



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

جمع بندی احتمال

پدیده هایی که نتیجه آنها به طور دقیق قابل پیش بینی نباشد اما از همه حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آنها مطلع باشیم پدیده یا آزمایش تصادفی نامیده می شوند. مثلاً در پرتاب یک سکه، قبل از آن که بر زمین قرار گیرد مشخص نیست که روی سکه ظاهر می شود یا پشت سکه؛ لذا پرتاب سکه یک آزمایش تصادفی است و یا آنکه وقتی تاسی پرتاب می شود همین داستان تکرار می شود پس پرتاب تاس یک آزمایش تصادفی است.

سؤال ۱: در یک خانواده با ۵ فرزند، A پیشامد آن است که لااقل ۳ دختر داشته باشیم و B پیشامد آن است که

حداکثر ۳ پسر داشته باشیم. پیشامد $B-A$ به کدام معنا است؟

- (۱) حداکثر ۴ دختر داشته باشیم. (۲) حداقل ۳ پسر داشته باشیم.
(۳) دقیقاً ۲ دختر داشته باشیم. (۴) دقیقاً ۲ پسر داشته باشیم.

پاسخ: گزینه ۳

پیشامد A آن است که حداقل ۳ دختر داشته باشیم یعنی یا ۳ دختر، یا ۴ دختر و یا ۵ دختر داشته باشیم.

پیشامد B آن است که حداکثر ۳ پسر داشته باشیم که یعنی حداقل ۲ دختر داشته باشیم در واقع یا ۲ دختر یا ۳ دختر و یا ۴ دختر و یا ۵ دختر داشته باشیم.

اگر پیشامد A را از B کم کنیم یعنی حالت های ۳ دختر، ۴ دختر و ۵ دختر (که همگی حالت های پیشامد A هستند) را از پیشامد B حذف کرده ایم. پس فقط ۲ دختر در آن باقی می ماند یعنی پیشامد $B-A$ برابر است با این که دقیقاً ۲ دختر داشته باشیم.

سؤال ۲: دو تاس را پرتاب می کنیم. پیشامد آمدن مجموع کمتر از ۶ را A و پیشامد آمدن هر دو زوج را B

می نامیم. پیشامد $A' \cap B'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

از قوانین مجموعه ها می دانیم که $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ، پس در واقع باید تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B)'$ را به دست آوریم. چون هر تاس ۶ حالت دارد پس تعداد کل حالات ممکن $6 \times 6 = 36$ حالت است. یعنی فضای نمونه ۳۶ عضو دارد.

پس تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B)'$ برابر است با: $36 - n(A \cup B)$

بنابراین باید تعداد اعضای $A \cup B$ را به دست آوریم و از ۳۶ کم می کنیم. مجموعه A عبارت است از پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۶ باشد پس اعضای این پیشامد به صورت زیرند:

$$\left. \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \\ (2,1), (2,2), (2,3) \\ (3,1), (3,2) \\ (4,1) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

مجموعه B عبارت است از پیشامد آن که هر دو عدد رو شده زوج باشند یعنی هر تاس ۳ حالت دارد (۲، ۴ و ۶). پس پیشامد B دارای $3 \times 3 = 9$ عضو است که فقط یکی از اعضای آن یعنی (۲، ۲) در A هم وجود دارد. پس تعداد اعضای برابر $A \cup B$ است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 9 - 1 = 18$$

$$n((A \cup B)') = 36 - n(A \cup B) = 36 - 18 = 18$$

📖 **سؤال ۳:** در پرتاب دو تاس اگر پیشامد A ، آمدن دو زوج و پیشامد B آمدن دو عدد اول باشد آنگاه $A-B$ چند عضو دارد؟

👉 پاسخ: گزینه ۲

پیشامد $A-B$ پیشامدی است که از مجموعه A اعضای مشترکش با B ، حذف شده باشد. تنها عضو مشترک A و B ، (۲، ۲) است. زیرا تنها عدد اول زوج ۲ است و اگر هر دو تاس بفراهند هم زوج و هم اول بیایند هر دو باید ۲ باشند پس:

$$n(A \cap B) = 1$$

از طرفی در پیشامد A هر تاس ۳ حالت دارد: ۲، ۴ و ۶، پس تعداد پیشامد A برابر است با:

$$\underbrace{3 \times 3}_{6, 4, 2} = 9$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 9 - 1 = 8$$

📖 احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس):

اگر S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد و A یک پیشامد در فضای S باشد آنگاه احتمال رخداد پیشامد A یک عدد حقیقی

$$P(A) \text{ نمایش می دهیم و تعریف می کنیم } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ بدیهی است که: } 0 \leq P(A) \leq 1$$

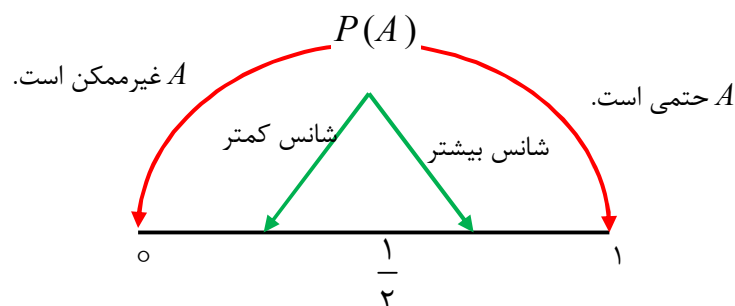
البته این تعریف در حالتی است که اعضای S قابل شمارش باشد.

💡 **تذکر:** هر چه $P(A)$ به عدد یک نزدیکتر شود شانس رخداد A بیشتر است و هر چقدر به صفر نزدیکتر شود شانس رخداد A کمتر است.

💡 **تذکر:** اگر A یک پیشامد نشدنی در فضای S باشد ($A = \emptyset$)، آنگاه $P(A) = 0$

اگر A یک پیشامد حتمی در فضای S باشد ($A = S$)، آنگاه $P(A) = 1$

به عبارتی نمودار زیر وضعیت را بهتر نشان می دهد.



سؤال ۴: در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سفید داریم. اگر ۲ مهره با هم از جعبه خارج کنیم به کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ می باشند؟

$$(۱) \frac{۳}{۷} \quad (۲) \frac{۴}{۷} \quad (۳) \frac{۶}{۷} \quad (۴) \frac{۱}{۷}$$

پاسخ: گزینه ۱

کلاً در جعبه ۷ مهره وجود دارد. اگر دو مهره با هم خارج کنیم آنگاه $n(S) = \binom{۷}{۲}$ و اگر قرار باشد هر دو مهره قرمز باشند $\binom{۴}{۲}$

حالت و هر دو مهره سفید باشند $\binom{۳}{۲}$ حالت داریم. پس مطابق تعریف احتمال داریم: A پیشامد هم رنگ بودن دو مهره خارج شده است).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۶ + ۳}{۲۱} = \frac{۹}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$$

سؤال ۵: حروف کلمه SARDAR را کنار هم قرار می دهیم. با کدام احتمال حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

$$(۱) \frac{۱}{۸} \quad (۲) \frac{۴}{۱۵} \quad (۳) \frac{۲}{۱۵} \quad (۴) \frac{۸}{۱۵}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = \frac{۶!}{۲!۲!} = \frac{۷۲۰}{۴} = ۱۸۰$$

۲ حرف تکراری A و ۲ حرف تکراری R داریم پس:

ابتدا حروف یکسان را کنار هم قرار می دهیم: S و D و RR و AA چهار دسته متمایز ایجاد می شود. در این حالت جابه جایی بین حروف یکسان با خودشان مطرح نمی باشد.

$$P(A) = \frac{۴!}{۱۸۰} = \frac{۲۴}{۱۸۰} = \frac{۲}{۱۵}$$

قوانین احتمال:

اگر A, B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند آنگاه:

$$۱) P(A') = ۱ - P(A)$$

$$۲) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$۳) P(A - B) = P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

اگر A, B دو پیشامد ناسازگار در فضای S باشند آنگاه:

$$۱) P(A \cap B) = 0$$

$$۲) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$۳) P(A - B) = P(A) \text{ , } P(B - A) = P(B)$$

سؤال ۶: اگر A , B دو پیشامد ناسازگار در فضای S باشند به طوری که $P(A - B) = \frac{3}{5}$, $P(B') = \frac{8}{10}$ مقدار

$P((A \cup B)')$ کدام است؟

$$\frac{2}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (۲)}$$

$$\frac{4}{5} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

چون A , B ناسازگار می باشند پس $P(A \cap B) = 0$ و علاوه بر آن داریم:

$$P(A - B) = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5}$$

از طرفی $P(B') = \frac{8}{10}$ پس $P(B) = 1 - \frac{8}{10} = \frac{1}{5}$ با این فرضیات مقدار احتمال مورد نظر را پیدا می کنیم.

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) \Rightarrow P((A \cup B)') = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

نکته: قضایای دمورگان برای دو مجموعه دلفواه A , B به شرح زیر است:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

سؤال ۷: اگر A , B دو پیشامد ناسازگار باشند $P(A) + P((A \cup B)')$ کدام است؟

$$1 + P(A') \text{ (۴)}$$

$$P(A') \text{ (۳)}$$

$$P(B') \text{ (۲)}$$

$$1 + P(B') \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

برای دو پیشامد ناسازگار A , B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(زیرا $P(A \cap B) = 0$ است) پس: $P(A) = P(A \cup B) - P(B)$

$$\underbrace{P(A)}_{P(A \cup B) - P(B)} + P((A \cup B)') = P(A \cup B) + P((A \cup B)') - P(B)$$

حال دو پیشامد $A \cup B$, $(A \cup B)'$ چون با هم اشتراکی ندارند ناسازگار هستند پس:

$$\underbrace{P(A \cup B) + P((A \cup B)')}_{P((A \cup B) \cup (A \cup B)')} - P(B) = \underbrace{P(A \cup B) \cup (A \cup B)'}_S - P(B) = \underbrace{P(S)}_S - P(B)$$

$$= 1 - P(B) = P(B')$$

تذکره: اگر S فضای نمونه باشد: $P(S) = 1$

به ازای هر پیشامد A همواره داریم: $P(A') = 1 - P(A)$

📖 سؤال ۸: اگر A, B دو پیشامد ناسازگار باشند به طوری که $P(A \cap B') = ۰/۵, P(A' \cap B) = ۰/۳$ مقدار

$P(A \cup B)$ کدام است؟

(۴) $۰/۹۵$

(۳) $۰/۸$

(۲) $۰/۸۵$

(۱) $۰/۶۵$

👉 پاسخ: گزینه ۳

از قوانین مجموعه ها داریم:

$$A' \cap B = B \cap A' = B - A \Rightarrow P(A' \cap B) = P(B - A) = ۰/۳$$

$$A \cap B' = A - B \Rightarrow P(A \cap B') = P(A - B) = ۰/۵$$

چون دو پیشامد A, B ناسازگارند پس $P(A \cap B) = ۰$ و داریم:

$$B - A = B, A - B = A$$

$$P(A - B) = P(A) \Rightarrow P(A) = ۰/۵$$

$$P(B - A) = P(B) \Rightarrow P(B) = ۰/۳$$

چون دو پیشامد A, B ناسازگارند پس و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = ۰/۵ + ۰/۳ = ۰/۸$$

📖 سؤال ۹: اگر $P(A \cup B) = ۲P(A \cap B)$ باشد حاصل $\frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{P(A \cup B) + P(A) + P(B)}$ کدام است؟

(۴) $\frac{۲}{۳}$

(۳) $\frac{۱}{۲}$

(۲) $\frac{۲}{۵}$

(۱) $\frac{۳}{۵}$

👉 پاسخ: گزینه ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \xrightarrow{P(A \cup B) = 2P(A \cap B)} P(A) + P(B) = 3P(A \cap B)$$

$$\frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{P(A \cup B) + P(A) + P(B)} = \frac{2P(A \cap B) + P(A \cap B)}{2P(A \cap B) + 3P(A \cap B)} = \frac{3P(A \cap B)}{5P(A \cap B)} = \frac{۳}{۵}$$

📖 سؤال ۱۰: اگر $P(A - B) = \frac{۱}{۴}, P(B - A) = \frac{۳}{۸}$ باشد حداکثر $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر است با:

(۴) $\frac{۵}{۸}$

(۳) $\frac{۵}{۶}$

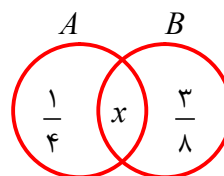
(۲) $\frac{۷}{۸}$

(۱) $\frac{۱}{۶}$

👉 پاسخ: گزینه ۳

اگر $P(A \cap B) = x$ باشد با توجه به :

$$\begin{cases} P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \\ P(B) = P(B - A) + P(A \cap B) \end{cases}$$



$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} + x}{\frac{3}{8} + x} = \frac{8x + 2}{8x + 3} = \frac{8x + 3 - 1}{8x + 3} = 1 - \frac{1}{8x + 3} = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = 1 - \alpha$$

با توجه به مثبت α ، حاصل $1 - \alpha$ زمانی بیشترین مقدار است که α کمترین مقدار ممکن خود باشد کسر α زمانی کمترین مقدار است که مخرج آن بیشترین مقدار ممکن باشد و زمانی $8x + 3$ بیشترین مقدار است که x یعنی $A \cap B$ بیشترین مقدار باشد.

