ پاسخ: گزینه۳

داریم: $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+1=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2$

در نتیجه حاصل انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$\int_{1}^{4}\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx=\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\int_{1}^{4}x^2dx+\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{1}^{4}+\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{4}=\frac{1}{12}(4^3-1^3)+\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{1}\right)=\frac{63}{12}+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}+\frac{3}{4}=6$$

سؤال ۱۳۰: حاصل انتگرال $\int_{0}^{4}|1-\sqrt{x}|dx$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۳

تابع $y=1-\sqrt{x}$ در بازهٔ $(0,1)$ مثبت و در بازهٔ $(1,4)$ منفی است بنابراین:

$$\int_{0}^{4}|1-\sqrt{x}|dx \Rightarrow \int_{0}^{1}(1-\sqrt{x})dx+\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-1)dx=\int_{0}^{1}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)dx+\int_{1}^{4}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)dx$$

$$x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\Big|_{1}^{4}=\left(1-\frac{2}{3}\right)-(0)+\left(\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}-4+\frac{1}{3}=2$$

---

سؤال ۱۳۱: حاصل انتگرال $\int_{0}^{4}\sqrt{(x^{2}-2x)^{2}}dx$ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۶)

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{20}{3}$ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه۳

$$A=\int_{0}^{4}\sqrt{(x^{2}-2x)^{2}}dx=\int_{0}^{4}|x^{2}-2x|dx$$

ابتدا جدول تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق توجه می کنیم:

$$x^{2}-2x=x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

| $x$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

در نتیجه انتگرال داده شده را به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$A=\int_{0}^{2}(2x-x^{2})dx+\int_{2}^{4}(x^{2}-2x)dx$$

$$\Rightarrow A=\left(x^{2}-\frac{x^{3}}{3}\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{x^{3}}{3}-x^{2}\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$\Rightarrow A=\left(\left(4-\frac{8}{3}\right)-(0-0)\right)+\left(\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)$$

$$\Rightarrow A=4-16+4-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}+\frac{64}{3}\Rightarrow A=\frac{64-16}{3}-8\Rightarrow A=16-8=8$$

---

سؤال ۱۳۲: حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2\sin^{2}x}dx$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{2}$ ۲) $1-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}-1$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه۲

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cot^2 x - 1)dx$$

$$= (-\cot x - x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{4}$$

---

سؤال ۱۳۳: حاصل $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$    ۲) $\sqrt{3}-1$    ۳) $\frac{\pi}{3}$    ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه۴

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(2\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}-0=\sqrt{3}$$

---

سؤال ۱۳۴: حاصل $\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x}\,dx$ کدام است؟

۱) ۲    ۲) ۴    ۳) ۶    ۴) ۸

پاسخ: گزینه۴

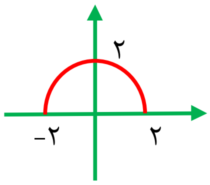
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x}\,dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos x)}\,dx \xrightarrow{1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{x}{2}\right|dx \xrightarrow[\Rightarrow \sin\frac{x}{2}\ge 0]{0\le x\le 2\pi \Rightarrow 0\le \frac{x}{2}\le \pi} 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$= 2\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -4(-1-1)=8$$

**تذکر**: برای نخستین بار در کنکور تجربی در یک انتگرال روابط مهم مثلثاتی مثل $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ دیده می شود. بهتر است توجه خاصی به این مهم داشته باشید.

