جمع بندی احتمال شرطی

احتمال شرطی :

اگر فرض کنیم من تاسی رو یه بار بندازم و از تو بخوام قبل انداختن عددش رو پیشگویی کنی و تو بگی تاس پنج میاد، احتمال برنده شدنت برابر $\frac{۱}{۶}$ می شه. حالا اگه تاس رو بندازم و چشم تو رو ببندم بعد خودم عدد تاس را ببینم و راهنماییت کنم که تاس رو شده عددش زوجه، ازت بخوام پیش گویی کنی و اگه تو بگی تاس چهار اومده به این دلیل که فضای نمونه رو برات از شش حالت به سه حالت کاهش دادم احتمال بُردنت برابر $\frac{۱}{۳}$ میشه، که اصطلاحاً به این روش کاهش فضای نمونه می گیم.

اگه پیش فرض یا اطلاعاتی که بهت دادم حالت مشخصی داشت به این سبک مسائل احتمال، **احتمال شرطی** می گن.

در احتمال شرطی، پیش فرضی را از فضای نمونه ذکر می کنند که معمولاً در صورت سوال با بیان های «**اگر بدانیم**» یا «**آگاه می شویم**» یا «**اگر پیشامد B روی دهد آنگاه احتمال وقوع A**» یا «**احتمال وقوع A به شرطی که B روی داده باشد**» مطرح می شوند که دستور ریاضی بیان این نوع احتمالات که به احتمال شرطی معروفند به صورت $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ یا $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ می باشند.

توصیهٔ من به تو اینکه مسائل احتمال شرطی رو از فرمولش حل نکن. فقط از روش کاهش فضای نمونه با توجهبه فرض که بهت می دن استفاده کن. مثل مثالی که واسه ات حل می کنم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{P(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\text{تعداد حالتهای همزمان رخ دادن } B,A}{\text{تعداد حالت رخ دادن } B}$$

📖 سؤال ۱: اگر B , A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A\subset B$, $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۳}{۴}$ آنگاه $P(B|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

☜ پاسخ: گزینه۴

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{۱-P(A)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)}\xrightarrow[A\cap B=A]{A\subseteq B}$$

$$\frac{P(B)-P(A)}{۱-P(A)}=\frac{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱۵}{۲۴}=\frac{۵}{۸}$$

سؤال ۲: اگر A , B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A'|B)+P(A)=1$ و همچنین $P(A)+P(B)=0/8$ باشد حداقل $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۱۶

پاسخ: گزینه۳

$$P(A'|B)=1-P(A)\Rightarrow P(A'|B)=P(A')\Rightarrow \frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=P(A')$$

$$\Rightarrow P(A'\cap B)=P(A')P(B)$$

یعنی A , B مستقل اند بنابراین:

$$P(A\cup B)=\underbrace{P(A)+P(B)}_{0/8}-P(A)\times P(B)=0/8-0/4\times 0/4=0/8-0/16=0/64$$

سؤال ۳: اگر A , B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری $P(B)=0/22, P(A)=0/2$ و $P(B|A)=0/7$ که آنگاه $P(B'|A')$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۰/۸۴ ۲) ۰/۹۰ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۹۶

پاسخ: گزینه۲

$$\left.\begin{array}{l} P(B|A)=0/7=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ P(A)=0/2, P(B)=0/22 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0/14}$$

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{1-P(A)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]}{1-0/2}=\frac{1-(0/2+0/22-0/14)}{0/8}$$

$$\Rightarrow P(B'|A')=\frac{0/72}{0/8}=\frac{9}{10}=0/9$$

سؤال ۴: اگر $2P(B)=P(B-A)$, $A\neq\phi$ آنگاه $P(A-B|A)$ کدام است.

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

$$2P(B)=P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(B)+P(A\cap B)=0\Rightarrow \begin{cases} P(B)=0 \\ P(A\cap B)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A-B|A)=P(A|A)=1$$

سؤال۵: اگر برای دو پیشامد A و B روابط $P(A'|B)=\frac{1}{4}, P(B'|A)=\frac{1}{5}$ برقرار باشد حاصل $P(A|B)+P(B|A)$ چقدر است؟

۱) $\frac{29}{20}$ ۲) $\frac{31}{20}$ ۳) $\frac{21}{20}$ ۴) $\frac{19}{20}$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{4}}$$

$$P(B'|A)=\frac{P(B'\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{5}\Rightarrow \boxed{\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow P(A|B)+P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{31}{20}$$

سؤال ۶: احتمال رخ دادن سه پیشامد دو به دو مستقل از هم A, B, C به ترتیب ۰/۴، ۰/۵ و ۰/۶ است. اگر از این سه پیشامد فقط یکی رخ داده باشد، احتمال آن که آن پیشامد B باشد کدام است؟

۱) $\frac{4}{19}$ ۲) $\frac{5}{19}$ ۳) $\frac{6}{19}$ ۴) $\frac{7}{19}$

پاسخ: گزینه۳

فرض کنیم که:

$$\begin{cases} D=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C) \\ E=A'\cap B\cap C' \end{cases}$$

با توجه به مستقل بودن A,B, C داریم:

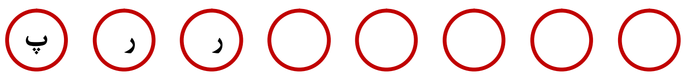
$$P(E|D)=\frac{P(A')P(B)P(C')}{P(A)P(B')P(C')+P(A')P(B)P(C')+P(A')P(B')P(C)}$$

$$\Rightarrow P(E|D)=\frac{0/6\times 0/5\times 0/4}{0/4\times 0/5\times 0/4+0/6\times 0/5\times 0/4+0/6\times 0/5\times 0/6}\Rightarrow P(E|D)=\frac{6}{19}$$

سؤال ۷: یک سکه را ۸ بار پرتاب کرده ایم. می دانیم که دقیقاً ۵ بار «رو» آمده است. احتمال اینکه سکه در پرتاب اول پشت و در پرتاب دوم و سوم «رو» آمده باشد چند است؟

۱) $\frac{9}{28}$ ۲) $\frac{15}{56}$ ۳) $\frac{5}{28}$ ۴) $\frac{5}{14}$

فرض کنید A پیشامد این باشد که در پرتاب اول «پشت» و در پرتاب دوم و سوم «رو» و B پیشامد این باشد که سکه دقیقاً ۵ بار «رو» بیاید. در این صورت داریم:



$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

سؤال ۸: یک سکه‌ی سالم را پنج بار پرتاب می کنیم. اگر دقیقاً ۳ بار رو آمده باشد احتمال اینکه در هیچ دو پرتاب متوالی رو نیامده باشد چقدر است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{1}{32}$

در این آزمایش در ۵ بار پرتاب سکه فقط در یک حالت (ر، پ، ر، پ، ر) دقیقاً ۳ بار روی سکه به صورت غیرمتوالی ظاهر می شود.

P (دقیقاً ۳ رو در ۵ پرتاب | روها متوالی نباشند) $=\frac{1}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}$

📖 سؤال ۹: هرگاه $P(A \cap B \mid B - A) = 1$ باشد حاصل $\dfrac{P(A-B \mid B-A) + P(A \cup B' \mid B')}{P(B' \mid A')}$ کدام است؟

۱) ۱ 　　 ۲) $\frac{1}{2}$ 　　 ۳) صفر 　　 ۴) $\frac{2}{3}$ 　(☺تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

☜ پاسخ: گزینه۱

$\boxed{P(A \mid B) = 1 \Rightarrow B \subset A \quad \text{چرا؟}}$

$$P(A \cap B \mid B - A) = 1 \Rightarrow B - A \subseteq A \cap B \Rightarrow B \cap A' \subseteq A \cap B \xrightarrow{A \cup}$$
$$A \cup (B \cap A') \subseteq A \cup (A \cap B) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup A') \subseteq A$$
$$\Rightarrow A \cup B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq B' \Rightarrow P(B' \mid A') = 1$$

اما است چون $A - B$, $B - A$ ناسازگارند! $P(A \cup B' \mid B')$ نیز ۱ است چرا که $B' \subseteq A \cup B'$ است!

پس جواب $\frac{0+1}{1} = 1$ می شود.

