



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

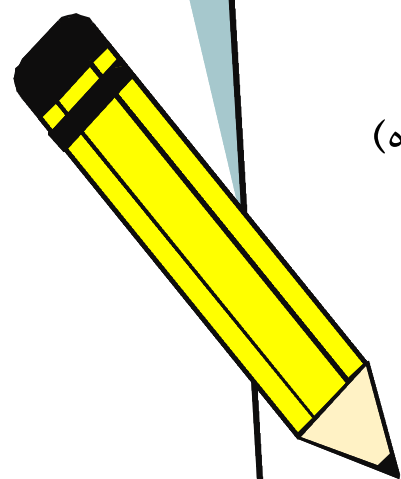
(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دردوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر
نیستفاده شده و ندرتاً برخی از سوالات که از نظر نگارنده
غیر قابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

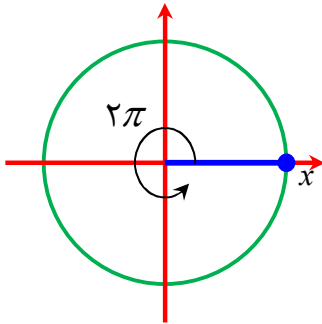
- ۱- کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی
- ۲- حرف آخر (مهندس منتظری)
- ۳- مثلثاتی انتشارات خوشخوان (کاظم اجلالی)
- ۴- حسابان خیلی سبز (علی بیطرفان)
- ۵- دیفرانسیل پیشرفته خیلی سبز (حسین شفیع زاده)
- ۶- سه سطحی قلم چی
- ۷- خط ویژه ی گاج
- ۸- تست های کنکور سراسری



حل معادلات مثلثاتی

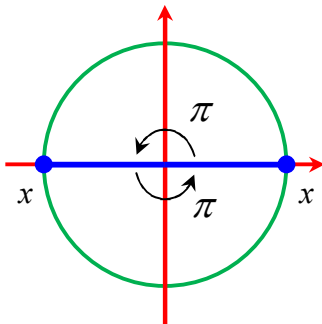


عقربه‌ی یک سر:



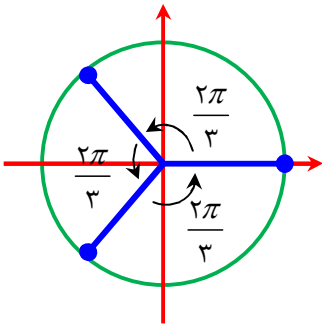
$$x = \{ \dots \circ (2\pi), 1(2\pi), 2(2\pi), \dots \} \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{1} \quad (1)$$

عقربه‌ی دو سر:

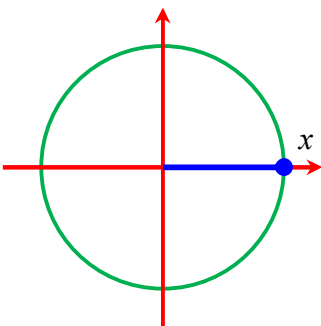


$$x = \{ \dots \circ (\pi), 1(\pi), 2(\pi), \dots \} \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \quad (2)$$

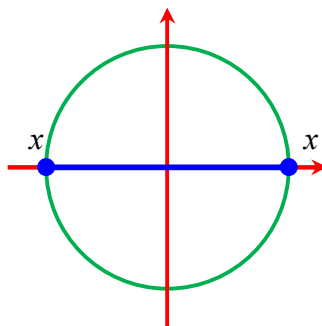
عقربه‌ی سه سر:



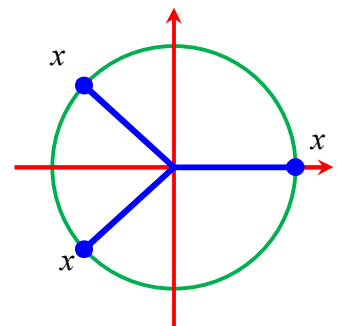
$$x = \left\{ \dots \circ \left(\frac{2\pi}{3} \right), 1 \left(\frac{2\pi}{3} \right), 2 \left(\frac{2\pi}{3} \right), \dots \right\} \Rightarrow x = k \left(\frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad (3)$$



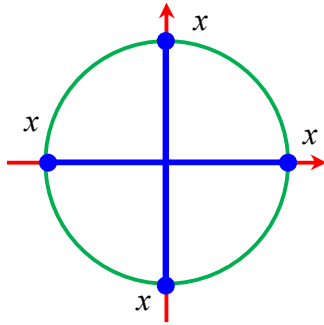
$$x = \frac{2k\pi}{1} \quad (1)$$



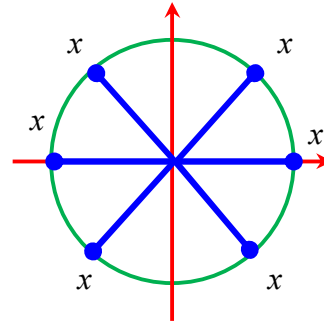
$$x = \frac{2k\pi}{2} \quad (2)$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (3)$$



$$x = \frac{2k\pi}{4}$$



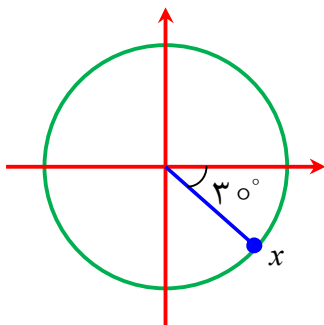
$$x = \frac{2k\pi}{6}$$

عقربه‌ی n سر دوران یافته:

