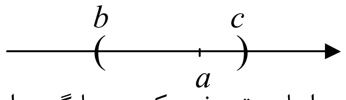
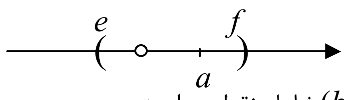
همسایگی

تعریف همسایگی

براساس تعریف

به هر بازه‌ی **باز کراندار** و **پیوسته‌ی** شامل نقطه‌ی a یک **همسایگی** نقطه‌ی a می‌گویند.

به دو نمودار زیر دقّت کنید:

الف)  **ب)** 

در نمودار (الف) بازه‌ی (b,c) شامل نقطه‌ی است، هم چنین پیوسته نیز می‌باشد. بنابراین براساس تعریف، یک همسایگی برای نقطه‌ی a است. در حالی که در نمودار (ب)، بازه‌ی (e,f) باتوجه به آن که شامل نقطه‌ی a است، ولی چون در یک نقطه ناپیوسته است، دیگر یک همسایگی برای نقطه‌ی a محسوب نمی‌شود.

سؤال۱:کدامیک از موارد زیر یک بازه را نشان می دهد؟

۱) $\{x: ۰<|x-۱|<۳\}$ ۲) $\{x:|x-۲|>۳\}$ ۳) $\{x:|x-۲|<۳\}$ ۴) $\{x:|x-۱|>۰\}$

پاسخ: *تک تک گزینه ها رو باید بررسی کنیم:*

گزینه ۱: $$۰<|x-۱|<۳ \Rightarrow \begin{cases} |x-۱|<۳ \Rightarrow -۳<x-۱<۳ \Rightarrow -۲<x<۴ \\ \text{و} \\ |x-۱|>۰ \Rightarrow x\neq ۱ \end{cases} \Rightarrow x\in(-۲,۱)\cup(۱,۴)$$

که یه بازه نیست، بلکه اجتماع دو بازه است.

گزینه ۲: $$|x-۲|>۳ \Rightarrow \begin{cases} x-۲>۳ \\ \text{یا} \\ x-۲<-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>۵ \\ \text{یا} \\ x<-۱ \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup(۵,+\infty)$$

این هم یه بازه نیست، بلکه اجتماع دو بازه است.

گزینه ۳: $|x-۲|<۳ \Rightarrow -۳<x-۲<۳ \Rightarrow -۱<x<۵ \Rightarrow x\in(-۱,۵) \rightarrow$ *خود خودشه، یه بازه است.*

گزینه ۴: $|x-۲|>۰ \Rightarrow x\in R-\{۱\} \Rightarrow x\in(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty) \rightarrow$ *این هم یه بازه نیست.*

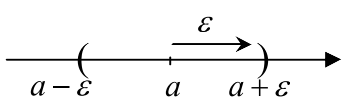
پس گزینه (۳) درست است.

تعریف همسایگی متقارن غیرمحذوف

بیش‌تر همسایگی‌هایی که در ریاضیات استفاده می‌کنیم، باید یک شرط جالب داشته باشند. آن هم این است که نقطه‌ی a درست وسط بازه‌ی موردنظر باشد که در این صورت آن بازه را یک همسایگی متقارن غیرمحذوف برای a می‌گویند. پس:

به هر بازه به صورت $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$، یک **همسایگی متقارن غیرمحذوف** به مرکز a و به شعاع ε می‌گویند.

به نمودار زیر دقّت کنید:



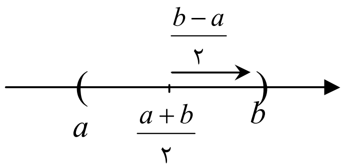
نمایش‌های مختلف همسایگی متقارن غیرمحذوف

یک همسایگی متقارن غیرمحذوف به مرکز a و شعاع ε را به دو شکل زیر می‌توان نمایش داد:

$$\boxed{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x\in R:|x-a|<\varepsilon\}}$$

$|x-a|<\varepsilon$ را اگر باز کنیم، همان $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ می‌شود. ببینید:

$$|x-a|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<x-a<\varepsilon\Rightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\Rightarrow x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$$



پس:

هر بازه به صورت (a,b) را می‌توان به صورت یک همسایگی متقارن غیرمحذوف به مرکز $\frac{a+b}{۲}$ و شعاع $\frac{b-a}{۲}$ نوشت:

$$(a,b)=\left\{x\in R:\left|x-\frac{a+b}{۲}\right|<\frac{b-a}{۲}\right\}$$

مثلاً: $(-۳,۴)=\left\{x\in R:\left|x-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۷}{۲}\right\}$

📖 **سؤال۲: اگر $(a-۵,۳a-۱)$ یک همسایگی متقارن عدد ۳ باشد، آن‌گاه شعاع همسایگی کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

پاسخ: **هر گاه فقط کلمه‌ی همسایگی متقارن مطرح می‌شود، منظور همسایگی متقارن غیرمحذوف است.**

$$\text{مرکز همسایگی}:\ \frac{(a-۵)+(۳a-۱)}{۲}=۳\Rightarrow ۴a-۶=۶\Rightarrow ۴a=۱۲\Rightarrow a=۳$$

$$\text{شعاع همسایگی}:\ \frac{(۳a-۱)-(a-۵)}{۲}=\frac{۲a+۴}{۲}=a+۲\xrightarrow{a=۳}=۵\Rightarrow$$ گزینه (۴) درست است.

📖 **سؤال۳: نامعادله‌ی $|x-۳|<\sqrt{x+۳}$ را به صورت $|x-a|<\varepsilon$ بنویسید؟**

پاسخ:

$$|x-۳|<\sqrt{x+۳}\xrightarrow{x\geq-۳}x^۲-۶x+۹<x+۳\Rightarrow x^۲-۷x+۶<۰\Rightarrow(x-۱)(x-۶)<۰\Rightarrow ۱<x<۶$$

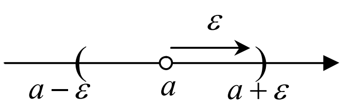
$$\Rightarrow x\in(۱,۶)\Rightarrow\begin{cases}\text{مرکز}:\ a=\frac{۱+۶}{۲}=\frac{۷}{۲}\\ \text{شعاع}:\ \varepsilon=\frac{۶-۱}{۲}=\frac{۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow\left|x-\frac{۷}{۲}\right|<\frac{۵}{۲}$$

تعریف همسایگی متقارن محذوف

اگر در یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع ε، a را حذف کنیم، یک همسایگی متقارن محذوف حاصل می‌شود. پس:

$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$ را یک **همسایگی متقارن محذوف** به مرکز a و به شعاع ε می‌گویند.

به نمودار زیر دقّت کنید:



پس **همسایگی محذوف یک نقطه، یک بازه نیست، بلکه اجتماع دو بازه است.** به صورت: $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$

نمایش‌های مختلف همسایگی متقارن محذوف

یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز a و شعاع ε را به صورت‌های زیر نشان می‌دهند.

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}=(a-\varepsilon,a)\bigcup(a,a+\varepsilon)=\{x\in R:\circ<|x-a|<\varepsilon\}$$

وقتی a وجود ندارد، پس x به عنوان نماینده‌ی نقاط داخل همسایگی، هیچ‌وقت نمی‌تواند مقداری برابر a داشته باشد و در نتیجه $|x-a|$ همواره مخالف صفر و از آن‌جا $|x-a|>\circ$ است.

سؤال۴: کدامیک از موارد زیر یک همسایگی محذوف را نشان می دهد؟

۱) $|x-۳|>\circ/۱$

پاسخ: $|x-۳|>\circ/۱\Rightarrow\begin{cases}x-۳>\circ/۱\\x-۳<-\circ/۱\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,۲/۹)\bigcup(۳/۱,+\infty)$

۲) $\circ/۱>|x-۳|>\circ$

پاسخ: $\circ/۱>|x-۳|>\circ$ معادل $\circ<|x-۳|<\circ/۱$ است که به صورت $\circ<|x-a|<\varepsilon$ ($\varepsilon=\circ/۱$ و $a=۳$) می‌باشد.
پس یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۳ و شعاع $\circ/۱$ است.

