



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



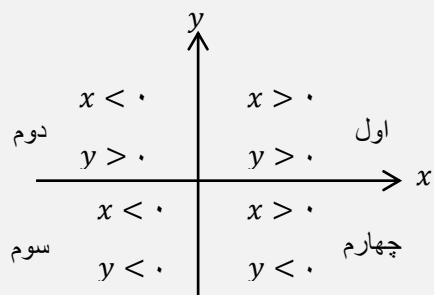
(@riazisara)

بسم الله الرحمن الرحيم

درس ۱: هندسه تحلیلی

دستگاه مختصات دویعدی (دکارتی) دوتا محور عمود برهم دارد. محور طولها (x) و محور عرضها (y)

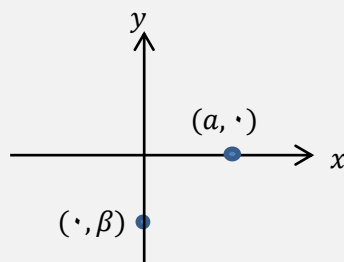
مختصات هر نقطه در دستگاه با دو مقدار x و y به صورت (x, y) مشخص می شود. که x را مولفه اول یا طول و y را مولفه دوم یا عرض می نامند. دستگاه مختصات دارای ۴ ناحیه (ربع) است که علامت x و y را در این ناحیه ها می بینید.



نکته: اگر نقطه ای روی محور x ها باشد، مقدار مولفه

y آن صفر است و مختصاتش به شکل $(a, 0)$ خواهد بود.

نکته: اگر نقطه ای روی محور y ها باشد، مقدار مولفه x آن صفر است و مختصاتش به شکل $(0, \beta)$ خواهد بود.



مثال ۱: نقطه $A(3a - 1, 2a + 1)$ بر روی محور x ها و نقطه $B(3b - 2, 2b + 3)$ بر روی محور y ها است. مختصات نقطه (a, b) را بیابید.

پاسخ: نقطه A روی محور x ها است باید $y_A = 0$ باشد، یعنی: $2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

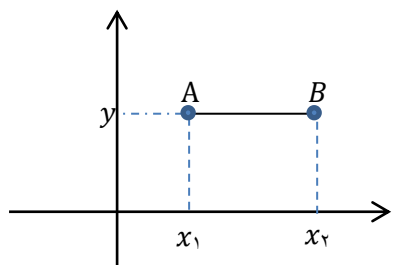
همچنین نقطه B روی محور y ها است. پس: $x_B = 0 \Rightarrow 3b - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$

پس مختصات نقطه (a, b) به صورت $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ درمی آید.

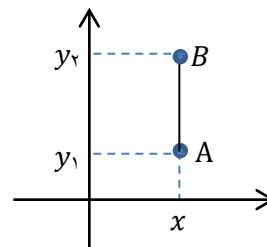
تمرین: اگر نقطه $(\frac{m-2}{3}, \frac{5-2m}{4})$ در ناحیه دوم مختصات باشد. حدود m را بیابید.

فاصله دو نقطه

اگر دو نقطه با طول برابر داشته باشیم، برای پیدا کردن فاصله آنها باید عرض آنها را از هم کم کنیم و به طور مشابه اگر دو نقطه با عرض برابر داشته باشیم، طول آنها را از هم کم می کنیم.



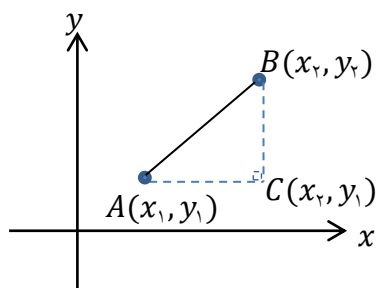
$$\text{فاصله} = AB = |x_2 - x_1|$$



$$\text{فاصله} = AB = |y_2 - y_1|$$

اگر طول و عرض دو نقطه متفاوت باشند به صورت زیر عمل می کنیم:

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند، فاصله دو نقطه از رابطه زیر به دست می آید.



می دانیم فاصله A تا C برابر $AC = |x_2 - x_1|$ و فاصله B تا C برابر $BC = |y_2 - y_1|$ است. طبق رابطه فیثاغورس :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: فاصله دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(3, -1)$ را در دستگاه مختصات بیابید.

پاسخ:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

مثال: فاصله دو نقطه $A(5, 3)$ و $B(-4, 3)$ را بیابید.

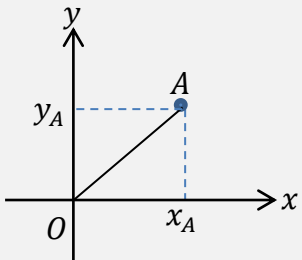
پاسخ: چون دو نقطه دارای عرض یکسانی می باشند پس فاصله آنها برابر اختلاف طول آنها می باشد.

$$AB = |-4 - 5| = |-9| = 9$$

مثال: فاصله نقطه $A(3, -1)$ را از مبدأ مختصات بیابید.

پاسخ: مبدأ مختصات را نقطه $O(0, 0)$ در نظر می گیریم:

$$OA = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

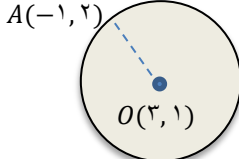


نکته: فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

مثال: شعاع دایره‌ای به مرکز $O(3, 1)$ و گذرنده از نقطه $A(-1, 2)$ را بیابید.