📖 سؤال ۱۰: در تجربه پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل ضرب دو تاس زوج است با کدام احتمال هر دو تاس آمده زوجند؟ (سراسری۸۱)

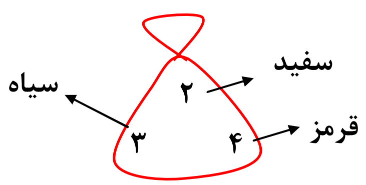
۱) $\frac{1}{2}$ 　　 ۲) $\frac{1}{3}$ 　　 ۳) $\frac{2}{3}$ 　　 ۴) $\frac{3}{4}$

☜ پاسخ: گزینه۲

از روش کاهش فضای نمونه عمل می کنیم. یعنی فضای نمونه جدید برابر حالت هایی از دو تاس است که ضرب آنها زوج است که با علامت (✓) در جدول مشخص شده و پیشامد تصادفی حالت هایی از فضای نمونه جدید است که اعداد هر دو تاس زوج باشند با علامت ☑ در جدول مشخص شده اند. بنابراین احتمال مطلوب برابر $\left(P = \frac{3 \times 3}{3 \times 3 + 6 \times 3} = \frac{1}{3}\right)$ است.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		✓		✓		✓
۲	✓	☑	✓	☑	✓	☑
۳		✓		✓		✓
۴	✓	☑	✓	☑	✓	☑
۵		✓		✓		✓
۶	✓	☑	✓	☑	✓	☑

📖 سؤال ۱۱: از کیسهٔ مقابل دو مهره یکی به یکی خارج می کنیم اگر مهرهٔ اول سیاه باشد با کدام احتمال مهرهٔ دوم قرمز است؟



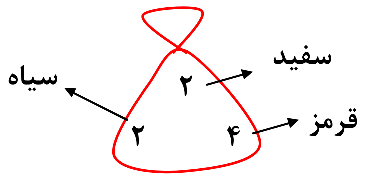
۱) $\frac{1}{3}$ 　　 ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$ 　　 ۴) $\frac{4}{9}$

☜ پاسخ: گزینه۲

با توجه به اینکه رنگ مهرهٔ اول مشخص شده بنا به روش کاهش فضای نمونه می توان کیسهٔ جدیدی با یک مهرهٔ سیاه کمتر از کیسهٔ اولیه در نظر گرفت و احتمال قرمز بودن مهرهٔ دوم با شرایط

جدید برابر $P = \dfrac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۸}{۱}} = \dfrac{۱}{۲}$ است.



📖 سؤال ۱۲: براساس آمار ۳۰٪ تصادفات در طول روز و ۴۵٪ درون شهر صورت می گیرد. در ضمن ۵٪ تصادفات در حومهٔ شهر و در طول روز رُخ می دهد. اگر تصادفی در حومهٔ شهر رُخ دهد چقدر احتمال دارد در طول شب بوده باشد؟

۱) $\dfrac{۹}{۱۱}$　　۲) $\dfrac{۴}{۹}$　　۳) $\dfrac{۱۰}{۱۱}$　　۴) $\dfrac{۱}{۲}$

☜ پاسخ: گزینه۳

	روز	شب
درون شهر	۲۵	۲۰
حومه شهر	۵	۵۰

S جدید

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۵۰}{۵۵} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

📖 سؤال ۱۳: در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر فوتبالیست هستند. دو نفر از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می کنیم. اگر اولی فوتبالیست باشد احتمال آن که دومی نیز فوتبالیست باشد چقدر است؟

۱) $\dfrac{۷}{۴۰}$　　۲) $\dfrac{۳}{۱۳}$　　۳) $\dfrac{۲}{۱۳}$　　۴) $\dfrac{۷}{۴۰} \times \dfrac{۶}{۳۹}$

☜ پاسخ: گزینه۳

اگر اولی فوتبالیست باشد نفر دوم را از بقیه افراد انتخاب می کنیم در واقع در فضای نمونه ای جدید ۳۹ نفر که ۶ نفر فوتبالیست هستند وجود دارند.

P (اولی فوتبالیست | دومی فوتبالیست) $= \dfrac{۶}{۳۹} = \dfrac{۲}{۱۳}$

📖 سؤال ۱۴: در پرتاب دو مکعب با هم مشروط بر آن که مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$　　۲) $\dfrac{۲}{۵}$　　۳) $\dfrac{۳}{۵}$　　۴) $\dfrac{۵}{۸}$

☜ پاسخ: گزینه۲

فضای نمونه ای جدید مجموع ۶ در پرتاب دو تاس می باشد.

$S = \{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\} \Rightarrow$ P (هر دو زوج) $= \dfrac{۲}{۵}$

سؤال ۱۵: **روی وجه های یک مکعب اعداد یک تا شش نوشته شده است. اگر این مکعب سه بار پرتاب شود و مجموع اعداد آن ۱۵ باشد احتمال آنکه هر سه دفعه یکسان ظاهر شده باشند، چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

پاسخ: گزینه۲

فضای نمونه ای جدید عبارت است از:

$$S=\{(۶,۶,۳),(۶,۳,۶),(۳,۶,۶),(۶,۵,۴),(۶,۴,۵),(۴,۵,۶),(۴,۶,۵),(۵,۶,۴),(۵,۴,۶),(۵,۵,۵)\}$$

$$A=\{(۵,۵,۵)\}\Rightarrow \mathrm{P(A)}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۰}$$

سؤال ۱۶: **در پرتاب دو تاس با هم می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد هستند؟**

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه۱

تعداد اعضای فضای نمونه ای جدید زیاد است. بنابراین از طریق اصل متمم حل می کنیم.

بیشتر یا مساوی ۱۰ $\rightarrow \{(۴,۶),(۶,۴),(۵,۶),(۶,۵),(۵,۵),(۶,۶)\}$

بنابراین فضای نمونه ای جدید $۳۶-۶=۳۰$ *عضو دارد. هر تاس دارای سه حالت برای عدد فرد می باشد. پس در مجموع* $۳\times۳=۸$ *حالت برای هر دو فرد وجود دارد که یکی از آنها* $(۵,۵)$ *است و بقیه در فضای نمونه ای جدید قرار دارند بنابراین داریم:*

$$P(\text{هر دو فرد}\mid\text{مجموع کمتر از ۱۰})=\frac{۹-۱}{۳۰}=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

سؤال ۱۷: **خانواده ای ۴ فرزند دارد. اگر هم پسر و هم دختر داشته باشد با کدام احتمال دقیقاً یک پسر دارند.**

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

برای داشتن هم پسر و هم دختر از کل $۱۶=۲^۴$ **حالت دو حالت که هم پسر یا هم دختر باشند قبول نیست. تعداد حالاتی که دقیقاً یک پسر باشد برابر** $۴=\binom{۴}{۱}$ **است و داریم:**

$$P(\text{یک پسر}\mid\text{هم پسر هم دختر})=\frac{n(\text{یک پسر})}{n(\text{هم پسر و هم دختر})}=\frac{۴}{۱۴}=\frac{۲}{۷}$$

سؤال ۱۸: **یک عدد از اعداد طبیعی دو رقمی انتخاب می کنیم. اگر عدد انتخابی فرد باشد، احتمال آن که مضرب طبیعی ۱۳ باشد کدام است.**

۱) $\frac{۶}{۴۵}$ ۲) $\frac{۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴۵}$ ۴) $\frac{۷}{۴۵}$

$$P(\text{مضرب ۱۳} \mid \text{عدد انتخابی فرد}) = \frac{n(\text{عدد انتخابی، فرد و مضرب ۱۳})}{n(\text{عدد انتخابی فرد})} = \frac{۴}{۴۵}$$

اعداد ۱۳ ، ۳۹ ، ۶۵ و ۹۱ اعداد طبیعی دو رقمی فرد و مضرب ۱۳ هستند.

سؤال ۱۹: از کلاسی که در آن ۴ پسر و ۴ دختر وجود دارد، ۴ نفر به ترتیب و بدون جاگذاری بیرون می کشیم. اگر دقیقاً ۳ دختر بیرون آمده باشند، احتمال این که اولین دانش آموز بیرون آمده پسر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

$$P(\text{اولی پسر} \mid \text{۳ دختر}) = \frac{n(\text{اولی پسر و ۳ تای بعدی دختر})}{n(\underbrace{\text{دقیقاً ۳ تا دختر}}_{\text{یعنی ۳ دختر و یک پسر}})}$$

انتخاب پسر اول
انتخاب ۳ دختر
جایگشت دخترها

$$= \frac{\binom{4}{1} \times \binom{4}{3} \times 3!}{\binom{4}{3} \times \binom{4}{1} \times 4!} = \frac{4\times4\times6}{4\times4\times24} = \frac{1}{4}$$

انتخاب ۳ دختر
انتخاب ۱پسر
جایگشت پسرها و دخترها

سؤال ۲۰: سه سکه را پرتاب می کنیم. اگر سکه ها همگی مثل هم نیایند، چقدر احتمال دارد دقیقاً دو تا «رو» داشته باشیم. (☺تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

$$P(\text{دقیقاً ۲ «رو»} \mid \text{سکه ها مثل هم نباشند}) = \frac{n(\text{سکه ها مثل هم نباشند و دقیقاً دو بار «رو» بیاوریم})}{n(\text{سکه ها مثل هم نباشند})} = \frac{۳}{۶}$$

صورت کسر : (ر ، ر ، پ) , (ر ، پ ، ر) , (پ ، ر ، ر)

مخرج کسر $= 2^3 - 2$ (ر ، ر، ر) , (پ ، پ، پ)

سؤال ۲۱: از بین ۵ سکه‌ی اصلی و ۴ تقلبی ، ۴ تا به تصادف انتخاب می کنیم. اگر در بین سکه های انتخابی سکه‌ی تقلبی موجود باشد، چقدر احتمال دارد این سکه تنها سکه‌ی تقلبی باشد. (☺تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

