



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

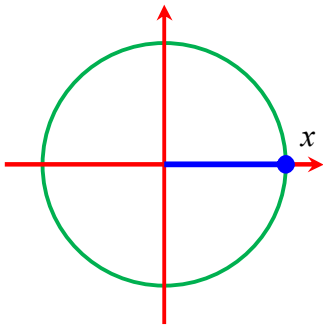
کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>

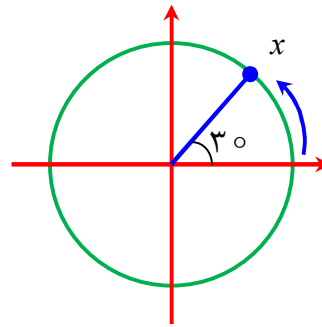


(@riazisara)

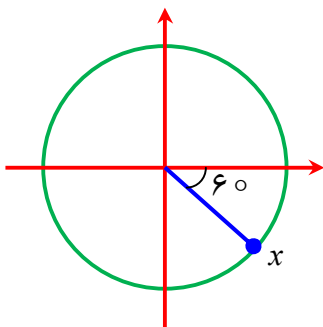
حل معادلات مثلثاتی

عقربه های n سر:

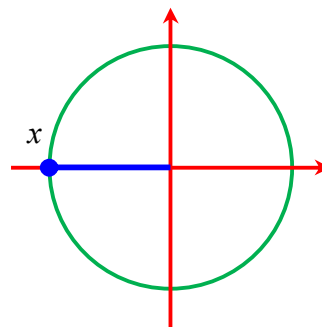
$$x = 2k\pi$$



$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

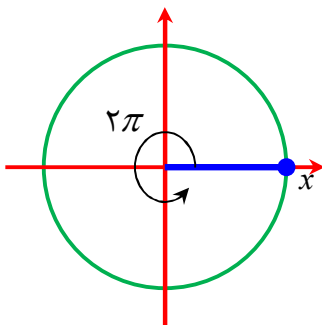


$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$



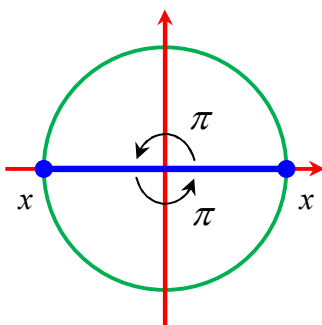
$$x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi$$

عقربه ی یک سر:



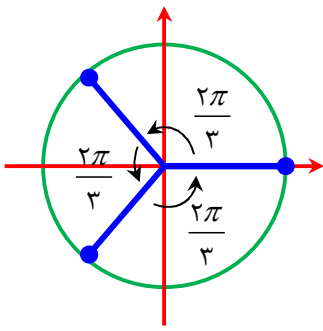
$$x = \{\dots \circ (2\pi), 1(2\pi), 2(2\pi), \dots\} \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{1} \quad (1)$$

عقربه ی دو سر:

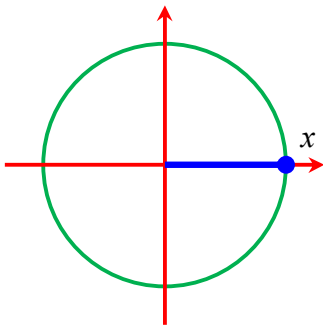


$$x = \{\dots \circ (\pi), 1(\pi), 2(\pi), \dots\} \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \quad (2)$$

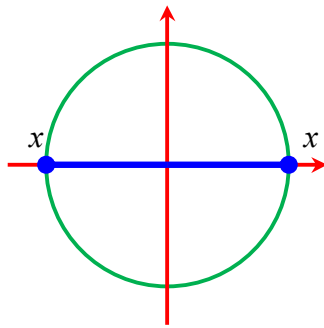
عقربه‌ی سه سر: 



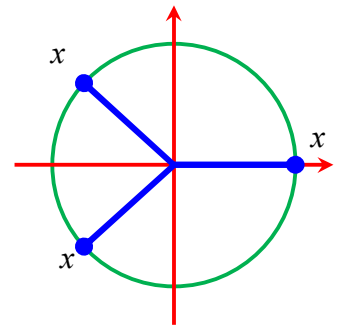
$$x = \left\{ \dots, \left(\frac{2\pi}{3} \right), \left(\frac{2\pi}{3} \right), \left(\frac{2\pi}{3} \right), \dots \right\} \Rightarrow x = k \left(\frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad (3)$$



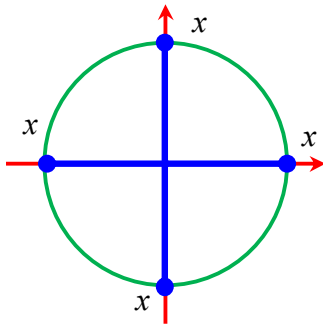
$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (1)$$



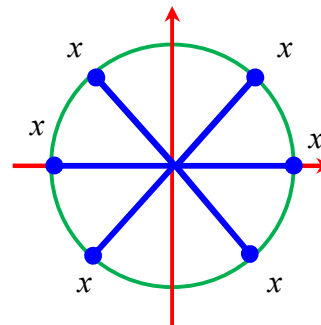
$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (2)$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (3)$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (4)$$



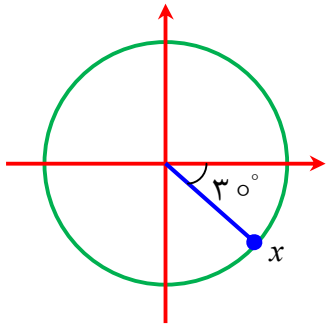
$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (6)$$

عقربه‌ی n سر دوران یافته: 

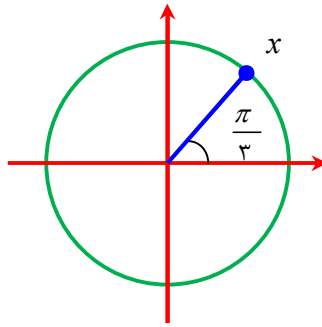
عقربه‌های n سر ممکن است به اندازه‌ی α رادیان دوران داشته باشند در این صورت فرمول عمومی x را می‌توان برای عقربه‌های n سر به صورت زیر نوشت:

$$x = \frac{2k\pi}{n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{رادیان دوران درجهت مثبت}} \frac{2k\pi}{n} + \alpha \\ \xrightarrow{\text{رادیان دوران درجهت منفی}} \frac{2k\pi}{n} - \alpha \end{cases}$$

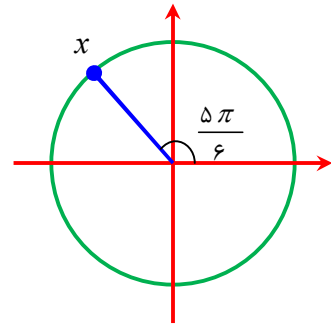
سؤال: فرمول عمومی زاویه‌ی x را در هر یک از شکل های زیر بدست آورید.