پاسخ: فاصله بین مرکز دایره تا هر نقطه روی محیط دایره برابر با شعاع دایره است، پس می‌توان نوشت:



$$AO = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

مثال: نقطه A در صفحه مختصات به گونه‌ای انتخاب شده است که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر ۲ و فاصله آن از نقطه $(3, 0)$ برابر ۳ می‌باشد، طول نقطه A را بیابید.

پاسخ: مختصات نقطه A را به صورت $A(x, y)$ در نظر می‌گیریم و فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را با AO نمایش می‌دهیم.

$$AO = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \quad \text{توان ۲} \implies x^2 + y^2 = 4 \quad (1)$$

فاصله A از نقطه $B(3, 0)$ برابر ۳ است:

$$AB = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 0)^2} = 3 \implies (x - 3)^2 + y^2 = 9 \quad (2)$$

اکنون عبارت (۱) را از (۲) کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) &= 9 - 4 \implies x^2 - 6x + 9 + y^2 - x^2 - y^2 = 5 \\ \implies -6x + 9 &= 5 \implies -6x = -4 \implies x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

مثال: نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که فاصله آن از نقطه $A(2, 3)$ برابر ۵ باشد. (مسأله چند جواب دارد)

پاسخ: هر نقطه‌ای که روی محور x ها باشد عرض آن صفر است. لذا نقطه مورد نظر را $A(x, 0)$ فرض کرده و خواهیم نوشت:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x - 2)^2 + (0 - 3)^2} = 5 \quad \text{به توان ۲} \implies (x - 2)^2 + 9 = 25 \implies (x - 2)^2 = 25 - 9 \implies \\ \implies (x - 2)^2 &= 16 \implies x - 2 = \pm 4 \implies \begin{cases} x - 2 = 4 \implies x = 6 \\ x - 2 = -4 \implies x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس مسأله دو جواب دارد: $(-2, 0)$, $(6, 0)$

مثال: نقطه‌ای روی محور y ها بیابید که از دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(-1, 3)$ به یک فاصله باشد.

پاسخ: چون نقطه مورد نظر روی محور y ها است، پس طولش صفر است و می‌توانیم مختصاتش را به صورت $C(0, a)$

در نظر می گیریم: $B(-1, 3), A(2, 1), C(0, a)$

$$CB = CA \Rightarrow \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - 0)^2 + (3 - a)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (a - 1)^2} \xRightarrow{\text{توان}} 1 + (3 - a)^2 = 4 + (a - 1)^2$$

$$1 + 9 - 6a + a^2 = 4 + a^2 - 2a + 1 \Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow C(0, \frac{5}{4})$$

تست: سه رأس مثلثی نقاط $A(2, -1), B(2, 1), C(-1, 1)$ هستند. محیط آن کدام است؟

$$(1) 16 \quad (2) 5\sqrt{13} \quad (3) 5 + \sqrt{13} \quad (4) 14$$

گزینه «۳»

طول A و B مساوی است پس: $AB = |y_B - y_A| = |1 - (-1)| = 2$

عرض B و C مساوی است پس: $BC = |x_C - x_B| = |-1 - 2| = 3$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

پس محیط مثلث ABC برابر است: $2 + 3 + \sqrt{13} = 5 + \sqrt{13}$

تست: مثلث ABC با رئوس $A(1, 2), B(2, 5), C(4, 1)$ چگونه است؟

(۱) متساوی الاضلاع (۲) فقط متساوی الساقین (۳) فقط قائم الزاویه (۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

گزینه «۴»

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

با توجه به این که $AB = AC \neq BC$ ، پس مثلث متساوی الساقین است. از طرفی چون تساوی $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$ هم برقرار است. بنابراین طبق رابطه فیثاغورس، مثلث قائم الزاویه است.

تست: مساحت مثلثی با سه رأس $A(2, 5), B(3, 0), C(0, 2)$ کدام است؟

$$(1) 6 \quad (2) \frac{6}{5} \quad (3) 7 \quad (4) \frac{7}{5} \quad (\text{سراسری } 92)$$

گزینه «۲»

روش اول: می توانیم طول اضلاع مثلث را به دست آوریم.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

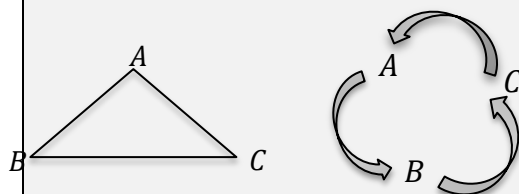
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

با توجه به طول اضلاع، مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. زیرا $(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$

$$S = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = 6/5 \quad \text{پس مساحت آن برابر است با نصف حاصل ضرب اضلاع قائمه}$$

روش دوم: ابتدا به نکته زیر توجه فرمایید:

مساحت مثلث از طریق مختصات رئوس آن: مثلث ABC را با سه رأس $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ در نظر بگیرید. در این حالت مساحت مثلث از فرمول زیر به دست می آید.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6/5 \quad \text{بنابراین داریم:}$$

تست: دایره‌ای از نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

$$(1) \sqrt{2} \quad (2) 2 \quad (3) \sqrt{5} \quad (4) 3 \quad (\text{سراسری } 90)$$

گزینه «۳» مرکز دایره روی قطر دایره قرار دارد. با توجه به این که معادله قطر دایره به صورت $x - y = 2$ است. پس

$$y = x - 2$$

مختصات مرکز را به صورت $(a, a - 2)$ در نظر می گیریم. فاصله مرکز از نقاط روی دایره برابر شعاع است، در نتیجه:

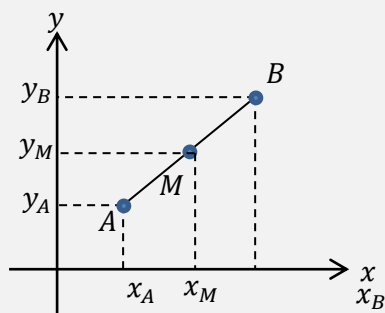
$$O(a, a - 2), A(0, 1), B(3, 0) \Rightarrow R = OA = OB$$

$$\sqrt{(a - 0)^2 + (a - 2 - 1)^2} = \sqrt{(a - 3)^2 + (a - 2 - 0)^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} a^2 + (a - 3)^2 = (a - 3)^2 + (a - 2)^2$$

$$a^2 = (a - 2)^2 \Rightarrow a^2 = a^2 - 4a + 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow R = OA = \sqrt{a^2 + (a - 3)^2}$$

$$\xrightarrow{a=1} R = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

مختصات نقطه وسط پاره خط: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در یک دستگاه مختصات باشند مختصات نقطه M وسط نقاط A و B از رابطه زیر به دست می آید.

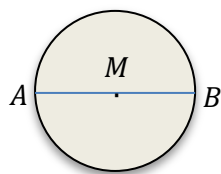


$$M(x_M, y_M): \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

مثال: اگر $B(-5, 4)$, $A(3, -2)$ مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را بیابید.

$$M(x_M, y_M): \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 1)$$

مثال: $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.



$$M = \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 8}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + (-8)}{2} = -1 \end{cases}$$

$$MA = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-1 - 6)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{65}$$

نکته: برای به دست آوردن طول شعاع دایره می توانیم اندازه قطر دایره (AB) را به دست آوریم سپس آن را نصف کنیم.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - 0)^2 + (-8 - 6)^2} = \sqrt{64 + 196} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$$

پس اندازه شعاع دایره برابر نصف قطر دایره یعنی $R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{65}}{2} = \sqrt{65}$ می باشد.

تست: قرینه نقطه $A(-3, 1)$ نسبت به نقطه $M(3, -2)$ کدام است؟

- (۱) $(9, -5)$ (۲) $(9, 5)$ (۳) $(5, -9)$ (۴) $(-3, 1)$

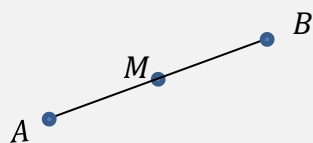
گزینه «۱» فرض کنید نقطه B قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، در این صورت مختصات M وسط نقاط A و B قرار دارد

و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-3 + x_B}{2} \Rightarrow x_B - 3 = 6 \Rightarrow x_B = 9 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 1 = -4 \Rightarrow y_B = -5 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه B به صورت $(9, -5)$ است.

نکته: اگر دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(\alpha, \beta)$ را داشته باشیم و بخواهیم قرینه نقطه A را نسبت به نقطه M پیدا کنیم طبق شکل زیر اگر این نقطه را B بنامیم نقطه M وسط پاره خط AB است، پس:



$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{bmatrix}$$

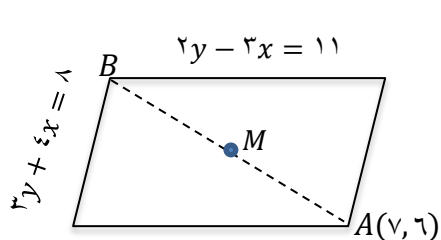
سوال قبل را با توجه به نکته فوق به صورت زیر حل می شود:

$$A(-3, 1), M(3, -2) \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3) - (-3) \\ 2(-2) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

تست: نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$(1, 5) \quad (2, 4) \quad (3, 5) \quad (4, 3)$$

گزینه «۳» از آن جا که مختصات نقطه $M(1, -1)$ در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی کند، پس مختصات نقطه برخورد دو ضلع داده شده (رأس مقابل A) به دست می آید.



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = -1 \Rightarrow B(-1, 4)$$

بنابراین مختصات نقطه وسط قطر متوازی الاضلاع (یعنی M) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(3, 5)$$

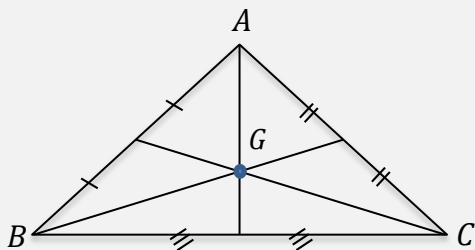
مثال: نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(3, 4)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اندازه میانه AM چه قدر است؟

پاسخ: نقطه M وسط B و C است. پس $M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1, 2)$ است. اندازه پاره خط AM برابر است با:

$$AM = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

مختصات مرکز ثقل مثلث: اگر $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مختصات مرکز

ثقل مثلث ABC (محل برخورد سه میانه) برابر است با:



$$G(x_G, y_G): \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

مثال: نقاط $A(-1, 3)$ ، $B(2, 5)$ و $C(3, -2)$ رؤس یک مثلث اند. مختصات نقطه تلاقی میانه های این مثلث را بیابید.

$$G(x_G, y_G): \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 2 + 3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 5 + (-2)}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2, 2)$$

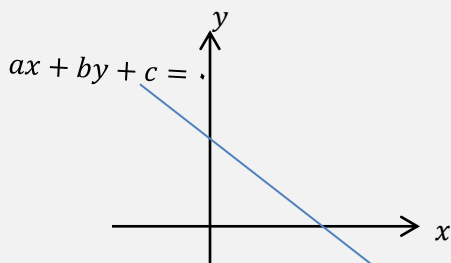
معادله خط

معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند.