۱) $\frac{۴۰}{۱۲۱}$ ۲) $\frac{۶۴}{۱۲۱}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

$$P(\text{وجود یک سکه تقلبی} \mid \text{تنها یک سکه‌ی تقلبی}) = \frac{n(\text{یک سکه‌ی تقلبی و سه سکه‌ی اصلی})}{\underbrace{n(\text{وجود یک سکه‌ی تقلبی})}_{\text{این در واقع حداقل یک سکه‌ی تقلبی است}}}$$

$$= \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳}}{\underbrace{\binom{۹}{۴} - \underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{هر چهار تا اصل}}}} = \frac{۴\times۱۰}{۱۲۶-۵} = \frac{۴۰}{۱۲۱}$$

سؤال ۲۲: از بین ۳ پسر و ۴ دختر سه نفر را به تصادف انتخاب می کنیم. اگر گروه انتخابی شامل دختر باشد چقدر احتمال دارد که گروه پسر هم داشته باشد؟(☺تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

۱) $\frac{۱۵}{۱۷}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۴}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۷}$ ۴) $\frac{۲۷}{۳۴}$

پاسخ: گزینه۱

B یا همان شرط تست این است که گروه ۳ نفری و شامل دختر باشد پس:

$$n(B) = \underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{کل گروه های ۳ نفری}} - \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{گروه ۳ نفری بدون دختر}}$$

اما A (خواستهٔ تست) این است که گروه پسر داشته باشد پس $A\cap B$ را می خواهد یعنی گروه سه نفرهٔ انتقابی شامل دختر و پسر باشد به عبارت دیگر گروه هایی که همگی دختر یا همگی پسرند، قبول نیست!

$$P(A\mid B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{۳۵-۱-۴}{۳۵-۱} = \frac{۳۰}{۳۴} = \frac{۱۵}{۱۷}$$

سؤال ۲۳: ۱۲ کتاب متمایز را که ۴ تای آنها تاریخی اند، به طور مساوی بین ستاره، سهیل و سمیرا تقسیم می کنیم. اگر سهیل ۲ کتاب تاریخی گرفته باشد چقدر احتمال دارد که ۲ کتاب تاریخی به ستاره رسیده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

(☺تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

پاسخ: گزینه۳

A: ستاره ۲ کتاب تاریخی برسد. B: سهیل ۲ کتاب تاریخی دارد.

$$P(A\mid B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{\text{۲ کتاب تاریخی به سهیل، ۲ تای دیگر به ستاره}}{\text{۲ کتاب تاریخی به سهیل}} =$$

$$=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۴}}{\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۲}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۴}}=\frac{۶\times۱\times۲۸\times۱۵\times۱}{۶\times۲۸\times۷۰\times۱}=\frac{۱۵}{۷۰}=\frac{۳}{۱۴}$$

توضیح صورت کسر:

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲تاریخی به سهیل}}\times\overbrace{\binom{۲}{۲}}^{\text{۲تاریخی دیگر به ستاره}}\times\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{۲غیرتاریخی به سهیل}}\times\overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{۲غیرتاریخی به ستاره}}\times\underbrace{\binom{۴}{۴}}_{\text{۴ کتاب به سمیرا}}$$

توضیح مخرج:

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲تاریخی به سهیل}}\times\overbrace{\binom{۸}{۲}}^{\text{۲غیرتاریخی دیگر به سهیل}}\times\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{\text{۴کتاب به ستاره}}\times\overbrace{\binom{۴}{۴}}^{\text{۴ کتاب به سمیرا}}$$

سؤال ۲۴: از بین ۳ پسر و ۴ دختر چهار نفر را به ترتیب و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر بین ۳ نفر اول حداقل ۲ دختر داشته باشیم، چقدر احتمال دارد چهارمی پسر باشد؟(☺تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

۱) $\frac{۷}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۶}{۱۱}$ ۴) $\frac{۸}{۱۱}$

☜ پاسخ: گزینه۳

راستش تست شرطیه! پسر بودن چهارمی رو A بگیر ، B رو این که بین ۳ نفر اول دو تا دختر داشته باشیم و C اینکه بین ۳ نفر اول، سه تا دختر داشته باشیم. حالا تست از شما $P(A|B\cup C)$ رو خواسته:

$$P(A|B\cup C)=\frac{P[A\cap(B\cup C)]}{P(B\cup C)}=\frac{P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]}{P(B)+P(C)}=\frac{P(A\cap B)\cup(A\cap C)}{P(B)+P(C)}$$

$$=\frac{P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)}{P(B)+P(C)}=\frac{\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۳}}\times\frac{۲}{۴}+\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}}{\binom{۷}{۳}}\times\frac{۳}{۴}}{\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۳}}+\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}}{\binom{۷}{۳}}}$$

$$=\frac{\frac{۶\times۳}{۳۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴\times۱}{۳۵}\times\frac{۳}{۴}}{\frac{۶\times۳}{۳۵}+\frac{۴\times۱}{۳۵}}=\frac{\frac{۹}{۳۵}+\frac{۳}{۳۵}}{\frac{۲۲}{۳۵}}=\frac{\frac{۱۲}{۳۵}}{\frac{۲۲}{۳۵}}=\frac{۱۲}{۲۲}=\frac{۶}{۱۱}$$

واضحه نیما نمی تونه در چهارمین آزمایش فورش برنده باشه، آخه سامان در دفعهٔ سوم فورش دیگه حتماً طلا رو میاره. (در بدشانس ترین حالت ممکن!) پس جواب نهایی می شود:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۷۵}+\frac{۱}{۳۰۰}=\frac{۱۰۰+۱۶+۱}{۳۰۰}=\frac{۱۱۷}{۳۰۰}=\frac{۳۹}{۱۰۰}=۰/۳۹$$

سؤال ۲۵: در کیسه ای ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره خارج می کنیم و بدون آنکه به رنگ آنها نگاه کنیم مهرهٔ چهارمی را خارج می کنیم. احتمال آنکه مهرهٔ آخری سفید باشد کدام است؟ (تجربی داخلی۹۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه۱

می توان فرض کرد که سه مهرهٔ خارج شده هنوز درون جعبه حضور دارند. حال احتمال سفید بودن مهرهٔ آخر برابر است با:

$$P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

سؤال ۲۶: از ظرفیت محتوی ۵ مهرهٔ سیاه و ۶ مهرهٔ سفید سه مهره به تصادف و پشت سر هم خارج می کنیم و ملاحظه می شود که دوتای آنها سفید و دیگری سیاه است. احتمال آن که مهرهٔ اول و آخر سفید بوده باشند تقریباً کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۱۵

پاسخ: گزینه۲

$$P(A)=\frac{\overset{\text{سفید}}{\frac{۶}{۱۱}}\times\overset{\text{سیاه}}{\frac{۵}{۱۰}}\times\overset{\text{سفید}}{\frac{۵}{۹}}}{\underbrace{\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}}_{\text{یک حالت}}\times\underset{\text{حالت های ممکن}}{۳}}=\frac{۱}{۳}$$

سؤال ۲۷: پنج مهرهٔ سفید با شماره های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهرهٔ سیاه با شماره های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می آوریم. اگر مجموع شماره های هر دو مهره ۶ باشد با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟ (داخل ۹۲)

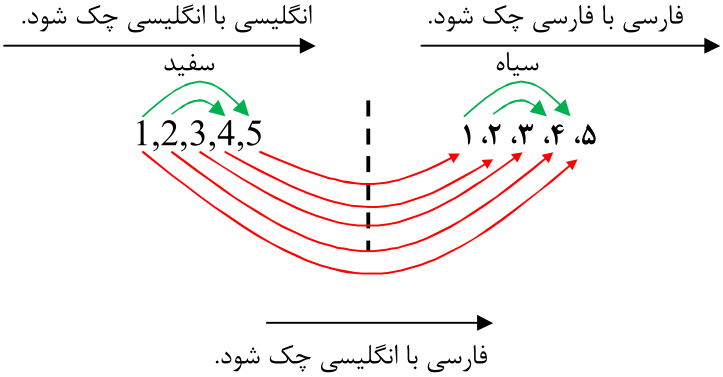
۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه۲

اگر شماره های سفید را با ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و سیاه را با 1,2,3,4,5 نمایش دهیم در این صورت فضای نمونه ای با چک کردن هر شماره با شماره های بعدی با فلش ها مشخص شده است.

همانطور که ملاحظه می کنید ۹ فلش رسم شده که ۴ تای آنها در محدودهٔ هم رنگ ها قرار دارد

و احتمال $P=\frac{۴}{۹}$ برابر است.