۳) $(۲/۹,۳)\bigcup(۳,۳/۱)$

پاسخ: به‌صورت $(a-\varepsilon,a)\bigcup(a,a+\varepsilon)$، ($\varepsilon=\circ/۱$ و $a=۳$) است. پس یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۳ و شعاع $\circ/۱$است.

۴) $\frac{|x-۳|^۲}{|x-۳|}<\circ/۱$

پاسخ: یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۳ و شعاع $\circ/۱$ است. زیرا:

$$\frac{|x-۳|^۲}{|x-۳|}<\circ/۱\Rightarrow\begin{cases}|x-۳|<\circ/۱\\|x-۳|\neq\circ\end{cases}\Rightarrow\circ<|x-۳|<\circ/۱$$

۵) $\frac{[|x|]}{|x|}=\circ$

پاسخ: یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز صفر و شعاع ۱ است. زیرا:

$$\frac{[|x|]}{|x|}=\circ\Rightarrow\begin{cases}[|x|]=\circ\\|x|\neq\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\circ\leq|x|<۱\\|x|\neq\circ\end{cases}\Rightarrow\circ<|x|<۱$$

۶) $\frac{|[x]|}{x}=\circ$

پاسخ: یک همسایگی متقارن محذوف نیست. زیرا:

$$\frac{|[x]|}{x}=\circ\Rightarrow\begin{cases}|[x]|=\circ\\x\neq\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]=\circ\\x\neq\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\circ\leq x<۱\\x\neq\circ\end{cases}\Rightarrow\circ<x<۱$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید $(\circ,۱)$ یک همسایگی متقارن غیرمحذوف به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ است.

سؤال۵: اگر اجتماع دو بازه‌ی $(-۱,a)$ و $(b-۱,۳)$ یک همسایگی متقارن محذوف باشد، a و b را به دست آورید.

پاسخ: اجتماع دو بازه، تنها وقتی یک همسایگی متقارن محذوف است که به صورت $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$ باشند. پس ابتدا صورت مناسبی از اجتماع آن دو را به شکل $(-۱,a)\cup(b-۱,۳)$ می نویسیم. حال باید:

$$\xrightarrow{\frac{(a-\varepsilon)+(a+\varepsilon)}{۲}=a}\underbrace{\frac{(-۱)+۳}{۲}}_{\text{مرکز همسایگی}}=a=b-۱\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

اگه یه همسایگی متقارن محذف به صورت $(x,y)\cup(y,z)$ یا $(x,z)-\{y\}$ باشه، مرکز همسایگی به صورت $y=\frac{x+z}{۲}$ به دست میاد.

سؤال۶: اگر $(۱,۲x)-\{y\}$ و $(x,z)\cup(z,۳)$ همسایگی محذوف متقارن برای یک عدد باشند، مقدار عددی $x+y+z$ کدام است؟ (کنکور آزمایشی آموزش و پرورش ۸۴)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: مرکز همسایگی متقارن محذوف $(۱,۲x)-\{y\}$ برابر است با $y=\frac{۱+۲x}{۲}$. هم‌چنین مرکز همسایگی متقارن محذوف $(x,z)\cup(z,۳)$ برابر است با $z=\frac{x+۳}{۲}$. از طرفی براساس فرض اوّلیه‌ی تست $y=z$ و در نتیجه:

$$\frac{۱+۲x}{۲}=\frac{x+۳}{۲}\Rightarrow ۲+۴x=۲x+۶\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=z=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x+y+z=۷\rightarrow$$ گزینه (۲) درست است.

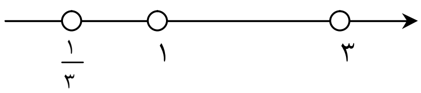
سؤال۷: مرکز بزرگترین همسایگی متقارن که زیرمجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right|>۲$ باشد کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

$$\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right|>۲\xrightarrow{x\neq ۱}|x+۱|>۲|x-۱|\Rightarrow|x+۱|>|۲x-۲|\xrightarrow{x\neq ۱}$$

$$(x+۱-۲x+۲)(x+۱+۲x-۲)>۰\xrightarrow{x\neq ۱}(-x+۳)(۳x-۱)>۰$$

$$\xrightarrow{x\neq ۱}(x-۳)(۳x-۱)<۰\xrightarrow{x\neq ۱}\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}<x<۳-\{۱\}$$



پس بزرگترین بازه‌ی متقارن زیرمجموعه‌ی بالا (۳، ۱) است پس مرکز بزرگترین همسایگی متقارن زیرمجموعه‌ی جواب نامعادله برابر $x_{\circ}=\frac{۱+۳}{۲}=۲$ است.

مجموعه جواب نامعادله $\frac{۱}{|x-a|}>\frac{۱}{\varepsilon}$ یک همسایگی محذوف به مرکز a و شعاع ε است.

سؤال۸: اگر مجموعه های $A=\left\{x:\dfrac{1}{|2x-a+1|}>a\right\}$ و $B=(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ **هر دو همسایگی محذوف یک عدد با شعاع برابر باشند،** β **کدام است؟**

$$\frac{1}{|2x-a+1|}>a\Rightarrow\frac{1}{2\left|x-(\frac{a-1}{2})\right|}>a\to\frac{1}{\left|x-(\frac{a-1}{2})\right|}>2a=\frac{1}{\frac{1}{2a}}$$

پس A :

یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز $\frac{a-1}{2}$ *و* $\frac{1}{2a}$ *شعاع است :*

$$B=(\alpha,1)\cup(1,\beta)=(\alpha,\beta)-\{1\}\Rightarrow$$

$$\text{مرکز همسایگی}=1=\frac{a-1}{2}\to a-1=2\to a=3$$

$$\text{شعاع همسایگی}=\frac{1}{2a}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1\\ \dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{1}{6}\end{cases}\to\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \beta-\alpha=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\beta=\frac{7}{6}$$

سؤال۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{|2x-a+1|}>\frac{2}{a}$ **یک بازه‌ی متقارن و محذوف به مرکز** $\frac{1}{3}$ **می باشد. شعاع این بازه کدام است.**

۱) $\frac{5}{4}$ **۲)** $\frac{5}{12}$ **۳)** $\frac{5}{8}$ **۴)** $\frac{15}{4}$

a *عددی مثبت است. چون در غیر این صورت* $\frac{2}{a}$ *عددی منفی خواهد بود و نامعادله همواره برقرار خواهد بود مگر آن که* $2x-a+1=0$

پس جواب نامعادله یک بازه‌ی متقارن و محذوف نخواهد بود پس a *عددی مثبت است. در نتیجه:*

$$a>0\xrightarrow{2x-a+1\neq0}\frac{a}{2}>|2x-a+1|\to\left|x-\frac{a-1}{2}\right|<\frac{a}{4}$$

$$\frac{a-1}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow a-1=\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{5}{3}\Rightarrow\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{5}{12}\Rightarrow$$ *شعاع این بازه* $\frac{5}{12}$ *است.*

سؤال۱۰: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{|ax-1|}>2$ **یک همسایگی محذوف متقارن به شعاع ۲ است. مرکز این همسایگی کدام نقطه است.** $(a>0)$

۱) $\frac{1}{2}$ **۲)** ۳ **۳)** $\frac{1}{4}$ **۴)** ۴

$$\frac{1}{|ax-1|}>2\Rightarrow|ax-1|<\frac{1}{2}\xrightarrow{a>0}\left|x-\frac{1}{a}\right|<\frac{1}{2a}\xrightarrow{\text{شعاع}=2}\frac{1}{2a}=2$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{همسایگی}}\frac{1}{a}=4$$