اگر $b \neq 0$ باشد با تقسیم طرفین معادله $ax + by + c = 0$ بر b داریم:

$$ax + by + c = 0 \xrightarrow{\div b} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

توجه کنید:



ضریب x : $m = -\frac{a}{b}$ شیب خط $\Rightarrow ax + by + c = 0$ اگر

ضریب y : $m = a$ شیب خط $\Rightarrow y = ax + b$ اگر

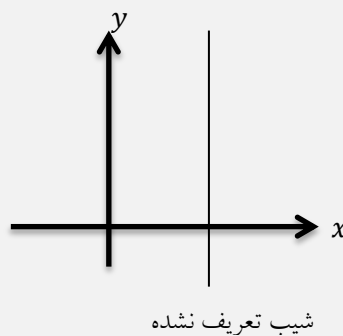
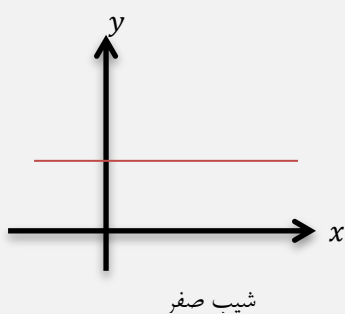
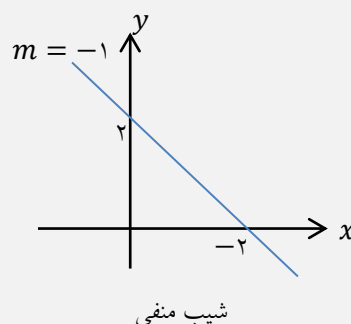
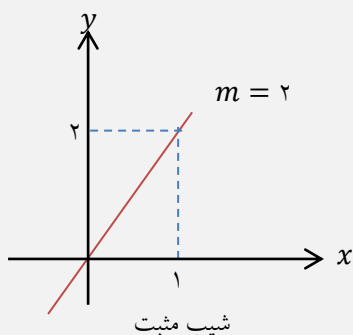
نوشتن معادله خط: معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد برابر است با:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

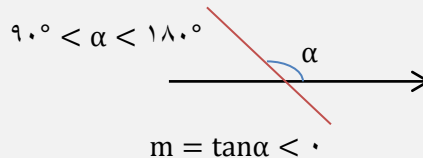
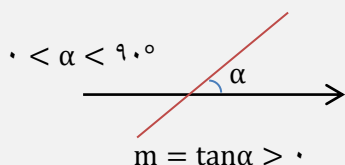
شیب خطی که از دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ می‌گذرد برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

شیب خط در شکل راست برابر ۲ و در شکل سمت چپ برابر -۱ است.



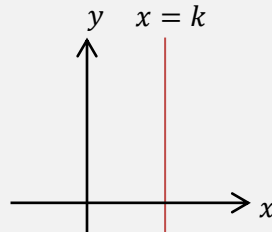
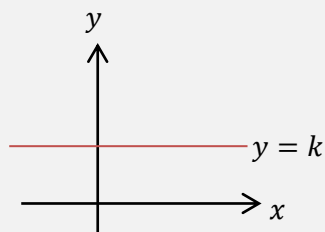
نکته: شیب خط در واقع تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد.



به عبارتی دیگر معادله خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه α می سازد و از نقطه $A(x_1, y_1)$ می گذرد برابر است با:

$$y - y_1 = \tan \alpha (x - x_1)$$

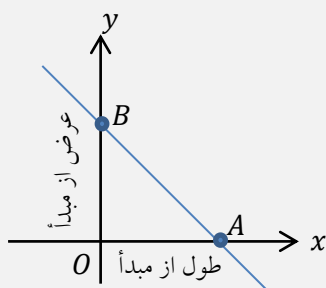
نکته: خط $x = k$ موازی محور عرضها (با شیب تعریف نشده) و خط $y = k$ موازی محور طولها (با شیب صفر) است.



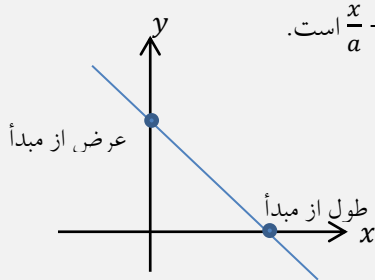
خط $x = k$ همواره بر خط $y = k$ عمود است. برای مثال خط $x = 2$ بر $y = -1$ عمود است.

عرض نقطه تلاقی با محور y ها را عرض از مبدأ می نامیم، و برای به دست آوردن عرض از مبدأ کافی است در معادله خط به جای x ، صفر قرار دهیم. همچنین طول نقطه تلاقی با محور x ها را طول از مبدأ می نامیم و در نتیجه برای به دست آوردن آن کافی است به جای y ، صفر قرار دهیم.

نکته: اگر خطی محور x ها و y ها را در نقاط A و B قطع کند، با آنها مثلثی تشکیل می دهد که مساحت این مثلث برابر است با:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |A \times B| = \frac{1}{2} \left| \text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ} \right|$$



* معادله خطی که از دو نقطه $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ می گذرد، به صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است.

مثال: معادله خطی که محور x ها را در نقطه ای به طول ۲- و محور y ها

را در نقطه ای به عرض ۳ قطع می کند، به صورت $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ می باشد.