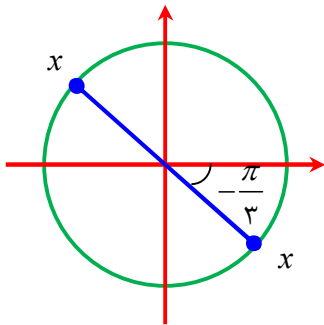
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$



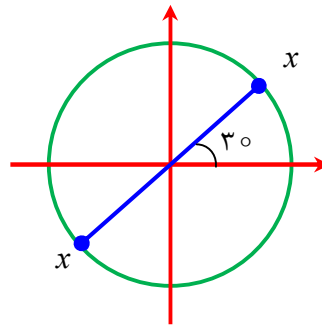
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$



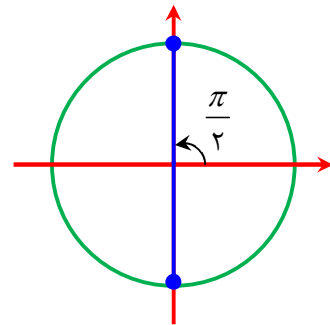
$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$



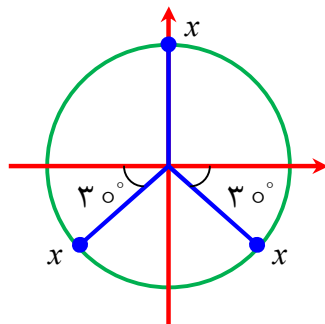
$$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$



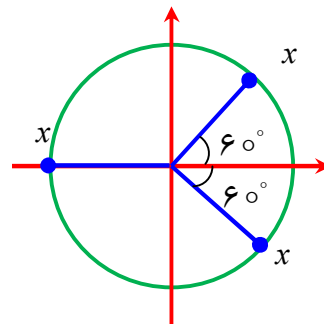
$$x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



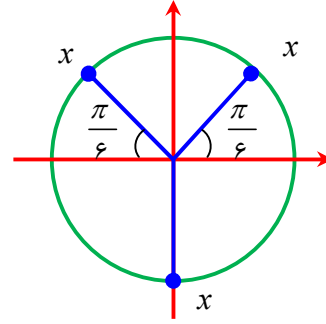
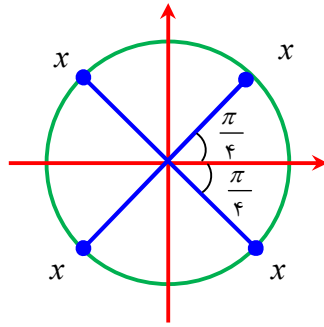
$$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

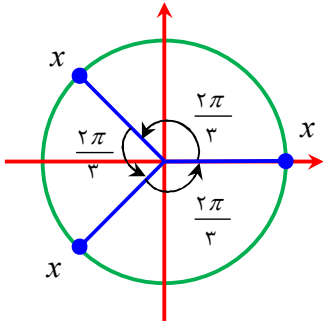


دو شکل خیلی مهم:

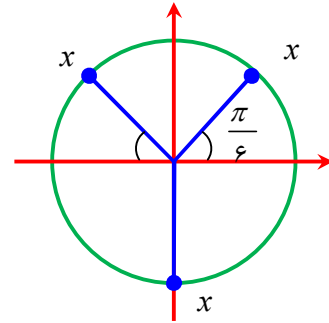


$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



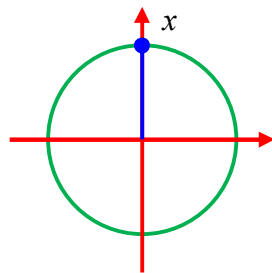
به اندازه $-\frac{\pi}{2}$
دوران می دهیم



حل معادله‌ی $\sin x = \alpha$ به روش شهودی

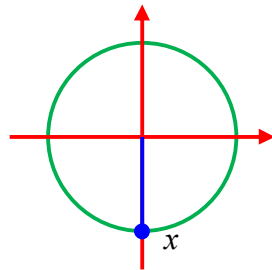
معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\sin x = 1$



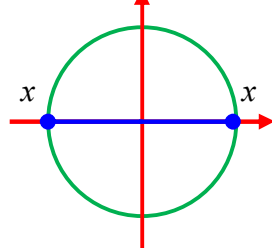
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۲) $\sin x = -1$



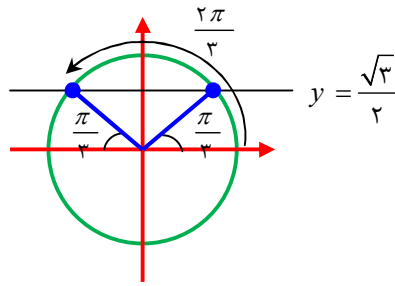
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

۳) $\sin x = 0$



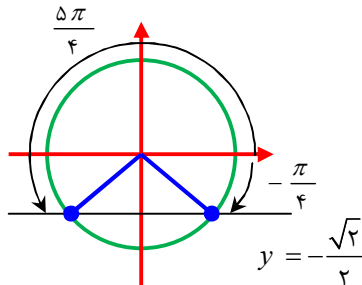
$$x = k\pi$$

$$۴) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

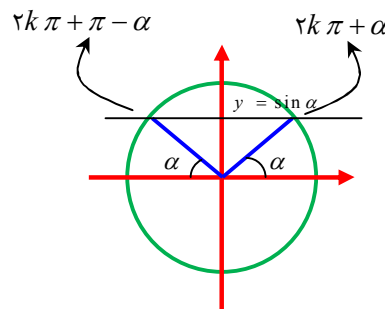
$$۵) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



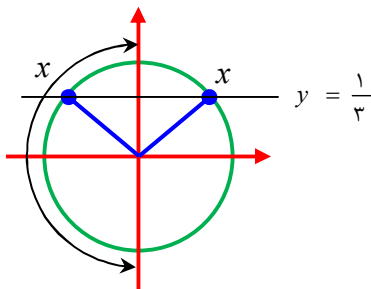
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$



سؤال ۳: معادله ی $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه ی $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ چند جواب دارد؟

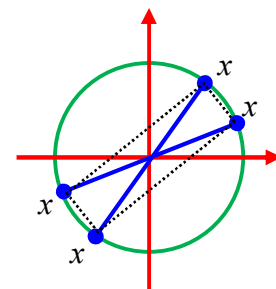


در بازه ی $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ یک جواب دارد.