📖 **سؤال۱۱: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی** $\max\{(2x-5),(5-2x)\}<1$ **یک بازه‌ی متقارن به مرکز** a **و شعاع** r **باشد،** $a+r$ **کدام است. (آزمون کانون ریاضی ۹۲)**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

$$\boxed{\max\{a,-a\}=|a|}$$

$$\Rightarrow |2x+5|<1 \Rightarrow \left|x-\frac{5}{2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ r=\frac{1}{2} \end{cases} \to a+r=3$$

📖 **سؤال۱۲: مجموعه جواب نامعادله‌ی** $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\sqrt{x}$ **یک همسایگی متقارن به مرکز.......... و شعاع............ است.**

۱) ۲ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) ۱، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) ۲، $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$ ، $\sqrt{3}$ **(آزمون کانون۹۰)**

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\sqrt{x} \longrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}<x \Rightarrow x^2-2x+\frac{1}{4}<0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1-1+\frac{1}{4}<0 \Rightarrow (x-1)^2-\frac{3}{4}<0 \Rightarrow (x-1)^2<\frac{3}{4} \Rightarrow |x-1|<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس یک همسایگی متقارن به مرکز ۱ و شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *است.*

📖 **سؤال۱۳: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی** $|2x-1|+|x|<2x$ **بازه ای به مرکز** a **و شعاع** ε **باشد** $a+\varepsilon$ **کدام است. (آزمون کانون ۹۱)**

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\underbrace{|2x-1|+|x|}_{\text{مثبت}}<2x \Rightarrow x>0 \Rightarrow |2x-1|+x<2x \Rightarrow |2x-1|<x \Rightarrow -x<2x-1<x$$

$$\Rightarrow (2x-1+x)(2x-1-x)<0 \Rightarrow (3x-1)(x-1)<0 \Rightarrow \frac{1}{3}<x<1$$

از طرفین نامساوی $\frac{\frac{1}{3}+1}{2}=\frac{2}{3}$ *را کم می کنیم:*

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}<x-\frac{2}{3}<1-\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}<x-\frac{2}{3}<\frac{1}{3} \Rightarrow \left|x-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ \varepsilon=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a+\varepsilon=1$$

سؤال۱۴: اگر همه‌ی جواب های نامعادله‌ی $|x^2-4|<a$ در بازه‌ی $(1/9, 2/1)$ قرار داشته باشند، آنگاه بیشترین مقدار a کدام می تواند باشد. (کانون ۹۲)

۱) ۰/۴۱ ‏ ۲) ۰/۴۰ ‏ ۳) ۰/۳۹ ‏ ۴) ۰/۴۲

$$|x^2-4|<a \Rightarrow -a<x^2-4<a \Rightarrow 4-a<x^2<4+a \Rightarrow$$
$$\xrightarrow{x>0} \sqrt{4-a}<x<\sqrt{4+a}$$

بازه‌ی $(\sqrt{4-a}, \sqrt{4+a})$ وقتی زیرمجموعه (۱/۹ ، ۲ /۱) است که:

$$\begin{cases} \sqrt{4+a} \le 2/1 \Rightarrow 4+a \le 4/41 \xrightarrow{a>0} 0<a<0/41 & (1) \\ \sqrt{4-a} \ge 1/9 \Rightarrow 4-a \ge 3/61 \Rightarrow 0<a<0/39 & (2) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 0<a \le 0/39 \Rightarrow \max\{a\}=0/39$$

سؤال۱۵: جواب هایی از نامساوی $\sqrt{x^2-9}<\frac{4}{5}$ را که در بازه‌ی متقارن $\left(3-\frac{1}{10}, 3+\frac{1}{10}\right)$ قرار دارد را به صورت بازه ای نوشته ایم طول بازه کدام است. (آزمون کانون ۹۳)

۱) ۰/۱ ‏ ۲) $\sqrt{9/64}-3$ ‏ ۳) ۰/۶۱ ‏ ۴) ۰/۲

$$\sqrt{x^2-9}<\frac{4}{5} \Rightarrow 0 \le x^2-9<\frac{16}{25} \Rightarrow 9 \le x^2 \le 9/64 \qquad (1)$$
$$3-\frac{1}{10}<x<3+\frac{1}{10} \Rightarrow 2/9<x<3/1 \Rightarrow 8/41<x^2<9/61 \qquad (2)$$
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 9 \le x^2<9/61 \xrightarrow{\text{مثبت } x} 3 \le x<3/1 \xrightarrow{\text{طول بازه}} 3/1-3=0/1$$

سؤال۱۶: اگر نقطه‌ی میانی بازه‌ی $(-3, a^2)$ و نقطه‌ی میانی بازه‌ی مجموعه جواب $\frac{\sqrt{x}(x+3)}{2x-a}<0$ با یکدیگر برابر باشند، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a کدام است. (کانون ۹۳)

۱) $\{2\}$ ‏ ۲) $\left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$ ‏ ۳) $\left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$ ‏ ۴) $\{\}$

در نامعادله‌ی $\frac{\sqrt{x}(x+3)}{2x-a}<0$ ، x نمی تواند صفر باشد و با توجه رادیکال $x>0$ است.

$$\begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ 2x-a=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2} \end{cases}$$

x		-3		$\frac{a}{2}$	
$\frac{x+3}{2x-a}$	$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow -3<x<\frac{a}{2} \xrightarrow{x>0} 0<x<\frac{a}{2}$$

دقت کنید که باید $\frac{a}{2}>0$ باشد چون در غیر این صورت نامعادله جواب ندارد.

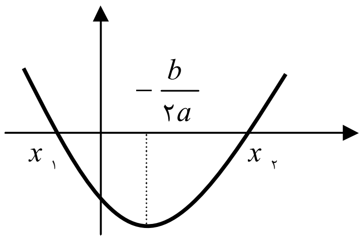
$$\begin{cases}\left(\circ,\dfrac{a}{۲}\right)\rightarrow \quad \text{نقطه میانی} = \dfrac{a}{۴}\\ (-۳,a^۲)\rightarrow \quad \text{نقطه میانی} = \dfrac{a^۲-۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{a^۲-۳}{۲}\Rightarrow ۲a^۲-a-۶=\circ\Rightarrow (۲a+۳)(a-۲)\Rightarrow a=۲,-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a>\circ} a=۲$$

سؤال۱۷: مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^۲-۴kx-۵<\circ$ یک همسایگی متقارن به مرکز ۲ است. شعاع این همسایگی کدام است. (آزمون کانون ۲۱ آذر ۹۳)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

چون ضریب $x^۲$ مثبت است و از آنجا که $ac<\circ$ است معادله‌ی درجه دوم رو به بالا و دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه است. یعنی $x^۲-۴kx-۵$ به شکل زیر است.



مجموعه جواب بازه‌ی $(x_۱,x_۲)$ است که یک همسایگی متقارن به مرکز $-\frac{b}{۲a}$ است:

$$-\frac{b}{۲a}=\frac{-(-۴k)}{۲(۱)}=۲k=۲\Rightarrow k=۱$$

$$k=۱: x^۲-۴x-۵<\circ\Rightarrow (x-۵)(x+۱)<\circ\Rightarrow -۱<x<۵$$

$$\Rightarrow -۱-۲<x-۲<۵-۲\Rightarrow -۳<x-۲<۳\Rightarrow |x-۲|<۳$$ *پس شعاع همسایگی ۳ است.*

سؤال۱۸: در بازه‌ی $(۲a-b,۳a+۲b)$ بزرگترین همسایگی متقارن نامنفی به مرکز $\frac{۷}{۲}$ باشد آنگاه $a+b$ کدام است. (آزمون کانون ۹۰)

مرکز همسایگی: $\dfrac{۲a-b+۳a+۲b}{۲}=\dfrac{۷}{۲}\Rightarrow ۵a+b=۷$

از طرفی چون بزرگترین بازه نامنفی مورد نظر است پس ابتدای این بازه صفر است یعنی:

$$\begin{cases}۲a-b=\circ\\ ۵a+b=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۳$$

سؤال۱۹: مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $\max\{x-۱,[x]\}=۲$ در $R\text{-}Z$ یک بازه‌ی متقارن است. نقطه‌ی میانی این بازه کدام است.