**سؤال ۱۳۵:** با توجه به شکل مقابل حاصل $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ کدام است؟



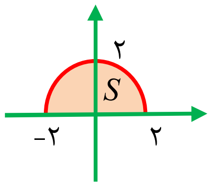

۱) $2\pi-2$    ۲) $\pi+2$

۳) $2\pi$    ۴) $4\pi$

پاسخ: گزینه۳

با توجه به شکل نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{4-x^2}$ یک نیم دایره به شعاع ۲ است حال با توجه به تعریف انتگرال معین داریم:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = S_{\text{نیم دایره}} = \frac{1}{2}\pi R^2 \xrightarrow{R=2} \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 2\pi$$




---

**سؤال ۱۳۶:** حاصل $\int_{2}^{5}\frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}dx$ برابر کدام است؟

۱) ۱۴    ۲) $\frac{43}{3}$    ۳) ۱۵    ۴) $\frac{46}{3}$

پاسخ: گزینه۴

انتگرال را با تغییر ساختار کسر حساب می کنیم:

$$\int_{2}^{5}\frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_{2}^{5}\frac{2x-2+3}{\sqrt{x-1}}dx = \left(2\int_{2}^{5}\sqrt{x-1}\,dx + 3\int_{2}^{5}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx\right)$$

$$=2\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{2}^{5} + 3\times(2\sqrt{x-1})\Bigg|_{2}^{5} = \frac{4}{3}(8-1)+6(2-1) = \frac{4}{3}\times 7+6 = \frac{28}{3}+6 = \frac{46}{3}$$

---

**سؤال ۱۳۷:** حاصل $\int_{1}^{3}x(2-x)^5dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$    ۲) $-\frac{2}{7}$    ۳) $\frac{2}{3}$    ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه۲

$$\int_{1}^{3}x(2-x)^5dx = -\int_{1}^{3}x(x-2)^5dx = -\int_{1}^{3}(x-2+2)(x-2)^5dx$$

$$= -\int_{1}^{3}\left((x-2)^6+2(x-2)^5\right)dx = -\int_{1}^{3}(x-2)^6dx - 2\int_{1}^{3}(x-2)^5dx$$

$$= \left(-\frac{(x-2)^7}{7}\Bigg|_{1}^{3}\right) - \left(2\frac{(x-2)^6}{6}\Bigg|_{1}^{3}\right) = -\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right) - 2\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{7}$$

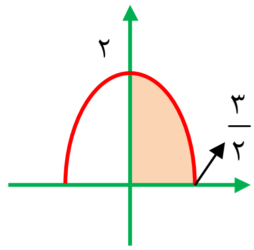
📖 سؤال ۱۳۸: مقدار $\int_{0}^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-4x^{2}}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{9\pi}{8}$   ۲) $\frac{9\pi}{4}$   ۳) $\frac{9\pi}{16}$   ۴) $\frac{9\pi}{2}$

☜ پاسخ: گزینه۱

نمودار $y=\sqrt{9-4x^{2}}$ یک نیم بیضی است با $a=3$, $b=\frac{3}{2}$ و مرکز $(0,0)$ زیرا:

$$y^{2}+4x^{2}=9\Rightarrow\left(\frac{y}{3}\right)^{2}+\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right)^{2}=1$$




و قسمت رنگی مرنظر سوال است که $\frac{1}{4}$ مساحت بیضی است اما مساحت بیضی برابر است با:

$$\pi ab=\frac{9\pi}{2}\Rightarrow\int_{0}^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-4x^{2}}\,dx=\frac{1}{4}\times\frac{9\pi}{2}=\frac{9\pi}{8}$$

## انتگرال گیری از توابع شامل قدرمطلق و جز صحیح

### انتگرال گیری از توابع شامل قدرمطلق :

برای این کار باید عبارت داخل قدرمطلق را با توجه به بازهٔ انتگرال گیری تعیین علامت کرده و قدرمطلق را برداریم:

مثلاً : $\int_{-2}^{1}|x+1|\,dx$   عبارت $x+1$ به ازای $x<-1$ منفی و به ازای $x>-1$ مثبت است.

$$\int_{-2}^{-1}-(x+1)dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\left(-\frac{x^{2}}{2}-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^{2}}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\left(\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)\right)+\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