از طرفی با توجه به شکل $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + x + \frac{3}{8}$ یعنی $P(A \cup B) = \frac{5}{8} + x$ چون حداکثر $P(A \cup B) = 1$ است پس حداکثر $x = \frac{3}{8}$ است پس اگر $x = \frac{3}{8}$ باشد می توانیم حداکثر $\frac{P(A)}{P(B)}$ را به دست آوریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)} \text{ مقدار} = 1 - \frac{1}{8 \times \frac{3}{8} + 3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

📖 **سؤال ۱۱:** اگر $P(A \cap B), P(A), P(B), P(A \cup B)$ چند جمله متوالی یک دنباله حسابی و A, B دو پیشامد ناسازگار باشند آنگاه $P(A \cup B)$ چند برابر $P(B)$ است؟

$$\frac{4}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۲)} \quad ۲ \text{ (۳)} \quad ۱ \text{ (۴)}$$

👉 پاسخ: گزینه ۲

برای دو پیشامد ناسازگار A, B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 بمولات این دنباله را به صورت زیر در نظر می گیریم: $a_1 = P(A \cap B), a_2 = P(A), a_3 = P(B), a_4 = P(A \cup B)$
 قدر نسبت دنباله (d) برابر است با:

$$d = a_4 - a_3 = P(A \cup B) - P(B) = P(A) + P(B) - P(B) = P(A) \Rightarrow d = P(A)$$

$$d = a_3 - a_2 = P(A) = P(B) - P(A) \Rightarrow 2P(A) = P(B) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}P(B)$$

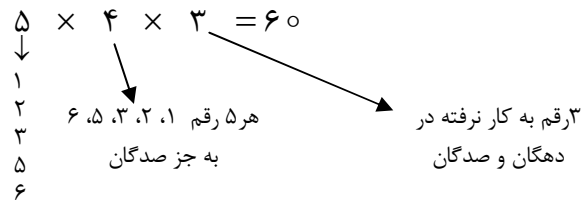
$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}P(B) + P(B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{2}P(B)}{P(B)} = \frac{3}{2}$$

📖 **سؤال ۱۲:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ بدون تکرار ارقام نوشته ایم. به کدام احتمال رقم ۴ به کار رفته است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۴)}$$

👉 پاسخ: گزینه ۱

ابتدا احتمال این که رقم ۴ به کار نرفته است را حساب می کنیم چون راحت تر است. سپس عدد حاصل را از اکم می کنیم و نتیجه برابر است با احتمال این که رقم ۴ به کار رفته باشد. تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ برابر است با:



تعداد کل اعداد ۳ رقمی بدون تکرار با ارقام ۱ تا ۶ هم برابر است با $4 \times 5 \times 6$ پس احتمال به کار نرفتن رقم ۴ برابر است با:

$$\frac{60}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{احتمال به کار نرفتن رقم ۴} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۱۳: دو رأس از یک ۸ ضلعی انتخاب می شود. احتمال آن که این دو رأس مجاور باشند کدام است؟

$$\frac{2}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۲)$$

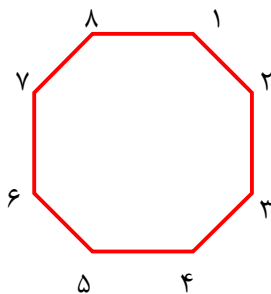
$$\frac{9}{28} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

برای انتخاب ۲ رأس از ۸ ضلعی $\binom{8}{2}$ حالت مختلف داریم پس تعداد کل حالات برابر است با: $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

برای انتخاب دو رأس مجاور از ۸ ضلعی، ۸ انتخاب داریم. رئوس ۱ و ۲،

رئوس ۲ و ۳، رئوس ۳ و ۴ و ... رئوس ۸ و ۱.



پس احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$

سؤال ۱۴: حسن و حسین در کنار ۷ نفر دیگر در یک ردیف ایستاده اند. با کدام احتمال حسن و حسین کنار هم

قرار نگرفته اند؟

$$\frac{7}{9} \quad (۴)$$

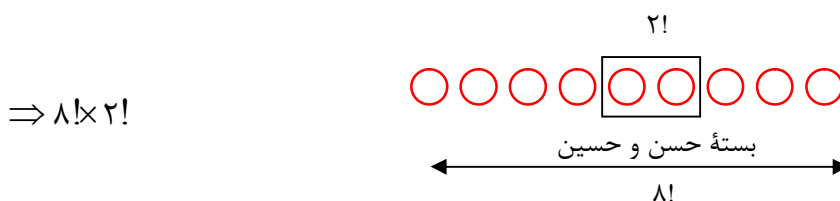
$$\frac{8}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

چون مناسبه احتمال قرار گرفتن حسن و حسین کنار هم راحت تر است آن را مناسبه و از اکم می کنیم. حسن و حسین به همراه ۷ نفر دیگر ۹ نفرند که تعداد حالات ایستادن آنها در یک صف برابر ۹! است. حال حسن و حسین را در یک بسته قرار می دهیم. این بسته به همراه ۷ نفر دیگر مجموعه ۸ شی را تشکیل می دهد که تعداد بایشگت های آن ها برابر ۸! است فود حسن و حسین نیز درون بسته ۲! حالت جایگشت دارند پس داریم:



$$\frac{8! \times 2!}{9!} = \frac{8! \times 2!}{9 \times 8!} = \frac{2}{9}$$

پس احتمال اینکه حسن و حسین کنار هم باشند برابر است با: $\frac{2}{9}$

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

در نتیجه احتمال این که حسن و حسین کنار هم نباشند برابر است با: $\frac{7}{9}$

📖 **سؤال ۱۵:** از جعبه ای شامل ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز، ۳ مهره به طور متوالی و بدون جایگذاری خارج می کنیم. به

چه احتمالی مهره اول و سوم آبی می باشد؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴) \qquad \frac{2}{9} \quad (۳) \qquad \frac{5}{18} \quad (۲) \qquad \frac{7}{18} \quad (۱)$$

👉 پاسخ: گزینه ۲

تعداد کل حالات انتقاب ۳ مهره با ترتیب از بین ۹ مهره (آبی و قرمز) برابر است با: $9 \times 8 \times 7 = 504$

برای آنکه مهره اول و سوم آبی باشد برای مهره اول ۵ حالت از بین ۵ مهره آبی و برای مهره سوم ۴ حالت از مهره های آبی باقی مانده داریم. (یکی از آبی ها فرج اولی شد!)

حالا از ۹ مهره ۲ مهره استفاده شده و ۷ مهره باقی مانده پس برای مهره دوم ۷ انتقاب داریم:

$$\begin{array}{c} \text{مهره های آبی} \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ 5 \times 7 \times 4 = 140 \\ \downarrow \\ \text{۷ مهره باقی مانده} \end{array}$$

$$\text{پس احتمال مورد نظر برابر } \frac{140}{504} = \frac{5}{18} \text{ است.}$$

📖 **سؤال ۱۶:** چهار رقم ۱، ۲، ۳، ۴ را کنار هم به طور تصادفی قرار می دهیم تا یک عدد چهار رقمی حاصل شود به کدام

احتمال عدد چهار رقمی مضرب ۶ می باشد؟

$$\frac{4}{9} \quad (۴) \qquad \frac{5}{9} \quad (۳) \qquad \frac{1}{3} \quad (۲) \qquad \frac{5}{12} \quad (۱)$$

👉 پاسخ: گزینه ۳

برای آن که عددی مضرب ۶ باشد اولاً باید زوج باشد و ثانیاً باید مضرب ۳ باشد (مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد) مجموع ۴ رقم ۱، ۲، ۳، ۴ برابر ۱۰ است پس شرط دوم برقرار است. پس کافی است شرط اول را برقرار کنیم. چون دو رقم زوج صفر و ۲ را

داریم، پس دو حالت زیر را داریم:

(۱) یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{c} \text{۲ رقم به کار نرفته} \\ \text{در یکان هزار} \\ \uparrow \\ \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3, 2, 1} \times 1 = 6 \\ \downarrow \\ \text{رقم باقیمانده که در مکان} \\ \text{های دیگر به کار نرفته} \end{array}$$

(۲) یکان ۲ باشد:

صفر و رقم به کار نرفته در یکان هزار

$$\underbrace{2 \times 2 \times 1}_{3,1} \times \underbrace{1}_{2} = 4$$

رقم باقیمانده به کار نرفته
در بقیه ارزش های مکانیدر نتیجه کل حالات مطلوب برابر $10 = 4 + 6$ است.

از طرفی تعداد کل حالات برابر است با:

صفر و رقم ۲ به کار نرفته در صدگان و یکان هزار

$$n(S) = \underbrace{3 \times 3}_{1,2,3} \times \underbrace{2}_{\text{صفر و رقم ۲ به کار نرفته در یکان هزار}} \times \underbrace{1}_{\text{رقم به کار نرفته در بقیه ارزش های مکانی}} = 18$$

$$\frac{10}{18} = \frac{5}{9} \quad \text{پس احتمال مضرب ۶ بودن برابر است با:}$$

سؤال ۱۷: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱، ۲ یک عدد ۷ رقمی ساخته ایم. به چه احتمالی تمام ۲ ها قبل از تمام ۳ ها قرار

می گیرند؟

$$\frac{1}{60} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{20} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{40} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{7!}{3!2!2!} \quad \text{تعداد کل جایگشت های این ۷ عدد برابر است با:}$$

اگر قرار باشد همه ۲ ها قبل از ۳ ها قرار بگیرند عدد حاصل به صورت زیر است که باید ۲ رقم ۱ را در ۲ تا از دایره ها قرار دهیم.

○۲○۲○۲○۳○۳○

۶ دایره داریم که باید ۲ تا از آنها را انتخاب کرده و رقم ۱ را قرار دهیم پس $\binom{6}{2} = 15$ حالت مختلف داریم. دقت کنید که حالتی را

که هر دو رقم ۱ کنار هم باشند نشمرده ایم. اگر هر دو رقم یک را در هر یک از ۶ دایره بالا قرار دهیم ۶ حالت جدید نیز به وجود می آید.