۱) ۱   ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

چون ماکسیمم تابع ها ۲ است، یا $f(x)=x-۱$ و یا $g(x)=[x]$ باید ۲ را تولید کند. باید بازه یا نقطه ای که هر کدام ۲ را تولید می کنند بدست آوریم و با هم مقایسه کنیم.

$$\begin{cases}[x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳\\ x-۱=۲\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

پس تنها نقطه ای که تابع $f(x)$ در آن نقطه‌ی ۲ را تولید می کند، ۳ است و در بقیه‌ی موارد یا کمتر یا بیشتر از ۲ است. از آن جایی که $x-۱$ صعودی است لذا در تمام بازه‌ی $[۲,۳)$ براکت ماکسیمم است و ۲ را تولید می کند در $x=۳$ براکت ماکسیمم است لذا مجموعه جواب معادله‌ی $\max\{x-۱,[x]\}=۲$ در ***R-Z*** بازه‌ی (۳، ۲) است.

📖 **سؤال۲۰: مجموعه‌ی $A=\{x: x\in R-Z, \frac{۱}{[x]}>\frac{۱}{۲}\}$ یک همسایگی........... به مرکز........... و شعاع......... است.**

(آزمون کانون ۸۹)

۱) متقارن، $\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}$ **۲) متقارن** ۱،۱ **۳) متقارن محذوف** ۱،۱ **۴) متقارن،** $\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}$

$$A=\{x: x\in R-Z, \frac{۱}{[x]}>\frac{۱}{۲}\}$$

$$\frac{۱}{[x]}>\frac{۱}{۲}\xrightarrow{[x]>۰}۰<[x]<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow ۱\le x<۲\xrightarrow{x\in R-Z}۱<x<۲\Rightarrow ۱-\frac{۳}{۲}<x-\frac{۳}{۲}<۲-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x-\frac{۳}{۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow \left|x-\frac{۳}{۲}\right|<\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$ همسایگی متقارن به مرکز و شعاع

📖 **سؤال۲۱: اگر $(a+۲,b+a)\cup(a,۳b-۱)$ یک همسایگی متقارن محذوف باشد مقدار $a-b$ کدام است.**

(کانون ۹۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۵

اجتماع دو بازه را می توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$(a+۲,b+a)\cup(a,۳b-۱)$$

$$(۱)\begin{cases}a=b+a\Rightarrow b=۰\\ \text{مرکز}: a=\dfrac{a+۲+۳b-۱}{۲}\Rightarrow ۲a=a+۳b+۱\xrightarrow{b=۰}a=۱\end{cases}$$

دقت کنید اگر $b=۰, a=۱$ باشد بازه ها به صورت $(۳,۱)\cup(۱,-۱)$ می شود که غلط است.

$$(a,۳b-۱)\cup(a+۲,b+a)$$

$$(۲)\begin{cases}۳b-۱=a+۲\Rightarrow ۳b-a=۳\\ \dfrac{a+b+a}{۲}=a+۲\Rightarrow ۲a+b=۲a+۴\Rightarrow b=۴\Rightarrow ۳(۴)-a=۳\Rightarrow a=۹\Rightarrow a-b=۹-۴=۵\end{cases}$$

📖 **سؤال۲۲: در همسایگی محذوف متقارن به صورت $(۳a-۷,a+۵)-\{۳\}$ شعاع همسایگی را بدست آورید. (سراسری ۸۹)**

پاسخ:

$$\text{مرکز همسایگی}=\frac{۳a-۷+a+۵}{۲}=۳\Rightarrow\frac{۴a-۲}{۲}=۳\to ۲a-۱=۳\Rightarrow ۲a=۴\to a=۲$$

$$\text{شعاع همسایگی}=\frac{a+۵-(۳a-۷)}{۲}=\frac{-۲a+۱۲}{۲}=\frac{-۲(۲)+۱۲}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

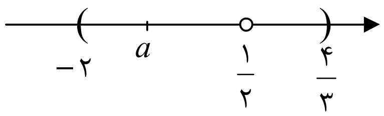
سؤال۲۳: یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیر مجموعهٔ $\left\{x:\left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right|>۱\right\}$ است، a کدام است. (سراسری خارج از کشور ۸۹)

پاسخ:

$$\frac{|x-۳|}{|۲x-۱|}>۱\xrightarrow{x\neq\frac{۱}{۲}}|x-۳|>|۲x-۱|$$

$$(x-۳-۲x+۱)(x-۳+۲x-۱)>۰$$

$$(-x-۲)(۳x-۴)>۰\xrightarrow{x\neq\frac{۱}{۲}}(x+۲)(۳x-۴)<۰\rightarrow-۲<x<\frac{۴}{۳}-\{\frac{۱}{۲}\}$$



باید بازه $(-۲,\frac{۱}{۲})$ یک همسایگی متقارن تشکیل دهند.

$$\Rightarrow a=\frac{-۲+\frac{۱}{۲}}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

سؤال۲۴: مجموعه $\{x:x\in R,|۲x+۳|<۱\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r است، a و r را بدست آورید؟

$$|۲x+۳|<۱\rightarrow۲|x+\frac{۳}{۲}|<۱\Rightarrow$$

$$\rightarrow\left|x+\frac{۳}{۲}\right|<\frac{۱}{۲}\rightarrow\left|x-(-\frac{۳}{۲})\right|<\frac{۱}{۲}\rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۳}{۲}\\ r=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

سؤال۲۵: اگر $A=\{x\notin Z\,|\,۲\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=۰\}$ همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع b باشد مقدار عددی b و a کدام است؟

یادآوری: $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$

$$۲\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=۰=\lfloor x\rfloor+(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)\ \underline{\underline{x\notin Z}}\ \lfloor x\rfloor-۱=۰\rightarrow\lfloor x\rfloor=۱$$

$$\rightarrow۱\leq x<۲\xrightarrow{x\notin Z}۱<x<۲\Rightarrow\left|x-\frac{۳}{۲}\right|<\frac{۱}{۲}$$

سؤال۲۶: عدد صحیح a حداکثر چه عددی باید باشد تا آن که $a-۱۰<|x-۳|<۱۰$ یک همسایگی متقارن غیرمحذوف ۳ باشد؟

پاسخ:

باید $a-۱۰<۰$ باشد تا نامساوی $|x-۳|<۱۰$ هیچ مزاحمی نداشته باشد:

$$\Rightarrow a<۱۰\xrightarrow{a\in Z}a\leq۹$$

پس حداکثر a برابر ۹ می باشد.

📖 **سؤال۲۷: مجموعه جواب نامعادله $|۵x+a|<\frac{b-۱}{۲}$ یک همسایگی متقارن به مرکز ۵- و شعاع $\frac{۱}{۱۰}$ است. b و a کدام است؟**

پاسخ:

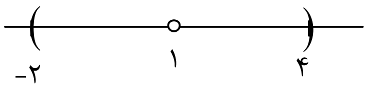
$$|۵x+a|<\frac{b-۱}{۲} \to ۵|x+\frac{a}{۵}|<\frac{b-۱}{۲} \to |x+\frac{a}{۵}|<\frac{b-۱}{۱۰} \to |x-(-\frac{a}{۵})|<\frac{b-۱}{۱۰}$$

$$\to \begin{cases} -\frac{a}{۵}=-۵ \to a=۲۵ \\ \frac{b-۱}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰} \to b-۱=۱ \to b=۲ \end{cases}$$

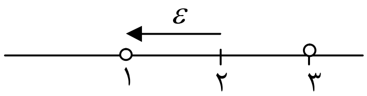
📖 **سؤال۲۸: I یک همسایگی متقارن ۲ به شعاع ε می‌باشد اگر I زیرمجموعه $A=\{x:۰<|x-۱|<۳\}$ باشد، آنگاه حداکثر مقدار ε کدام است؟**

پاسخ:

همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۱ و شعاع ۳ $\longleftarrow ۰<|x-۱|<۳$



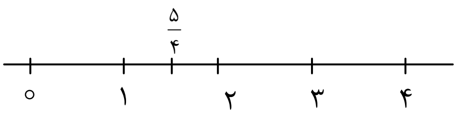
برای اینکه I یک همسایگی متقارن مرکز ۲ و شعاع ε باشد با توجه به اینکه $I \in A$ است و در A نقطه ۱ توخالیه پس حداکثر ε می‌تواند یک باشد.