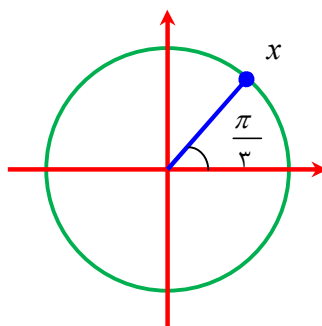
عقربه‌های n سر ممکن است به اندازه‌ی α رادیان دوران داشته باشند در این صورت فرمول عمومی x را می‌توان برای عقربه‌های n سر به صورت زیر نوشت:

$$x = \frac{2k\pi}{n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{رادیان دوران درجهت}} & \frac{2k\pi}{n} + \alpha \\ \xrightarrow{\text{رادیان دوران درجهت}} & \frac{2k\pi}{n} - \alpha \end{cases}$$

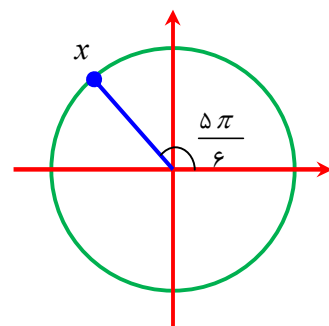
سؤال: فرمول عمومی زاویه‌ی x را در هر یک از شکل‌های زیر بدست آورید.



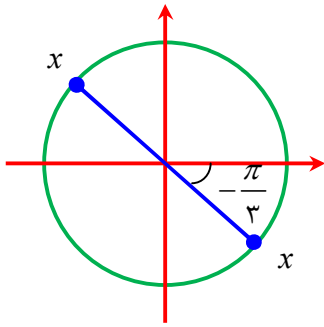
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$



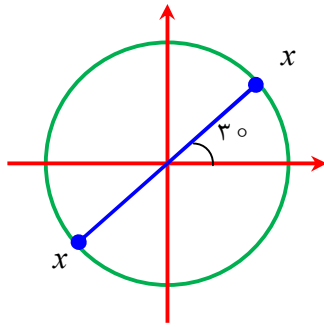
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$



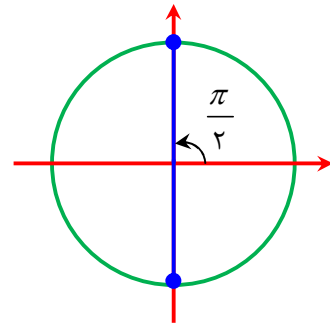
$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$



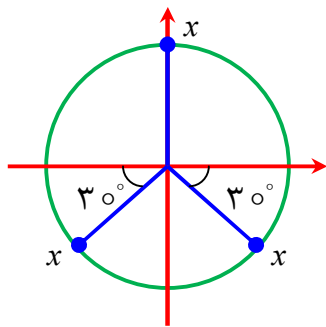
$$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$



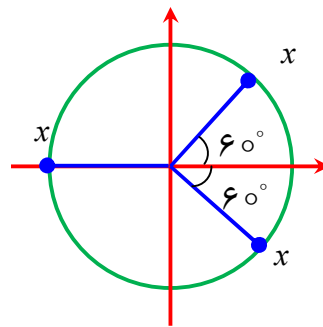
$$x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



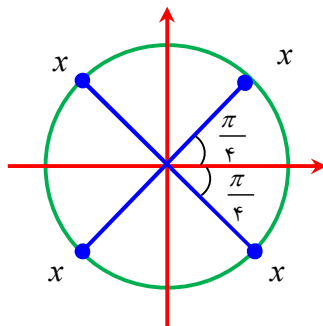
$$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$



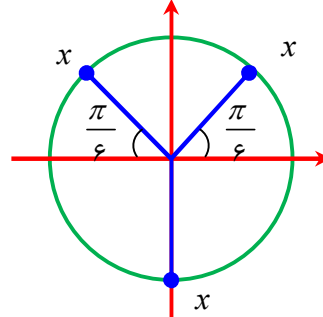
$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$



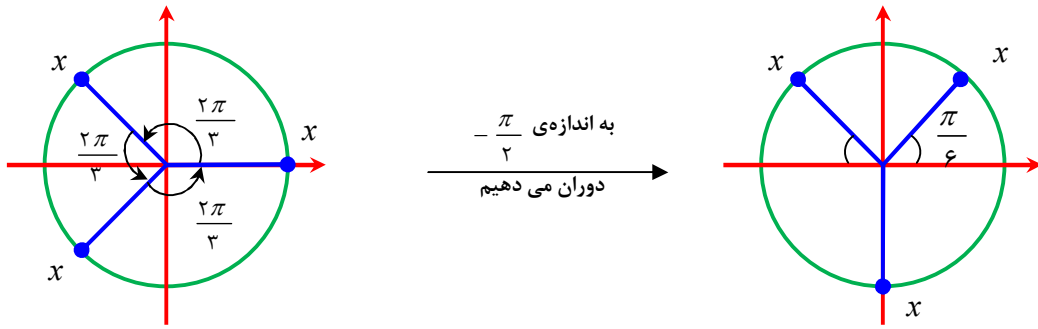
دو شکل خیلی مهم:



$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



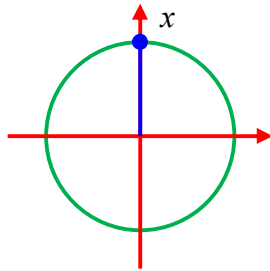
$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



حل معادله‌ی $\sin x = a$ به روش شهودی

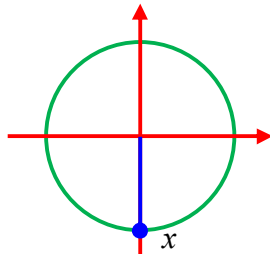
معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\sin x = 1$



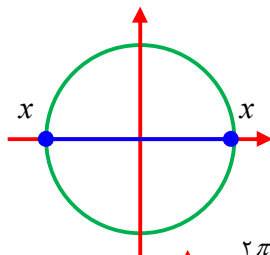
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۲) $\sin x = -1$



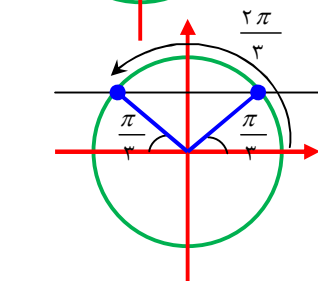
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