سؤال ۴: از وصل کردن جواب های معادله $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ روی دایره ی مثلثاتی کدام چند ضلعی حاصل می شود.

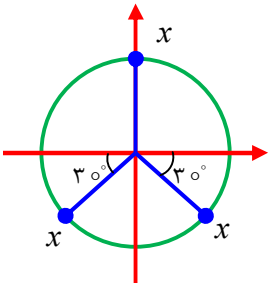
$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2k + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



شکل حاصل از وصل کردن x ها، مستطیل است.

سؤال ۵: جواب کلی معادله $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ را بدست آورید.

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$


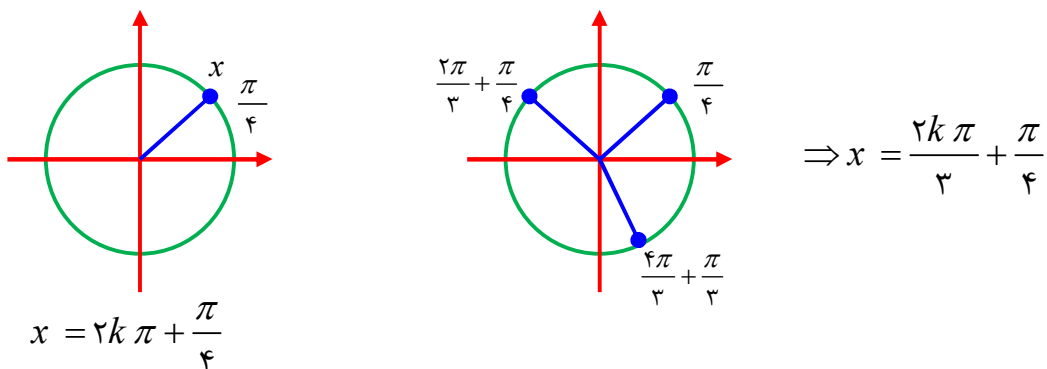
$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۶: جواب کلی معادله $\sin 3x = \sin 2x$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

سؤال ۷: معادله $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد.

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



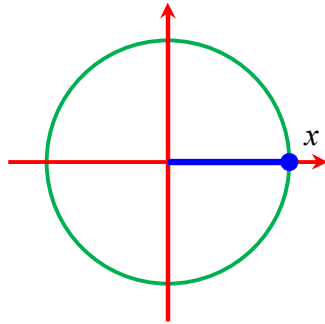
توجه: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ در دل $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ قرار دارد (زیرمجموعه‌ی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ است) پس جواب

کلی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ خواهد بود و تعداد جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر ۳ است.

حل معادله‌ی $\cos x = a$ به روش شهودی

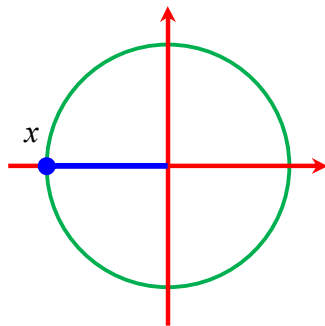
معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\cos x = 1$



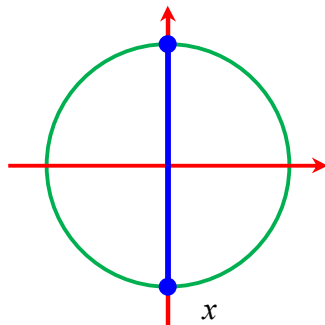
$\Rightarrow x = 2k\pi$

۲) $\cos x = -1$



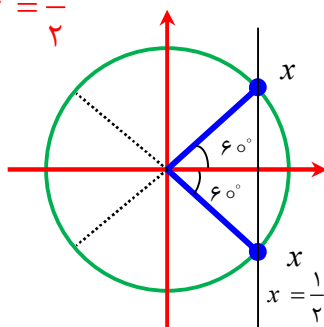
$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi$

۳) $\cos x = 0$



$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

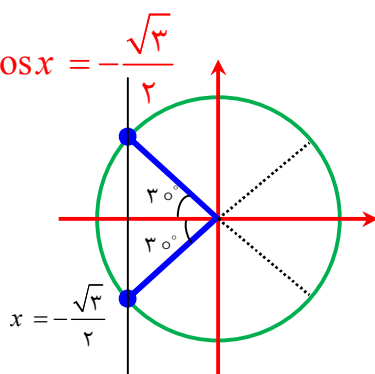
۴) $\cos x = \frac{1}{2}$



دو تا عقربه یک سر داریم که یکی $\frac{\pi}{3}$ در جهت مثبت چرخیده و یکی دیگر در جهت منفی

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۵) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

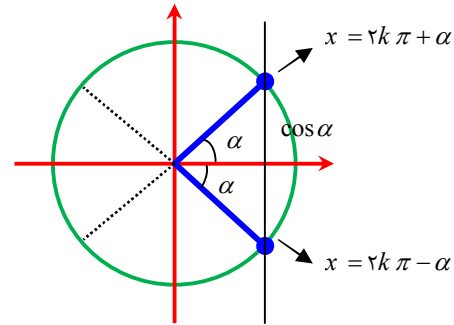


دو تا عقربه یک سر داریم که یکی $\frac{5\pi}{6}$ در جهت مثبت یکی دیگر $\frac{5\pi}{6}$ در جهت منفی چرخیده

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$



$$1) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$2) \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

سؤال ۹: جواب کلی معادله $\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$ روی بازه $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$ کدام است.

$$\frac{k\pi}{2} \quad (4)$$

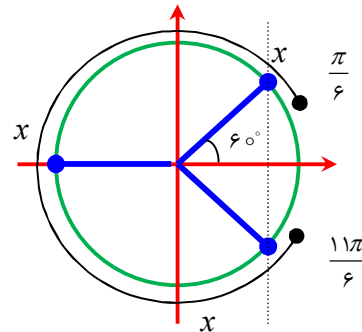
$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$