$\longrightarrow ۰<|x-۲|<۱$

📖 **سؤال۲۹: یک همسایگی متقارن به مرکز $\frac{۵}{۴}$ دقیقاً شامل ۳ عدد صحیح است. بیشترین شعاع این همسایگی چقدر است؟**

پاسخ:



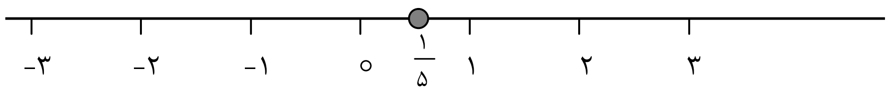
به شکل بالا به دقّت نگاه کنین. عدد $\frac{۵}{۴}$ بین ۱ و ۲ قرار داره و به یک نزدیکتر است ($\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$) پس وقتی داریم به مرکز $\frac{۵}{۴}$ یک همسایگی متقارن می‌زنیم با انتخاب شعاعی بزرگتر از $\frac{۱}{۴}$ عدد صحیح ۱ وارد همسایگی می‌شود. حالا شعاع همسایگی را افزایش می دم و چون صفر از ۳ به $\frac{۵}{۴}$ نزدیکتره $\begin{cases} \frac{۵}{۴}-۰=\frac{۵}{۴} \\ ۳-\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴} \end{cases}$ بنابراین یه شعاع بزرگتر از $\frac{۵}{۴}$ به مرکز $\frac{۵}{۴}$ می‌زنیم. حالا هم ۰ و هم ۲ داخل همسایگی شدن. چه باحال شد همسایگی ما دقیقاً شامل سه عدد صحیح شد.

اگر بخوام شعاع همسایگی رو بازم بیشتر کنم چهارمین عدد صحیحی که داخل می‌شه عدد ۳ است که خلاف فرض مسئه است پس حداکثر شعاع همسایگی باید طوری انتخاب شود که عدد ۳ وارد همسایگی نشه پس:

حداکثر شعاع همسایگی $=\varepsilon=۳-\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴}$

📖 **سؤال۳۰: بازه‌ی باز متقارن به مرکز $\frac{۱}{۵}$ و بیشترن شعاع ممکن شامل سه عدد صحیح فرد است. شعاع بازه کدام است.**

۱) $\frac{۲۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۵}$ ۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۵}$



اعداد ۱ و ۱- نزدیکترین اعداد فرد به $\frac{۱}{۵}$ هستند همچنین برای اینکه سه عدد صحیح فرد در این بازه باشد بازه باید شامل ۳ و فاقد ۳- باشد چون $\frac{۱}{۵}$ به ۳ نزدیکتر است تا به ۳- پس شعاع بازه برابر است با:

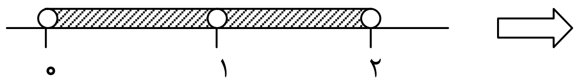
$$\left|\frac{۱}{۵}-(-۳)\right|=\frac{۱۶}{۵}$$

📖 **سؤال۳۱: اگر بازه‌ی I یک همسایگی متقارن عدد $\frac{۴}{۳}$ به شعاع r باشد و I زیر مجموعه‌ی $A=\{x\mid ۰<|x-۱|<۱\}$ باشد حداکثر مقدار r کدام است. (کانون ۹۳)**

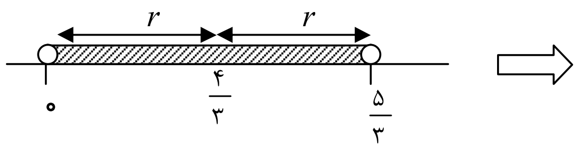
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

$$|x-۱|<۱\xrightarrow{x\neq ۱}-۱<x-۱<۱\Rightarrow ۰<x<۲-\{۱\}$$

بازه‌ی A ⟹



بازه‌ی I ⟹

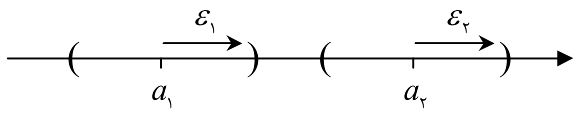


چون بازه‌ی I زیرمجموعه‌ی A می باشد و یک همسایگی متقارن است پس بیشترین مقدار r برابر $r=\frac{۴}{۳}-۱=\frac{۱}{۳}$ است.

تمرینات بیشتر

یک مطلب جالب دیگر:

در دو همسایگی متقارن (محذوف یا غیرمحذوف) به مراکز a_1 و a_2 و با شعاع‌های ε_1 و ε_2 داریم:

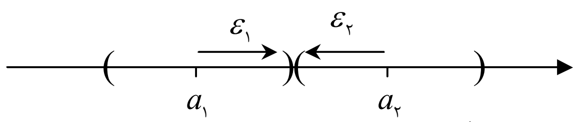


الف) دو همسایگی فاقد اشتراک هستند، هرگاه: $|a_1 - a_2| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

ب) دو همسایگی دارای اشتراک هستند، هرگاه: $|a_1 - a_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

: ما یه سؤال داریم! من فکر می کنم وقتی $|a_1 - a_2| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ باشه دو تاهمسایگی با هم اشتراک داشته باشن. در حالی که شما خلاف این رو گفتین!

به نمودار زیر دقت کن:



در این نمودار فاصله‌ی a_1 تا a_2، ($|a_1 - a_2|$) دقیقاً برابر مجموع دو شعاع همسایگی ε_1 و ε_2 است. یعنی $|a_1 - a_2| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. ولی به نظر شما آیا دو همسایگی در هم تداخلی دارند و یا وارد حریم یکدیگر شده اند که بتوانند اشتراکی داشته باشند؟ آن‌ها فقط در یک کران مشترک هستند که تازه خود آن کران متعلق به هیچ‌کدام از دو همسایگی نیست (این کران بسته نیست، باز است). هم‌چنین دقّت کنید که محذوف بودن یا نبودن همسایگی‌ها هیچ تأثیری در احکام مطرح شده ندارد. برای درک بهتر به تست زیر دقّت کنید.

📖 **سؤال۱: اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، به ازای کدام مورد زیر، اشتراک دو همسایگی $(x+2, x+3)$ و $(y+2, y+3)$ تهی است؟**

۱) $|x-y|<1$ ۲) $|x-y|\geq 1$ ۳) $|x-y|<\frac{1}{2}$ ۴) $|x-y|>1$

پاسخ: *ابتدا مرکز و شعاع دو همسایگی را به دست می آوریم. ببینید:*

$$(x+2, x+3) \Rightarrow a_1 = \frac{(x+2)+(x+3)}{2} = x + \frac{5}{2} \quad , \quad \varepsilon_1 = \frac{(x+3)-(x+2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(y+2, y+3) \Rightarrow a_2 = \frac{(y+2)+(y+3)}{2} = y + \frac{5}{2} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{(y+3)-(y+2)}{2} = \frac{1}{2}$$

گزینه (۲) درست است. $\Rightarrow |x-y| \geq 1 \Rightarrow |a_1 - a_2| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ *: برای آن که دو همسایگی فاقد اشتراک باشند*

📖 **سؤال۲: حاصل موارد زیر را به دست آورید؟** ۱) $\bigcup_{n=1}^{10}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