۳) $\sin x = 0$



$$x = k\pi$$

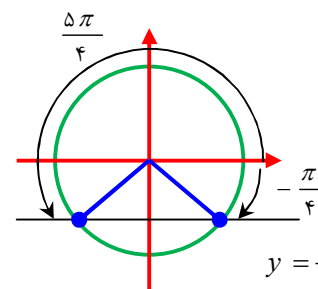
۴) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۵) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

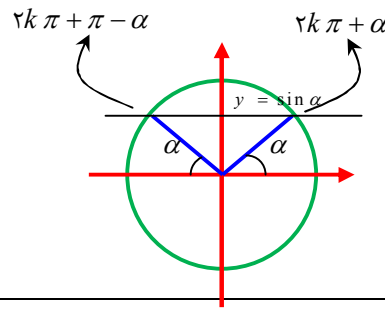


$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

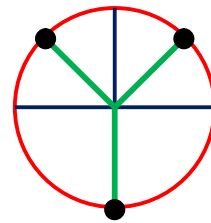


• $\sin 3x = \sin \frac{\pi}{2}$ (تمرین کتاب درسی)

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

• $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{aligned} a+c=b &\rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ x &= \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$



• $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ (تمرین کتاب درسی)

ادامه‌ی حل دقیقاً مانند تمرین بالاست $\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

• $2\sin 3x = \sqrt{2}$ (تمرین کتاب درسی)

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

• $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (تمرین کتاب درسی)

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

سؤال ۲: مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲، ۶ سانتی متر باشد

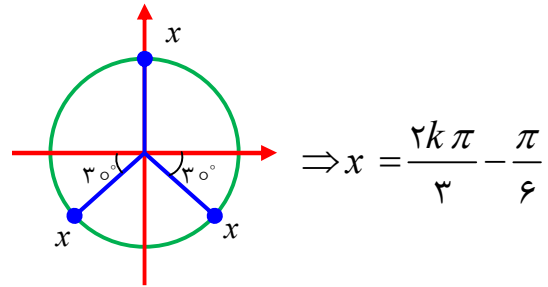
آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟ (تمرین کتاب درسی)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < \theta < \pi} \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

پس ۲ مثلث می توان ساخت.

سؤال ۳: جواب کلی معادله $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ را بدست آورید.

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

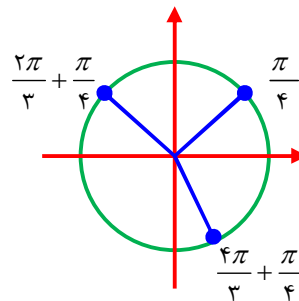
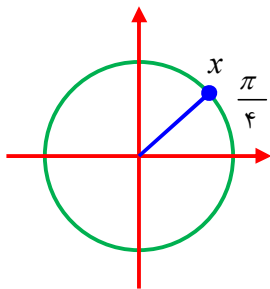


سؤال ۴: جواب کلی معادله $\sin 3x = \sin 2x$ را بدست آورید. (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

سؤال ۵: معادله $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد. (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

توجه: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ در دل $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ قرار دارد (زیرمجموعه‌ی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ است) پس جواب

کلی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ خواهد بود و تعداد جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر ۳ است.

سؤال ۶: کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله $\frac{\sin 7x}{\sin x} + 2\cos x = 0$ بر حسب درجه کدام است؟

۴۰° (۴)

۳۶° (۳)

۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

$$\frac{\sin 7x + 2 \sin x \cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{\sin 7x + \sin 2x}{\sin x} = 0 \xrightarrow{x \neq k\pi} \sin 7x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 7x = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x = 2k\pi + (-2x) \\ 7x = 2k\pi + \pi - (-2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ 5x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

کوچکترین ریشه‌ی مثبت $x = \frac{2k\pi}{9}$ به ازای $k=1$ برابر $\frac{2\pi}{9}$ و کوچکترین ریشه‌ی مثبت $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$ به ازای $k=0$ برابر

$\frac{\pi}{5}$ می‌شود با توجه به اینکه $\frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{9}$ ، پس کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله برابر $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ است.

سؤال ۷: در معادله‌ی $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ جواب‌ها روی دایره‌ی مثلثاتی نمایش رئوس کدام چند ضلعی است.

(۴) شش ضلعی منتظم

(۳) مستطیل غیرمربع

(۲) مربع

(۱) لوزی

پاسخ: گزینه (۲)

$$\boxed{\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

جواب‌هایی که در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ قرار دارند عبارتند از: $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$

که روی دایره‌ی مثلثاتی تشکیل یک مربع می‌دهند زیرا: فاصله‌ی هر دو زاویه‌ی متوالی برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

سؤال ۸: مجموع جواب‌های معادله‌ی $2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = 5$ در فاصله کدام است؟

 $\frac{5\pi}{8}$ (۴) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{8}$ (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۱)

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 5$$

با فرض $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = t$ داریم:

$$2t^2 + 3t - 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

توجه شود که چون $t = \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right)$ بود و سینوس همواره بین -۱ و ۱ است. پس $-\frac{5}{\lambda}$ نمی تواند باشد:

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{\lambda}$$

چون گفته $0 \leq x \leq 2\pi$ پس تنها جواب معادله $x = \frac{5\pi}{\lambda}$ است (به ازای $k = 0$) گزینه (۴) درست است.

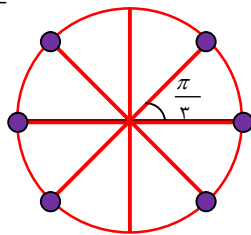
سؤال ۹: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

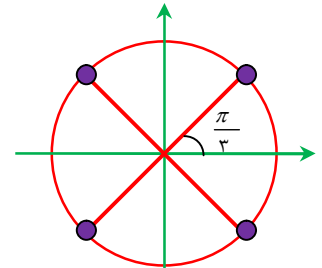
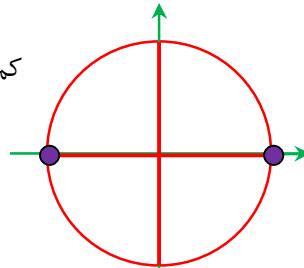
$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \quad \underline{\sin x \neq 0} \quad \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$



کم می کنیم



گزینه (۳) درست است. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ = مجموعه جواب

سؤال ۱۰: جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است.