سؤال ۱۰: یکی از ریشه های معادله $1 + \cos 5x = 2 \cos^2 x$ کدام است.

$$\frac{4\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{7} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{7} \quad (1)$$

$$\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 5x = \cos 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi \pm 2x$$

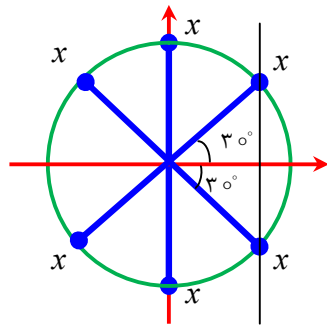
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 7x = 2k\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} x = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow{k=2} x = \frac{4k\pi}{7}$$

سؤال ۱۱: جواب کل معادله $\cos 4x + \cos 2x = 0$ (براساس کنکور ریاضی ۹۶)

$$\cos 4x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 2x - 1 + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \quad \text{یا} \quad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۱۲: مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است.

(تجربی خارج از کشور ۹۶)

5π (۴)

$\frac{9\pi}{2}$ (۳)

4π (۲)

$\frac{14\pi}{3}$ (۱)

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x + \sin x = 0$$

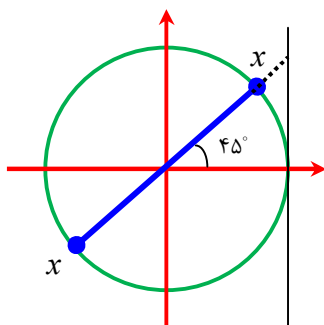
$$\Rightarrow \sin x (2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

مجموع جواب ها $\rightarrow 0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$

حل معادله ی $\tan x = a$ به روش شهودی

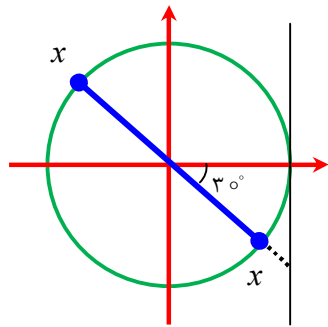
سؤال ۱۳: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\tan x = 1$



$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

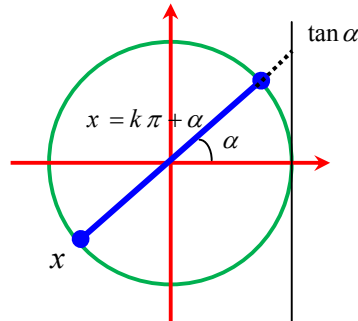
$$۲) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



$$۱) \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\tan \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$۲) \tan x = \sqrt{3}$$

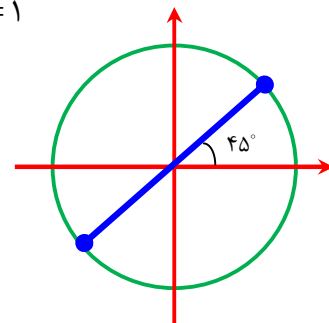
$$\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

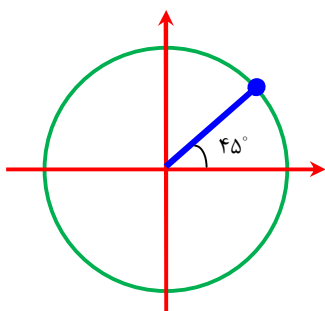
سؤال ۱۴: جواب کلی معادله $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است.

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$



توجه کنید که باید $\sin x$ و $\cos x$ نامنفی باشند یعنی x نمی تواند در ناحیه سوم باشد پس جوابی که در ناحیه سوم است حذف می شود.



$$\Rightarrow ۲k\pi + \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۱۵: $\tan x$ در چه نقاطی تعریف نشده است.

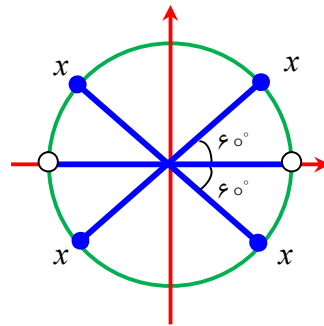
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow[\text{نشده باشد}]{\text{برای این که تعریف}} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

سؤال ۱۶: $\tan x$ در چه نقاطی صفر است.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow[\text{صفر شود}]{\text{برای این}} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

سؤال ۱۷: جواب کلی معادله $\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$ را بدست آورید.

$$\tan 3x + \tan x = \tan x \Rightarrow \tan 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{6}$$



فطر فطر: در نقطه های 0 و π مخرج کسر صفر می شوند پس این نقاط جزء جواب های مسأله نیستند. پس جواب برابر است با:

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۱۸: مجموعه جواب معادله $\tan 4x = \tan 2x$ کدام است.

$$4x = k\pi + 2x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

چون این معادله محدودیت دامنه دارد، باید جواب را در توی معادله ی اولیه چک کنیم:

$$\tan 4x = \tan 2x \Big|_{x = \frac{k\pi}{2}} \tan(2k\pi) = \tan(k\pi) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ جواب دارد}$$

سؤال ۱۹: مجموعه جواب معادله $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$ کدام است.

$$\tan 4x = \frac{1}{\cot 2x} \Rightarrow \tan 4x = \tan 2x \Rightarrow 4x = k\pi + 2x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

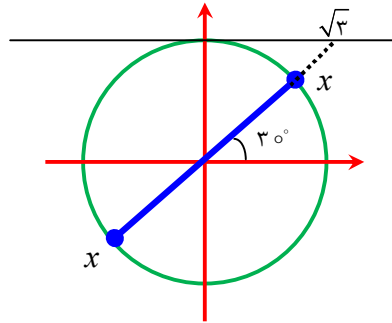
چون معادله محدودیت دامنه دارد، باید جواب را در معادله ی اولیه چک کنیم:

$$\xrightarrow{x = \frac{k\pi}{2}} \tan 4x \cdot \cot 2x = 1 \Rightarrow \tan(2k\pi) \cdot \underbrace{\cot(k\pi)}_{\text{تعریف نشده}} = 1$$

یعنی معادله جواب ندارد.