سؤال ۲۸: در جعبه ای ۷ مهره قرمز با شماره های ۵، ۶، ۷، ...، ۱۱ و همچنین ۴ مهرهٔ سیاه با شماره های ۲، ۳، ۵، ۷ موجود است. دو مهره به تصادف از جعبه خارج می کنیم. اگر حاصل ضرب اعداد روی مهره ها زوج باشد احتمال آنکه یکی بر دیگری بخش پذیر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۷}$ ۲) $\frac{۴}{۱۷}$ ۳) $\frac{۲}{۱۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۷}$

پاسخ: گزینه۴

کلاً ۱۱ مهره در جعبه وجود دارد و حاصلضرب وقتی زوج می شود که ۲ مهرهٔ انتخاب شده هر دو با هم فرد نباشند:

$$n(S)=\binom{۱۱}{۲}-\binom{۷}{۲}=۵۵-۲۱=۳۴$$

$$n(A)=۶\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۴}=\frac{۳}{۱۷}$$

سؤال ۲۹: تاسی همگن را با چشم بسته انداخته ایم و فقط می دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال اینکه شمارهٔ ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد کدام است؟ (خارج ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه۳

$$S=\{۲,۴,۶\},\mathrm{A}=\{۴,۶\}\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}$$

سؤال ۳۰: در پرتاب دو تاس با هم اگر اختلاف اعداد رو شده مضرب ۳ باشد چقدر احتمال دارد یکی از تاس ها مضرب ۳ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه۱

$$S=\{(۱,\boxed{۱,۴}),(۲,\boxed{۲,۵}),(۳,\boxed{۳,۶}),(۴,\boxed{۱,۴}),(۵,\boxed{۲,۵}),(۶,\boxed{۳,۶})\}\Rightarrow \mathrm{P(A)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

سؤال ۳۱: دو تاس همگن را انداخته ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد احتمال آنکه شمارهٔ یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه۱

$$\begin{cases} S=\{(۱,\boxed{۱,۲,۳,۴}),(۲,\boxed{۱,۲,۳}),(۳,\boxed{۱,۲})\} \\ \mathrm{A}=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}\end{cases}\Rightarrow \mathrm{P(A)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

📖 سؤال ۳۲: تاسی را سه بار پرتاب کرده ایم. اگر اعداد رو شده متمایز باشند چقدر احتمال دارد هر بار بزرگتر از بار قبل آمده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

☜ پاسخ: گزینه۴

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=۶\times۵\times۴=۱۲۰ \\ n(A)=\binom{۶}{۳}=۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

📖 سؤال ۳۳: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر حداقل یکی از آنها پسر باشد چقدر احتمال دارد دیگری دختر باشد؟ (تجربی خارج ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☜ پاسخ: گزینه۳

چون گفته شده حداقل یکی پسر است (شرط داده شده) بنابراین فضای نمونه ای دیگر ۴ حالت نیست بلکه عبارت است $S=\{(P,P),(P,D),(D,P)\}$ و پیشامد مطلوب عبارت است $A=\{(P,D),(D,P)\}$ یعنی؛ $P(A)=\frac{۲}{۳}$

📖 سؤال ۳۴: در خانواده ای با دو فرزند اگر فرزند اول پسر باشد چقدر احتمال دارد فرزند دوم نیز پسر باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☜ پاسخ: گزینه۱

$$S=\{(P,D),(P,P)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}$$

📖 سؤال ۳۵: در یک خانواده با ۲ فرزند اگر یکی از فرزندان پسر باشد چقدر احتمال دارد دیگری نیز پسرباشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☜ پاسخ: گزینه۲

$$S=\{(P,D),(D,P),(P,P)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}$$

📖 سؤال ۳۶: در یک خانوادهٔ سه فرزندی می دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر هستند؟ (تجربی خارج ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینه۲

$$\begin{cases} n(S)=۲^۳-\{(D,D,D)\}=۷ \\ n(A)=\{(P,D,D),(D,P,D),(D,D,P)\} \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۷}$$

سؤال ۳۷: یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال حداقل دو فرزند دختر دارد در صورتی که می دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟ (تجربی خارج ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases} n(S)=۲^۳-\{(P,P,P)\}=۷ \\ n(A)=\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۴ \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۷}$$

سؤال ۳۸: در خانواده ای با ۵ فرزند می دانیم یکی از فرزندان پسر و یکی دختر است. احتمال آن که تعداد پسرها بیشتر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳۱}$

پاسخ: گزینه۱

روش اول)
$$\left.\begin{array}{l} n(S)=۲^۵-\{(P,P,P,P,P),(D,D,D,D,D)\}\Rightarrow n(A)=۳۰ \\ A=\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}=۱۰+۵=۱۵ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{۱۵}{۳۰}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم) *کافی است از بین ۳ فرزند باقیمانده تعداد پسرها بیشتر باشد که احتمال آن $\frac{۱}{۲}$ است.*

سؤال ۳۹: در خانواده ای با ۷ فرزند اگر فرزند اول و آخر پسر و فرزند وسط دختر باشد چقدر احتمال دارد خانواده دخترهای دیگری نیز داشته باشد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

پاسخ: گزینه۴ *باید از ۴ فرزند دیگر لااقل (حداقل) یکی دختر باشد:*

$$P=۱-\frac{\binom{۴}{۰}}{۲^۴}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

سؤال ۴۰: خانواده ای دارای ۴ فرزند است. می دانیم فقط ۲ فرزند این خانواده پسر است. احتمال این که فرزند اول خانواده پسر باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

☜ پاسخ: گزینه۲

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{cases} A\cap B: \text{پ}\,,\overbrace{\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc}^{\text{یک پسر، دو دختر}} \Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{\binom{۳}{۱}}{۲^۴}=\dfrac{۳}{۱۶} \\ B: \overbrace{\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc}^{\text{دو پسر، دو دختر}} \Rightarrow P(B)=\dfrac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\dfrac{۶}{۱۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۳}{۱۶}}{\frac{۶}{۱۶}}=\frac{۱}{۲}$$

📖 **سؤال ۴۱: از میان کارت های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ سه کارت به تصادف برمی داریم.اگر جمع شماره های این ۳ کارت فرد باشد با کدام احتمال هر سه فرد هستند؟**

۱) $\frac{۴}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۹}$ ۳) $\frac{۳}{۱۹}$ ۴) $\frac{۲}{۱۹}$

☜ پاسخ: گزینه۲

جمع شماره ها وقتی فرد است که هر سه فرد باشند یا فقط یکی فرد باشد (۴ تا زوج و ۳ تا فرد داریم):

$$n(S_{\text{محدودشده}})=\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}=۱+۶\times۳=۱۹$$

حالت مورد نظر یعنی هر سه فرد فقط یکی از آنها است پس:

$$P(\text{مجموع فرد}|\text{هر سه فرد})=\frac{۱}{۱۹}$$

📖 **سؤال ۴۲: اگر ضرب ارقام رو شده در پرتاب ۲ تاس ۱۲ باشد با کدام احتمال جمع آنها ۷ است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

☜ پاسخ: گزینه۲

حاصل ضرب ۱۲ در حالت های ۳۴، ۴۳ و ۲۶ و ۶۲ تولید می شود یعنی فضای نمونه ای محدود شده ۴ عضو دارد. ما در بین این ها جمع ۷ می خواهیم که در دو حالت ۴۳ و ۳۴ رخ داده است پس:

$$P(\text{حاصل ضرب ۱۲}|\text{مجموع ۷})=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

📖 **سؤال ۴۳: در پرتاب سه تاس اگر جمع ارقام رو شده ۱۵ باشد با کدام احتمال حداقل یک رقم تکراری در بیش برآمدها وجود دارد؟**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

☜ پاسخ: گزینه۱

مجموع ۱۵ در سه تاس حالت های مختلفی دارد:

۵، ۵، ۵ (پ) ۶، ۶، ۳ (ب) ۶، ۵، ۴ (الف)

در حالت (الف) ۶ جایگشت و در (ب) سه جایگشت و در (پ) یک جایگشت داریم پس فضای نمونه ای محدود شده ۱۰=۱+۳+۶ عضو دارد. در بین این ها موارد (ب) و (پ) حداقل یک رقم تکراری دارند که روی هم ۴=۱+۳ عضو دارند. پس داریم:

$$P\,(\text{تکراری | مجموع ۱۵}) = \frac{۴}{۱۰}$$

📖 سؤال ۴۴: اگر ارقام سه تاس متمایز باشند با کدام احتمال اعداد متوالی ظاهر شده اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

☜ پاسخ: گزینه۴

تعداد عضوهای فضای نمونه ای محدود شده $n(S) = ۶\times۵\times۴ = ۱۲۰$ می باشد. حالت های ارقام متوالی عبارتند از :

$(۱,۲,۳),(۲,۳,۴),(۳,۴,۵),(۴,۵,۶)$

البته هر کدام $۳! = ۶$ حالت برای جایگشت دارند. پس $۴\times۶ = ۲۴$ حالت مطلوب وجود دارد و بنابراین:

$$P(\text{متوالی | متمایز}) = \frac{۴\times۶}{۶\times۵\times۴} = \frac{۱}{۵}$$

📖 سؤال ۴۵: علی و رضا و تقی و سعید و مهدی وارد اتاقی می شوند. اگر علی قبل از مهدی باشد با کدام احتمال سعید در بین آنها وارد می شود؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☜ پاسخ: گزینه۲