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $15 + 6 = 21$

$$\frac{21}{\frac{7!}{3!2!2!}} = \frac{21 \times 2!2!3!}{7!} = \frac{1}{10} \quad \text{پس احتمال مورد نظر برابر است با:}$$

📖 **سؤال ۸:** ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را روی ۵ کارت متفاوت می نویسیم. سپس سه کارت را به تصادف خارج می کنیم و در کنار هم قرار می دهیم تا یک عدد ۳ رقمی حاصل شود. با کدام احتمال عدد حاصل مضرب ۳ است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{6}$

👉 **پاسخ:** گزینه ۳

در واقع یک عدد ۳ رقمی بدون تکرار با ارقام ۱ تا ۵ نوشته ایم و احتمال آن که این عدد مضرب ۳ باشد را باید به دست آوریم. پس تعداد اعضای فضای نمونه ای برابر است با: $5 \times 4 \times 3 = 60$

اعدادی مضرب ۳ هستند که مجموع ارقامشان مضرب ۳ باشند پس ارقام این سه عدد یکی از ۴ حالت زیرند:

(۱) ۱، ۲، ۳ (۲) ۱، ۳، ۵ (۳) ۲، ۳، ۴ (۴) ۳، ۴، ۵

که با هر دسته ۳۱ عدد مختلف بدون تکرار ارقام می توان سافت پس تعداد حالات مطلوب $4 \times 3! = 24$ است پس احتمال مورد

$$\frac{24}{60} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ نظر برابر است با: } \frac{2}{5}$$

📖 **سؤال ۹:** از بین اعداد دو رقمی یک عدد انتخاب می کنیم. با چه احتمالی ۲ و ۳ جزء شمارنده های آن عدد نیست؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

👉 **پاسخ:** گزینه ۱

می دانیم تعداد کل اعداد دو رقمی $9 \times 10 = 90$ است از بین این ۹۰ عدد ۴۵ تا زوج هستند و ۴۵ تا فرد. از بین ۴۵ عدد فرد آنهایی را که مضرب ۳ هستند باید حذف کنیم. اگر به این ۴۵ عدد دقت کنیم مطابق زیر می بینیم که از هر سه تای آنها یکی مضرب ۳ است.

$$\underbrace{11, 13, 15, 17, 19, 21, \dots, 95, 97, 99}$$

پس تعداد اعداد مضرب ۳ در این ۴۵ عدد برابر ۱۵ است. $\frac{45}{3} = 15$

اگر این ۱۵ عدد مضرب ۳ را از ۴۵ عدد فرد کم کنیم اعدادی باقی می ماند که نه شمارنده ۲ دارند (زوج نیستند) و نه مضرب ۳ هستند. پس تعدادشان برابر است با $45 - 15 = 30$

$$\frac{30}{90} = \frac{1}{3} \text{ در نتیجه احتمال مورد نظر برابر } \frac{1}{3} \text{ است.}$$

📖 **سؤال ۱۰:** از میان ۵ زوج متأهل دو نفر را انتخاب می کنیم. احتمال آن که دو نفر زن و شوهر باشند چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{5}$

👉 **پاسخ:** گزینه ۲

حالت مطلوب حالتی است که ۲ نفر انتخاب شده یک زوج باشند. چون ۵ زوج داریم پس تعداد حالات مطلوب برابر ۵ $\binom{5}{1} = 5$

$$\frac{5}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{1}{9} \text{ است در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با: } \frac{1}{9}$$

سؤال ۲۱: از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰، سه رقم به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال جمع آنها زوج است؟

$$\frac{2}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر A پیشامد جمع ۳ عدد زوج باشد آنگاه حالات زیر را داریم:

(۱) هر سه عدد زوج باشند: تعداد حالات این دسته برابر است با انتخاب ۳ عدد از بین ۵ عدد زوج.

$$\binom{5}{3} = 10 : (۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰)$$

(۲) دو عدد فرد و یک عدد زوج باشد باید ۲ عدد فرد از ۵ عدد فرد موجود و ۱ عدد زوج از میان ۵ عدد زوج انتخاب کرد:

$$\binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 50$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر $60 = 10 + 50$ است.

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \quad \text{در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:}$$

سؤال ۲۲: از بین ۱۲ نفر که ۵ نفر آنها خانم می باشند، ۲ نفر انتخاب می شوند، با چه احتمالی حداقل یکی از انتخاب

شونده ها خانم اند؟

$$\frac{36}{66} \quad (۴)$$

$$\frac{56}{66} \quad (۳)$$

$$\frac{45}{66} \quad (۲)$$

$$\frac{15}{66} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر حداقل یکی از انتخاب شده ها خانم باشد یعنی ۱ نفر یا هر دو نفر خانم باشند که این تعداد حالات برابر است با:

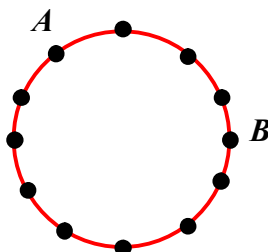
$$\binom{5}{1} \times \binom{7}{1} + \binom{5}{2} = 5 \times 7 + 10 = 45$$

یک خانم یک آقا ۲ خانم

$$P(A) = \frac{45}{\binom{12}{2}} = \frac{45}{66} \quad \text{پس:}$$

سؤال ۲۳: ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره به تصادف قرار گرفته اند. رئوس مثلث ها روی این ۱۰ نقطه است. با کدام

احتمال AB ضلع مثلث است؟



$$\frac{8}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

اگر AB ضلع مثلث باشد پس A, B رأس مثلث هستند. پس رأس سوم را باید از بین ۸ رأس باقی مانده انتخاب کنیم. پس تعداد حالات آن برابر ۸ تا است. از طرفی تعداد اعضای فضای نمونه برابر انتخاب ۳ رأس برای مثلث از میان ۱۰ رأس است

$$P(A) = \frac{8}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3!}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} \quad \text{پس:}$$

سؤال ۲۴: در یک جعبه ۳ مهره سبز، ۲ مهره زرد و ۵ مهره سیاه وجود دارد. هرگاه ۲ مهره را با هم خارج کنیم با

کدام احتمال این ۲ مهره هم رنگ نمی باشند؟

$$\frac{32}{45} \quad (۴)$$

$$\frac{28}{45} \quad (۳)$$

$$\frac{29}{45} \quad (۲)$$

$$\frac{31}{45} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

اگر بفرضیم ۲ مهره غیر هم رنگ انتخاب کنیم سه صورت مختلف داریم: سبز و زرد، سبز و سیاه، زرد و سیاه. که تعداد حالت های انتخاب آنها برابر است با:

$$\binom{4}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 2 + 3 \times 5 + 2 \times 5 = 6 + 15 + 10 = 31$$

$\swarrow \quad \searrow$ $\swarrow \quad \searrow$ $\swarrow \quad \searrow$
 ۱ سبز ۱ زرد ۱ سبز ۱ سیاه ۱ زرد ۱ سیاه

$$P(A) = \frac{31}{\binom{10}{2}} = \frac{31}{45} \quad \text{در نتیجه:}$$

سؤال ۲۵: می خواهیم ۳ نفر را از میان ۴ کارمند و ۲ مدیر یک شرکت انتخاب کنیم. با کدام احتمال لااقل یک مدیر

انتخاب می شود؟

$$\frac{3}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{8}{10} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

برای مناسبه تعداد اعضای پیشامد ۲ حالت زیر را داریم:

$$\binom{2}{1} \times \binom{4}{2} = 2 \times \frac{4 \times 3}{2} = 12 \quad (۱) \text{ دقیقاً یک مدیر و ۲ کارمند انتخاب کنیم:}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 ۱ مدیر ۲ کارمند

$$\binom{2}{2} \times \binom{4}{1} = 1 \times 4 = 4 \quad (۲) \text{ دقیقاً ۲ مدیر و ۱ کارمند انتخاب کنیم:}$$

$$P(A) = \frac{16}{\binom{6}{3}} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10}$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر $16 = 12 + 4$ است و در نتیجه:

تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۶ نفر کل

📖 **سؤال ۲۶:** در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز داریم. از این جعبه ۳ مهره را با هم خارج می کنیم. با کدام احتمال

حداقل ۲ مهره آبی داریم:

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} \quad (۴) \qquad \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \quad (۳) \qquad \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} \quad (۲) \qquad \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} \quad (۱)$$

👉 **پاسخ:** گزینه ۳

برای مناسبه تعداد اعضای پیشامد حالات زیر را داریم:

$$\binom{3}{1} \times \binom{4}{2}$$

دو آبی یک قرمز

(۱) ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باشد:

$$\binom{4}{3}$$

(۲) هر سه مهره آبی باشد:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از بین همه مهره ها

📖 **سؤال ۲۷:** ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب فیزیک و ۶ کتاب شیمی در یک قفسه کنار هم قرار دارند. با کدام احتمال هیچ

دو کتاب شیمی کنار هم نمی باشند؟

$$\frac{7! \times 6!}{13! \times 2} \quad (۴) \qquad \frac{7! \cdot 8!}{13! \times 2} \quad (۳) \qquad \frac{7! \times 7!}{13!} \quad (۲) \qquad \frac{7! \times 6!}{13!} \quad (۱)$$

👉 **پاسخ:** گزینه ۳

ابتدا همه کتابها به جز کتاب های شیمی را درون دایره های زیر به ۷! منظم می کنیم:

△○△○△○△○△○△○△○△

برای آن که هیچ دو کتاب شیمی کنار هم نباشند کافی است که در مکان مثلث ها مانند شکل قرار بگیرند. پیدر این ۶ کتاب شیمی در

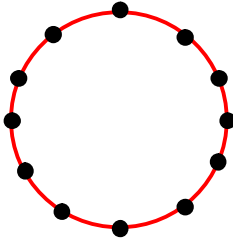
این ۸ مثلث به $P(8, 6)$ طریق امکان پذیر است. پس تعداد حالات مطلوب برابر $7! \times P(8, 6)$ است.

از طرفی تعداد اعضای فضای نمونه برابر ۱۳! است پس:

$$P(A) = \frac{7!P(8,6)}{13!} = \frac{7! \times \frac{8!}{2!}}{13!} = \frac{7!8!}{2!13!}$$

سؤال ۲۸: نقاط مقابل رئوس یک ۱۲ ضلعی منتظم می باشند. از بین مثلث هایی که رئوس آنها سه تا از این نقاط می

باشند یک مثلث انتخاب کرده ایم. با چه احتمالی این مثلث متساوی الاضلاع است؟

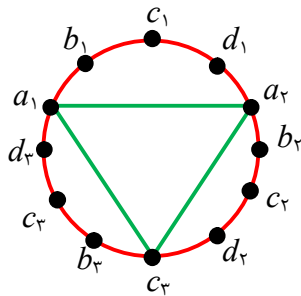


$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{55} \\ (2) & \frac{2}{55} \\ (3) & \frac{1}{44} \\ (4) & \frac{1}{22} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۱

مانند شکل هر ۳ نقطه ای که بین هر ۲ تای آنها

سه نقطه دیگر حاصله باشد تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می دهد:



در شکل $\frac{12}{3} = 4$ دسته از این نقاط سه گانه وجود دارد: $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3)$

پس تعداد متساوی الاضلاع ها برابر ۴ است در نتیجه:

$$P(A) = \frac{4}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{\frac{12 \times 11 \times 10}{3!}} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

با هر ۳ نقطه یک مثلث ایجاد می شود.

احتمال متمم پیشامد A:

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه ای S و A' متمم آن باشد داریم:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

یا

$$P(A') = 1 - P(A)$$

از احتمال متمم در مسائلی استفاده می کنیم که شمارش اعضای پیشامد A، طولانی و وقت گیر باشد. همانطور که در آنالیز ترکیبی هم اشاره شد به کلمات «حداقل» و «حداکثر» در صورت تست ها بسیار توجه کنید. این کلمات اغلب بوی استفاده از متمم را می دهند! مخصوصاً عبارت «حداقل یکی».