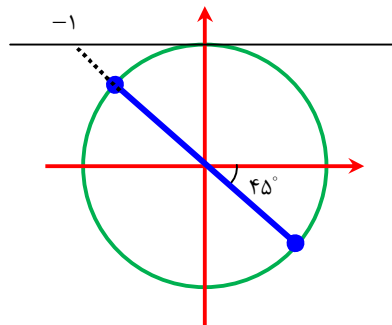
حل معادله‌ی $\cot x = a$ به روش شهودی

۱) $\cot x = \sqrt{3}$



$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

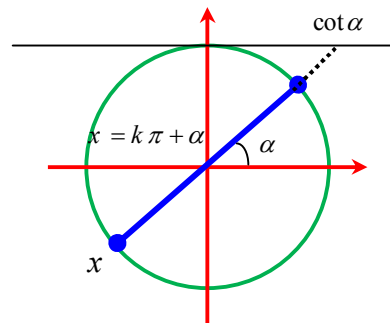
۲) $\cot x = -1$



$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$



۱) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot x = \cot \frac{\pi}{3}$

$x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

۲) $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot x = -\cot \frac{\pi}{3} = \cot \left(-\frac{\pi}{3} \right)$

$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

سؤال ۲۱: $\cot x$ در چه نقاطی تعریف نشده است.

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ برای اینکه $\cot x$ تعریف نشده شود باید $\sin x$ برابر صفر شود $\rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

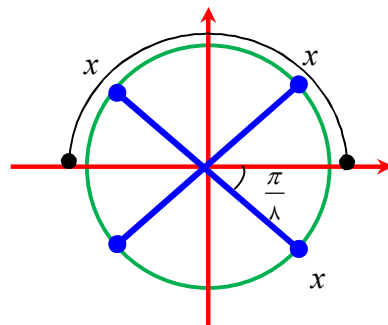
سؤال ۲۲: $\cot x$ در چه نقاطی صفر است.

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ برای اینکه $\cot x$ صفر شود باید $\cos x$ برابر صفر شود $\rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

سؤال ۲۳: تعداد جواب های معادله $\tan x - \cot x = 2$ در بازه $[0, \pi]$ را بدست آورید.

$$\tan x - \cot x = 2 \Rightarrow -2 \cot 2x = 2 \Rightarrow \cot 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

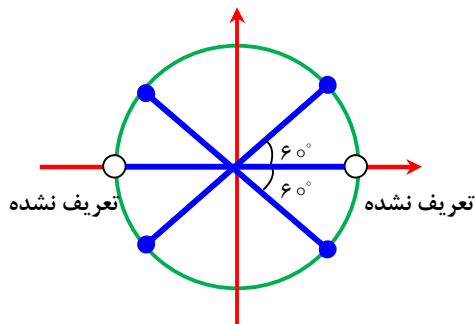
$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{2k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$$



تعداد جواب ها در بازه $[0, \pi]$ ، ۲ تا است.

سؤال ۲۴: جواب کلی معادله $\cot 4x = \cot x$ کدام است.

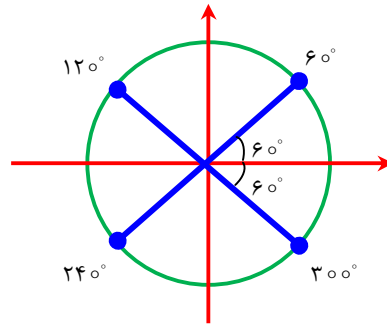
$$\cot 4x = \cot x \Rightarrow 4x = k\pi + x \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{6}$$



$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۲۵: جواب کلی معادله $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ را بدست آورید.

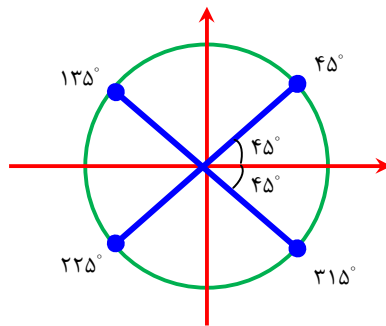
$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۲۶: جواب کلی معادله $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ را بدست آورید.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x &= \sin^2 \alpha \\ \cos^2 x &= \cos^2 \alpha \\ \tan^2 x &= \tan^2 \alpha \\ \cot^2 x &= \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

سؤال ۲۷: جواب کلی معادلات مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است. (داخلی تجربی ۹۶)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad (۳) \quad ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad (۲) \quad ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad (۱)$$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

چند رابطه مهم:

$$\sin x \pm \tan \theta \cos x = \frac{1}{\cos \theta} \sin(x \pm \theta)$$

مثال ۱) $\sin x \pm \textcircled{1} \cos x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{۴}} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{۴}\right)$

$$\tan \frac{\pi}{۴}$$

۲) $\sin x \pm \textcircled{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} \cos x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{۶}} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{۶}\right)$

$$\tan \frac{\pi}{۶}$$

۳) $\sin x \pm \textcircled{\sqrt{۳}} \cos x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{۳}} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{۳}\right) = ۲ \sin\left(x \pm \frac{\pi}{۳}\right)$

$$\tan \frac{\pi}{۳}$$

$$\cos x \pm \tan \theta \sin x = \frac{1}{\cos \theta} \cos(x \mp \theta)$$

مثال ۱) $\cos x \pm \textcircled{1} \sin x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{۴}} \sin\left(x \mp \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{2}}{۲} \cos\left(x \mp \frac{\pi}{۴}\right)$

$$\tan \frac{\pi}{۴}$$

۲) $\cos x \pm \textcircled{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} \sin x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{۶}} \sin\left(x \mp \frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \cos\left(x \mp \frac{\pi}{۶}\right)$

$$\tan \frac{\pi}{۶}$$

۳) $\cos x \pm \textcircled{\sqrt{۳}} \sin x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{۳}} \sin\left(x \mp \frac{\pi}{۳}\right) = ۲ \cos\left(x \mp \frac{\pi}{۳}\right)$

$$\tan \frac{\pi}{۳}$$

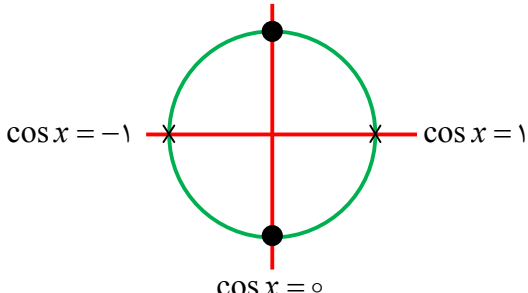
سؤال ۲۸: جواب کلی معادله $\cos^2 x = \cos x$ کدام است؟

(۱) $2k\pi$ (۲) $k\pi$ (۳) $\frac{k\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos^2 x = \cos x \xrightarrow{\cos x = 0} \cos^2 x = 1$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ گزینه (۳) درست است.