فضای نمونه ای محدود شده شامل حالت هایی است که علی قبل از مهدی باشد:

$$n\,(\text{محدودشده } S) = \frac{۵!}{۲!} = ۶۰$$

مطلوب سوال این است که سعید هم بین آنها باشد یعنی به ترتیب علی، سعید و مهدی وارد شوند:

$$n(A) = \frac{۵!}{۳!} = ۲۰$$

$$P = \frac{۲۰}{۶۰} = \frac{۱}{۳}$$

📖 سؤال ۴۶: خانواده ای دارای چهار فرزند می باشد. می دانیم که دو فرزند اول آنها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر خانواده دختر باشند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

☜ پاسخ: گزینه۲

خیلی مهم است که فراموش نکنید جنسیت فرزندان از هم مستقل است. پس وقتی میگوید دو فرزند اول، پسر هستند و حالت می خواهیم دو تای دیگر دختر باشند زیاد به حرف اولش توجه نکنید و کار خودتان را بکنید این طوری:

P (فرزند اول و دوم پسر | فرزند سوم و چهارم دختر) =

P(فرزند سوم و چهارم دختر) = P(سومی دختر) × P (چهارمی دختر) $= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

📖 سؤال ۴۷: در یک خانوادهٔ سه فرزندی می دانیم فرزند اول آنها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (تجربی داخل ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

☜ پاسخ: گزینه۴

در این جا شرطی که برای ما گذشته اند این است که فرزند اول خانواده دختر است که البته این موضوع مستقل از جنسیت دو فرزند دیگر است. پس برای تعیین احتمال این که لااقل یکی از فرزندان پسر باشد با شرط داده شده کاری نداریم و به کار خودمان می پردازیم ببینید:

P(لااقل ۱ پسر) = P(۱ پسر یا ۲ پسر) = P(۱ پسر) + P (۲پسر) $= \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$

📖 سؤال ۴۸: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

☜ پاسخ: گزینه۴

چون به رنگ موش دوم اشاره نشده است پس فرض می کنیم موش دوم انتخاب نشده است. انگار فقط دو موش انتخاب کرده ایم و می خواهیم اولی سفید و بعدی سیاه باشد:

P(اولی سفید) × P(بعدی سیاه) $= \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱۵}{۵۶}$

📖 سؤال ۴۹: در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی پی در پی و بدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی شود؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

☜ پاسخ: گزینه۱

برای آن که بتوانید از پس حل این سوال برآیید باید مفهوم سوال را خوب درک کنید. می خواهیم دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نشود پس باید ترتیب خارج شدن مهره ها با شماره های فرد و زوج یکی در میان و به صورت زیر باشد:

احتمال = P(اولی فرد) × P(دومی زوج) × P(سومی فرد) × P(چهارمی زوج) × P(پنجمی فرد)

$$=\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

سؤال ۵۰: در جعبه ای ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می کنیم. سپس از بین باقیماندهٔ مهره ها به تصادف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (خارج۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

پاسخ: گزینه۲

از آنجا که ۲ مهره را بدون رؤیت از جعبه خارج کرده ایم، پس انگار خارج نکرده ایم. و لذا احتمال سفید بودن مهرهٔ خارج شده بعدی همان احتمال سفید بودن اولین مهرهٔ خارج شده یعنی $P(A)=\frac{۳}{۷}$ است.

سؤال ۵۱: دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده زوج باشد احتمال آن که هر دو زوج باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه۱

اگر مجموع شماره ها زوج باشد باید هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=\frac{۳\times۳}{(۳\times۳)+(۳\times۳)}=\frac{۱}{۲}$$

سؤال ۵۲: یک تاس همگن را انداخته ایم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شمارهٔ ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ (داخل ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه۳

وقتی برآمد حاصل ضرب ۳ نیست یعنی فضای نمونه ای این تجربهٔ تصادفی دارای ۴ عضو $S=\{۱,۲,۴,۵\}$ است و پیشامد مطلوب $A=\{۲\}$ می باشد بنابراین: $P(A)=\frac{۱}{۴}$

سؤال ۵۳: در پرتاب دو تاس با هم تفاضل اعداد رو شده بر ۴ بخش پذیر است. احتمال آنکه عدد یک تاس مضرب ۳ باشد کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه۱

$$S=\{(۱,\boxed{۱,۵}),(۲,\boxed{۲,۶}),(۳,۳),(۴,۴),(۵,\boxed{۱,۵}),(۶,\boxed{۲,۶})\}\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۱۰}=۰/۴$$

سؤال ۵۴: خانواده ای دارای ۴ فرزند است. اگر بزرگترین فرزند خانواده پسر باشد احتمال آنکه کوچکترین فرزند خانواده نیز پسر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه۴

جنسیت فرزندان خانواده مستقل از همدیگر است، پس بزرگترین فرزند خانواده که پسر است هیچ نقش و اثری روی پسر بودن فرزند آخر ندارد. در نتیجه احتمال آن که آخر خانواده پسر باشد $\frac{۱}{۲}$ است.

سؤال ۵۵: در جعبه ای ۶ مهرهٔ سفید ۹ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهرهٔ خارج شده سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

پاسخ: گزینه۴

چون اولین مهره اشاره نشده، آن را کنار گذاشته و فکر می کنیم مهرهٔ اول از ابتدا انتخاب نشده است. پس داریم:

P(دومین مهره سفید باشد) $= P$(اولین مهره سفید باشد) $= \frac{۶}{۹+۶} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$

استقلال پیشامدها :

اساساً دو پیشامد رو مستقل می گن که روی دادن یکی روی دیگری بی اثر باشه یا احتمال وقوع یکی به وقوع یا عدم وقوع دیگری هیچ ربطی نداشته باشد. امکان داره دو پیشامد سازگار (یعنی اشتراک داشته باشند) یا ناسازگار باشند (اشتراک نداشته باشند) کلاً پیشامدهای مستقل می تونن در دو حالت تعریف بشن.

- **دستهٔ اول** پیشامدهایی هستن که از نوع آنها می شه به سادگی مستقل بودن شان را فهمید مثل احتمال قبولی دو نفر در امتحان رانندگی که قبولی هر فرد به میزان مهارت خودش ربط داره و به قبولی یا عدم قبولی فرد دیگر هیچ ربطی ناره یا رنگ چشم یک فرد به نوع گروه خونی او هیچ ارتباطی نداره.
- **دستهٔ دوم** پیشامدهایی هستند که تعیین احتمال اونها به تعداد عضوهاشون بستگی داره و باید در تعیین احتمال هر کدام، از نظریهٔ مجموعه کمک بگیریم. در این حالت امکان داره نتونی به طور مستقیم، مستقل یا وابسته بودنشان رو بفهمی که در این صورت لازمه از قانون استقلال پیشامد $[P(A\cap B)=P(A)P(B)]$ کمک بگیری. واسهٔ این که کاملاً متوجه منظورم بشی چندتا مثال در رابطه با چیزای که بهت گفتم حل می کنم.

قانون استقلال پیشامدها :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای آن که دو پیشامد A , B مستقل باشند، آن است که رابطه $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ برقرار باشد.

سؤال ۵۶: خانواده ای دارای سه فرزند است. اگر پیشامد از هر دو جنس بودن فرزندان این خانواده را با A و پیشامد دارا بودن حداکثر یک پسر را با B نمایش دهیم پیشامدهای A و B ...

۱) وابسته اند ۲) ناسازگارند ۳) جدا از هم هستند. ۴) مستقلند.

پاسخ: گزینه۴

در این مثال شرایط پیشامدها به گونه ای است که نمی توان مستقیماً نوع آنها را تعیین نمود. بنابراین لازم است که برای تعیین مستقل یا وابسته بودن آنها از شرط لازم و کافی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ استفاده کنیم:

$$A=\{(\text{د،پ،پ})،(\text{پ،د،پ})،(\text{پ،پ،د})،(\text{د،د،پ})،(\text{د،پ،د})،(\text{پ،د،د})\}\xrightarrow{n(s)=۸}P(A)=\frac{۶}{۸}$$

$$B=\{(\text{د،د،د})،(\text{پ،د،د})،(\text{د،پ،د})،(\text{د،د،پ})\}\xrightarrow{n(s)=۸}P(B)=\frac{۴}{۸}$$

$$A\cap B=\{(\text{پ،د،د})،(\text{د،پ،د})،(\text{د،د،پ})\}\xrightarrow{n(s)=۸}P(A\cap B)=\frac{۳}{۸}$$

$$P(A\cap B)=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(A)P(B)=\frac{۶}{۸}\times\frac{۴}{۸}\rightarrow$$ پیشامدهای A و B مستقلند

نکته: اگر دو پیشامد A , B مستقل باشند آنگاه پیشامدهای A',B' و پیشامدهای A و B' و پیشامدهای A' و B مستقل هستند در حالت کلی می توان گفت اگر دو پیشامد مستقل از هم باشند متمم های آنها مستقلند و متمم یکی با دیگری مستقل از هم هستند.