پاسخ: *قبل از هر چیز دقّت کنید که منظور از* ∞، همان $+\infty$ است.

$$A_n = (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \Rightarrow A_1 = (-1,1), A_2 = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), A_3 = (-\frac{1}{3},\frac{1}{3}), \ldots, A_{10} = (-\frac{1}{10},\frac{1}{10}), \ldots \lim_{n\to+\infty} A_n = (0^-, 0^+) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{10}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10} = (-1,1) \quad , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{\infty} = (-1,1)$$

همان‌طور که دیدید، اجتماع تعداد متناهی یا نامتناهی از همسایگی متقارن نقطه‌ی صفر، باز هم یک همسایگی متقارن صفر است. حالا به قسمت (۲) می‌پردازیم.

$$2)\ \bigcap_{n=1}^{10}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\ ,\ \bigcap_{n=1}^{10}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{10}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{10}=\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)\ ,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{\infty}=\{0\}$$

همان‌طور که می‌بینید اشتراک تعداد متناهی از همسایگی متقارن صفر، یک همسایگی متقارن صفر می‌باشد $\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$ ولی اشتراک تعداد نامتناهی از همسایگی آن، دیگر همسایگی نیست.

بنابراین اگر بخواهیم یک جمع‌بندی داشته باشیم:

الف) اجتماع تعداد متناهی یا نامتناهی از همسایگی‌های یک عدد، یک همسایگی آن عدد است (متقارن یا نامتقارن).

ب) اشتراک تعداد متناهی از همسایگی‌های یک عدد، یک همسایگی آن عدد است ولی اشتراک تعداد نامتناهی از همسایگی‌های یک عدد، ممکن است یک همسایگی آن عدد نباشد (متقارن یا نامتقارن).


: اجازه آقا! من یه مطلبی رو در این مثال نفهمیدم. اون هم این که چرا $\{0\}=(0^-,0^+)$ شد؟!

سؤال بسیار خوبی پرسیدی! ببین، $A_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ که در آن $-\frac{1}{n}<0$ و $\frac{1}{n}>0$ است و وقتی $n\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{1}{n}\to0^-$ و $\frac{1}{n}\to0^+$ و یا به طور کلی $\lim_{n\to+\infty}A_n=(0^-,0^+)$ و این دقیقاً بدین معنی است که وقتی $n\to+\infty$ ، A_n معرف یک بازه‌ی بسیار کوچک است که تنها به اندازه‌ی یک عدد بی‌نهایت کوچک از صفر کم‌تر و به اندازه‌ی یک عدد بی‌نهایت کوچک از صفر بیش‌تر است. حال به نظر شما از لحاظ حدی نمی‌توان گفت بازه‌ی $\lim_{n\to+\infty}A_n=(0^-,0^+)$ ، همان $\{0\}$ را نشان می‌دهد؟! مثال بعدی نیز در همین باره است، دقّت کنید.

📖 **سؤال۳: حاصل $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ را به دست آورید؟**

پاسخ:

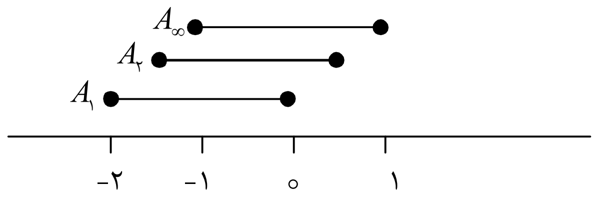
$$A_n=\left[-1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right] \text{ بنابراین؛ } A_1=[-2,0],A_2=\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right],A_3=\left[-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right],\ldots,\lim_{n\to+\infty}A_n=[-1-0^+,1-0^+]=[-1,1)$$

حتماً خودتان هم فهمیدید که با توجه به آن که $(1-0^+)$ از لحاظ حدی برابر ۱ است، امّا عددی کوچک‌تر از ۱ را نشان می‌دهد، بنابراین بازه‌ی $[-1-0^+,1-0^+]$ شامل ۱ نمی باشد و در نتیجه از سمت ۱ باز خواهد بود. هم چنین $(-1-0^+)$ عددی کوچک‌تر از ۱− را نشان می‌دهد، بنابراین بازه‌ی $[-1-0^+,1-0^+]$ شامل ۱− است و روی همین حساب هم از سمت ۱− بسته می‌باشد. و امّا ادامه‌ی حل:

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{\infty}=[-1,0]$$

اجازه! ما این قسمت $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\infty$ رو نمی‌دونیم چه‌طوری باید به دست بیاریم. می‌شه توضیح بدین.

بهترین روش برای آن که هیچ اشتباهی پیش نیاید، ترسیم نموداری است. مثلاً در همین مثال با ترسیم نموداری زیر، خیلی راحت می‌توانید حاصل مورد نظر را به دست بیاورید.



و امّا قسمت بعدی: $A_n = \left[-1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$. داریم:

$$A_1 = [0,0] = \{0\}, A_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], A_3 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}], \ldots, \lim_{n\to+\infty} A_n = [-1+0^+, 1-0^+] = (-1,1)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\infty = (-1,1)$$

توجّه داشته باشید که $(a,a) = \phi$ و $[a,a] = \{a\}$.

🕮 سؤال۴: اگر n عدد طبیعی باشد چند همسایگی متقارن به صورت $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ با شعاع بزرگتر از $\frac{11}{60}$ وجود دارد؟

(گزینه۲)

پاسخ:

$$\text{شعاع همسایگی متقارن} = \frac{\frac{1}{n+1} - (-\frac{1}{n})}{2} = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}{2} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} > \frac{11}{60} \to \frac{2n+1}{n(n+1)} > \frac{11}{30}$$

$$\xrightarrow{n\in N} 60n + 30 > 11n^2 + 11n \to 11n^2 - 49n - 30 < 0 \to (n-5)(\underbrace{11n+6}_{\text{همواره مثبت}}) < 0 \to n-5 < 0$$

$$\to n < 5 \to n \le 4 \xrightarrow{n\in N} n \in \{1,2,3,4\}$$

🕮 سؤال۵: مجموعهٔ جواب نامعادله $|x+6| > x^2$ را به صورت $|x-\alpha| < \beta$ نمایش داده ایم ، α چقدر است؟

(گزینه۲)

پاسخ:

$$|x+6| > x^2 \to \begin{cases} x+6 > x^2 \\ x+6 < -x^2 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \to (x-3)(x+2) < 0 \to -2 < x < 3 \\ x^2 + x + 6 < 0 \to \times \quad a > 0 \quad \Delta < 0 \end{cases}$$

پس $x^2 + x + 6$ همواره مثبت است.

$$-2 < x < 3 \to |x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2}$$

📖 **سؤال۶: اگر $(-۲,a)\cup(b,c)$ یک همسایگی متقارن محذوف عددی با شعاع ۳ باشد مقدار c , b , a را بدست آورید؟ (گزینه۲)**

پاسخ: $a=b$

طول دو بازه باید با هم برابر باشند و برابر شعاع همسایگی یعنی ۳ باشند:

$$\begin{cases}a-(-۲)=۳\\ c-b=۳\end{cases}\to\begin{cases}a+۲=۳\to a=۱\to b=۱\\ c-a=۳\to c-۱=۳\to c=۴\end{cases}$$

📖 **سؤال۷: اگر $(۳,۳b+a)\cup(b,۲a-b)$ همسایگی متقارن و محذوف باشد، a و b کدام گزینه است؟ (گزینه ۲)**

پاسخ: *طول دو بازه با هم برابرند پس* $(۳b+a)-۳=(۲a-b)-b\Rightarrow ۵b-a=۳$

حال دو حالت ممکنه رخ بده:

$$\text{(حالت اول)}\ ۳b+a=b\Rightarrow\begin{cases}۳b+a=b\\ ۵b-a=۳\end{cases}\to\begin{cases}۲b+a=۰\\ ۵b-a=۳\end{cases}\to\begin{cases}b=\frac{۳}{۷}\\ a=-\frac{۶}{۷}\end{cases}\Rightarrow(۳,\frac{۳}{۷})\cup(\frac{۳}{۷},-\frac{۱۵}{۷})$$