سؤال ۲۹: در جعبه ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم با

کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نیستند؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{28}{45} & (2) & \frac{29}{45} \\ (3) & \frac{31}{45} & (4) & \frac{32}{45} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۳

برای حل این سوال از روش متمم استفاده می کنیم که در آن هر دو مهره انتقابی هم رنگ هستند پس داریم:

$$P(A') = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 + 1 + \frac{5 \times 4}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{4 + 10}{45} = \frac{14}{45} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$

سؤال ۳۰: در کیسه ای ۳ مهره سیاه، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج

می کنیم. احتمال این که حداقل ۲ مهره هم رنگ باشند کدام است؟

- (۱) ۰/۶ (۲) ۰/۴ (۳) ۰/۳ (۴) ۰/۷

پاسخ: گزینه ۴

حداقل ۲ مهره از ۳ مهره انتقابی هم رنگ باشد یعنی ۲ مهره یا هر ۳ مهره هم رنگ باشد. چون مناسبه این حالات وقت گیر است از روش متمم مسئله را حل می کنیم. متمم پیشامد فوق آن است که ۳ مهره را از رنگ های مختلف برداریم. از طرفی فضای نمونه ای هم انتقاب ۳ مهره از کل مهره ها (۱۰ = ۳ + ۴ + ۳ مهره) است بنابراین:

$$P(A') = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \times 4 \times 3}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{3 \times 4 \times 3}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 7!}} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

سؤال ۳۱: احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام

احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می شوند؟ (تجربی خارج از کشور ۹۶)

- (۱) ۰/۹۲ (۲) ۰/۹۴ (۳) ۰/۹۶ (۴) ۰/۹۸

پاسخ: گزینه ۳

دو پیشامد قبولی فرد A و قبولی فرد B نسبت به هم مستقل هستند پس داریم:

$$P(\underbrace{\text{قبولی فرد A}}_A) = 0.84, \quad P(\underbrace{\text{قبولی فرد B}}_B) = 0.75$$

$$P(\text{لااقل یکی از آنان قبول شوند}) = \begin{cases} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) & \text{روش اول} \\ = 0.84 + 0.75 - 0.84 \times 0.75 = 0.96 \\ = 1 - P(\text{هیچکدام قبول نشوند}) = 1 - \underbrace{0.16 \times 0.25}_{0.04} = 0.96 & \text{روش دوم} \end{cases}$$

سؤال ۳۲: در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده متفاوت است؟ (تجربی ۹۶)

$$\frac{5}{22} (1) \quad \frac{3}{11} (2) \quad \frac{7}{22} (3) \quad \frac{4}{11} (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

هر سه مهره خارج شده باید رنگهای متفاوت داشته باشند داریم:

$$P = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{4 \times 5 \times 3}{12 \times 11 \times 10} = \frac{3}{11}$$

سؤال ۳۳: در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده همرنگ هستند؟ (تجربی خارج از کشور ۹۶)

$$\frac{41}{120} (1) \quad \frac{37}{60} (2) \quad \frac{79}{120} (3) \quad \frac{31}{60} (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$P(\text{همرنگ بودن دو مهره خارج شده}) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{79}{120}$$

سؤال ۳۴: از کیسه ای محتوی ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال بین مهره های خارج شده مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟ (خارج ۹۵)

$$\frac{7}{22} (1) \quad \frac{17}{44} (2) \quad \frac{9}{22} (3) \quad \frac{19}{44} (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

متمم این احتمال حالتی است که در بین مهره های انتخاب شده هم مهره سفید هست و هم مهره سیاه:

$$P(A') = \frac{\overbrace{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}^{1 \text{ مهره سفید و } 2 \text{ مهره سیاه}} + \overbrace{\binom{5}{2} \binom{3}{1}}^{2 \text{ مهره سفید و } 1 \text{ مهره سیاه}} + \overbrace{\binom{5}{1} \binom{4}{2}}^{1 \text{ مهره سفید و } 2 \text{ مهره قرمز}}}{\binom{12}{3}} = \frac{30 + 40 + 60}{220} = \frac{13}{22}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{13}{22} = \frac{9}{22}$$

سؤال ۳۹: در کیسه ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است. اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم. با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره از مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟ (داخل ۹۵)

- (۱) $\frac{۱۷}{۲۲}$ (۲) $\frac{۱۹}{۲۲}$ (۳) $\frac{۳۹}{۴۴}$ (۴) $\frac{۴۱}{۴۴}$

پاسخ: گزینه ۴

$$P = 1 - \frac{\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = 1 - \frac{۱۰ + ۴ + ۱}{۲۲۰} = 1 - \frac{۳}{۴۴} = \frac{۴۱}{۴۴}$$

سؤال ۴۰: هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف و متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می شوند؟ (داخل ۹۴)

- (۱) $۰/۱$ (۲) $۰/۱۲$ (۳) $۰/۱۵$ (۴) $۰/۲$

پاسخ: گزینه ۱

بایگشت یک در میان اعداد زوج و فرد مطلوب است. چون تعداد آنها یکسان است، تعداد حالت های $۳! \times ۳! \times ۲$ می شود پس:

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۶!} = ۰/۱$$

سؤال ۴۱: در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ (داخل ۹۳)

- (۱) $۰/۱۲$ (۲) $۰/۱۵$ (۳) $۰/۱۸$ (۴) $۰/۲۴$

پاسخ: گزینه ۲

$$P = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۲}{۲}}{\binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۲}} = \frac{۱۰ \times ۶ + ۳ \times ۱}{۲۸ \times ۱۵} = \frac{۶۳}{۲۸ \times ۱۵} = \frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$$

سؤال ۴۲: کیسه ای محتوی ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است ۳ مهره با هم و به تصادف از کیسه خارج می کنیم. احتمال اینکه دقیقاً یک مهره سفید باشد کدام است.

$$P = \left(\frac{۶}{۱۴} \times \frac{۸}{۱۳} \times \frac{۷}{۱۲} \right) \times ۳$$

یک مهره سفید یعنی می تواند اولی یا دومی یا سومی سفید باشند پس:

سؤال ۴۳: از کیسه ای محتوی ۴ مهره سیاه و ۷ مهره قرمز دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جاگذاری خارج می کنیم احتمال آن که دومی قرمز باشد کدام است.

$$P = \left[\frac{۴}{۱۱} \times \frac{۷}{۱۰} \right] + \left[\frac{۷}{۱۱} \times \frac{۶}{۱۰} \right] = \frac{۲۸ + ۴۲}{۱۱ \times ۱۰} = \frac{۷}{۱۱}$$

اولی سیاه دومی قرمز اولی قرمز دومی قرمز

چون دو مورد مهره اول صحبتی نشده است و فقط گفته احتمال قرمز بودن مهره دومی کدام است می توان این طور فرض کرد که این مهره اولین مهره ای است که از جعبه خارج شده است یعنی مهره اول هرچه بیاید خوب است و احتمال آن یک است و احتمال قرمز

$$P = \frac{7}{4+7} = \frac{7}{11}$$

بودن مهره دوم برابر است با

سؤال ۴۴: رئیس منشی و ۴ نفر از کارمندان یک اداره به تصادف دور یک میزگرد می نشینند با کدام احتمال رئیس و منشی مقابل یکدیگر قرار می گیرند.

رئیس در یکی از صندلی ها بطور دلخواه می نشیند و برای منشی ۵ صندلی خالی است احتمال این که بطور تصادفی مقابل رئیس قرار بگیرد برابر $\frac{1}{5}$ است یا می توان طبق آنچه در آنالیز ترکیبی توضیح دادیم رئیس و منشی را در یک قالب در نظر می گیریم و جایگشت

$$P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} \quad \text{۴ کارمند را به عنوان حالت های مطلوب در نظر می گیریم}$$

سؤال ۴۵: از میان ۱۰ جفت کفش متمایز دو لنگه به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه آن دو لنگه از یک جفت باشند کدام است.

۱۰ جفت کفش یعنی ۲۰ لنگه متمایز بنابراین فضای نمونه ای این تجربه تصادفی عبارت است از انتخاب ۲ لنگه از میان ۲۰ لنگه یعنی $n(s) = \binom{20}{2}$ اما پیشامد مطلوب فقط در ۱۰ حالت رخ می دهد یعنی باید از ۱۰ جفت کفش یک جفت را انتخاب کنیم.

$$P(A) = \frac{\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

یا می توان گفت که لنگه اول را برمی داریم و حالا لنگه دوم از میان ۱۹ لنگه انتخاب می شود که یکی از آن ۱۹ لنگه موجود با این

$$P(A) = 1 \times \frac{1}{19} = \frac{1}{19} \quad \text{لنگه جفت است}$$

سؤال ۴۶: از میان ۵ جفت کفش متمایز ۳ لنگه به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آنکه در میان آنها یک جفت موجود باشد کدام است.

فضای نمونه ای عبارت است از انتخاب ۳ لنگه از میان ۱۰ لنگه موجود یعنی $n(s) = \binom{10}{3}$ ابتدا یک جفت از ۵ جفت را انتخاب می

$$P = \frac{\binom{5}{1} \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 8}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \quad \text{کنیم ۸ لنگه می ماند و سپس یک یک لنگه از میان ۸ لنگه پیدا می کنیم}$$

سؤال ۴۷: از میان ۶ جفت کفش متمایز ۴ لنگه انتخاب می کنیم احتمال آنکه هیچ جفتی در میان آنها نباشد را حساب کنید.

ابتدا از میان ۱۲ لنگه یک لنگه را به تصادف برمی داریم که احتمال آن $\frac{12}{12}$ است و آن دقت از بین ۱۱ لنگه باقیمانده فقط ۲۱۰

مطلوب هستند چون یکی از آنها جفت قبل است یعنی احتمال مطلوب برای انتخاب دومین لنگه $\frac{10}{11}$ است حالا ۱۰ لنگه باقی مانده

است ولی برای اینکه نه جفت اولی باشد نه جفت دومی باید آن را از میان ۸ لنگه دیگر انتخاب کنیم یعنی $\frac{8}{10}$ و سرانجام لنگه آخر را از میان ۹ لنگه باقیمانده انتخاب می کنیم ولی فقط ۶ تای آنها مطلوب هستند یعنی $\frac{6}{9}$

$$P(A) = \frac{12}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{8}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{16}{33}$$

یا می توان گفت اول ۴ جفت از بین ۶ جفت انتخاب می کنیم سپس از هر کدام یک لنگه را انتخاب می کنیم

$$\frac{\binom{6}{4} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{16}{33}$$

سؤال ۴۸: اگر ده جفت کفش به روی هم ریخته شود و از بین آنها ۳ لنگه به تصادف انتخاب کنیم احتمال این که در بین ۳ لنگه یک جفت کفش باشد کدام است.

$$\begin{cases} n(A) = \binom{10}{1} \binom{18}{1} \\ n(s) = \binom{20}{3} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{19}$$

سؤال ۴۹: اگر ۸ جفت کفش بر روی هم ریخته شود و از بین آنها ۴ لنگه به تصادف انتخاب می کنیم احتمال این که در بین آنها دقیقاً یک جفت کفش باشد کدام است.