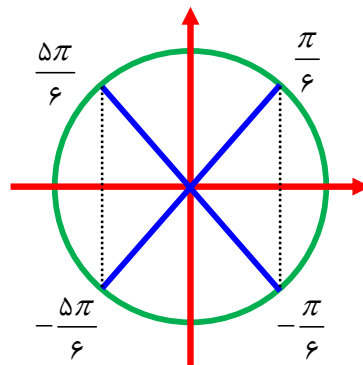
سؤال ۲۹: جواب کلی معادله $(4 \cos^2 x - 1)^2 = 4$ کدام است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$(4 \cos^2 x - 1)^2 = 4 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = \pm 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x - 1 = 2 \rightarrow 4 \cos^2 x = 3 \rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 \cos^2 x - 1 = -2 \rightarrow 4 \cos^2 x = -1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \end{cases}$



جواب کلی: $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۰: نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

(سراسری تجربی ۹۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$-1 \leq \cos u \leq 1 \rightarrow -1 \leq -\cos u \leq 1 \rightarrow -4 \leq -4 \cos u \leq 4$

پس بیشترین مقدار $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ برابر ۴ است.

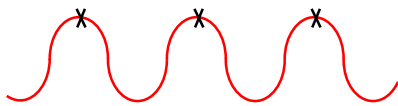
$$-4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -4 \cos\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \cos\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 = \cos \pi \Rightarrow 3\pi x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi$$

$$\Rightarrow 3\pi x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k}{3} + \frac{5}{12} \xrightarrow{x \in [-1,1]} -1 \leq \frac{2k}{3} + \frac{5}{12} \leq 1 \xrightarrow{\times 12} -12 \leq 8k + 5 \leq 12$$

$$\Rightarrow -17 \leq 8k \leq 7 \Rightarrow -\frac{17}{8} \leq k \leq \frac{7}{8} \Rightarrow -2/... \leq k \leq 0/.. \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1, 0$$
 سه جواب دارد

روش حل حرفه ای ها: دوره‌ی تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ است پس در فاصله‌ی $[-1, 1]$ سه بار تکرار می شود زیرا طول بازه 2 است



و $2 = 3\left(\frac{2}{3}\right)$ یعنی و چون $y(\pm 1) \neq \pm 4$ است می توان شکل فرضی مقابل را

برای آن در نظر گرفت که واضح است در سه نقطه بیشترین مقدار را دارد.

سؤال ۳۱: جواب کلی معادله $\frac{3 \tan^2 x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$ کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3 \tan^2 x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 \tan^2 x - 1 = 0 \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

مجموعه جواب $\tan^2 x = \tan^2 x$ به صورت $k\pi \pm \alpha$ است.

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

یعنی باید از جواب $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ مقادیر $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ را برداریم چیزی که باقی می مونه به صورت $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6}$ خواهد بود.

سؤال ۳۲: جواب کلی معادله $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

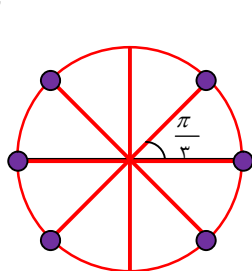
$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

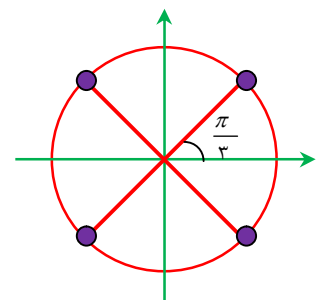
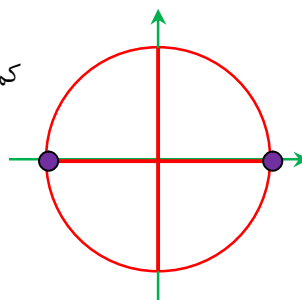
$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \quad \underline{\underline{\sin x \neq 0}} \quad \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$



کم می کنیم



گزینه (3) درست است. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ = مجموعه جواب

سؤال ۱۳: بزرگترین جواب معادله $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=-1$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)} = -\cot\left(\frac{\pi}{8}-x\right) \quad \boxed{-\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{8}-x\right)\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+x = k\pi + \frac{5\pi}{8}-x \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{16}$$

جواب های در بازه $[0, \pi]$: $\begin{cases} k=0 \rightarrow \frac{3\pi}{16} \\ k=1 \rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{16} = \frac{11\pi}{16} \end{cases}$ بزرگترین جواب برابر $\frac{11\pi}{16}$ گزینه (۴) درست است.

سؤال ۱۴: مجموع تمام جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$ (کنکور سراسری ۹۵)

$$\sin 4x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin 4x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x = -\sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 4x \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -k\pi - \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \frac{3\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

$$= \frac{9\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$
 گزینه (۳) درست است

سؤال ۱۵: مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$ (خارج از کشور ۹۵)

از آنجا که $\sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ بنابراین معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \xrightarrow{\cos(-u) = \cos u} \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$$

$$\xrightarrow[k=0]{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$$

گزینه (۱) درست است. $\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ مجموع جواب ها

سؤال ۳۶: اگر یکی از جواب های کلی معادله $k \tan x - 2 \cot x + k = 0$ به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ باشد این معادله

چند ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۵ (۴)

۴ (۳)

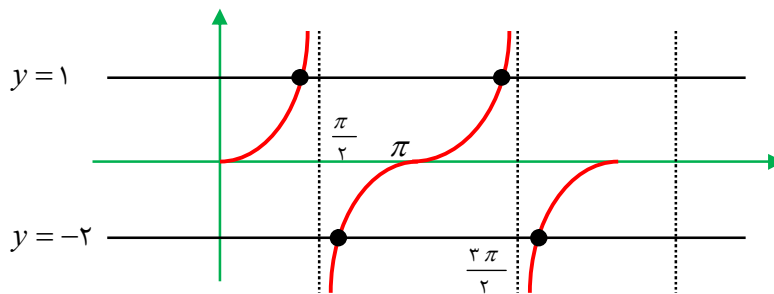
۳ (۲)

۲ (۱)

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan x = \cot x = 1 \Rightarrow k - 2 + k = 0 \Rightarrow 2k - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

$$\Rightarrow \tan x - 2 \cot x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x - \frac{2}{\tan x} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 2 + \tan x}{\tan x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x + \tan x - 2 = 0$$

$$(\tan x - 1)(\tan x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{cases}$$



معادله ۴ جواب دارد.