---

### انتگرال گیری از توابع شامل جزء صحیح :

مهم ترین کار در این قسمت این است که بازهٔ انتگرال گیری را طوری تقسیم بندی کنیم که جزء صحیح برداشته شود. برای این کار توجه به نقاطی که داخل جزء صحیح را تبدیل به عددی صحیح می کنند از اهمیت بالایی برخوردار است. مثلاً برای محاسبهٔ $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}[x]dx$ چون عبارت داخل براکت در بازهٔ $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ فقط به ازای $x=0$ عددی صحیح می شود بازهٔ انتگرال گیری را به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}[x]dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}[x]dx+\int_{0}^{1}[x]dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(0)dx=-x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+0=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

---

سؤال ۱۳۹: حاصل $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left[\frac{1}{x}\right]\frac{1}{x^3}dx$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

پاسخ: گزینه۲

می دانیم $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ آنگاه $\left[\frac{1}{x}\right]=2$ و نیز اگر $\frac{1}{2}<x<1$ آنگاه $\left[\frac{1}{x}\right]=1$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left[\frac{1}{x}\right]\frac{1}{x^3}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x^3}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{x^2}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2x^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=-4+9-\frac{1}{2}+2=6/5$$

---

### استفاده از خواص توابع زوج و فرد :

✓ **تابع زوج**: تابعی است که اگر به جای $x$ در آن $-x$ قرار دهیم ضابطهٔ تابع تغییر نمی کند. یعنی $f(-x)=f(x)$

**مثلاً**: $f(x)=x^2+x^4$ زوج است زیرا: $f(-x)=(-x)^2+(-x)^4=x^2+x^4=f(x)$

توابع $y=|x|, y=\cos x$ نمونه هایی از توابع زوج هستند.

✓ **تابع فرد**: تابعی است که اگر به جای $x$ در آن $-x$ قرار دهیم $-f(x)$ به دست می آید یعنی: $f(-x)=-f(x)$

**مثلاً**: $f(x)=x^3+x$ تابعی فرد است زیرا: $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x)$

توابع $y=\sin x, y=\tan x$ نمونه هایی از توابع فرد هستند.

اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$ و اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$ می شود.

به متقارن بودن بازهٔ انتگرال (مثلاً $-a$ تا $a$) دقت کنید. این ترفندها فقط وقتی صحیح هستند که بازهٔ انتگرال گیری متقارن باشد.
برای استفاده از این نکات باید بعد از بررسی متقارن بودن بازه سریعاً با قرار دادن $-x$ به جای $x$ زوج یا فرد بودن را بررسی نماییم. البته توجه کنید یادگیری نکات توابع زوج و فرد واجب نیست ولی می تواند سرعت انتگرال گیری شما را به شدت افزایش دهد.

---

سؤال ۱۴۰: حاصل $\int_{-2}^{2}(2x+|x|)dx$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه۲

$$\int_{-2}^{2}(2x+|x|)dx=\int_{-2}^{2}2xdx+\int_{-2}^{2}|x|dx\Rightarrow 0+2\int_{0}^{2}|x|dx$$

$$\xrightarrow[|x|=x]{0<x<2}2\int_{0}^{2}xdx=2\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}=4-0=4$$

سؤال ۱۴۱: حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[2\sin^2 x]dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه۱

می دانیم $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $0 \le 2\sin^2 x < 1$ پس $[2\sin^2 x]$ و نیز اگر $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$ آنگاه: $1 \le 2\sin^2 x < 2$

پس $[2\sin^2 x] = 1$ همچنین $x = \frac{\pi}{2}$ که مقدار $[2\sin^2 x]$ برابر ۲ می شود در جواب نهایی بی تأثیر است در نتیجه:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[2\sin^2 x]dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 0\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$$

---

سؤال ۱۴۲: حاصل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) $\pi + 1$

پاسخ: گزینه۳

ابتدا انتگرال را به دو انتگرال دیگر افراز می کنیم: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$

می دانیم اگر $f$ تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{a} f = 0$ زیرا نسبت به مبدأ قرینه است پس: $\int_{-a}^{0} f = -\int_{0}^{a} f$