در محاسبه $n(A)$ ابتدا یک جفت از ۸ جفت را انتخاب می کنیم سپس از ۱۴ لنگه باقی مانده یکی را انتخاب می کنیم و جفت آن را نباید انتخاب کنیم پس برای چهارمین لنگه انتخابی ۱۲ لنگه کفش داریم ولی تا این جا در انتخاب دو لنگه ترتیب را نیز در نظر گرفته ایم چون ترتیب مهم نیست پس حاصل را بر ۲ تقسیم می کنیم.

$$\begin{cases} n(A) = \binom{8}{1} \times \frac{14 \times 12}{2} \\ n(s) = \binom{16}{4} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{24}{65}$$

سؤال ۵۰: ۵ جفت کفش در یک جا کفش قرار دارد ۵ لنگه برمی داریم با چه احتمالی هیچ جفت کفش انتخاب نشده است.

تعداد اعضای فضای نمونه $\binom{10}{5}$ است پیشامد مطلوب برداشتن ۵ لنگه کفش است که هیچ جفتی در بین آنها نیست به ۲ طریق می توانیم تعداد حالت های آن را حساب کنیم.

(۱) از آنجا که ۵ جفت کفش داریم و می خواهیم ۵ لنگه برداریم به گونه ای که هیچ کدام جفت نباشند باید از هر جفت دقیقاً یک لنگه را انتخاب کنیم یعنی برای هر جفت کفش دو حالت داریم یا لنگه چپ را انتخاب می کنیم یا لنگه راست (نه هر دو را) پس تعداد حالت ها 2^5 است.

(۲) برای انتخاب اول ۱۰ لنگه داریم برای انتخاب دوم ۸ لنگه (چون لنگه انتخابی در بار اول و جفت آن را نمی توانیم انتخاب کنیم) برای بار سوم ۶ انتخاب و برای بار چهارم ۴ و برای بار پنجم ۲ انتخاب این حالت ها را در هم ضرب می کنیم و چون ترتیب مهم نیست بر ۵! تقسیم می کنیم پس

$$n(A) = \frac{1 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}{5!} = 2^5 \Rightarrow P(A) = \frac{2^5}{\binom{10}{5}} = \frac{8}{63}$$

سؤال ۵۱: اگر ۸ جفت کفش بر روی هم ریخته شود و از بین آنها ۴ لنگه به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه در بین آنها حداقل یک جفت کفش باشد کدام است.

مجموع حالت های دقیقاً یک جفت و دقیقاً دو جفت تعداد حالت های حداقل یک جفت را ایجاد می کند پس احتمال دقیقاً یک جفت را با احتمال دقیقاً دو جفت جمع می کنیم

$$\binom{8}{1} \times \frac{14 \times 12}{2} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{4}} = \frac{24}{65} + \frac{1}{65} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$$

سؤال ۵۲: ۵ زن و ۵ مرد در یک صف ایستاده اند احتمال این که یک در میان باشند کدام است.

$$\frac{2 \times 5! \times 5!}{10!} = \frac{1}{\binom{10}{5}}$$

سؤال ۵۳: ۱۰ کلید مختلف داریم که فقط با دو تای آنها می توان قفلی را باز کرد سه کلید به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آنکه قفل باز شود کدام است.

هنگامی قفل باز نمی شود که ۳ کلید از میان ۸ کلید نادرست انتخاب شوند بنابراین

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{56}{120} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

سؤال ۵۴: ۲۰ دانش آموز در ۴ ردیف مساوی روی نیمکت های یک کلاس نشسته اند دو نفر به تصادف از کلاس انتخاب می کنیم احتمال آنکه هر دو از یک ردیف باشند کدام است.

چون ۲۰ نفر در ۴ ردیف مساوی روی نیمکت نشسته اند پس در هر ردیف ۵ نفر نشسته اند بنابراین برای محاسبه تعداد حالات مطلوب ابتدا تعداد حالاتی را که می توان دو نفر را از بین ۵ نفر در یک ردیف انتخاب کرد پیدار می کنیم و سپس آن را در ۴ ضرب می کنیم چون اگر هر دو از ردیف اول انتخاب شوند مطلوب است یا ردیف دوم و یا...

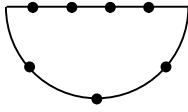
$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}} \times 4 = \frac{4}{19}$$

یا می توانیم بگوییم نفر اول برای انتخاب آزاد است اما نفر دوم از بین ۱۹ نفری انتخاب می شود که تنها ۴ نفرشان با نفر قبل در یک ردیف قرار دارند پس

$$P(A) = 1 \times \frac{4}{19} = \frac{4}{19}$$

سؤال ۵۵: از نقاط شکل زیر سه نقطه به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آنکه نقاط انتخاب شده تشکیل مثلث دهند کدام است.

مثلث هنگامی ایجاد می شود که سه نقطه روی خط راست نباشند



$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} - \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{35 - 4}{35} = \frac{31}{35}$$

سؤال ۵۶: دو رأس از یک پنج ضلعی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال این که رأس های دو سر یک قطر باشند کدام است.

پیشامد مطلوب تعداد قطرهای ۵ ضلعی است که برابر ۵ است

$$P(A) = \frac{5}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{2}$$

یا می توان گفت یک رأس از ۵ ضلعی را در نظر می گیریم به ۴ رأس دیگر که وصل کنیم ۲ قطر و ۲ ضلع ایجاد می کند پس اگر ۲ رأس را انتخاب کنیم $\frac{1}{2}$ احتمال دارد که قطر باشد.

سؤال ۵۷: سوال بالا را برای یک ۶ ضلعی تکرار کنید.

$$\text{یک ۶ ضلعی } \frac{6(6-3)}{2} = 9 \text{ قطر دارد}$$

$$P(A) = \frac{9}{\binom{6}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

یا می توان گفت هر رأس ۶ ضلعی را به ۵ رأس دیگر وصل می کنیم ۳ تا از آنها قطر ایجاد می کند پس $\frac{3}{5}$ احتمال دارد دو رأس را به هم وصل کنیم ایجاد قطر کند.

سؤال ۵۸: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ یک عدد ۴ رقمی کوچکتر از ۵۳۰۰ می سازیم احتمال اینکه زوج باشد کدام است.

تعداد اعداد کوچکتر از ۵۳۰۰ را بدست می آوریم.

$$1) \text{ رقم هزارگان ۵ باشد: } \begin{array}{c} 1 \times 2 \times 2 \times 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 5 \quad \{2, 0\} \end{array}$$

$$\Rightarrow n(s) = 4 + 12 = 16$$

$$2) \text{ رقم هزارگان ۵ نباشد: } \begin{array}{c} 2 \times 3 \times 2 \times 1 \\ \downarrow \\ \{2, 3\} \end{array}$$

حالا تعداد اعداد زوج کوچکتر از ۵۳۰۰ را بدست می آوریم.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 2 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0, 2 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 3 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 5 & & \end{array}$$

یا $\{0, 2\}$

رقم هزارگان ۵ باشد (۱)

$$2 \times 2 \times 1 \times 1 \Rightarrow n(s) = 4 + 2 + 2 = 8$$

رقم هزارگان ۵ نباشد و رقم یکان صفر (۲)

$$1 \times 2 \times 1 \times 1$$

رقم هزارگان ۵ نباشد و رقم یکان ۲ (۳)

سؤال ۵۹: در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند احتمال اینکه در بین سخنرانی دو فرد مورد نظر b , فقط یک نفر سخنرانی کند کدام است.

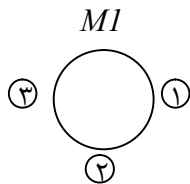
فضای نمونه ای انتخاب ۲ نوبت از ۵ نوبت برای سخنرانی a , b است و پیشامد مطلوب آن است که a , b نوبت های $(3, 1)$ یا $(4, 2)$ و یا $(5, 3)$ را داشته باشند پس

$$P(A) = \frac{3}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}, \quad |A| = 3$$

سؤال ۶۰: ۲ زوج جوان در یک میزگرد نشسته اند احتمال آنکه هر خانمی روبه روی شوهرش باشد کدام است.

فرض کنید مرد شماره ۱ در یک جا نشسته باشد. همسرش ۳ جا برای نشستن دارد که یکی از آن ها روبروی شوهرش است پس $\frac{1}{3}$

احتمال دارد این خانم روبروی همسرش باشد اگر این اتفاق بیافتد یعنی مرد شماره ۲ نیز روبروی همسرش است.



سؤال ۶۱: ۳ زوج جوان دور یک میزگرد نشسته اند احتمال آن که هر خانمی روبروی شوهرش باشد کدام است.

مرد شماره یک هر جا بنشیند $\frac{1}{5}$ احتمال دارد همسرش روبه رویش باشد اگر این اتفاق بیفتد مرد شماره ۲ هر جای دیگر بنشیند $\frac{1}{3}$

احتمال دارد که همسرش روبه رویش باشد و اگر این ۲ اتفاق رخ دهد ناخودآگاه زوج سوم روبروی هم اند پس احتمال $\frac{1}{15}$ است.

$$\frac{1}{15} = \frac{1 \times 2 \times (3-1)!}{(6-1)!} = \frac{1}{15}$$

جابه جا شدن هر زن و شوهر $\rightarrow 2! \times (3-1)! \leftarrow$ زوج دور یک میزگرد

هر طریق نشستن را ۲ بار حساب کرده ایم یا $\leftarrow 2$

۶ نفر دور یک میزگرد $\leftarrow (6-1)!$

سؤال ۶۲: ۳ نفر اسامی خود را روی کارت هایی نوشته و داخل کیسه ای می ریزیم سپس هر کدام یک کارت خارج می کنند احتمال آن که هیچ کدام اسم خود را بیرون نیاورند کدام است.

$$P(A) = \frac{3! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right)}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

سؤال ۶۳: از بین تمام اعداد چهار رقمی زوج حاصل از جایگشت تمام ترکیبات مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می گردد با کدام احتمال این عدد با یک رقم زوج شروع و به یک رقم زوج ختم می شود.

تعداد اعداد چهار رقمی زوج که با ارقام داده شده می توان ساخت برابر است با :

$$1. \text{ صفر در یکان است } 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$2. \text{ صفر در یکان نیست } 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

پس $60 = 24 + 36$ که تعداد اعضای فضای نمونه ای است.

اکنون پیشامد مطلوب را بررسی می کنیم.

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{صفر} \\ \text{نمی تواند} \\ \text{باشد}}} \times \underbrace{2 \times 3}_{\substack{\text{دو رقم در ابتدا و انتها} \\ \text{صرف شده}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{صفر یا یک} \\ \text{رقم زوج} \\ \text{دیگر}}} = 24$$

$$\text{و لذا احتمال مورد } 24/60 = 0.4$$

سؤال ۶۴: با حروف کلمه «اتومبیل» یک کلمه ۴ حرفی به تصادف می نویسیم احتمال این که کلمه نوشته شده با حرف «م» شروع شود کدام است.