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۷: اگر مجموع جواب های متمایز معادله $\sin x (\sin x + k \cos x) = 1$ در فاصله $[0, \pi]$ به صورت $\frac{5\pi}{6}$

باشد، k کدام است.

-۱ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳)

۱ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

$$\sin^2 x + k \sin x \cos x = 1$$

طرفین را بر $\sin^2 x$ تقسیم می کنیم ($\sin x = 0$ جواب معادله نیست)

$$1 + k \cot x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x - k \cot x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cot x = 0 & (1) \\ \cot x = k & (2) \end{cases}$$

معادله (۱) در بازه $[0, \pi]$ جواب $\frac{\pi}{2}$ را دارد چون مجموع جواب ها در این فاصله $\frac{5\pi}{6}$ شده پس جواب معادله $\frac{\pi}{2}$ در این فاصله

$$\text{برابر } \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ است.}$$

$$\cot \frac{\pi}{3} = k \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ گزینه (۳) درست است.}$$

سؤال ۳۸: معادله $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 5$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه متمایز دارد.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

صفر (۱)

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}$$

با توجه به برد سینوس تساوی زمانی برقرار است که :

یک جواب دارد. گزینه (۴) درست است.

سؤال ۳۹: معادله $\sin^2 x \cos^2 x = \sqrt{2}$ چند ریشه در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

$$\begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ -1 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$$

پس $\sin^2 x \cos^2 x$ هیچ گاه بزرگتر از یک نمی شود پس معادله به ازای هیچ مقدار x برقرار نیست. گزینه (۱) صحیح است.

سؤال ۴۰: نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

باید معادله $y = 0$ یا $3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$ را حل کنیم یعنی:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{+\pi} -1 \leq \frac{k}{2} - \frac{1}{8} \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 8} -8 \leq 4k - 1 \leq 12 \xrightarrow{+1} -7 \leq 4k \leq 13$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{13}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0, 1, 2, 3$$

یعنی معادله ۵ جواب دارد پس در ۵ جا محور x ها را قطع می کند.

سؤال ۴۱: معادله $\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 0$ در فاصله $[-1, 1]$ چند جواب دارد.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x = -\cos^2 \pi x \Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x$$

$\cos \pi x$ نمی تواند صفر باشد چون در این صورت طبق اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مساوی ۱ یا -۱ می شود و معادله

بالا برقرار نیست پس با خیال راحت طرفین معادله را بر $\cos \pi x$ تقسیم می کنیم:

$$\sin \pi x = -\cos \pi x \xrightarrow{\div \cos \pi x} \tan \pi x = -1 \Rightarrow \tan \pi x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \pi x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div \pi} x = k - \frac{1}{4} (k \in \mathbb{Z})$$

چون در سؤال گفته: $-1 \leq x \leq 1$ پس:

$$-1 \leq k - \frac{1}{4} \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{5}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1$$

یعنی معادله مورد نظر ۲ جواب دارد.

$$\begin{cases} x = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \text{گزینه (۳) درست است.}$$

سؤال ۴۲: جواب کلی معادله $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

گزینه (۱) صحیح است.

سؤال ۴۳: تعداد جواب های معادله $\sin(\pi \cos x) = -1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

$$\sin(\pi \cos x) = -1 = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \pi \cos x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{+\pi} \cos x = 2k - \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq 2k - \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \text{ دو جواب دارد}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۴۴: مجموع جواب های حاده ی معادله $\tan 4x = \cot x$ چند رادیان است.

(۱) $\frac{2\pi}{5}$ (۲) $\frac{4\pi}{5}$ (۳) $\frac{3\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{5}$

$$\tan 4x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \Delta x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$x = \begin{cases} k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{10} \\ k=1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{10} \end{cases}$$

توجه شود که از $k=2$ جواب حاده بدست نمی آید چون به ازای $k=2$ به زاویه $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ می رسیم که قائمه است نه حاده.

$$\text{مجموع جواب ها: } \frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

گزینه (۱) صحیح است.

سؤال ۴۵: معادله $\tan x \cdot \tan 2x = 1$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

$$\tan x \cdot \tan 2x = 1 \xrightarrow{\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0} \tan x = \frac{1}{\tan 2x} = \cot 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

البته حواسمان به شرط $\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0$ باشد به ازای $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

جواب های $k = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{6}$ بدست می آید که $x = \pm \frac{\pi}{2}$ در شرط $\cos x \neq 0$ صدق نمی کند و قابل قبول نیستند.

پس معادله (۴) جواب دارد.

سؤال ۴۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos x (-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \cos x \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

سؤال ۴۷: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

سؤال ۴۸: معادله‌ی $\tan x + \cot x = 2 - \sqrt{\cos 2x}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد.

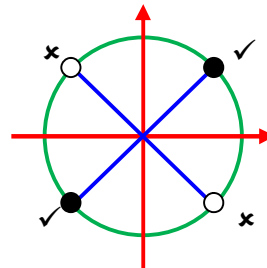
- (۱) یک ریشه (۲) سه ریشه (۳) چهار ریشه (۴) دو ریشه

$$0 \leq \sqrt{\cos 2x} \leq 1 \rightarrow -1 \leq -\sqrt{\cos 2x} \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sqrt{\cos 2x} \leq 2$$

$$A = \tan x + \cot x \rightarrow \begin{cases} A \geq 2 & \tan x > 0 \\ A \leq -2 & \tan x < 0 \end{cases}$$

پس معادله‌ی بالا زمانی جواب دارد که هر دو طرف معادله برابر ۲ باشد:

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = 2 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} & \times \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} & \checkmark \end{cases}$$



چون هر دو معادله باید هم زمان برقرار باشند پس جواب در نقاط مشترک رخ می دهد در نتیجه معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

توجه کنید:

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x = 2 &\Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \\ \Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0 &\Rightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \end{aligned}$$

سؤال ۴۹: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan^3 x$ به کدام صورت است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۴)

- (۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۳) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan^3 x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan^3 x \Rightarrow \frac{\pi}{4} - x = k\pi + 3x$$

$$\Rightarrow -4x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \xrightarrow{k \rightarrow k'} x = \frac{k'\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۵۰: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $1 = \cos x - \sin x$ به کدام صورت است؟ (خارج از کشور ۸۳)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x - \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۵۱: میانگین جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = 1$ در فاصله‌ی $(0, 2\pi)$ کدام است.