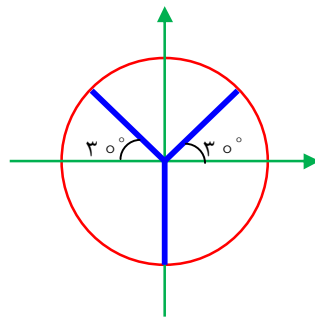
مجموعه ی مقادیر i کدام است. (سراسری ریاضی ۸۳) (تمرین کتاب درسی)

- (۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

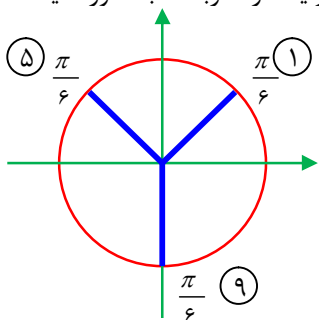
$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



جواب کلی

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

اما در صورت سوال جواب به صورت $2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ نمایش داده شده است یعنی باید هر یک از عقربه ها به صورت یک سر نگاه کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6} \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow i \in \{1, 5, 9\} \\ 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \end{cases}$$

سؤال ۱۱: مجموع تمام جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است.

- (۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π

$$\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow \sin \Delta x = -\sin \epsilon x = \sin(-\epsilon x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi - \epsilon x \Rightarrow 9x = 2k\pi \\ \Delta x = 2k\pi + \pi - (-\epsilon x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9}, x \in [0, 2\pi]:$$

$$x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

حاصل جمع این جواب ها می شود 10π اگر بخواهیم سریع بگوییم، مقادیر بالا دنباله ای حسابی تشکیل داده اند. اولین جمله صفر و آخرین جمله 2π و تعداد جملات ۱۰ تا است: $S_{10} = \frac{10}{2}(0 + 2\pi) = 10\pi$ و اگر $x = (2k+1)\pi$ و چون $0 \leq x \leq 2\pi$ پس $x = \pi$ است پس مجموع جواب های این فاصله می شود $10\pi + \pi = 11\pi$. گزینه (۴) درست است.

سؤال ۱۲: جواب کلی معادله $\tan x + \cot x = -8 \cos 2x \cos 4x$ کدام است.

$$\begin{array}{llll} \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \quad (۴) & \frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8} \quad (۳) & \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \quad (۲) & \frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16} \quad (۱) \end{array}$$

$$\frac{2}{\sin 2x} = -8 \cos 2x \cos 4x \xrightarrow{x \neq \frac{k\pi}{2}}$$

$$2 = -8 \underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} \cos 4x$$

$$2 = -4 \underbrace{\sin 4x}_{\frac{1}{2} \sin 8x} \cos 4x$$

گزینه (۲) درست است. $2 = -2 \sin 8x \Rightarrow \sin 8x = -1 \Rightarrow 8x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$

سؤال ۱۳: جواب کلی معادله $\sin 3x + \sin x = 0$ مثلثاتی کدام است.

$$\begin{array}{llll} 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) & k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳) & k\pi \quad (۲) & \frac{k\pi}{2} \quad (۱) \end{array}$$

$$\Rightarrow \sin 3x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}$$

دسته جواب اول (مضارب $\frac{\pi}{2}$)، دسته جواب دوم (مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$) را هم شامل می شود پس جواب معادله $x = \frac{k\pi}{2}$ است. گزینه ۱

سؤال ۱۴: جواب کلی معادله $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ مثلثاتی کدام است؟ (خارج ۹۷)

$$\begin{array}{llll} \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (۴) & k\pi + \frac{\pi}{5} \quad (۳) & \frac{2k\pi}{5} \quad (۲) & \frac{k\pi}{5} \quad (۱) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

وقتی یک کسر صفر است که صورت آن صفر باشد:

$$\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0 \Rightarrow \sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x = \sin(-2x)$$

$$۱) \quad 3x = 2k\pi + (-2x) \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

$$۲) \quad 3x = 2k\pi + \pi - (-2x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

به علاوه هواسمان هم هست که مفرج نباید صفر باشد: $1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi$ پس جواب فقط $\frac{2k\pi}{5}$ است.سؤال ۱۵: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \frac{1}{4}$ (قلم چی ۹۷)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۴)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

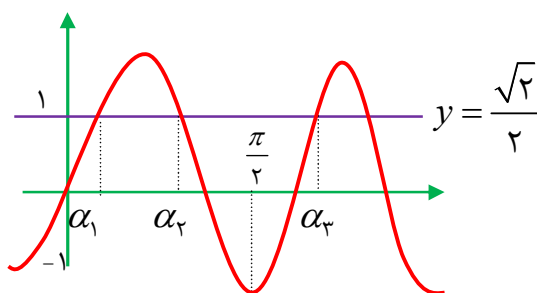
$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

سؤال ۱۶: شکل مقابل نمودار $y = \sin ax$ می باشد حاصل $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{6} \quad (۲) \quad \frac{2\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{13\pi}{12} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

از روی شکل پیداست که a عدد مثبتی است (نمودار تابع شبیه $\sin x$ و نه $-\sin x$) و $\frac{3}{4}$ ی دوره تناوب اصلی تابع $\frac{\pi}{2}$ است یعنی دوره تناوب تابع، $\frac{2\pi}{3}$ است:

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = 3$$

حال $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ اولین سه ریشه مثبت معادله $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ می باشند:

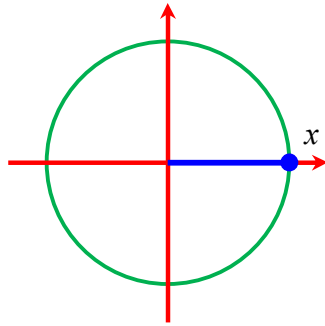
$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{12}, \alpha_2 = \frac{\pi}{4}, \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}, \dots \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{13\pi}{12}$$

حل معادله‌ی $\cos x = a$ به روش شهودی 

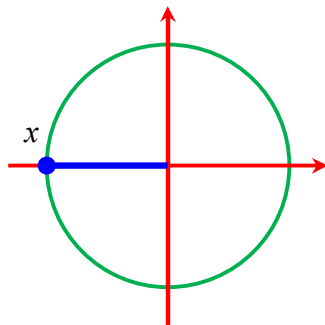
معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\cos x = 1$



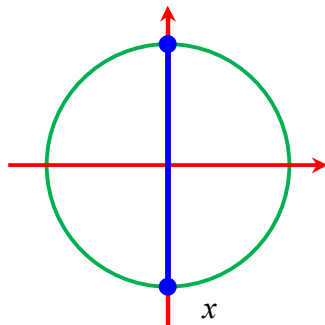
$$\Rightarrow x = 2k\pi$$

۲) $\cos x = -1$



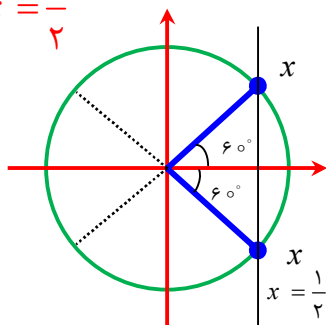
$$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi$$

۳) $\cos x = 0$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۴) $\cos x = \frac{1}{2}$

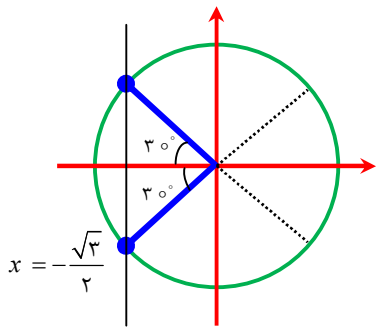


دو تا عقربه یک سر داریم که یکی $\frac{\pi}{3}$

در جهت مثبت چرخیده و یکی دیگه در جهت منفی

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\delta) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

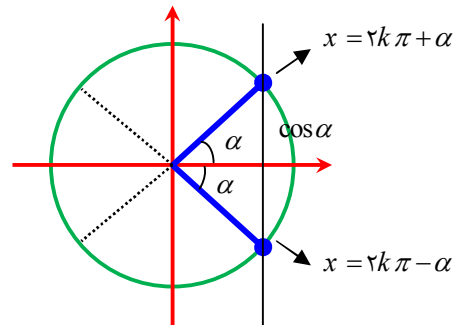


دو تا عقربه یک سر داریم که یکی $\frac{5\pi}{6}$ در جهت مثبت یکی دیگه $\frac{5\pi}{6}$ در جهت منفی چرخیده

$$x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$



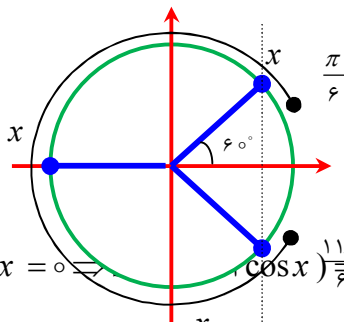
$$1) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$2) \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

سؤال ۱۷: جواب کلی معادله $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$ روی بازه $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ کدام است.



$$\sin x - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

سؤال ۱۸: معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید. (تمرین کتاب درسی)

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \Rightarrow (\cos x - 5)(2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 5 \text{ غ ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

•) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ (تمرین کتاب درسی)

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

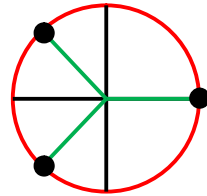
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

•) $\cos x = \cos 2x$ (تمرین کتاب درسی)

روش اول $2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

روش دوم $\cos x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

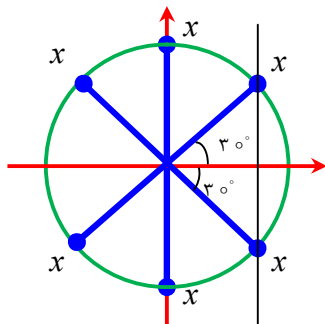


سؤال ۱۹: جواب کل معادله $\cos 4x + \cos 2x = 0$ کدام است. (بر اساس کنکور ریاضی ۹۶)

$$\cos 4x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x = 0$$

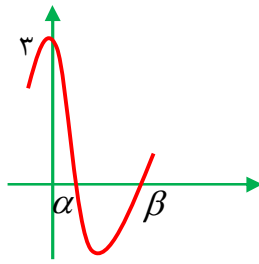
$$\Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \quad \text{یا} \quad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۲۰: شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + 2\cos x$ است. با توجه به شکل مقدار β کدام است؟



(قلم چی ۹۷)

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
 (۲) $\frac{3\pi}{4}$
 (۳) $\frac{4\pi}{3}$
 (۴) $\frac{5\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

از روی نمودار پیداست که مقدار تابع به ازای $x = 0$ برابر ۳ است، بنابراین:

$$3 = a + 2\cos(0) \Rightarrow 3 = a + 2 \Rightarrow a = 1$$

از سوی دیگر α, β به ترتیب اولین و دومین ریشه های مثبت معادله $1 + 2\cos x = 0$ می باشند:

$$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \dots$$

یعنی β برابر $\frac{4\pi}{3}$ است.

سؤال ۲۱: مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است.

(تجربی خارج از کشور ۹۶)

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$
 (۲) 4π
 (۳) $\frac{9\pi}{2}$
 (۴) 5π

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

مجموع جواب ها

$$\rightarrow 0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

سؤال ۲۲: جواب های معادله ی $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8$ بر روی دایره ی مثلثاتی رئوس کدام چند ضلعی می باشند.