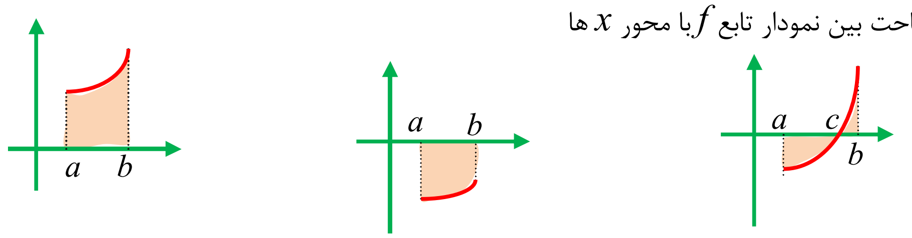
حال $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ تابعی فرد است پس انتگرال اول صفر است اما $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ در نتیجه:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

# سطح محصور ــ قضیهٔ مقدار میانگین

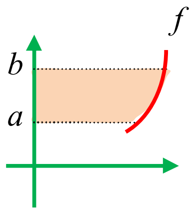
## محاسبهٔ سطح محصور :

⌘ **تیپ اول)** مساحت بین نمودار تابع $f$ با محور $x$ ها



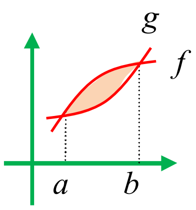

ریشه های تابع را می یابیم . اگر در صورت سوال بازه ای برای یافتن مساحت مطرح نشده بود ریشه ها را به عنوان دو سر بازه در نظر می گیریم در غیر این صورت در ریشه یا ریشه های موجود در بازهٔ داده شده انتگرال را می شکنیم و در هر قسمت جداگانه انتگرال می گیریم و جواب هر قسمت را مثبت اعلام می کنیم چون مساحت منفی نمی شود.

⌘ **تیپ دوم)** مساحت بین نمودار تابع $f$ با محور $y$ ها :




$$\Rightarrow S=\int_a^b f^{-1}(x)dx=\int_a^b f(y)dy$$

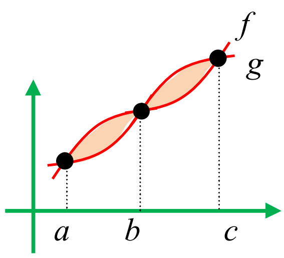
⌘ **تیپ سوم)** مساحت محصور بین دو نمودار:




$$\Rightarrow S=\left|\int_a^b (\mathrm{f(x)-g(x)})\,\mathrm{dx}\right|$$

☺ دو تابع $f$ , $g$ را مساوی هم قرار داده و محل تلاقی آنها را می یابیم سپس در فاصلهٔ بین نقاط تلاقی قدرمطلق انتگرال تفاضل آنها را حساب می کنیم.

**تذکر**: اگر محل تلاقی دو نمودار بیش از دو نقطه بود انتگرال را می شکنیم:

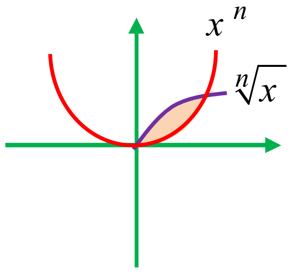



$$\Rightarrow S=\left|\int_a^b (\mathrm{f(x)-g(x)})\,\mathrm{dx}\right|+\left|\int_b^c (\mathrm{f(x)-g(x)})\,\mathrm{dx}\right|$$

**حالت خاص۱)** مساحت سطح محصور بین دو نمودار $x^2=ay$ , $y^2=bx$ برابر با $S=\left|\frac{ab}{3}\right|$ است.

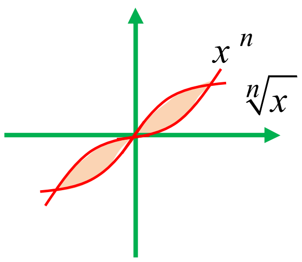
**حالت خاص۲)** مساحت سطح محصور بین دو نمودار $y=x^n , y=\sqrt[n]{x}$:

الف) $n$ زوج باشد:




$$\Rightarrow S=\frac{n-1}{n+1}$$

ب) $n$ فرد باشد:




$$\Rightarrow S=2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

---

📖 **سؤال ۱۴۳:** **مساحت ناحیه ای از صفحه که تحت نمودار تابع $y=3x-x^2$ بوده و در نقاط تقاطع با محور $x$ ها به این محور محدود شود کدام است؟**

۱) ۳/۵    ۲) ۴    ۳) ۴/۵    ۴) ۵

☜ پاسخ: گزینه۳

نقاط تقاطع با محور $x$ ها را می یابیم: $3x-x^2=0 \Rightarrow x=0,3$

حال برای یافتن مساحت داریم: $S=\left|\int_0^3 3x-x^2\right|=\left|\left.\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right|_0^3\right|=\frac{9}{2}=4/5$

---

📖 **سؤال ۱۴۴:** **مساحت زیرمنحنی $y=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$ و بالای محور $x$ ها در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{3}$    ۲) $4-\sqrt{3}$    ۳) $2\sqrt{3}-1$    ۴) $2\sqrt{3}$

☜ پاسخ: گزینه۴

با توجه به اینکه تابع $y$ ریشه ندارد بنابراین مساحت زیرمنحنی $y$ و بالای محور $x$ ها در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ برابر است با:

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4dx}{(\sin 2x)^2}=-\frac{4}{2}\cot 2x\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}=-2\left(\cot\frac{\pi}{2}-\cot\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$$

---

📖 **سؤال ۱۴۵:** **مساحت سطح محصور بین منحنی $f(x)=\frac{2-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ و محصور $x$ ها و خطوط $x=0, x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$    ۲) $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}$    ۳) $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}$    ۴) $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}$

☜ پاسخ: گزینه۴

از رابطهٔ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ استفاده کرده و کسر را ساده می کنیم:

$$\frac{2-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2-(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x} = \frac{3-2\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{3}{2\cos^2 x} - 1$$

از آنجایی که $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ است داریم:

$$S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2\cos^2 x} - 1\right)dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2}(1+\tan^2 x) - 1\right)dx\right| = \left|\frac{3}{2}\tan x - x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

---

📖 سؤال ۱۴۶: خط $x = a$ با سرعت ۰/۳ به مبدأ نزدیک می شود. مساحت محدود به این خط $y = x\sqrt{1+x^3}$ محور $x$ ها و نمودار تابع با چه آهنگی کم می شود. در لحظه ای که $a = 2$ می باشد؟

۱) ۱/۲　　۲) ۱/۵　　۳) ۱/۸　　۴) ۲/۱

☜ پاسخ: گزینه۳

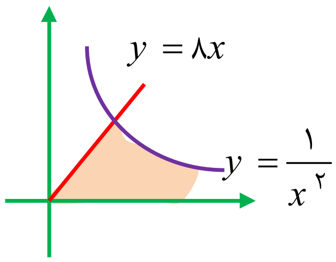
اگر مساحت مذکور از صفر تا $x$ را $F(x) = \int_0^x t\sqrt{1+t^3}\,dt$ بنامیم مطلوب مسئله $\frac{dF}{dt}$ است:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\Big|_{x=2} = x\sqrt{1+x^3}\times(-0/3)\Big|_{x=2} = -2\times\sqrt{9}\times(0/3) = -1/8$$

چون مسئله اندازهٔ کاهش سرعت را خواسته است پس جواب ۱/۸ خواهد بود.

---

📖 سؤال ۱۴۷: مساحت ناحیهٔ سایه زده کدام است؟




۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

☜ پاسخ: گزینه۳

ابتدا محل تقاطع را می یابیم: $8x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

پس مساحت عبارت است از: $\int_0^{\frac{1}{2}} 8x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 4x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} = 1-(0-2) = 3$

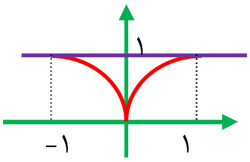
---

📖 سؤال ۱۴۸: مساحت محدود به منحنی $y = 1, y = \sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$　　۲ $\frac{6}{5}$　　۳) $\frac{3}{5}$　　۴) $\frac{8}{5}$