می خواهم با فرض مستقل بودن A , B برایت ثابت کنم که A' و B مستقلند.

$$\left.\begin{array}{l}P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\\ \qquad :P(A\cap B)=P(A)P(B)\\ P(A'\cap B)=P(B)P(A')\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A'\cap B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(۱-P(A))$$

$$\Rightarrow P(A'\cap B)=P(B)P(A')$$

حالا با فرض مستقل بودن A , B ثابت کن که پیشامدهای A',B' و پیشامدهای A و B' مستقلند.

سؤال ۵۷: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می شود؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$ (سراسری۹۶)

پاسخ: گزینه۱

پیشامد دو سکه «رو» را با A و پیشامد ۶ آمدن تاس را با B نشان می دهیم. واضح است که A و B مستقل اند. پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{\binom{۲}{۲}}{۲^۲}+\frac{۱}{۶}-\frac{\binom{۲}{۲}}{۲^۲}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۹}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

📖 **سؤال ۵۸:** اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}, P(B)=\frac{۱}{۳}$ و A , B مستقل باشند $P(A\cup B')$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

☜ پاسخ: گزینه۴

چون A,B مستقل هستند:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+۱-P(B)-(P(A)-P(A\cap B))$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=P(A)+۱-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=۱-P(B)+P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

📖 **سؤال ۵۹:** در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال رنگ این مهره ها متفاوت است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$ (سراسری خارج ۸۹)

☜ پاسخ: گزینه۴

ابتدا احتمال هم رنگ بودن دو مهرهٔ انتخابی را به دست می آوریم:

$$P\,(\text{همرنگ})=P\,(\text{هر دو سفید})+P\,(\text{هر دو سبز})=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}\binom{۸}{۱}}+\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}\binom{۸}{۱}}=\frac{۲۴}{۸۰}+\frac{۲}{۸۰}=\frac{۲۶}{۸۰}$$

احتمال غیرهمرنگ بودن برابر است با:

$$P(\text{غیرهمرنگ})=۱-P\,(\text{همرنگ})=۱-\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۵۴}{۸۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

📖 **سؤال ۶۰:** احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب برابر ۵۰٪ و ۶۰٪ و ۷۰٪ است. احتمال آن که اقلاً یکی از سه نفر در کنکور قبول شود کدام است؟ (آزمون کانون ۹۲)

۱) ۹۲٪ ۲) ۹۶٪ ۴) ۹۰٪ ۵) ۹۴٪

☜ پاسخ: گزینه۴

قبولی افراد در کنکور مستقل از یکدیگر است. پیشامد حداقل یک نفر قبول شود، متمم این است که هیچ یک قبول نشوند. بنابراین داریم:

$$P\,(\text{حداقل یکی قبول})=۱-P\,(\text{همگی مردود})=۱-۰/۵\times۰/۴\times۰/۳=۱-۰/۰۶=۰/۹۴$$

📖 سؤال ۶۱: برای رسیدن به مرحلهٔ نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دورهٔ مسابقات مقدماتی شرکت کنند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود به مرحلهٔ نهایی راه نخواهد یافت. اگر احتمال پیروزی در هر دوره بازی برای تیمی ۰/۴ باشد احتمال حضور این تیم در مرحلهٔ نهایی کدام است؟ (آزمون کانون ۹۲)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۸

☜ پاسخ: گزینه۳

احتمال بازنده شدن در هر دو دوره را حساب کرده و از یک کم می کنیم، چون اگر در یکی از دوره ها نیز ببرد، به مرحلهٔ نهایی می رود.برد و باخت در دوره ها نیز مستقل از هم هستند.

P (رفتن به مرحلهٔ نهایی) $=1-P$ (بازنده شدن در هر دو دوره) $=1-0/6\times 0/6=1-0/36=0/64$

📖 سؤال ۶۲: برای استخدام در یک شرکت لازم است افراد متقاضی در هر دو آزمون استخدامی شرکت کنند و تنها افرادی که در هر دو آزمون نمره‌ی خوبی کسب کنند استخدام می شوند. اگر احتمال قبولی در حداقل یکی از این دو آزمون برای فردی $\frac{5}{9}$ باشد احتمال استخدام این فرد چند است. (احتمال قبولی در هر دو آزمون یکسان است.)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

اگر احتمال قبولی فرد مورد در هر آزمون x باشد در این صورت جواب سؤال (احتمال قبولی در هر دو آزمون) برابر x^2 است. اما با توجه به فرض سؤال داریم

پیشامد قبولی در حداقل یک آزمون: A

$$\frac{5}{9}=1-(1-x)^2 \Rightarrow (1-x)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow 1-x=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{9}$$

📖 سؤال ۶۳: در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنها مهارت قالی بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵ (تجربی داخل ۹۰)

☜ پاسخ: گزینه۱

طبق گفته های مسئله داریم:

P (تحصیلات ابتدایی) = ۰/۶ و P (مهارت قالی بافی) = ۰/۲۵. معلوم است که این دو موضوع مستقل از هم دیگرند پس:

P (قالی بافی یا ابتدایی) $=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$=0/6+0/25-0/6\times 0/25=0/7$

📖 سؤال ۶۴: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال لااقل عمل جراحی برای یکی از ان دو نفر موفقیت آمیز است؟ (تجربی داخل ۹۵)

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

پاسخ: گزینه۴

می توان گفت احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $P(A)=0/9$ و برای شخص B برابر $P(B)=0/8$ است پس احتمال اینکه لااقل عمل جراحی برای یکی از دو نفر موفقیت آمیز باشد برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=0/9+0/8-0/9\times 0/8=1/7-0/72=0/98$$

سؤال ۶۵: احتمال تولد فرزند پسر در خانوادۀ A برابر ۰/۴ و احتمال تولد فرزند پسر در خانوادۀ B برابر ۰/۶ می باشد. احتمال آن که فرزند اول فقط یکی از این دو خانواده پسر باشد کدام است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۵۶ ۴) ۰/۶

پاسخ: گزینه۲

فرض کنیم A پیشامد پسر بودن فرزند اول خانوادۀ A , B پیشامد پسر بودن فرزند اول خانواده B باشد در این صورت داریم: $P(A)=0/4$ و $P(B)=0/6$. از آنجا که پسر بودن فرزندان اول این دو خانواده مستقل از یکدیگر است پس احتمال آن که فرزند اول فقط یکی از این دو خانواده پسر باشد برابر است با:

$$P(A)P(B')+P(A')P(B)=(0/4)(1-0/6)+(1-0/4)(0/6)$$
$$=0/4\times 0/4+0/6\times 0/6=0/16+0/36=0/52$$

سؤال ۶۶: چهار دانش آموز یک کلا س بر نیمکت نشسته اند. با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنها یکسان است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{19}{48}$ ۲) $\frac{41}{96}$ ۳) $\frac{23}{48}$ ۴) $\frac{55}{96}$

پاسخ: گزینه۲

بهتر است از روش متمم استفاده کنیم:

$$P\text{ (حداقل دو نفر در یک ماه)}=1-P\text{ (هر نفر در ماه متفاوت)}=1-\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}$$

$$=1-\frac{11\times 10\times 9}{12\times 12\times 12}=1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$$

سؤال ۶۷: از ظرفی که ۴ مهره سفید و ۵ مهرۀ سیاه دارد دو مهره را متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می کشیم. احتمال آنکه اولی سفید و دومی سیاه باشد کدام است؟

۱) $\frac{20}{81}$ ۲) $\frac{20}{72}$ ۳) $\frac{40}{81}$ ۴) $\frac{40}{72}$

پاسخ: گزینه۲

وقتی دو مهره متوالیاً بیرون آورده می شود پیشامدهای بیرون آوردن هر یک از آن ها مستقل از هم هستند. بنابراین می توان احتمال های آنها را جداگانه حساب کرد و در هم ضرب کرد. چون قید «بدون جایگذاری» آمده است پس از برداشتن یک مهره تعداد مهره ها کم می شود و دیگر آن را به کیسه بر نمی گردانیم.

$$P\text{ (اولی سفید و دومی سیاه)}=P\text{ (اولی سفید)}\times P\text{ (دومی سیاه)}=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{20}{72}$$

سؤال ۶۸: کیسه ای محتوی ۳ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ قرمز است. از این کیسه سه مهره متوالیاً و بدون جای گذاری بیرون می آوریم. احتمال این که هر سه مهره سفید باشند کدام است؟

۱) $\frac{1}{220}$ ۲) $\frac{1}{110}$ ۳) $\frac{1}{55}$ ۴) $\frac{2}{91}$

پاسخ: گزینه۳

انتخاب متوالی یعنی این که مهره ها دانه دانه از کیسه خارج شوند. در این صورت پیشامدهای ایجاد شده مستقل از هم هستند و چون بدون جایگذاری است از تعداد مهره در هر برداشت کم می شود.