مثال: معادله خطی را که از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(3, 2)$ می گذرد را بیابید.

پاسخ: ابتدا شیب خط را به دست می آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{3 - 2} = \frac{3}{1} = 3$$

حال با داشتن شیب خط یعنی $m = 3$ و نقطه $A(2, -1)$ معادله خط را می نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 7$$

تست: اگر سه نقطه $A(0, k)$, $B(-2, 3)$ و $C(k, 1)$ روی یک خط راست باشند، مقدار k چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) -۱، ۲

گزینه «۴» چون نقاط $A(0, k)$, $B(-2, 3)$ و $C(k, 1)$ روی یک خط راست قرار دارند، پس $m_{AB} = m_{BC}$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - k}{-2 - 0} = \frac{3 - k}{-2} \\ m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 3}{k - (-2)} = \frac{-2}{k + 2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3 - k}{-2} = \frac{-2}{k + 2} \Rightarrow (3 - k)(k + 2) = 4$$

$$3k + 6 - k^2 - 2k = 4 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow (k - 2)(k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

مثال: مساحت مثلثی که خط $2x - 3y = 6$ با محورهای مختصات می سازد را به دست آورید.

پاسخ: برای به دست آوردن طول از مبدأ، y را صفر می گذاریم و برای به دست آوردن عرض از مبدأ، x را صفر می گذاریم.

$$x = 0 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = -2 \quad \text{طول از مبدأ} \quad y = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \quad \text{عرض از مبدأ}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ} \right| = \frac{1}{2} |3 \times (-2)| = 3$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° می سازد و محور y ها را در نقطه ای به عرض -2 قطع می کند.

پاسخ: شیب خط در واقع تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد. بنابراین شیب خط با تانژانت زاویه 30°

$$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{درجه برابر است. پس:}$$

$$y - y_1 = \tan \alpha (x - x_1) \xrightarrow{(0, -2)} y - (-2) = \frac{\sqrt{3}}{3} (x - 0) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 2$$

مثال: در شکل مقابل معادله خط d را بنویسید.

پاسخ: زاویه ای که این خط با جهت مثبت محور x ها می سازد برابر است با:

$$m = \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{بنابراین: } 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

حال از آنجا که نقطه ای به مختصات $(0, -2)$ روی خط داریم معادله خط به صورت زیر می باشد.

$$y - (-2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x - 0) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} x - 2$$

مثال: سه نقطه $A(0, 3)$, $B(-2, 3)$ و $C(4, 1)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله میانه AM را بنویسید.

پاسخ: برای نوشتن معادله یک خط به یک نقطه از آن و شیب آن و یا به دو نقطه از خط نیاز داریم. آیا دو نقطه از میانه AM

را در اختیار داریم؟ بله، یکی از آن ها A و دیگری M که وسط پاره خط BC است.

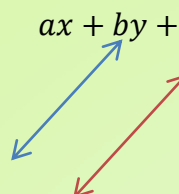
$$M\left(\frac{4-2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow M(1, 2)$$

وضعیت دو خط نسبت بهم

دو خط موازی: دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ را موازی می گویند هرگاه شیب

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

آنها برابر باشد. یعنی

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$


مثال: دو خط $x - 2y + 1 = 0$ و $2x - 4y + 3 = 0$ با همدیگر موازی هستند.

نکته: در معادله $y = mx + b$ شیب خط برابر m می باشد. به طور مثال دو خط $y = 3x - 2$ و

$y = 3x + 5$ با همدیگر موازی هستند. زیرا شیب هر دوی آنها برابر ۳ می باشد.

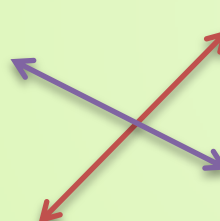
دو خط متقاطع: دو خط وقتی باهم متقاطع هستند که موازی نباشند. و باید $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. در این حالت دو خط همدیگر را در یک

نقطه قطع می کنند که نقطه برخورد جواب دستگاه است.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

مثلاً نقطه برخورد دو خط $2x - 3y = 7$ و $x + 2y = 0$ نقطه $(-1, 2)$ می باشد زیرا مختصات این نقطه در هر دو معادله صدق

می کند.

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$


دو خط منطبق: دو خط دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ برهم منطبق می باشند. هرگاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

در واقع دو خط منطبق، معادله یکسانی دارند. به طور مثال دو خط $2x - y + 1 = 0$ و $4x - 2y + 2 = 0$ برهم منطبق هستند.

دو خط عمود برهم: دو خط d و d' برهم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب آنها برابر -1 باشد. یعنی دو خط $y = mx + b$ و

$$y = m'x + b' \quad \text{بر هم عمودند هرگاه} \quad m = -\frac{1}{m'} \quad \text{یا} \quad m \times m' = -1$$

دو خط عمود برهم شبیه قرینه و معکوس، نسبت به هم دارند.

$$\text{مثال: دو خط } y = 3x - 2 \text{ و } y = -\frac{1}{3}x + 5 \text{ بر هم عمودند.}$$

مثال: مقدار a را طوری بیابید که خط d به معادله $y = ax + 3$ بر خطی که از دو نقطه $A(1, -2)$ و $B(-2, 2)$ می گذرد عمود باشد.

پاسخ: خط گذرنده از A و B با شیب $m = \frac{-2-2}{1-(-2)} = -\frac{4}{3}$ می باشد چون دو خط بر هم عمود هستند. پس شیب آنها

قرینه و معکوس همدیگر می باشد. بنابراین شیب خط d برابر $\frac{3}{4}$ می باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-2, 3)$ می گذرد و با خط $2y - x + 3 = 0$ موازی است.