(۲) هشت ضلعی غیرمنتظم

(۱) هشت ضلعی منتظم

(۴) شش ضلعی غیرمنتظم

(۳) شش ضلعی منتظم

پاسخ: گزینه (۱)

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \lambda \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \lambda \Rightarrow \lambda \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2(\sin^2 x \cos^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow 2(2 \sin x \cos x)^2 = 1 \Rightarrow 2(\sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right\} \text{ جواب های معادله فوق در بازه } (0, 2\pi) \text{ و با توجه به } x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ برابر است با:}$$

این نقاط تشکیل هشت ضلعی منتظم می دهند.

سؤال ۲۳: دو مین ریشه مثبت معادله $\sin^2 x + \cos 4x = 4$ کدام است؟

$$\frac{4\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$6 \sin^2 x + \cos 4x = 4 \Rightarrow \cos 4x = 4 - 6 \sin^2 x \Rightarrow \cos 4x = 1 + 3(1 - 2 \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 1 + 3 \cos 2x \Rightarrow 2 \cos^2 2x - 1 = 1 + 3 \cos 2x \Rightarrow 2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos 2x - 2)(2 \cos 2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 2 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون جواب ۲ برای $\cos 2x$ قابل قبول نیست دو مین ریشه مثبت معادله از روی معادله $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ به دست می آید:

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین دو مین جواب مثبت معادله، $\frac{2\pi}{3}$ است.سؤال ۲۴: معادله $\tan x = \sin 2x$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\tan x = \sin 2x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x = 2 \sin x \cos^2 x \Rightarrow \sin x (1 - 2 \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در بازه $[0, \pi]$ جواب های معادله $x = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \pi$ می باشند که هیچکدام مفرج عبارت $\tan x$ یعنی $\cos x$ را صفر نمی کند پس هر چهار جواب قابل قبول است.

سؤال ۲۵: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ (خارج تجربی ۹۵)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

دو کمان $x + \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4} - x$ متمم یکدیگرند پس می توان به جای \sin یکی، \cos دیگری را نوشت:

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۲۶: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط کدام است؟ ($k \in Z$) (خارج تجربی ۹۴)

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cos x \neq 0} x \text{ نمی تواند } k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ باشد}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۲۷: مجموع جواب های معادله $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (1 + \sin x) + \cos x + \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x) + \cos x (1 + \sin x) = 0 \Rightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \\ \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi \end{cases}$$

سؤال ۲۸: مجموع تمام جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازه ی $[0, \pi]$ برابر کدام است؟

$$k\pi + \frac{7\pi}{4} \quad (1) \quad \frac{9\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{5\pi}{2} \quad (3) \quad \frac{11\pi}{3} \quad (4) \quad \text{کنکور سراسری ۹۵}$$

$$\sin 4x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin 4x = -\cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ 2\sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب ها} : \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

سؤال ۲۹: مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$ (خارج از کشور ۹۵)

از آنجا که $\sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ بنابراین معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \xrightarrow{\cos(-u) = \cos u} \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$$

$$\xrightarrow[k=0]{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$$

گزینه (۱) درست است. $\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ مجموع جواب ها

سؤال ۳۰: تعداد جواب های معادله ی $\sin(\pi \cos x) = -1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

$$\sin(\pi \cos x) = -1 = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \pi \cos x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div \pi} \cos x = 2k - \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq 2k - \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \text{ دو جواب دارد}$$

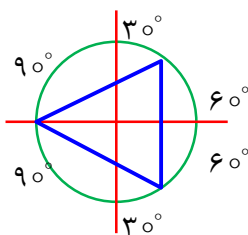
گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۱: معادله ی مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ نقاط پایانی تمام جواب ها بر دایره ی مثلثاتی رأس های کدام

شکل هندسی است.

- (۱) مثلث متساوی الاضلاع (۲) مثلث قائم الزاویه (۳) ذوزنقه (۴) مستطیل

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$



نوع مثلث متساوی الاضلاع است زیرا کمان روبه رو به

هر زاویه ی مثلث 120° است و هر کدام از زاویه های

مثلث می شوند 60° پس گزینه (۱) درست است.

سؤال ۳۲: نقاط پایانی کمان جواب های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ روی دایره ی مثلثاتی رأس های کدام چند

ضلعی اند؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۱)

(۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم الزاویه (۴) مثلث متساوی الاضلاع

با شرط $\cos x \neq 1$ طرفین وسطین می کنیم:

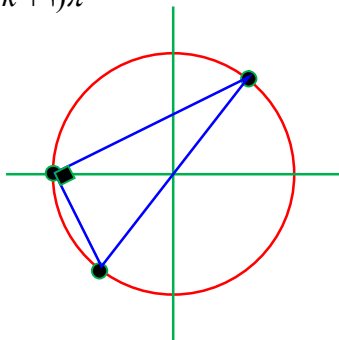
$$\sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

اما توجه شود که در مضارب زوج $\cos x, \pi$ برابر یک می شود پس x در مضارب زوج π قرار ندارد.

$$x = (2k+1)\pi$$



و اگر $\cos x - \sin x = 0$ نتیجه می شود که $\cos x = \sin x$ که مکان هندسی آن همان نیمساز ناحیه ی اول و سوم است حالا نقاط را روی دایره ی مثلثاتی نشان می دهیم.

این سه نقطه تشکیل یک مثلث می دهند از آنجایی که بزرگترین

ضلع این مثلث قطر دایره است که کمان 18° روی دایره جدا

می کند پس زاویه ی محاطی روبرو به آن می شود نصف 18°

یعنی 9° پس مثلث داده شده قائم الزاویه است. گزینه (۳)

سؤال ۳۳: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$$\cot x(4 \sin x + \tan x) = 4 \cot x \cdot \sin x + \cot x \cdot \tan x = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{3}{2} \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۴: جواب کلی معادله ی $4 \cos x \sin^2 x = \frac{1}{3} + \cos x$ کدام است.