تعداد کلمه های ۴ حرفی که با حروف کلمه اتومبیل می توان نوشت برابر $4! \times \binom{7}{4}$ است دو پیشامد مطلوب این کلمه ها با حروف ۲ شروع می شوند و لذا لازم است سه حرف دیگر از ۶ حرف باقیمانده انتخاب شود که با هم جابه جا نیز می شوند یعنی

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \times 3!}{\binom{7}{4} \times 4!} = \frac{1}{7} \text{ پس } \binom{6}{3} \times 3!$$

سؤال ۶۵: در جعبه ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است؟

$$\frac{17}{42} \quad (4)$$

$$\frac{10}{21} \quad (3)$$

$$\frac{9}{14} \quad (2)$$

$$\frac{8}{21} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

انتخاب ۱ مهره سفید از ۴ مهره

انتخاب ۲ مهره غیرسفید از ۵ مهره

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{2+3}{2}}{\binom{2+3+4}{3}} = \frac{4 \times \frac{5 \times 4}{2}}{\frac{9!}{6!3!}} = \frac{40}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 6}} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

📖 **سؤال ۶۶:** هر یک از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آنها را

کنار هم قرار می دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می باشد؟

(۱) ۰/۳ (۲) ۰/۴ (۳) ۰/۵ (۴) ۰/۶

👉 **پاسخ:** گزینه ۲

تعداد اعضای فضای نمونه ای برابر است با:

یکی از ۴ کارت باقیمانده

$n(S) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

یکی از ۵ کارت ۵، ۴، ۳، ۲، ۱

یکی از ۳ کارت باقیمانده

پس با سه کارت انتخابی می توان ۶۰ عدد سه رقمی ساخت. از طرفی می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد. حال باید دنبال اعداد سه رقمی بگردیم که جمع ارقامشان بر ۳ بخش پذیر باشد. حال باید دنبال اعداد سه رقمی بگردیم که جمع ارقامشان بر ۳ بخش پذیر باشد. کار همین جا است زیرا هیچ راه میانبری وجود ندارد و باید تمامی حالات را بررسی کنیم. پس از بررسی نه پندار کوتاه دسته های سه تایی $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}$ جمع ارقامشان بر ۳ بخش پذیر است. با هر کدام از این دسته ها می توان $3! = 6$ عدد سه رقمی ساخت پس تعداد کل اعداد سه رقمی بخش پذیر بر

$$P(A) = \frac{24}{60} = \frac{4}{10} \quad \text{۳ برابر ۴ است و داریم:}$$

📖 **قانون جمع احتمالات:**

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد آنگاه احتمال آن که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد $P(A \cup B)$ بوده و فرمول آن به صورت زیر است:

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{\text{احتمال رخداد } A \text{ یا } B} = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{احتمال رخداد } A, B \text{ با هم}}$$

اکثر بچه ها نمی دانند چه زمانی از فرمول فوق باید استفاده کنند. باید به آنها بگوییم یکی از نشانه ها این است که در صورت سوال «یا» برای جدا کردن دو عمل مختلف می آید. مثلاً: چقدر احتمال دارد علی یا حسن در کنکور قبول شوند؟ همچنین یکی دیگر از نشانه ها وجود عبارت «حداقل یکی از دو» در صورت مسأله است.

📖 **دو پیشامد ناسازگار:**

دو پیشامد A ، B را ناسازگار گویند هرگاه اشتراک آنها تهی باشد ($A \cap B = \emptyset$) در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

سؤال ۶۷: از مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دو زیر مجموعه متفاوت ۳ عضوی به تصادف انتخاب میکنیم با چه احتمالی این ۲ زیرمجموعه متمم هم هستند.

تعداد اعضای فضای نمونه تعداد راه های انتخاب ۲ زیرمجموعه ۳ عضوی متمم از M است از طرفی تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی M ، $\binom{6}{3} = 20$ است پس $n(s) = \binom{20}{2}$ تعداد پیشامدهای مطلوب انتخاب یک زیرمجموعه ۳ عضوی و متممش است ۲۰

زیرمجموعه ۳ عضوی داریم هر کدام را انتخاب کنیم مجبوریم متممش هم نیز انتخاب کنیم پس $n(A) = \frac{\binom{20}{1}}{2}$ تقسیم بر ۲ به خاطر این است که B و B' هر زوج مجموعه متمم ۲ بار حساب شده است پس

$$P(A) = \frac{\frac{20}{2}}{20 \times 19} = \frac{1}{19}$$

یا می توان گفت اولین زیرمجموعه ۳ عضوی که انتخاب می کنیم مهم نیست چه باشد از ۱۹ مجموعه ۳ عضوی دیگر پیشامد مطلوب انتخاب متمم زیرمجموعه انتخابی در ابتدا است پس $P(A) = \frac{1}{19}$

سؤال ۶۸: از مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دو زیرمجموعه متفاوت به تصادف انتخاب می کنیم با چه احتمالی این ۲ زیرمجموعه متمم هم هستند.

مجموعه M ، 2^6 زیرمجموعه دارد تعداد راه های انتخاب ۲ مجموعه متفاوت از ۶۴ مجموعه است یعنی

$$n(s) = \binom{64}{2} \quad n(s) = \binom{64}{2} \text{ پیشامد های مطلوب انتخاب هر مجموعه و متممش است یعنی } \frac{\binom{64}{2}}{2} \text{ حالت دارد پس } P(A) = \frac{1}{63}$$

یا می توان گفت اولین زیرمجموعه هر چه باشد مهم نیست از ۶۳ زیرمجموعه دیگر پیشامد مطلوب انتخاب متمم زیرمجموعه اولی است پس احتمال $\frac{1}{63}$ است.

سؤال ۶۹: در کیسه ای ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ (هر شماره روی یک کارت) موجود است سه کارت به تصادف و هم زمان بیرون می آوریم احتمال این که مجموع سه عدد رو شده فرد باشد کدام است.

یا باید هر سه عدد فرد باشند یا دو تا زوج و یکی فرد

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

سؤال ۷۰: سه قطعه چوب از میان ۵ قطعه چوب با طول های ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه بتوان با این ۳ قطعه چوب یک مثلث ساخت کدام است.

واضح است که $S = \binom{5}{3} = 10$ از طرفی حالت های مطلوب برابر $\{3, 5, 7\}, \{3, 7, 9\}, \{5, 7, 9\}$ است. بنابراین احتمال مورد نظر $\frac{3}{10}$ است.

سؤال ۷۱: یک تاس را سه مرتبه پرتاب می کنیم. احتمال آن که حداقل یک بار ۵ یا ۶ بیاید چقدر است؟

$$\frac{11}{27} \quad (۴)$$

$$\frac{19}{27} \quad (۳)$$

$$\frac{20}{27} \quad (۲)$$

$$\frac{8}{27} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

احتمال آنکه اصلاً ۵ یا ۶ نیاید برابر است با:

$$P(A') = \frac{4^3}{6^3}$$

$$P(A) = 1 - \frac{4^3}{6^3} = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

سؤال ۷۲: در پرتاب سه تاس احتمال آنکه مجموع سه عدد آمده از ۱۶ بیشتر نباشد چقدر است؟

$$\frac{107}{108} \quad (۴)$$

$$\frac{53}{54} \quad (۳)$$

$$\frac{35}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{211}{216} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

بهتر است از احتمال متمم استفاده کنیم. یعنی ابتدا احتمال آن را حساب کنیم که مجموع اعداد سه تاس بزرگتر از ۱۶ شود پس حالات زیر را فوایم داشت:

$$A' = \{(5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5), (6, 6, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{4}{6^3} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54}$$

سؤال ۷۳: دو تاس را پرتاب کرده ایم می دانیم حداقل یکی از تاس ها عدد فرد آمده است. احتمال آنکه دیگری نیز

عدد فرد آمده باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

در این مسئله تعداد کل حالات در واقع تعداد حالاتی است که حداقل عدد یکی از دو تاس فرد آمده باشد. برای محاسبه آن تعداد حالاتی که هر دو تاس زوج باشند را محاسبه کرده و از ۳۶ حالت کم می کنیم:

$$\frac{3}{\text{زوج}} \times \frac{3}{\text{زوج}} = 9 \Rightarrow n(S) = 36 - 9 = 27$$

$$n(A) = \frac{3}{\text{فرد}} \times \frac{3}{\text{فرد}} = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

سؤال ۷۴: سه تاس را پرتاب کرده و اعداد آمده را به جای a , b , c در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ قرار می

دهیم. به چه احتمالی عدد «-۱» یکی از ریشه های این معادله می باشد؟

$$\frac{5}{72} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{216} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{18} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

چون عدد «۱-» یکی از ریشه های معادله است پس در معادله صرق می کند یعنی:

$$a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \Rightarrow a + c = b$$

پس تعداد حالات مطلوب تعداد سه تایی های مرتبی است که مجموع مؤلفه اول و سوم برابر مؤلفه دوم باشد بنابراین:

$$b = 1 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

$$b = 2 \Rightarrow (1, 2, 1)$$

$$b = 3 \Rightarrow (1, 3, 2), (2, 3, 1)$$

$$b = 4 \Rightarrow (1, 4, 3), (2, 4, 2), (3, 4, 1)$$

$$b = 5 \Rightarrow (1, 5, 4), (2, 5, 3), (3, 5, 2), (4, 5, 1)$$

$$b = 6 \Rightarrow (1, 6, 5), (2, 6, 4), (3, 6, 3), (4, 6, 2), (5, 6, 1)$$

$$\Rightarrow n(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$n(S) = 6^3 = 216 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

سؤال ۷۵: سه تاس را پرتاب می کنیم. احتمال این که حداقل یکی از اعداد تاس ها از ۳ بیشتر باشد چقدر است؟

$$\frac{5}{6} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{7}{8} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

بهتر است از احتمال متمم استفاده کنیم بدین ترتیب که ابتدا احتمال آن را حساب کنیم که عدد هیچکدام از تاس ها بیشتر از ۳ نباشد پس عدد هر تاس ۱، ۲ و ۳ می تواند باشد یعنی ۳ حالت دارد پس:

$$P(A') = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

سؤال ۷۶: سه تاس سبز، سفید و زرد را پرتاب می کنیم. احتمال آنکه که عدد تاس سبز از مجموع اعداد دو تاس

دیگر بزرگتر باشد چقدر است؟

$$\frac{5}{54} \quad (4)$$

$$\frac{6}{25} \quad (3)$$

$$\frac{2}{27} \quad (2)$$

$$\frac{1}{10} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = 6^3 = 216 \text{ حالات برابر است با:}$$

حالات مطلوب به صورت زیر است اگر عدد تاس ها از چپ به راست مربوط به تاس های سبز، سفید و زرد باشد:

$$A = \{(3, 1, 1), (4, 1, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1), (5, 1, 1), (5, 1, 2), (5, 1, 3), (5, 2, 1),$$

$$, (5, 2, 2), (5, 3, 1), (6, 1, 1), (6, 1, 2), (6, 1, 3), (6, 1, 4), (6, 2, 1), (6, 2, 2),$$

$$, (6, 2, 3), (6, 3, 1), (6, 3, 2), (6, 4, 1)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

سؤال ۷۷: در یک مسابقه تیراندازی احتمال آنکه تیر فرد A به هدف برخورد کند $\frac{3}{5}$ و احتمال آنکه تیر فرد B به

هدف برخورد کند $\frac{1}{2}$ است. احتمال آنکه حداقل یکی از آنها تیر را به هدف بزنند چقدر است؟

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

منظور سوال معادله $P(A \cup B)$ می باشد پس: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

چون تیراندازی و اصابت تیر این دو نفر به هدف مستقل از هم است بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

سؤال ۷۸: در پرتاب سه تاس مجموع اعداد تاس ها برابر ۱۵ شده است. احتمال آنکه این سه عدد برابر نباشند

چقدر است؟

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

برای شمارش تعداد کل حالات میبایست همه آنها را بنویسیم:

$$S = \{(3, 6, 6), (4, 5, 6), (4, 6, 5), (5, 4, 6), (5, 5, 5), (5, 6, 4), (6, 3, 6), (6, 4, 5), (6, 5, 4), (6, 6, 3)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 10$$

$$P(A') = \frac{1}{10} \quad \text{احتمال این که سه عدد برابر باشند برابر است با:}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \quad \text{بنابراین احتمال آنکه ۳ عدد برابر نباشند برابر است با:}$$

سؤال ۷۹: یک تاس را ۴ بار پرتاب می کنیم. احتمال آنکه هر بار عددی بزرگتر از دفعه قبل بیاید چقدر است؟

$$\frac{5}{432} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{1296} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{432} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{1296} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = 6^4 \quad \text{تعداد کل حالات برابر است با:}$$

برای آنکه اعداد آمده در تاس هر بار عددی بزرگتر از دفعه قبل باشد در واقع اعداد باید صعودی باشند و این معادل آن است که با ارقام ۱ تا ۶ یک عدد ۴ رقمی با ارقام صعودی بنویسیم پس کافی است از ۶ عدد ۴ تا انتخاب کنیم که با آنها فقط یک عدد با ارقام صعودی می توان نوشت پس:

$$n(A) = \binom{6}{4} = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{6^4} = \frac{15}{1296} = \frac{5}{432}$$

سؤال ۸۰: سکه ای را ۴ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن که حداقل ۲ بار رو بیاید چقدر است؟

$$\frac{11}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول) سکه یا ۲ بار، یا ۳ بار یا ۴ بار باید رو بیاید که تعداد حالت هایش برابر است با:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4 \times 3}{2} + 4 + 1 = 6 + 4 + 1 = 11$$

تعداد کل حالات برابر $2^4 = 16$ است پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{11}{16}$ است.