پاسخ: شیب خط $2y - x + 3 = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ است. چون دو خط باهم موازی هستند پس شیب آن ها برابر است. بنابراین شیب خط جدید برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$m = \frac{1}{2}, A(-2, 3) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - (-2)) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$$

مثال: به ازای چه مقدار m دو خط $y - (m - 2)x - 1 = 0$ و $mx + 3y = 5$ برهم عمودند؟

روش اول: حاصل ضرب شیب های دو خط عمود بر هم برابر -1 است.

$$\begin{cases} y - (m - 2)x - 1 = 0 \rightarrow \text{شیب} = m - 2 \\ mx + 3y = 5 \rightarrow \text{شیب} = -\frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow (m - 2)\left(-\frac{m}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-m^2 + 2m}{3} = -1$$

$$\Rightarrow -m^2 + 2m = -3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 3, m = -1$$

نکته: دو خط به معادلات $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ بر هم عمودند، هرگاه $aa' + bb' = 0$

روش دوم: با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} y - (m - 2)x - 1 = 0 \\ mx + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow m(-m + 2) + 3(1) = 0 \Rightarrow -m^2 + 2m + 3 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 3$$

مثال: به ازای کدام مقدار m ، دو ضلع مقابل یک مستطیل روی خطوط $3x - 2y = 1$ و $(m - 2)x + 3y = 4$ قرار دارند؟

پاسخ: اضلاع مقابل یک مستطیل باهم موازی اند، بنابراین شیب های برابر دارند:

شیب خط $3x - 2y = 1$ برابر $\frac{3}{2}$ است. و شیب خط $(m - 2)x + 3y = 4$ برابر $\frac{2-m}{3}$ است. با توجه به برابری شیب دو خط داریم:

$$\frac{2-m}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4 - 2m = 9 \Rightarrow 2m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

مثال: معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.

روش اول: فرض کنیم d عمود منصف خط AB باشد. بنابراین شیب آن قرینه و معکوس شیب AB می باشد.

شیب خط AB برابر است با: $m_{AB} = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$ بنابراین $m_d = -\frac{5}{3}$. از طرفی مختصات نقطه M وسط پاره خط AB برابر است با: $M(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ است. پس داریم:

$$m_d = -\frac{5}{3}, M(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{3}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{6} + \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{-5x + 10}{3} \quad \times 3 \Rightarrow 3y + 5x = 10$$

روش دوم: عمود منصف یک پاره خط شامل همه نقاطی است که فاصله آن ها از دوسر پاره خط به یک اندازه است. بنابراین اگر نقطه ای

مانند $P(x, y)$ روی عمود منصف AB باشد باید $PA = PB$. با استفاده از فرمول فاصله پاره خط می توان نوشت:

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ رساندن}}$$

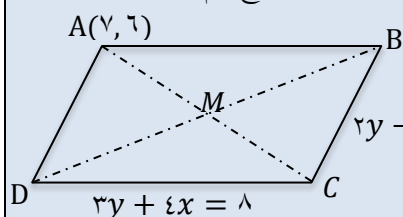
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$10x + 6y = 20 \Rightarrow 5x + 3y = 10$$

تست: نقطه $A(7, 8)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $3y + 4x = 8$ و $2y - 3x = 11$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$(1, 5) \quad (2, 3) \quad (3, 5) \quad (4, 3)$$

گزینه «۳» مختصات نقطه $A(7, 6)$ در هیچ کدام از معادله های دو خط داده شده صدق نمی کند. یعنی نقطه A روی هیچ کدام از این دو خط نیست. شکل را نگاه کنید.



مختصات نقطه C محل برخورد دو خط داده شده می باشد. با حل

دستگاه دو معادله می توانیم مختصات نقطه C را بیابیم.

$$\begin{cases} 3y + 4x = 8 \\ 2y - 3x = 11 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 4)$$

حال مختصات وسط قطر را به دست می آوریم.

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{7-1}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = (3, 5)$$

تست: به ازای کدام مقدار m دو خط به معادله های $mx + y = m - 1$ و $3x + (m - 2)y = 4 - 2m$ همدیگر را در بی نهایت نقطه قطع می کنند؟ (سراسری ۹۳)

$$(1) -2 \quad (2) -1 \quad (3) 3 \quad (4) \text{ هیچ مقدار } m$$

گزینه «۲» شرط آن که دو خط همدیگر را در بی نهایت نقطه قطع کنند، این است که بر هم منطبق باشند. یعنی: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m} \Rightarrow m(m-2) = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

$m = 3$ قابل قبول نیست زیرا به ازای $m = 3$ تساوی برقرار نمی شود.

$m = -1$ قابل قبول است زیرا به ازای آن تساوی برقرار می شود و دو خط بر هم منطبق می شوند.

مثال: نقطه ای روی خط $y = x + 1$ بیابید که از دو نقطه $A(4, 0)$ و $B(0, 6)$ به یک فاصله باشد.