پس باید $(b,۲a-b)\cup(۳,۳b+a)$ *بیانگر همسایگی متقارن و محذوف باشد:*

$$\text{(حالت دوم)}\ ۲b-b=۳\Rightarrow\begin{cases}۲a-b=۳\\ ۵b-a=۳\end{cases}\to\begin{cases}a=۲\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow(۳,۵)\cup(۱,۳)=(۱,۳)\cup(۳,۵)$$

📖 **سؤال۸: در همسایگی محذوف و متقارن $(۳a-۴,a+۶)-\{۴\}$ چند عدد صحیح قرار دارد؟ (گزینه ۲)**

پاسخ:

$$\Rightarrow\frac{۳a-۴+a+۶}{۲}=۴\to\frac{۴a+۲}{۲}=۲a+۱=۴\to a=\frac{۳}{۲}\ \text{همسایگی}\ \to=(\frac{۱}{۲},\frac{۱۵}{۲})-\{۴\}$$

پس ۶ عدد صحیح $\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}$ در این بازه قرار می گیرند دقت کنین که چون عدد ۴ حذف شده این عدد در این بازه قرار ندارد.

📖 **سؤال۹: اگر $(a-۵,۳a-۱)$ یک همسایگی متقارن عدد ۳ باشد آنگاه شعاع همسایگی کدام است؟**

پاسخ:

$$\text{مرکز همسایگی}=۳=\frac{a-۵+۳a-۱}{۲}=\frac{۴a-۶}{۲}=۲a-۳\to ۲a-۳=۳\to ۲a=۶\to a=۳$$

$$\text{شعاع همسایگی}=\frac{۳a-۱-(a-۵)}{۲}=\frac{۲a+۴}{۲}=a+۲=۳+۲=۵$$

📖 **سؤال۱۰: اگر یک همسایگی به مرکز ۰/۱ و شعاع ۱/۱ معادل $a<۳x-۲<b$ باشد b و a کدام است؟**

پاسخ:

$$|x-۰/۱|<۱/۱\to -۱/۱<x-۰/۱<۱/۱\to -۱<x<۱/۲\to -۳<۳x<۳/۶$$

$$\Rightarrow -۵<۳x-۲<۱/۶\to\begin{cases}a=-۵\\ b=۱/۶\end{cases}$$

📖 **سؤال۱۱: نوع همسایگی نامساوی های زیر با بگویید؟**

$$۱)\ \frac{۱}{|۳x-۲|}>۱$$

پاسخ:

$$\xrightarrow{x\neq\frac{۲}{۳}}|۳x-۲|<۱\to ۳|x-\frac{۲}{۳}|<۱\to|x-\frac{۲}{۳}|<\frac{۱}{۳}\xrightarrow{x\neq\frac{۲}{۳}}۰<|x-\frac{۲}{۳}|<\frac{۱}{۳}\to\ \text{همسایگی متقارن محذوف}$$

$۲)x^{۲}-۳|x|<۰$

پاسخ:

$|x|^{۲}-۳|x|<۰\to|x|(|x|-۳)<۰\to ۰<|x|<۳\to$ همسایگی متقارن محذوف

$۳)x^{۲}-۲x-۳<۰$

پاسخ:

$(x-۳)(x+۱)<۰\to -۱<x<۳\to|x-۱|<۲\to$ همسایگی متقارن غیر محذوف

$۴)|x-۱|\ \ |x-۲|<۳|x-۱|$

پاسخ:

طرفین را بر $|x-۱|>۰$ تقسیم می‌کنیم در ضمن نباید $x=۱$ باشد یعنی $x\neq ۱$

$\Rightarrow|x-۲|<۳\xrightarrow{x\neq۱}-۳<x-۲<۳\xrightarrow{x\neq۱}-۱<x<۵\xrightarrow{x\neq۱}-۱<x<۵-\{۱\}=(-۱,۱)\cup(۱,۵)$

بازه بالا فقط یک همسایگی برای یک محسوب می شود آنها هم یک همسایگی نامتقارن محذوف

📖 **سؤال۱۲: اگر بازه $(a,۳a+۳)\cup(b^{۲}-۳,۱)$ یک همسایگی محذوف متقارن باشد حاصل $۲a^{۲}+۳b^{۲}$ کدام است؟**

پاسخ:

$$\text{مرکز همسایگی محذوف متقارن}=\frac{a+۱}{۲}=۳a+۳=b^{۲}-۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+۱}{۲}=۳a+۳\to a+۱=۶a+۶\to ۵a=-۵\to a=-۱\\ ۳a+۳=b^{۲}-۳\to ۳(-۱)+۳=b^{۲}-۳\to ۰=b^{۲}-۳\to b^{۲}=۳\end{cases}\to ۲a^{۲}+۳b^{۲}=۲(-۱)^{۲}+۳(۳)=۲+۹=۱۱$$

📖 **سؤال۱۳: بازه $(۳,a)$ را به شکل یک همسایگی به صورت $\{x\in R:\left|x-\frac{a+۳}{۲}\right|<۳a-۱۸\}$ نوشته ایم a کدام است؟**

پاسخ:

$$(۳,a)\xrightarrow{\text{تبدیل به قدر مطلق}}\left|x-\frac{a+۳}{۲}\right|<\frac{a-۳}{۲}\Rightarrow ۳a-۱۸=\frac{a-۳}{۲}\to ۶a-۳۶=a-۳$$

$$\to ۵a=۳۶-۳=۳۳\to \boxed{a=\frac{۳۳}{۵}}$$

📖 **سؤال۱۴: چند همسایگی به شکل $(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n+۳})$ از عدد $\frac{۱}{۱۵}$ وجود دارد؟ ($n\in N$)**

پاسخ:

$$\frac{۱}{۱۵}\in(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n+۳})\to$$

$$\underbrace{-\frac{۱}{n}<\frac{۱}{۱۵}}_{\text{همواره مثبت}}<\frac{۱}{n+۳}\to\frac{۱}{۱۵}<\frac{۱}{n+۳}\Rightarrow n+۳<۱۵\to n<۱۲\to n\leq ۱۱\to n\in\{۱,۲,...,۱۱\}$$

پس یازده همسایگی وجود دارد.

📖 **سؤال۱۵: اگر I_1 یک همسایگی متقارن $-\frac{7}{2}$ و به شعاع $\frac{1}{2}$ ، I_2 یک همسایگی متقارن محذوف $\frac{5}{2}$ و به شعاع ε باشد و $I_1 \cap I_2 = \phi$ حداکثر مقدار ε کدام است؟**

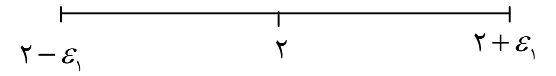
پاسخ:

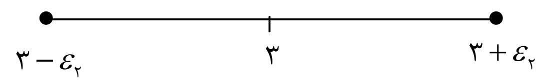
$$\begin{cases} I_1 : a_1 = -\frac{7}{2} \ , \ \ \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \\ I_2 : a_2 = \frac{5}{2} \ , \ \ \varepsilon_2 = \varepsilon \end{cases} , I_1 \cap I_2 = \phi \to |a_1 - a_2| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\to \left| -\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right| \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \to \left| -\frac{12}{2} \right| \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \to 6 \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \to \varepsilon \leq \frac{11}{2}$$

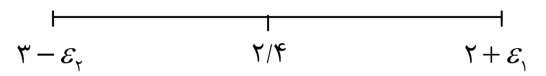
📖 **سؤال۱۶: I_1 یک همسایگی متقارن ۲ و I_2 یک همسایگی متقارن ۳ است. اگر اشتراک این دو همسایگی یک همسایگی متقارن به مرکز ۲/۴ باشد آنگاه اختلاف شعاع دو همسایگی I_1 و I_2 چقدر است؟**