روش دوم) از اصل متمم استفاده می کنیم از تعداد کل حالات نامطلوب را کم می کنیم:

$$2^4 - \binom{4}{0} - \binom{4}{1} = 16 - 1 - 4 = 11$$

$\nwarrow$ سکه ۴ رو نیایند $\swarrow$ ۲ بار رو بیاید

پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{11}{16}$ است.

سؤال ۸۱: با کدام احتمال از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند اول پسر می باشند؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

چون هر فرزند ۲ حالت دارد (دختر یا پسر) پس تعداد کل حالت ها برابر است با: 2^4

اگر ۲ فرزند اول پسر باشند پس برای ۲ فرزند اول فقط ۱ انتخاب داریم (فقط پسر) و برای ۲ فرزند بعدی هم ۲ انتخاب (دختر یا پسر) پس تعداد حالت هایش برابر است با: $1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{1}{4}$

سؤال ۸۲: سکه ای را ۶ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن که تعداد رو آمدن ها بیشتر از تعداد پشت آمدن ها باشد چقدر است؟

$$\frac{9}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{32} \quad (۳)$$

$$\frac{11}{32} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{16} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

باید ۴ بار یا ۵ بار یا ۶ بار «رو» بیاید پس تعداد حالت هایش برابر است با:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \frac{6 \times 5}{2} + 6 + 1 = 15 + 6 + 1 = 22$$

چون هر سکه ۲ حالت دارد پس تعداد کل اعضای فضای نمونه $2^6 = 64$ است. پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

سؤال ۸۳: سکه ای را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آمدن روی سکه از $۰/۹۵$ بیشتر شود؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنید سکه را n بار پرتاب کرده ایم تعداد کل اعضای فضای نمونه ۲^n می شود تعداد حالت هایی که هیچ سکه ای رو نیاید و همه پشت بیايند برابر $\frac{1}{۲^n}$ است. در نتیجه احتمال آن که حداقل یک سکه رو بیاید برابر است با $۱ - \frac{1}{۲^n}$. پس این عدد باید از $۰/۹۵$ بیشتر باشد:

$$۱ - \frac{1}{۲^n} \geq \frac{۹۵}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۵}{۱۰۰} \geq \frac{1}{۲^n} \Rightarrow ۲^n \geq ۲۰ \Rightarrow n \geq ۵$$

پس سکه را حداقل ۵ بار باید پرتاب کنیم تا احتمال آمدن رو از ۹۵ درصد بیشتر شود.

سؤال ۸۴: در پرتاب دو تاس سالم چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس بزرگ تر از ۴ و تاس ها غیرمساوی ظاهر شوند.

حالت هایی که مجموع دو تاس ۴ یا کمتر از ۴ یا اعداد تاس ها مساوی باشند را A می نامیم

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\Rightarrow P = 1 - \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۲۶}{۳۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

سؤال ۸۵: در پرتاب ۳ تاس سالم احتمال آن که فقط دو تاس از سه تاس مساوی باشند چقدر است.

احتمال اینکه دو تاس عدد مساوی نشان دهند برابر است با $\frac{۶}{۳۶}$ و از طرفی تاس سوم باید عددی غیر از دو تاس اول نشان دهد که آن

هم احتمال برابر $\frac{۵}{۶}$ دارد یعنی یکی از حالت ها را نمی تواند نشان دهد مثلاً اگر دو تاس اول $(۱,۱)$ آمده باشد تاس سوم به ۵ حالت می تواند بر زمین بنشیند بنابراین احتمال آن که تاس های شماره ۱ و ۲ مثل هم و تاس شماره ۳ عدد متفاوت را نشان دهد برابر است با $\frac{۵}{۶} \times \frac{۶}{۳۶}$ اما ممکن است تاس شماره ۱ و ۳ مشابه و تاس ۲ متفاوت باشد و یا تاس ۲ و ۳ مشابه و تاس اول متفاوت باشد یعنی ۳

$$\text{حالت وجود دارد و احتمال بالا باید در ۳ ضرب شود } ۳ \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۶}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

سؤال ۸۶: وقتی دو تاس با هم پرتاب می شوند با چه احتمالی مجموع اعداد رو شده برابر ۷ است.

زوج اعدادی که مجموعشان برابر ۷ است به صورت زیر می باشند:

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

ضمناً فضای نمونه ای در پرتاب دو تاس ۳۶ عضو دارد بنابراین احتمال مطلوب برابر $\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶}$ است.

سؤال ۸۷: برای مجموع اعداد رو شده در دو تاس جدول زیر بسیار مفید است.

مجموع اعداد رو شده	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

مجموع اعداد رو شده در ۷ ماکزیمم تعداد حالات را دارد که برابر ۶ می باشد این جدول به راحتی می تواند به ذهن سپرده شود چون در حالتی که مجموع اعداد رو شده کم تر مساوی ۷ است. تعداد حالت ها از مجموع اعداد رو شده یکی کمتر است و برای بزرگتر از ۷ نیز دوباره یکی یکی از ۶ یک واحد کم می شود. بطور کلی در پرتاب دو تاس احتمال این که مجموع k بیاید با احتمال این که مجموع $k-14$ بیاید برابر است.

نکته: اگر دو تاس همگن را با هم پرتاب کنیم احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده برابر x باشد برابر است با:

$$P = \frac{x-1}{36} \leftarrow_{x \leq 7} P(X=x) = \frac{6-|x-7|}{36} \rightarrow_{x > 7} \frac{13-x}{36}$$

سؤال ۸۶: اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم با چه احتمالی مجموع اعداد رو شده حداکثر ۷ است.

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

پرتاب سکه

نکته: اگر n سکه سالم را با هم پرتاب کنیم احتمال آن که دقیقاً k بار شیر (یا بگویید خط هیچ فرقی نمی کند) بیاید برابر است با

$$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

تذکر: اگر به جای سکه بگویند خانواده ای دارای n فرزند است احتمال آن که دقیقاً k فرزند پسر (یا دختر) باشد باز هم فرمول بالا برقرار است.

تذکر: هر پیشامدی که مانند پرتاب سکه یا تولد بچه ... دارای ۲ وضعیت هم شانس باشد از قاعده بالا پیروی می کند.

مثال: تاس همگنی را در نظر بگیرید احتمال آمدن عدد زوج و فرد در این تاس $\frac{1}{3}$ است بنابراین اگر به عنوان مثال

$$P = \frac{\binom{6}{2}}{3^6}$$

این تاس را ۶ بار پرتاب کنیم احتمال آمدن دقیقاً ۲ بار زوج برابر است با:

نکته: اگر یک آزمایش تصادفی دو حالت را (که احتمال پیروزی و شکست آن برابر است) n بار تکرار کنیم احتمال آن که k بار

$$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پیروز شویم برابر است با

نکته: در مواقعی که محاسبه احتمال نامطلوب مسأله بسیار راحت تر از آن چه باشد که مطلوب مسأله است بهتر است آن را حساب

کنیم و از یک کم کنیم (شکست) $1 - P = (\text{موفقیت})$

نکته: در پرتاب n سکه سالم احتمال آن که حداقل (اقلاً یا دست کم) یک «شیر» ظاهر شود برابر است با احتمال آن که حداکثر

$$n-1 \text{ «خط» ظاهر شود و برابر است با } 1 - \frac{1}{2^n}$$

سؤال ۸۷: در پرتاب ۴ سکه سالم با هم احتمال این که فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید کدام است.

$$\frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

سؤال ۸۸: در یک خانواده با ۷ فرزند، حالت های زیر را بیابید.

- (۱) همه پسر باشند. $\binom{7}{7} = 1$
- (۲) دو تا پسر باشند. $\binom{7}{2} = 21$
- (۳) سه تا پسر باشند. $\binom{7}{3} = 35$
- (۴) حداقل ۵ پسر باشند. $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 29$

سؤال ۸۹: خانواده ای دارای ۵ فرزند است. احتمال آن که این خانواده حداکثر ۴ دختر داشته باشد کدام است.

حداکثر ۴ دختر یعنی یا هیچ دختر یا یک دختر یا دو دختر یا ۳ دختر یا ۴ دختر داشته باشد

$$P(A) = \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4}}{2^5} = \frac{31}{32}$$

$$P(\text{حداکثر ۴ دختر}) = 1 - P(\text{هر ۵ نفر دختر}) = 1 - \frac{\binom{5}{5}}{2^5} = \frac{31}{32}$$

سؤال ۹۰: یک سکه را آن قدر پرتاب می کنیم تا احتمال آمد حداقل یک شیر بیش از ۹۹ درصد باشد.

$$1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100} \rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \rightarrow 2^n > 100 \rightarrow n \geq 7$$

سؤال ۹۱: احتمال اینکه در یک خانواده با ۶ فرزند تعداد دخترها بیشتر باشد کدام است.

تعداد دخترها بیشتر است یعنی یا ۴ دختر باشند یا ۵ دختر یا ۶ دختر

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{2^6} = \frac{15 + 6 + 1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

می توان گفت احتمال مساوی بودن تعداد دخترها و پسرها را حساب کرده و متمم آن را نصب می کنیم و چون یا تعداد پسرها یا دخترها برابر است و یا تعداد دخترها بیشتر است یا پسرها

$$P(\text{مساوی بودن تعداد پسرها و دخترها}) = 1 - P(\text{نامساوی بودن تعداد پسرها و دخترها})$$

$$= 1 - \frac{\binom{6}{3}}{2^6} = \frac{44}{64} \left\{ \begin{array}{l} \frac{22}{64} \\ \frac{22}{64} \end{array} \right.$$

سؤال ۹۲: خانواده های A و B هر کدام دارای ۳ فرزند هستند. احتمال آن که تعداد دخترهای خانواده A از تعداد دخترهای خانواده B بیشتر است چقدر است؟

ابتدا احتمال مساوی بودن تعداد دخترهای خانواده های A و B را حساب می کنیم

$$P = \underbrace{\frac{\binom{3}{0}}{2^3} \times \frac{\binom{3}{0}}{2^3}}_{\text{هر دو هیچ دختر}} + \underbrace{\frac{\binom{3}{1}}{2^3} \times \frac{\binom{3}{1}}{2^3}}_{\text{هر دو یک دختر}} + \underbrace{\frac{\binom{3}{2}}{2^3} \times \frac{\binom{3}{2}}{2^3}}_{\text{هر دو دو دختر}} + \underbrace{\frac{\binom{3}{3}}{2^3} \times \frac{\binom{3}{3}}{2^3}}_{\text{هر دو سه دختر}} = \frac{20}{64}$$

حال می گوییم احتمال نامساوی بودن تعداد دخترهای دو خانواده برابر است با $P' = 1 - \frac{20}{64} = \frac{44}{64}$ و اکنون نصف این احتمال خانواده A است و نصف آن سهم خانواده B . بنابراین جواب تست برابر است با $\frac{22}{64}$

سؤال ۹۳: سکه سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم احتمال اینکه یک در میان پشت و رو بیاید کدام است؟

ممکن است بار اول و سوم پشت بیاید یا بار دوم و چهارم

$$A = \{(پ, پ, ر, ر), (ر, ر, پ, پ)\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}$$

توجه شود که حالت های بالا جایگشت ندارند زیرا در آن ها حالت هایی مثل (پ, پ, ر, ر) نیز وجود دارند که یک در میان پشت و رو نیستند.