پاسخ: نقطه وسط پاره خط AB برابر است با $M(2, 3)$. از طرفی شیب پاره خط AB برابر است با: $m_{AB} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

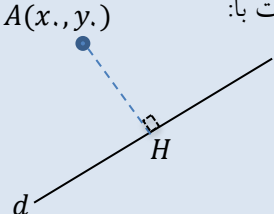
پس شیب عمود منصف برابر است با $-\frac{2}{3}$. بنابراین معادله عمود منصف AB برابر است با: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$

اکنون نقطه موردنظر ما باید همزمان روی خط $y = x + 1$ هم واقع باشد، پس کافی است نقطه تلاقی این دو خط را به دست آوریم.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = x + 1 \Rightarrow x = 2, \quad y = 3$$

پس نقطه M نقطه‌ای روی خط $y = x + 1$ است که از دو نقطه A و B به یک فاصله است.

فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $d: ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $A(1, 2)$ را از خط $4x - 3y - 3 = 0$ را بیابید.

حل: در رابطه بالا داریم: $a = 4, \quad b = -3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad c = -3$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(1) - 3(2) - 3|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال: فاصله نقطه $A(2, 4)$ را از خط به معادله $y = -\frac{3}{4}x + 3$ را به دست آورید.

حل: ابتدا معادله خط را بصورت $4y + 3x - 12 = 0$ می‌نویسیم. طبق رابطه فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A تا خط d را AH فرض می‌کنیم و داریم:

$$AH = \frac{|4(2) + 3(4) - 12|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{8}{5}$$

مثال: اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

حل:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|a(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} \Rightarrow \frac{|7 + a|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |7 + a| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

دو طرف را به توان ۲

$$\Rightarrow 49 + 14a + a^2 = 4a^2 + 64 \Rightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Rightarrow (3a - 9)(3a - 5) = 0$$

$$\Rightarrow a = 3, a = \frac{5}{3}$$

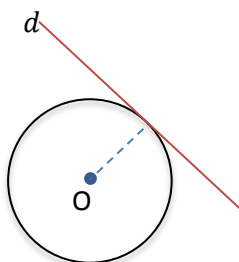
مثال: فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

حل: ابتدا معادله خط را به صورت $8x + 6y - k = 0$ نوشته، مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|8(1) + 6(-4) - k|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|-16 - k|}{10} \Rightarrow |-16 - k| = 40$$

$$\begin{cases} -16 - k = 40 \Rightarrow k = -56 \\ -16 - k = -40 \Rightarrow k = 24 \end{cases}$$

مثال: خط d به معادله $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟



حل: می توان شکل زیر را ترسیم کرد، طول شعاع دایره در واقع همان فاصله مرکز دایره

از خط مماس بر آن می باشد.

$$R = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

مثال: اگر $A(-2, 1)$ ، $B(3, 2)$ و $C(2, 3)$ سه رأس یک مثلث باشند:

الف) اندازه ارتفاع AH را بیابید. **ب)** اندازه AM میانه ضلع BC را بیابید.

پ) طول MH را بیابید.

حل: **الف)** اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله نقطه A تا ضلع BC . پس ابتدا معادله ضلع BC را می نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2 - 3}{3 - 2} = -1 \Rightarrow y - 2 = -1(x - 3) \Rightarrow y + x - 5 = 0 \quad \text{معادله ضلع } BC$$

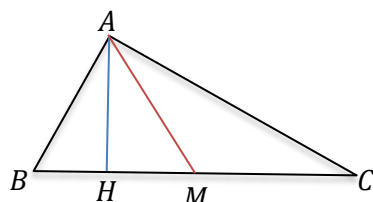
اکنون فاصله $A(-2, 1)$ تا ضلع BC را به دست می آوریم:

$$AH = \frac{|1(-2) + 1(1) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

ب) مختصات نقطه M وسط ضلع BC به صورت $M(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ و مختصات نقطه $A(-2, 1)$ می باشد بنابراین طول AM برابر است با:

$$AM = \sqrt{\left(-2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

پ) مثلث AHM قائم الزاویه است. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$MH^2 = AM^2 - AH^2 \Rightarrow MH^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 - (3\sqrt{2})^2 = \frac{90}{4} - 18 = \frac{18}{4} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

فاصله دو خط موازی: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه کنید شرط موازی بودن دو خط $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ می باشد.

مثال: فاصله دو خط $x - 3y = 3$ و $2x - 6y = 5$ را بیابید.

حل: دو خط موازی هستند. دقت کنید که حتماً ضرایب x باهم و ضرایب y باهم برابر باشند تا بتوانید از فرمول استفاده کنید.

$$\begin{cases} 2x - 6y = 5 \Rightarrow 2x - 6y - 5 = 0 \\ x - 3y = 3 \Rightarrow 2x - 6y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5 - (-6)|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{40}}$$

تست: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع کدام است؟ (سراسری ۹۳)

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

گزینه ۴: نقطه A وسط قطر مربع است، پس مرکز مربع همان نقطه A است، بنابراین فاصله این نقطه تا هر یک از اضلاع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است. در نتیجه داریم:

$$d = \frac{|2(-1) - 1(3) - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = 2d = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow s = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow s = \frac{400}{5} = 80$$

تست: دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن، نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) $7/2$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

گزینه ۲: مختصات نقطه $A(8, 5)$ در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی کند، پس با محاسبه فاصله نقطه A از این دو خط، اندازه طول و عرض مستطیل به دست می آید.

$$\begin{cases} d = \frac{|2(8) - 1(5) - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ d' = \frac{|1(8) + 2(5) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow S = d \times d' = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9/6$$

تست: فاصله بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

گزینه ۳: معادله دو خط را شبیه هم می کنیم:

$$y = \sqrt{3}x + 2 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \sqrt{3}y = 3x + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0$$