☜ پاسخ: گزینه۱

ابتدا محل برخورد این دو نمودار را تعیین می کنیم:



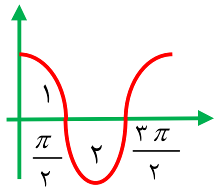

$$\sqrt[3]{x^{2}}=1\Rightarrow x=\pm 1, y=1$$

در نتیجه مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$\int_{-1}^{1}(1-\sqrt[3]{x^{2}})dx=\left(x-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=1-\frac{3}{5}-\left(-1+\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

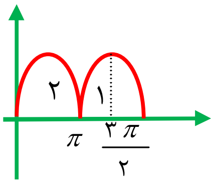
---

**نکته جالب**: مساحت هر طاق نمودارهای $\sin x$ یا $\cos x$ برابر با ۲ می باشد. به عنوان مثال حاصل $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x+|\sin x|)dx$ برابر ۲ است چون:



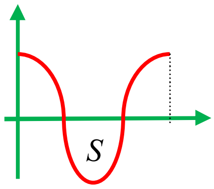

$\Rightarrow -1+3=2$

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=1-2=-1$$

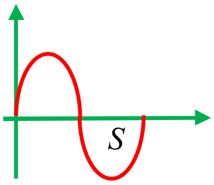



$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|dx=2+1=3$$

⌛ **نتیجه**: در حالت کلی می توان گفت که:




$$y=b\cos ax\xrightarrow[\frac{2\pi}{|a|}]{\text{در دوره تناوب}}S=\left|\frac{2b}{a}\right|$$




$$y=b\sin ax\xrightarrow[\frac{2\pi}{|a|}]{\text{در دوره تناوب}}S=\left|\frac{2b}{a}\right|$$

---

📖 سؤال ۱۴۹: حاصل $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\tan^{2}x}}$ برابر کدام است؟

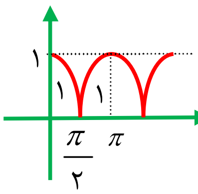
۱) ۱    ۲) ۲    ۳) $\pi$    ۴) صفر

☜ پاسخ: گزینه۲

$$\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\tan^{2}x}}=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^{2}x}}}=\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx$$

می دانیم مساحت هر طاق نمودار برابر با ۲ است پس:

$$\Rightarrow\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx=1+1=2$$



**سؤال ۱۵۰:** سطح محدود به منحنی $y=\sqrt{1-\cos 2x}$ و محور $x$ ها در یک طاق آن کدام است؟

۱) ۲    ۲) $2\sqrt{2}$    ۳) ۳    ۴) $3\sqrt{2}$    (سراسری ریاضی ۹۶)

**پاسخ: گزینه۲**

ابتدا تابع را به صورت ساده تر می نویسیم: $y=\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}\,|\sin x|$

برای این که ابتدا و انتهای یک طاق پیدا شود کافی است ریشه های تابع را به دست آوریم.

$$\sqrt{2}\,|\sin x|=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow x=0,\pi,2\pi,\ldots$$

مساحت یک طاق را از صفر تا $\pi$ تعیین می کنیم:

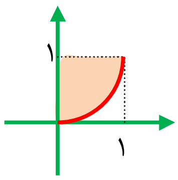
$$S=\left|\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,|\sin x|\,dx\right|=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,dx=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

---

**سؤال ۱۵۱:** سطح بین $y=1,\ y=x\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{7}$    ۲) $\frac{4}{7}$    ۳) $\frac{3}{7}$    ۴) $\frac{6}{7}$

**پاسخ: گزینه۱**




تابع $x\sqrt[3]{x}$ روی بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است و در $x=1$ برابر با یک می شود. پس مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$1-\int_0^1 x\sqrt[3]{x}\,dx=1-\int_0^1 x^{\frac{4}{3}}dx=1-\frac{3}{7}\left(x^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{7}\Rightarrow 2\times\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$$