سؤال ۹۴: شخص A دو سکه و شخص B سه سکه پرتاب می کند احتمال آن که تعداد شیرهایی که A می آورد بیش تر از B باشد کدام است.

حالت هایی که ممکن است رخ دهد به صورت زیر است
(۱) دو شیر بیاورد و B شیر نیاورد و یا یک شیر بیاورد

$$P_1 = \frac{\binom{2}{2}}{2^2} \times \left[\frac{\binom{3}{0}}{2^3} + \frac{\binom{3}{1}}{2^3} \right] = \frac{1}{4} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$$

(۲) A یک شیر بیاورد و B شیر نیاورد.

$$P_2 = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} \times \frac{\binom{3}{0}}{2^3} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

سؤال ۹۴: خانواده A دارای ۲ فرزند و خانواده B دارای ۳ فرزند است احتمال آن که تعداد پسرهای آن ها برابر باشد کدام است.

تنها در حالت هایی این اتفاق رخ می دهد که هر دو هیچ پسری نداشته باشند یا یک پسر و یا هر دو پسر داشته باشند بنابراین احتمال

$$P = \left[\frac{\binom{2}{0}}{2^2} \times \frac{\binom{3}{0}}{2^3} \right] + \left[\frac{\binom{2}{1}}{2^2} \times \frac{\binom{3}{1}}{2^3} \right] + \left[\frac{\binom{2}{2}}{2^2} \times \frac{\binom{3}{2}}{2^3} \right] = \frac{1+6+3}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

برابر است با :

سؤال ۹۵: در پرتاب ۳ تاس احتمال آن که مجموع ۳ تاس ۶ باشد کدام است.

$$\text{حالت } 3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (1,1,4)$$

$$\text{حالت } 6 \rightarrow 3! = 6 \rightarrow (1,2,3)$$

$$\text{یک حالت} \rightarrow (2,2,2)$$

پس در مجموع ۱۰ حالت داریم و احتمال آن برابر است با $\frac{10}{216}$ یا می توان گفت $\binom{6-1}{2} = 10$ حالت داریم.

سؤال ۹۶: در پرتاب ۳ تاس احتمال آن که مجموع اعداد کوچکتر از ۷ باشد چقدر است.

$$\text{حالت } 1 \rightarrow (1,1,1)$$

$$\text{حالت } 3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (1,1,2)$$

$$\text{حالت } 3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (1,1,3)$$

$$\text{حالت } 3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (1,2,2)$$

$$\text{حالت } 3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (1,1,4)$$

$$\text{حالت } 6 \rightarrow 3! = 6 \rightarrow (1,2,3)$$

$$\text{یک حالت} \rightarrow (2,2,2)$$

پس در مجموع ۲۰ حالت وجود دارد.

می توان گفت مجموع باید ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ باشد پس تعداد حالات برابر است با :

$$\binom{3-1}{2} + \binom{4-1}{2} + \binom{5-1}{2} + \binom{6-1}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{20}{216}$

سؤال ۹۷: در پرتاب ۳ تاس با کدام احتمال مجموع سه تاس برابر ۱۰ است.

$$6 \rightarrow 3! = 6 \rightarrow (1,3,6)$$

$$6 \rightarrow 3! = 6 \rightarrow (1,4,5)$$

$$6 \rightarrow 3! = 6 \rightarrow (2,3,5)$$

$$3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (2,4,4)$$

$$3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (2,2,6)$$

$$3 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \rightarrow (3,3,4)$$

پس در مجموع ۲۷ حالت وجود دارد و احتمال مورد نظر $\frac{27}{216}$ است.

سؤال ۹۸: سه تاس همگن را با هم می ریزیم احتمال آن که سه عدد رو شده یک تصاعد عددی با قدر نسبت ۲ تشکیل دهند کدام است.

حالت های مطلوب $(۱,۳,۵)$ و $(۲,۴,۶)$ است که هریک به ۳! طریق می توانند جابه جاشوند لذا احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{2 \times 3!}{6^3} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

سؤال ۹۹: در پرتاب سه تاس با هم احتمال این که اعداد رو شده تصاعد عددی بدهند کدام است.

اعداد روی تاس ها می توانند تصاعد عددی با قدر نسبت ۰ یا ۱ یا ۲ تشکیل دهند

۶ حالت $\rightarrow (۱,۱,۱), (۲,۲,۲), \dots, (۶,۶,۶)$ قدر نسبت صفر

حالت $4 \times 3! \rightarrow \{۱,۲,۳\}, \{۲,۳,۴\}, \{۳,۴,۵\}, \{۴,۵,۶\}$ قدر نسبت ۱

۲ حالت $\rightarrow \{۱,۳,۵\}, \{۲,۴,۶\}$ قدر نسبت ۲

$$\rightarrow \frac{6 + 4 \times 3! + 2 \times 3!}{6^3} = \frac{42}{216} = \frac{7}{36}$$

سؤال ۱۰۰: اگر تصاعد هندسی می گفت چه می شد.

$(۱,۱,۱), (۲,۲,۲), \underbrace{(۲,۴,۸)}, (۳,۳,۳), (۴,۴,۴), (۵,۵,۵), (۶,۶,۶)$
۶ حالت

$$P = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

پس در مجموع ۱۲ حالت دارد پس

سؤال ۱۰۱: در پرتاب سه تاس احتمال اینکه مجموع کمتر از ۱۱ شود کدام است.

در پرتاب ۳ تاس احتمال اینکه مجموع ۳ باید با احتمال آنکه مجموع ۱۸ بیاید برابر است با همچنین احتمال اینکه ۴ بیاید با احتمال این که مجموع ۱۷ باشد برابر است به همین ترتیب احتمال اینکه مجموع ۱۰ بیاید با احتمال اینکه مجموع ۱۱ بیاید برابر است پس احتمال این که مجموع ۳ یا ۴ یا ... ۱۰ بیاید با احتمال اینکه ۱۸ یا ۱۷ یا ... ۱۱ بیاید برابر است بنابراین پاسخ $\frac{1}{2}$ است.

سؤال ۱۰۲: تاسی را ۳ بار پرتاب می کنیم با چه احتمالی حاصلضرب اعداد ظاهر شده مربع کامل است.

باید اعداد ظاهر شده به صورت $(۱, a, a)$ یا $(۴, a, a)$ یا $(۲, ۳, ۶)$ و یا جایگشتی از یکی از این ها باشد اگر $a \neq ۱$ باشد، $(۱, a, a)$ ، $\frac{3!}{2!} = ۳$ جایگشت دارد و اگر $a \neq ۴$ باشد $(۴, a, a)$ نیز $\frac{3!}{2!} = ۳$ جایگشت دارد و a نیز ۵ حالت مختلف در هر یک از حالات بالا می تواند داشته باشد. ۲ حالت خاص نیز $(۱, ۱, ۱)$ و $(۴, ۴, ۴)$ است و $(۲, ۳, ۶)$ نیز $3! = ۶$ حالت دارد پس در مجموع $۳۸ = ۶ + ۲ + ۲ \times ۳ \times ۵$ حالت داریم و احتمال مطلوب برابر است با $\frac{38}{6^3}$

سؤال ۱۰۳: دو تاس را با هم می اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

$$\frac{4}{9} \quad (۴) \quad \frac{7}{18} \quad (۳) \quad \frac{5}{18} \quad (۲) \quad \frac{2}{9} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر A پیشامد رو شدن دو عدد متوالی در پرتاب دو تاس باشد داریم:

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow n(A) = 10$$

از طرفی تعداد اعضای فضای نمونه ای پرتاب دو تاس $n(S) = 6 \times 6 = 36$ است پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

مسائل پرتاب دو تاس و جمع اعداد رو شده :

اگر دو تاس را با هم (یا یک تاس را دو بار) پرتاب کنیم فضای نمونه ای $n(S) = 6 \times 6 = 36$ عضو دارد و مجموع اعداد رو شده دو تاس می تواند اعداد ۲ یا ۳ یا ... یا ۱۲ باشد. جدول زیر یک روش ساده و روان برای محاسبه مجموع اعداد دو تاس بدون نوشتن حالات!! به شما یاد می دهد. به جدول و توضیحات بعد از آن خوب دقت کنید:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$n(A)$	۱ ↗	۲ ↗	۳ ↗	۴ ↗	۵ ↗	۶ ↗	۵ ↘	۴ ↘	۳ ↘	۲ ↘	۱ ↘

طبق جدول فوق مثلاً اگر بگویند مجموع دو تاس در چند حالت برابر ۷ می شود جواب برابر ۶ است.

شگفتی جدول :

۱. تا مجموع ۷ تعداد حالات همواره یکی کمتر از مجموع خواسته شده است. مثلاً مجموع ۶ دارای $6-1=5$ حالت است.
 ۲. از مجموع ۸ به بعد، تعداد حالات برابر ۱۳ منهای مجموع خواسته شده است. مثلاً مجموع ۹ دارای $9-4=5$ حالت است.
- ◀ ۱- سوال از مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس اهمیت ویژه ای در کنکور دارد. همچنین کمی بعید است که طراح وارد بحث مجموع اعداد ۳ تاس شود مگر در حد یک سوال ساده که در کتاب ریاضی ۳ آمده است.
- ◀ ۲- سوالی که جدیداً از این مبحث در کنکور می آید با کلماتی نظیر حداقل یا حداکثر یا مضرب ۴ بودن یا عدد اول بودن همراه است. برای حل سوال باید ابتدا اعداد مطلوب سوال را مشخص کنید و سپس از دو ویژگی بیان شده در مورد جدول کمک بگیرید.

سؤال ۱۰۴: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است.

$$(1) \frac{2}{9} \quad (2) \frac{5}{18} \quad (3) \frac{5}{12} \quad (4) \frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه ۴

تعداد اعضای فضای نمونه ای $n(S) = 36$ است از طرفی مجموع دو عدد مضرب ۴ باشد یعنی مجموع ۴ یا ۸ یا ۱۲ شود حال با توجه به جدول بدون نوشتن حالات احتمال ها را محاسبه کنیم:

$$P(A) = P(\text{مجموع } 4) + P(\text{مجموع } 8) + P(\text{مجموع } 12) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$\begin{matrix} 4-1 & 8-4 & 12-8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 5 & 1 \end{matrix}$

$$n(A) = \underbrace{\{(1,3), (2,2), (3,1)\}}_{\text{مجموع } 4} \cup \underbrace{\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}}_{\text{مجموع } 8} \cup \underbrace{\{(6,6)\}}_{\text{مجموع } 12} \xrightarrow{n(A)=9}$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

سؤال ۱۰۵: در پرتاب دو تاس با هم احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده حداکثر ۱۰ باشد کدام است؟

$$(1) \frac{1}{12} \quad (2) \frac{11}{12} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{3}{4}$$

پاسخ: گزینه ۲

مجموع دو تاس حداکثر ۱۰ شود یعنی مجموع ۲ یا ۳ یا ۴ یا ... یا ۱۰ نوشتن اعضا واقعاً طولانی و وقت گیر است پس از روش متمم استفاده می کنیم. متمم این پیشامد یعنی این که مجموع دو تاس ۱۱ یا ۱۲ شود بنابراین:

$$A' = \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow P(A') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$