حالا فاصله دو خط برابر است با:

$$\begin{cases} \sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-6 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} + 1$$

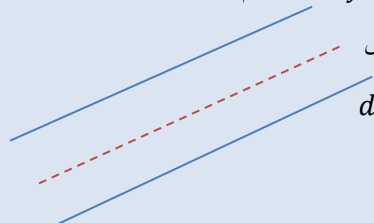
$$\Rightarrow d = \sqrt{3} + 1$$

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ به یک فاصله باشند، خطی است به موازات آن دو و معادله آن عبارت است از:

$$d_1: ax + by + c = 0$$

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0 \quad \text{معادله وسطی}$$

$$d_2: ax + by + c' = 0$$



مثال: معادله خطی که از خطهای $2x + 4y - 4 = 0$ و $x + 2y + 5 = 0$ به یک فاصله است را بیابید.

حل: روش اول) دو خط داده شده دارای شیب مساوی هستند بنابراین باهمدیگر موازی هستند. پس طبق رابطه بالا معادله خطی که وسط این خطوط می باشد به صورت زیر می باشد.

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0 \Rightarrow x + 2y + \frac{5 - 2}{2} = 0 \Rightarrow x + 2y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 4y + 3 = 0$$

روش دوم) شیب خط $2x + 4y + 5 = 0$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین شیب خط مورد نظر هم برابر $-\frac{1}{2}$ و معادله آن به صورت $x + 2y + c = 0$ است. چون فاصله این خط از خطوط داده شده برابر است، پس:

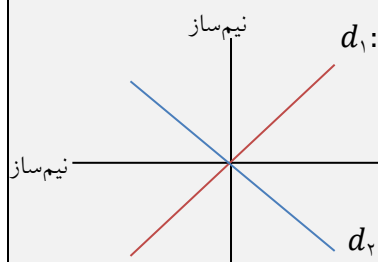
$$\frac{|c - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|c + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |c - 5| = |c + 2| \Rightarrow c - 5 = \pm(c + 2) \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

بنابراین معادله خط مورد نظر $x + 2y + \frac{3}{2} = 0$ یا $2x + 4y + 3 = 0$ است.

نکته: برای حل سوال ابتدا ضرایب دو خط موازی را یکسان کرده ایم یعنی ضرایب خط $2x + 4y - 4 = 0$ را بر ۲ تقسیم کرده و به صورت $x + 2y - 2 = 0$ نوشتیم.

نیم سازه دو خط: مجموعه نقاطی است که از آن دو خط به یک فاصله باشند، پس اگر d_1 و d_2 دو خط باشند معادله

نیم سازه های این دو خط از این شرط به دست می آید: $\Leftarrow$ فاصله از d_2 = فاصله از d_1



$$\text{معادله نیم ساز: } \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

تست: دو خط به معادلات $x + 2y = 6$ و $y - 2x + 3 = 0$ نسبت به کدام خط قرینه هستند؟

$$2x + 3y = 6 \quad (1) \quad 3x + y = 9 \quad (2) \quad 2x - y = 9 \quad (3) \quad x - 3y = 4 \quad (4)$$

گزینه ۱) شیب این دو خط به ترتیب $m_1 = -\frac{1}{2}$ و $m_2 = 2$ است. پس دو خط متقاطع و بر هم عمودند. بنابراین نیمساز آن‌ها محور تقارن است. طبق تعریف نیمساز داریم:

$$\frac{|x + 2y - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|y - 2x + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow |x + 2y - 6| = |y - 2x + 3|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 6 = y - 2x + 3 \Rightarrow 3x + y - 9 = 0 \\ x + 2y - 6 = -y + 2x - 3 \Rightarrow x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$$

در بین گزینه‌ها گزینه ۱) درست است.

تست: کدام نقطه روی نیمساز ناحیه دوم، از دو خط $x - 3y = 1$ و $3x + y + 2 = 0$ به یک فاصله است؟

$$(1) \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad (2) \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) \quad (3) \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \quad (4) \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

گزینه ۴) مختصات نقطه روی نیمساز ناحیه دوم $(-a, a)$ است. $(a > 0)$ پس ما به دنبال نقطه $(-a, a)$ هستیم که از آن دو خط به یک فاصله باشد. طبق نکته بالا داریم:

$$\text{فاصله نقطه } (-a, a) \text{ از } 3x + y + 2 = 0 = \text{فاصله نقطه } (-a, a) \text{ از } x - 3y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{|-a - 3a - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|3(-a) + a + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Rightarrow |-4a - 1| = |-2a + 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 1 = -2a + 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ -4a - 1 = 2a - 2 \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6} \end{cases}$$

چون $a > 0$ بود، پس $a = \frac{1}{6}$ و نقطه مورد نظر $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ است.

تست: به ازای کدام مقدار k نقطه $A(1, 2)$ روی نیمساز زاویه بین دو خط $3x - 4y = 1$ و $4x + 3y = k$ قرار دارد؟

$$(1) 8, 6 \quad (2) 18, -2 \quad (3) 16, 4 \quad (4) 8, -10$$

گزینه ۳) چون نقطه $A(1, 2)$ روی نیمساز زاویه بین دو خط $3x - 4y = 1$ و $4x + 3y = k$ قرار دارد پس فاصله‌اش از هر دو خط برابر است:

$$\frac{|3(1) - 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4(1) + 3(2) - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{|10 - k|}{5} \Rightarrow 10 - k = \pm 6 \Rightarrow k = 4 \text{ یا } k = 16$$