$$P(\text{هر سه سفید}) = P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سفید}) \times P(\text{سومی سفید}) = \frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{2}{110}=\frac{1}{55}$$

سؤال ۶۹: ظرفی شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. مهره ای از آن خارج کرده و پس از مشاهدهٔ رنگ آن به جعبه برمی گردانیم و مجدداً مهره ای خارج می کنیم. احتمال آنکه فقط یک بار مهرهٔ سفید بیرون آمده باشد کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{6}{25}$ ۴) $\frac{12}{25}$

پاسخ: گزینه۴

برداشت متوالی مهره ها، مستقل از یکدیگر هستند. فقط یکبار سفید یعنی این که یا در مرتبهٔ اول سفید رویت شده است و در مرتبهٔ دوم سیاه و یا برعکس. چون مهره را به کیسه برگردانیم. از تعداد آنها در مرتبهٔ بعدی کم نشده است.

$$P(\text{اولی سفید و دومی سیاه}) + P(\text{اولی سیاه و دومی سفید}) =$$

$$P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سیاه}) + P(\text{اولی سیاه}) \times P(\text{دومی سفید}) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$$

سؤال ۷۰: تاس سالمی را افراد A , B , C به ترتیب پرتاب می کنند. اولین شخص که شش ظاهر کند برنده است. احتمال برنده شدن A چند برابر برنده شدن C است؟

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{216}{125}$ ۳) $\frac{36}{25}$ ۴) $\frac{91}{216}$

پاسخ: گزینه۳

$$\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{6}}{P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}}=\frac{36}{25}$$

سؤال ۷۱: اگر A , B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A\cap B)=[P(A)]^2$ باشد حاصل $P(A')$ کدام است. $(P(A)\neq 0)$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=(P(A))^2$$

طرفین را بر $P(A)\neq 0$ تقسیم می کنیم

$$\Rightarrow P(A)=P(B)\to P(A')=P(B')=1-P(B)$$

📖 **سؤال ۷۲: یک تاس همگن را چندبار پرتاب می‌کنیم تا احتمال این که ۵ یا ۶ حداقل‌یک‌بار ظاهر شود برابر $\frac{۵}{۹}$ گردد.**

$P($حداقل یک بار ۶ یا ۵$) = ۱ - P($اصلاً ۵ یا ۶ نیاید$)$

احتمال این که ۵ یا ۶ اصلاً نیاید برابر $\frac{۴}{۶}$ یا $\frac{۲}{۳}$ است و اگر **n** بار پرتاب انجام گیرد چون پرتاب ها مستقل اند برابر $(\frac{۲}{۳})^n$ است

پس: $P = ۱ - (\frac{۲}{۳})^n = \frac{۵}{۹} \to (\frac{۲}{۳})^n = \frac{۴}{۹} \to n = ۲$

📖 **سؤال ۷۳: یک خانواده دست کم چند فرزند داشته باشد تا احتمال داشتن حداقل یک پسر و حداقل یک دختر بیش از ۹۵ درصد باشد.**

فرض می کنیم تعداد فرزندان **n** است

$P($حداقل یک پسر $\cap$ حداقل یک دختر$) = ۱ - P($هیچ دختر $\cup$ هیچ پسر$)$

$= ۱ - P($هیچ دختر$) - P($هیچ پسر$) + \underbrace{P(\text{هیچ دختر} \cap \text{هیچ پسر})}_{\text{صفر}}$

$= ۱ - P($هیچ دختر$) - P($هیچ پسر$)$

$= ۱ - (\frac{۱}{۲})^n - (\frac{۱}{۲})^n = ۱ - (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$

اما $۱ - (\frac{۱}{۲})^{n-۱} > \frac{۹۵}{۱۰۰}$ پس $(\frac{۱}{۲})^{n-۱} < \frac{۵}{۱۰۰}$ و لذا $۲^{n-۱} > \frac{۱۰۰}{۵}$ و $۲^{n-۱} > ۲۰$ پس $n - ۱ \geq ۵$ و در نتیجه $n \geq ۶$

📖 **سؤال ۷۴: احتمال آنکه افراد A , B , C , D همگی در یکی از روزهای هفته بدنیا آمده باشند کدام است.**

راه حل اول: احتمال برنیا آمدن هر فرد در هر کدام از روزهای هفته مستقل از دیگر افراد بوده و برابر $\frac{۱}{۷}$ است بنابراین احتمال آن که همگی مثلاً در روز شنبه برنیا آمده باشند برابر $(\frac{۱}{۷})^۴ = \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷}$ است اما ممکن است همگی در روز یکشنبه و... جمعه نیز برنیا آمده باشند که باز هم مطلوب است پس احتمال بالا ۷ برابر می شود $۷ \times (\frac{۱}{۷})^۴ = (\frac{۱}{۷})^۳$

راه حل دوم: نفر اول را آزاد گذاشته که در هر روزی از هفته برنیا آمده باشد اما نفرات بعدی هر کدام $\frac{۱}{۷}$ احتمال دارند که در آن روز برنیا بیایند که نفر اول برنیا آمده است $P = ۱ \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = (\frac{۱}{۷})^۳$

📖 **سؤال ۷۵: چقدر احتمال دارد ۶ عضو تیم والیبال همگی متولد یک فصل از سال باشند؟**

۱) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶$ ۲) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۲}$ ۳) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$ ۴) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۸$

☜ **پاسخ: گزینه۳**

نفر اول آزاد است که هر یک از ۴ فصل را انتخاب کند پس احتمالش می شود $\frac{۴}{۴}$ اما پنج نفر دیگر باید همگی همان ماه باشند و احتمال هر کدام $\frac{۱}{۴}$ است پس داریم: $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^۵ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$

سؤال ۷۶: احتمال آنکه از بین سه نفر حداکثر دو نفر در فصل زمستان به دنیا آمده باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶۳}{۶۴}$

پاسخ: گزینه۴

از روش متمم می رویم یعنی احتمال آنکه هر سه نفر در فصل زمستان به دنیا آمده باشند را تعیین کرده و بعد جوابش را از ۱ کم می کنیم ببینید:

P (تولد هر سه نفر در زمستان باشد) $= \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow$ (تولد حداکثر دو نفر در زمستان) $= ۱ - \frac{۱}{۶۴} = \frac{۶۳}{۶۴}$

سؤال ۷۷: A , B دو پیشامد مستقل اند بطوری که وقوع همزمان آنها $\frac{۱}{۶}$ و احتمال این که هیچ کدام رخ ندهند $\frac{۱}{۳}$ است در این صورت $P(B),P(A)$ را بیابید.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B) = \frac{۱}{۳} \to P(A \cup B) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow P(A) + P(B) - \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳} \to P(A) + P(B) = \frac{۵}{۶}$$

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = \frac{۵}{۶} \\ P(A).P(B) = \frac{۱}{۶} \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۲,۳$$

ریشه های معادله با ۵ ، ۶ برابر $P(B),P(A)$ هستند

$$\to P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}, P(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

سؤال ۷۸: احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب٪۵۰ ، ٪۶۰ و ٪۷۰ است احتمال آنکه اقلاً یکی از این سه نفر در کنکور قبول شود کدام است.

چون گفته حداقل یکی از متمم آن یعنی هیچ کدام استفاده می کنیم

P (حداقل یکی قبول شود) $= ۱ -$ (هیچ کدام قبول نشوند) =

$$= P(A \cup B \cup C) = ۱ - P(A' \cap B' \cap C') = ۱ - P(A')P(B')P(C') = ۱ - ۰/۵ \times ۰/۴ \times ۰/۳ = ۰/۹۴$$

سؤال ۷۹: احتمال آنکه حداقل یک تیر از ۳ تیر شلیک شده یک تیر انداز به هدف برخورد کند ۰/۹۷۳ است احتمال اینکه تیر اول این تیرانداز به هدف برخورد کند کدام است.