(۱) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$ (۴) $k\pi \pm \frac{2\pi}{9}$

$$4 \cos x \sin^2 x = \frac{1}{3} + \cos x \Rightarrow 4 \cos x(1 - \cos^2 x) = \frac{1}{3} + \cos x \Rightarrow 4 \cos x - 4 \cos^3 x = \frac{1}{3} + \cos x$$

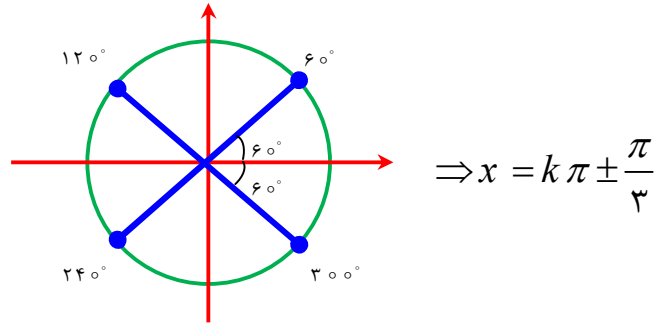
$$\Rightarrow 3 \cos x - 4 \cos^3 x = \frac{1}{3} \Rightarrow -\cos^3 x = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^3 x = -\frac{1}{9} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

گزینه (۱) درست است.

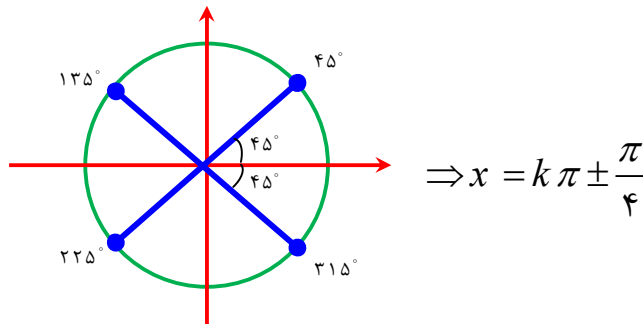
سؤال ۳۵: جواب کلی معادله $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ را بدست آورید.

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



سؤال ۳۶: جواب کلی معادله $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ را بدست آورید.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x = \sin^2 \alpha \\ \cos^2 x = \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

سؤال ۳۷: جواب کلی معادلات مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است. (داخلی تجربی ۹۶)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۳۸: جواب کلی معادله $\tan^2 x \cot x + \cos 2x = 1$ کدام است.

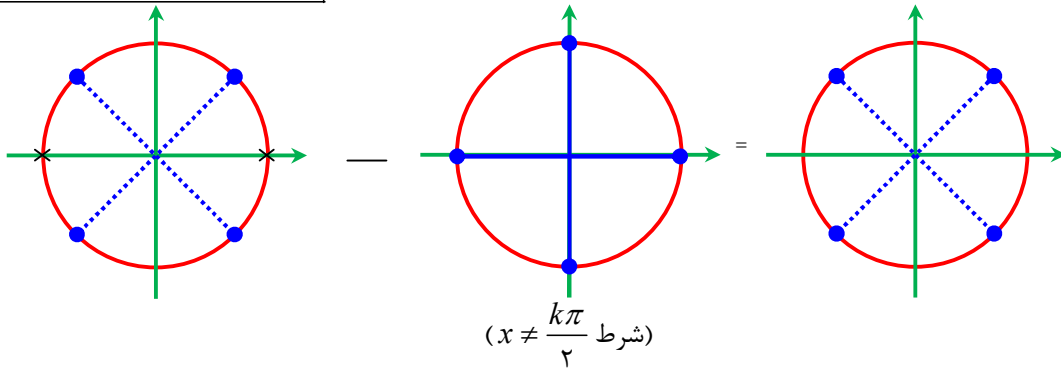
- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$\tan x \cdot \cot x = 1, x \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x \underbrace{(\tan x \cdot \cot x)}_1 + \cos 2x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \tan^2 x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos^2 x = \cos^2 \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha}$$



$$\text{جواب کلی} = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۳۹: نمودار تابع روی بازه $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند. (خارج تجربی ۹۱)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

$$-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -3\pi \leq -2x \leq 2\pi \Rightarrow -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq \underbrace{-2x + \frac{\pi}{4}}_u \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

حال باید جواب معادله $\sin u = 0$ را بیابیم: $u = k\pi$

$$\Rightarrow -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq k\pi \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

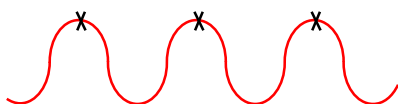
$$-3 + \frac{1}{4} \leq k \leq 2 + \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{11}{4} \leq k \leq \frac{9}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1, 0, 1, 2. \text{ پنج جواب دارد.}$$

سؤال ۴۰: نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

(سراسری تجربی ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

روش اول: دوره تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ است پس در فاصله $[-1, 1]$ سه بار تکرار می شود زیرا طول بازه ۲ است و



یعنی و چون $y(\pm 1) \neq \pm 4$ است می توان شکل فرضی مقابل را

برای آن در نظر گرفت که واضح است در سه نقطه بیشترین مقدار را دارد.