پاسخ: *با رسم شکل مفهوم سؤال رو باز تر می کنیم؛*





حالا اشتراک I_1 و I_2 را پیدا می کنیم در ضمن وسط اشتراک دو همسایگی عدد ۲/۴ است؛



$$\to 2/4 = \frac{(3-\varepsilon_2)+(2+\varepsilon_1)}{2} \to \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 5 = 4/8 \to \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -0/2 \to \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0/2$$

📖 **سؤال۱۷: نامساوی $\big| |x-a^2| - b \big| < a^2$ بیانگر یک همسایگی متقارن به مرکز $\sqrt{2}$ است. کدام گزینه زیر درست است؟**

۱) $|b| < \sqrt{2}$ ۲) $|b| > \sqrt{2}$ ۳) $b > \sqrt{2}$ ۴) $b < \sqrt{2}$

پاسخ:

$$\big| |x-a^2| - b \big| < a^2 \to -a^2 < |x-a^2| - b < a^2 \to b - a^2 < |x-a^2| < b + a^2$$

چون مرکز همسایگی $\sqrt{2}$ است پس $a^2 = \sqrt{2}$. حالا برای اینکه این نامساوی یک همسایگی متقارن رو نوشن بده، باید $b - a^2 < 0$ یا $b - \sqrt{2} < 0$ یا $b < \sqrt{2}$ (۱) . حالا نامساوی رو حل می کنیم ($a^2 = \sqrt{2}$)

در ضمن باید $b + a^2 = b + \sqrt{2} > 0$ باشد یا $b + \sqrt{2} > 0$ یا $b > -\sqrt{2}$ (۲)

$$\begin{cases} b < \sqrt{2} \\ b > -\sqrt{2} \end{cases} \to -\sqrt{2} < b < \sqrt{2} \to |b| < \sqrt{2}$$

سؤال۱۸: مجموعه $(a,b]\cup(c,d)$ یک همسایگی متقارن عدد $\frac{1}{2}$ است. کدام گزینه زیر درست است؟

۱) $c+d=1$ ۲) $c+d<1$ ۳) $c+d>1$ ۴) $c+b<1$

پاسخ:

هرجا سخن از همسایگی است نام بازه باز کراندار می درخشد!

پس حتماً دو بازه $(a,b],(c,d)$ با یکدیگر دارای اشتراک هستند که دراین صورت باید $a<c\le b$ و در نتیجه $(a,b]\cup(c,d)=(a,d)$

حالا برای اونکه (a,d) یک همسایگی متقارن $\frac{1}{2}$ باشد باید :

$$\frac{a+d}{2}=\frac{1}{2}\to a+d=1 \qquad (1)$$

پس :

$$a<c\le b\xrightarrow{\text{جمع طرفین با } d}a+d<c+d\le b+d\Rightarrow 1<c+d\le b+d$$

پس گزینه (۳) درست است.

سؤال۱۹: تعداد اعداد طبیعی به گونه ای که اعضای بازه $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-10})$ به بازه متقارن $(\frac{1}{20},\frac{3}{20})$ تعلق داشته باشند کدام است؟

پاسخ: *برای اینکه بازه $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-10})$ معنی داشته باشد لازم است داشته باشد : $n-10>0\to n>10$*

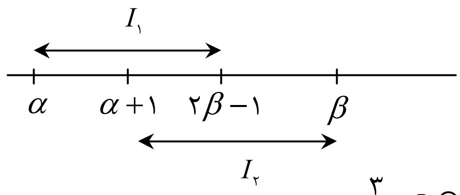
از طرفی چون اعضای بازه $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-10})$ به بازه متقارن $(\frac{1}{20},\frac{3}{20})$ تعلق دارد پس داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{n-10}\le\frac{3}{20}\xrightarrow{n>10}n-10\ge\frac{20}{3}\to n\ge\frac{50}{3}\\ \frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{20}\longrightarrow n+1\le 20\to n\le 19\end{cases}$$

از نامساوی های $n>10$ و $n\ge\frac{50}{3}$ و $n\le 19$ نتیجه می‌شود تنها سه‌عدد طبیعی $n=17$ و $n=18$ و $n=19$ در شرایط سؤال‌صدق می‌کنند.

سؤال۲۰: اگر هیچ یک از بازه های $I_1=(\alpha,2\beta-1)$ و $I_2=(\alpha+1,\beta)$ زیر مجموعه دیگری نباشند و $I_1\cap I_2$ یک همسایگی به مرکز $-\frac{3}{2}$ باشد محدوده β را بیابید؟

پاسخ: *چون هیچ یک از بازه های I_1 و I_2 زیرمجموعه دیگری نیست لذا $I_1\cap I_2$ برابر هیچ یک از بازه های I_1 و I_2 نیست. از طرفی چون $\alpha<\alpha+1$ است لذا وضعیت بازه های I_1 و I_2 نسبت به یکدیگ روی محور تنها به صورت زیر است:*



مرکز $I_1\cap I_2$ ، $-\frac{3}{2}$ است پس :

$$\to (1)\to 2\beta-1<\beta\to\beta<1 \quad (1)$$

$$\to (2)\to \alpha+1<2\beta-1\to\alpha-2\beta<-2 \quad (2)$$

$$I_1\cap I_2=(\alpha+1,2\beta-1)$$

$$\frac{\alpha+1+2\beta-1}{2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow \alpha+2\beta=-3$$

این رابطه را در رابطه (۲) قرار می دهیم:

$$\Rightarrow \alpha=-3-2\beta$$

$$-3-2\beta-2\beta<-2\to 4\beta>-1\to\beta>-\frac{1}{4}\,(3)$$

$$(1)\cap(3)\to -\frac{1}{4}<\beta<1$$

سؤال۲۱: اگر $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ و $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]$ ، $A\bigcup B$ آنگاه کدام است؟

پاسخ:

$$\begin{cases} A_1=[-1,1],A_2=[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}],\dots,\lim\limits_{n\to\infty}A_n[0^-,0^+]=\{0\} \\ \quad\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_\infty=\{0\} \\ B_1=[1,2],B_2=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}],\dots,\lim\limits_{n\to+\infty}B_n[0^-,1+0^+]=(0,1] \\ \quad\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]=B_1\cap B_2\dots\cap B_\infty=\{1\} \end{cases}\Rightarrow A\bigcup B=\{0,1\}$$

سؤال۲۲: اگر $A_n=[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$ ، $(n\in N)$ ، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ کدام است؟

پاسخ:

$$A_1=[1,2],A_2=[\frac{1}{2},1],A_3=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\dots,\lim_{n\to\infty}A_n=[0^+,0^+]=(0,0)=\phi$$

$$\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=(0,2]$$

سؤال۲۳: حاصل $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n+1})$ کدام است؟

پاسخ:

$$A_1=(0,\frac{1}{2})\ ,\ A_2=(0,\frac{1}{3})\ ,\ A_3=(0,\frac{1}{4})\ ,\ \dots\ ,\ \lim_{n\to+\infty}A_n=(0,\frac{1}{+\infty+1})=(0,0^+)=(0,0)=\phi$$

$$\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n+1})=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n=\phi$$

سؤال۲۴: اگر $A_n=\left(\frac{-n}{n+1},\frac{2n+4}{n+1}\right)$، حاصل $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ کدام است؟

پاسخ:

$$A_n=\left(\frac{-(n+1)+1}{n+1},\frac{2(n+1)+2}{n+1}\right)=\left(-1+\frac{1}{n+1},2+\frac{2}{n+1}\right)$$

$$A_1=(-\frac{1}{2},3),A_2=(-\frac{2}{3},\frac{8}{3}),A_3=(-\frac{3}{4},\frac{5}{2}),\dots,\lim_{n\to+\infty}A_n=(-1+0^+,2+0^+)=(-1,2]$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_\infty=(-\frac{1}{2},2]$$