P (حداقل یک تیر) $= ۱ - P$ (هیچ تیر)

احتمال برخورد تیرها یکسان است $\Rightarrow P(A) = P(B) = P(C)$

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A'\cap B'\cap C')=۱-P(A')P(B')P(C')$$

$$\Rightarrow \frac{۹۷۳}{۱۰۰۰}=۱-(P(A'))^{۳}\to (P(A'))^{۳}=\frac{۲۷}{۱۰۰۰}$$

$$\to P(A')=\frac{۳}{۱۰}\to P(A)=\frac{۷}{۱۰}$$

📖 **سؤال ۸۰:** اگر A , B دو پیشامد مستقل و $P(A-B)=P(A\cap B)$ باشد کدام نتیجه درست است؟ $(A\neq\phi)$

۱) $P(B)=۱$ ۲) $P(B)=۰$ ۳) $P(B)=\frac{۱}{۲}$ ۴) $P(B)=\frac{۱}{۳}$

☜ **پاسخ: گزینه۳**

طبق فرمول مستقل داریم:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)P(B')$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

حالا سوال می‌گوید این ها مساوی اند پس: $P(A)P(B')=P(A)P(B)\Rightarrow P(B)=P(B')$

جمع $P(B)$ و $P(B')$ باید ۱ باشد پس: $P(B)=P(B')=\frac{۱}{۲}$

📖 **سؤال ۸۱:** احتمال این که حبیب تا بیست سال دیگر زنده بماند ۰/۷۵ و احتمال اینکه برادرش تا ۲۰ سال بعد زنده بماند $\frac{۲}{۳}$ است. چقدر احتمال دارد تا بیست سال بعد فقط برادر حبیب زنده بماند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

زنده ماندن و نماندن افراد از هم مستقل است (عُمر دست خداست!) پس داریم:

P (فقط B زنده بماند) = P(A نماند و B بماند)

$$P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=\frac{۲}{۳}\times(۱-۰/۷۵)=\frac{۲}{۳}\times ۰/۲۵=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۶}$$

📖 **سؤال ۸۲:** در بین ۳ نفر با کدام احتمال روز تولد حداقل دو نفر در هفته مثل هم است؟

۱) $\frac{۱۸}{۴۹}$ ۲) $\frac{۱۹}{۴۹}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲۰}{۴۹}$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

از متمم استفاده کنیم:

P (حداقل دو نفر مثل هم) =۱ $-P$ (هیچ دو نفری مثل هم نباشند) = ۱ $-$ P (سه روز مختلف)

$$۱=\frac{۷}{۷}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۵}{۷}=۱-\frac{۳۰}{۴۹}=\frac{۱۹}{۴۹}$$

📖 سؤال ۸۳: اگر A , B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A).P(B)+P(A' \cup B')=1$ آنگاه دو پیشامد A , B نسبت به هم چگونه اند؟

۱) سازگار ۲) مستقل ۳) وابسته ۴) ناسازگار

☜ پاسخ: گزینه۲

اولاً $P(A')=1-P(A)$ ثانیاً $A' \cup B'=(A \cap B)'$ بنابراین:

$$P(A).P(B)+P(A' \cup B')=P(A).P(B)+P(A \cap B)'=1$$
$$\Rightarrow P(A).P(B)+1-P(A \cap B)=1 \Rightarrow P(A).P(B)=P(A \cap B)$$

در نتیجه A , B دو پیشامد مستقل اند.

📖 سؤال ۸۴: احتمال آن که فرزندی در خانواده «الف» با چشم هایی به رنگ روشن متولد شود ۰/۲ و همین احتمال برای فرزندی که در خانوادهٔ «ب» متولد می شود ۰/۷ است. هر دو خانواده در انتظار فرزندی هستند. احتمال آن که وضعیت روشن بودن رنگ چشم این دو فرزند یکسان باشد چند درصد است؟

۱) ۶۲ ۲) ۳۸ ۳) ۵۴ ۴) ۷۶

☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا توجه کنید که تولد فرزندان در این دو خانواده مستقل از هم است. وضعیت رنگ چشم هر دو فرزند زمانی یکسان است که یکی از دو حالت زیر پیش بیاید:

۱) هر دو فرزند با رنگ چشم روشن متولد شوند احتمال پیش آمدن این حالت برابر است با: $P_1=0/2\times 0/7=0/14$

۲) هیچکدام از این دو فرزند با رنگ چشم روشن متولد نشوند احتمال پیش آمدن این حالت برابر است با:

$$P_1=(1-0/2)\times(1-0/7)=0/24$$

چون این دو حالت ناسازگارند پس:

$$P=P_1+P_2=0/14+0/24=0/38=\%38$$

📖 سؤال ۸۵: دو تاس داریم که روی وجه های آنها اعداد {۳، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱} نوشته شده است. با کدام احتمال در پرتاب این دو تاس مجموع اعداد رو شده برابر ۲ یا ۵ است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{13}{36}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{2}{9}$

☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا توجه کنید که احتمال آمدن عدد ۱ ، عدد ۲ و عدد ۳ در پرتاب هر کدام از این تاس ها به ترتیب برابر است با: $\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6}$

همچنین توجه کنید که پرتاب هر تاس مستقل از دیگری است.

۳ حالت مطلوب امکان پذیر است:

۱) تاس اول ۲ و تاس دوم ۳ بیاید: $P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

۲) تاس اول ۳ و تاس دوم ۲ بیاید: $P_۲ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$

۳) هر دو تاس ۱ بیایند: $P_۳ = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳۶}$

این سه حالت ناسازگارند پس: $P = P_۱ + P_۲ + P_۳ = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱۳}{۳۶}$ احتمال مورد نظر

سؤال ۸۶: در تجربه پرتاب سه سکه و سه تاس به طور همزمان با کدام احتمال لااقل دو بار پشت و حداکثر دو بار شش ظاهر می شود؟

۱) $\frac{۲۱۵}{۴۳۲}$ ۲) $\frac{۲۵۹}{(۱۲)^۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۵۷۶}$

پاسخ: گزینه۱

باید احتمال این شکه ها لااقل دو بار به پشت بیایند را در احتمال سه تاس حداکثر دو بار شش ظاهر شود ضرب کنیم:

$$\begin{cases} (\text{ر ، پ ، پ}) \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳ \\ (\text{پ ، پ ، پ}) \rightarrow \frac{۳!}{۳!} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(\begin{matrix}\text{سکه لااقل یکبار}\\ \text{پشت باشد}\end{matrix}\right) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\boxed{P(\text{حداکثر دو بار شش}) = ۱ - P(\text{هرسه بار شش}) = ۱ - \frac{۱}{۶^۳} = \frac{۲۱۵}{۲۱۶}} \quad (II)$$

$$\boxed{(I) \times (II) \Rightarrow \mathrm{P} = \frac{۲۱۵}{۴۳۲}}$$

سؤال ۸۷: ده درصد از بیماران تحت جراحی یک پزشک معروف می میرند! سه بیمار در نوبت جراحی این پزشک هستند. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها بعد از عمل جراحی زنده نماند چقدر است؟

۱) ۰/۷۲۹ ۲) ۰/۲۷۱ ۳) ۰/۲۲ ۴) ۰/۷

پاسخ: گزینه۲

اگر مردن سه بیمار را A ، B ، C بگیریم، $P(A \cup B \cup C)$

ضمناً مردن بیمارها هم از همدیگر مستقل است. پس من ترجیح می دهم حالت متمم را حساب کنم. از آنجا که $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ پس:

$$\mathrm{P}(A' \cap B' \cap C') = P(A')\mathrm{P}(B')\mathrm{P}(C') = (۱ - P(A))(۱ - \mathrm{P(B)})(۱ - \mathrm{P(C)})$$

$$= \left(۱ - \frac{۱۰}{۱۰۰}\right)\left(۱ - \frac{۱۰}{۱۰۰}\right)\left(۱ - \frac{۱۰}{۱۰۰}\right) = \frac{۷۲۹}{۱۰۰۰}$$

و چون پیشامدهای دو به دو مستقل اند:

$$P(A \cup B \cup C) = ۱ - P(A' \cap B' \cap C') = ۱ - \frac{۷۲۹}{۱۰۰} = \frac{۲۷۱}{۱۰۰۰} = ۰/۲۷۱$$

📖 سؤال ۸۸: احتمال آنتن دادن گوشی های سمانه، سهیلا و سارا به ترتیب ۰/۵ ، ۰/۲۵ و ۰/۸ است. چقدر احتمال دارد در یک مهمانی تنها گوشی یکی از این سه نفر آنتن بدهد؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

☜ پاسخ: گزینه۳

خواستهٔ تست معادل این عبارت است «فقط سمانه (و اون دوتای دیگه نه)، یا فقط سهیلا (و سمانه و سارا نه) یا فقط سارا (و نه بقیه) » اینم معادل ریاضیش:

$$P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')+P(A'\cap B'\cap C)=$$
$$P(A)P(B')P(C')+P(A')P(B)P(C')+P(A')P(B')P(C)$$
$$=\frac{5}{10}\times\left(1-\frac{25}{100}\right)\left(1-\frac{8}{10}\right)+\left(1-\frac{5}{10}\right)\left(\frac{25}{100}\right)\left(1-\frac{8}{10}\right)+\left(1-\frac{5}{10}\right)\left(1-\frac{5}{10}\right)\left(\frac{8}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{40}+\frac{1}{40}=\frac{16}{40}=0/4$$

📖 سؤال ۸۹: اگر A , B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(B)=\frac{1}{3},P(A)=\frac{3}{4}$ احتمال این که هیچ یک از دو پیشامد A یا B روی ندهد کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{6}$

☜ پاسخ: گزینه۱

هیچیک از دو پیشامد A یا B روی ندهد. یعنی: $A'\cap B'$

در ضمن وقتی A , B مستقل هستند B',A' نیز مستقل هستند. یعنی داریم:

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(1-P(A))\times(1-P(B))=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$