راه حل دوم

برای آنکه تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ به بیشترین مقدار خود برسد باید $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -1$ شود. برای حل این معادله

ابتدا $\frac{\pi}{4} - 3\pi x$ را u می‌گیریم و حدود u را با توجه به محدوده‌ی x می‌سازیم:

$$-1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\times(-3\pi)} -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi \xrightarrow{+\frac{\pi}{4}} -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq \underbrace{-3\pi x + \frac{\pi}{4}}_u \leq 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

حال باید جواب معادله $\cos u = -1$ را بیابیم: $u = 2k\pi + \pi$

$$-3\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi \leq 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$-3 + \frac{1}{4} \leq 2k + 1 \leq 3 + \frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0, 1$$

تست معادلات مثلثاتی

سؤال ۱: مجموعه جواب معادله $\frac{\cos^3 x + \cos x}{\cos x} = 2$ کدام است؟

(۱) $x = \frac{k\pi}{2}$ (۲) $x = k\pi$ (۳) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $x = 2k\pi + \pi$

سؤال ۲: جواب کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $x = \frac{k\pi}{4}$ (۲) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

سؤال ۳: معادله $6\cos^2 x + 13\sin x = 9$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

سؤال ۴: جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^3 x = \sin x$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

سؤال ۵: معادله $2\cos x \tan x + \cos 2x = 1$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند جواب دارد.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سؤال ۶: مجموع جواب های معادله $1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right)$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است.

(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

(تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

سؤال ۷: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

سؤال ۸: جواب کلی معادله $\cos^2 x = \sin x (\sin x + 1)$ کدام است.

(۱) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$

سؤال ۹: مجموع جواب های معادله $1 + \cos^2 x = \sin^2 x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است.

(۱) 3π (۲) 2π (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

سؤال ۱۰: جواب کلی معادله $(4\cos^2 x - 1)^2 = 4$ کدام است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

سؤال ۱۱: جواب کلی معادله $\cos^3 x \cos x = \cos^2 x$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

پاسخنامه تست معادلات مثلثاتی

۱- پاسف: گزینه ۲

با شرط $\cos x \neq 0$ می توانیم این کار را انجام دهیم و اول باید این شرط را بررسی کنیم.

$$\frac{\cos 3x + \cos x}{\cos x} = 2 \xrightarrow{\times \cos x} \cos 3x + \cos x = 2 \cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos x$$

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{k\pi}{2}$$

۲- پاسف: گزینه ۲

از سال های قبل می دانیم:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

اگر این جواب ها را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم متوجه می شویم که جواب کلی معادله مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$ است:

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{4}$$

۳- پاسف: گزینه ۴

با بازنویسی معادله این معادله به شکل معادله ای درجه ۲ بر حسب $\sin x$ در می آید:

$$6 \cos 2x + 13 \sin x = 9 \Rightarrow 6(1 - 2 \sin^2 x) + 13 \sin x = 9 \Rightarrow 12 \sin^2 x - 13 \sin x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{24} = \frac{13 \pm 5}{24} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{4} \text{ یا } \frac{1}{3}$$

در بازه $[0, 3\pi]$ ، $\sin x = \frac{3}{4}$ ، ۴ بار برابر $\frac{3}{4}$ ، ۴ بار برابر $\frac{1}{3}$ می شود، یعنی معادله در این بازه ۸ جواب دارد.

۴- پاسف: گزینه ۱

کلید حل معادله بازنویسی صورت آن است:

$$2 \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 2 \cos^2 x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = 2 \cos^2 x \Rightarrow \tan x = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \tan x - 2 = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

(عبارت $\tan^2 x + \tan x + 2 = 0$ ریشه ندارد چون که Δ در آن منفی است.)

۵- پاسخ: گزینه (۱)

$$2 \cos x \tan x + \cos 2x = 1 \Rightarrow 2 \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x = 1 - \cos 2x \xrightarrow{\cos x \neq 0} 2 \sin x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرض $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos x \neq 0$

پاسخ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ غیر قابل قبول است و تنها جواب $x = 2k\pi$ قابل قبول است. پس جواب های موجود در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

برابر است با: $\{0, \pi\}$

۶- پاسخ: گزینه (۴) با استفاده از رابطه $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ می توان نوشت:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos^2 x)\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right)$$

$$\text{معادله: } 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < \frac{\pi}{2} \sin^2 x < \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \sin^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

مجموع جواب های فوق برابر $\frac{16\pi}{4} = 4\pi$ است.

۷- پاسخ: گزینه ۱

$$\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos x(-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \cos x \sin x = 0$$

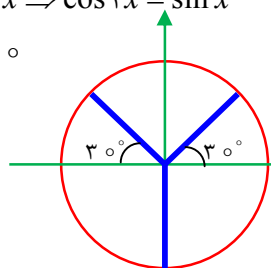
$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

۸- پاسخ: گزینه ۱

$$\cos^2 x = \sin^2 + \sin x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin x$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۹- پاسخ: گزینه (۱)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \cos^2 + 1 \leq 2$$

بیشترین مقدار $\sin^2 x$ برابر ۱ است و کمترین مقدار $\cos^2 + 1$ برابر ۱ است پس تساوی زمانی رخ می دهد که هر دو برابر ۱ شوند.

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} & (1) \\ \cos^2 + 1 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \quad (2)$$

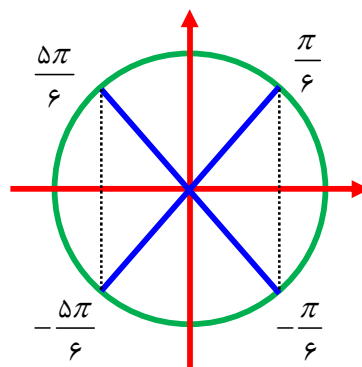
اشتراک (۱) و (۲): $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ که جمعشان برابر 3π می شود.

۱۰- پاسخ گزینه ۳

$$(4 \cos^2 x - 1)^2 = 4 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x - 1 = 2 \rightarrow 4 \cos^2 x = 3 \rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 \cos^2 x - 1 = -2 \rightarrow 4 \cos^2 x = -1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



$$\text{جواب کلی: } k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

گزینه (۳) درست است.

۱۱- پاسخ گزینه ۱

$$\cos^3 x \cos x = \cos^2 x \Rightarrow \cos^3 x \cos x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} & (1) \\ \cos^2 x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2} & (1) \\ 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi & (2) \\ 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \cup (3) = \frac{k\pi}{2} \quad \text{گزینه (۱) درست است.}$$