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{5\pi}{3}$ (۴) 2π

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = 2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{میانگین جواب‌ها} = \frac{2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

سؤال ۵۲: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (۱) \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} & (۲) \end{cases}$$

دسته دوم به ازای k های مضرب ۳، دسته اول را شامل می شود پس با افتخار می گوئیم که جواب کل معادله به صورت

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \text{ است. یعنی گزینه (۳)}$$

سؤال ۵۳: انتهای کمان هایی که جواب معادله $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ هستند روی دایره ی مثلثاتی کدام شکل را

می سازند.

(۱) مثلث متساوی الاضلاع

(۲) مستطیل

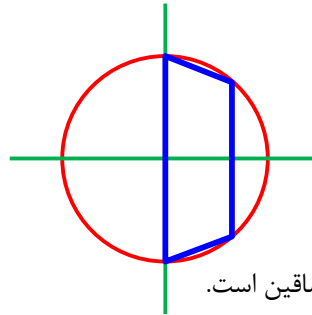
(۳) دوزنقه ی قائم الزاویه

(۴) دوزنقه ی متساوی الساقین

$$\cos(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0, \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$



شکل حاصل یک دوزنقه ی متساوی الساقین است.

سؤال ۵۴: معادله ی مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ نقاط پایانی تمام جواب ها بر دایره ی مثلثاتی رأس های کدام

شکل هندسی است.

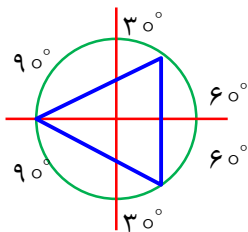
(۱) مثلث متساوی الاضلاع

(۲) مثلث قائم الزاویه

(۳) دوزنقه

(۴) مستطیل

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$



نوع مثلث متساوی الاضلاع است زیرا کمان روبه رو به

هر زاویه ی مثلث 120° است و هر کدام از زاویه های

مثلث می شوند 60° پس گزینه (۱) درست است.

سؤال ۵۵: مجموع جواب های معادله ی $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \cos \left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = 5$ در فاصله کدام است؟

$$\frac{5\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\cos \left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 5$$

با فرض $\sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right) = t$ داریم:

$$2t^2 + 3t - 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

توجه شود که چون $t = \sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ بود و سینوس همواره بین -۱ و ۱ است. پس $-\frac{5}{2}$ نمی تواند باشد:

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

چون گفته $0 \leq x \leq 2\pi$ پس تنها جواب معادله $x = \frac{5\pi}{8}$ است (به ازای $k = 0$)

گزینه (۴) درست است.

سؤال ۵۶: نقاط پایانی کمان جواب های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ روی دایره ی مثلثاتی رأس های کدام چند

ضلعی اند؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۱)

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم الزاویه (۴) مثلث متساوی الاضلاع

با شرط $\cos x \neq 1$ طرفین وسطین می کنیم:

$$\sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$$

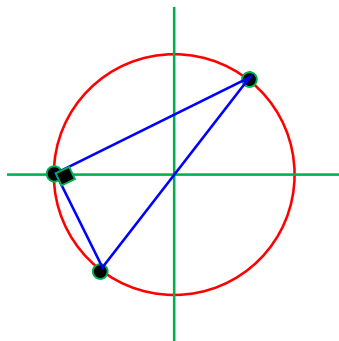
$$\Rightarrow \sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

اما توجه شود که در مضارب زوج π , $\cos x$ برابر یک می شود پس x در مضارب زوج π قرار ندارد.

$$x = (2k+1)\pi$$

و اگر $\cos x - \sin x = 0$ نتیجه می شود که $\cos x = \sin x$ که مکان هندسی آن همان نیمساز ناحیه ی اول و سوم است حالا نقاط را روی دایره ی مثلثاتی نشان می دهیم.



این سه نقطه تشکیل یک مثلث می دهند از آنجایی که بزرگترین

ضلع این مثلث قطر دایره است که کمان 18° روی دایره جدا

می کند پس زاویه ی محاطی روبرو به آن می شود نصف 18°

یعنی 9° پس مثلث داده شده قائم الزاویه است. گزینه (۳)

سؤال ۵۷: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است.

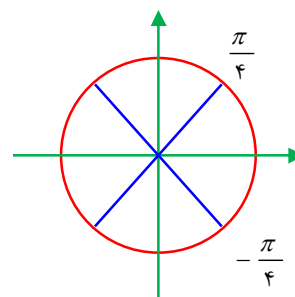
- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

با شرط $\sin x \neq 0$ داریم:

$$\frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4 \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 3 - 4 \sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x) = 2 - 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$



گزینه (۲) درست است.

سؤال ۵۸: اگر x', x'' ریشه های معادله $\tan^2 x - 2k \tan x + k - 1 = 0$ باشند و $x' + x'' = \frac{3\pi}{4}$ مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

با فرض $t = \tan x$ معادله $t^2 - 2kt + (k-1) = 0$ را خواهیم داشت و:

$$t' + t'' = \tan x' + \tan x'' = -\frac{-2k}{1} = 2k$$

$$t't'' = \tan x' \cdot \tan x'' = \frac{k-1}{1} = k-1$$

$$\tan(x' + x'') = \frac{\tan x' + \tan x''}{1 - \tan x' \cdot \tan x''} = \frac{2k}{1 - (k-1)} = \frac{2k}{2-k}$$

در سوال گفته $x' + x'' = \frac{3\pi}{4}$ پس $\tan(x' + x'') = -1$ در رابطه بالا این شکلی می شود:

$$-1 = \frac{2k}{2-k} \Rightarrow -2 + k = 2k \Rightarrow \boxed{k = -2}$$
 گزینه (۴) درست است.

سؤال ۵۹: اگر معادله $m = 2 \cos^2 x + 2m \sin x \cos x = m$ دارای جواب باشد حدود تغییرات m کدام است.

- (۱) $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ (۲) $-2 \leq m \leq 1$ (۳) $m \leq 0$ (۴) $m \geq 0$

اگر $\cos x = 0$ سمت چپ معادله صفر می شود و معادله وقتی جواب دارد که سمت راست آن هم صفر باشد یعنی $m = 0$ حالا با فرض $\cos x \neq 0$ دو طرف را بر $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم.

$$2 \cos^2 x + 2m \sin x \cos x = m \rightarrow 2 + 2m \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{m}{\cos^2 x} \rightarrow 2 + 2m \tan x = m(1 + \tan^2 x)$$

$$\rightarrow m \tan^2 x - 2 \tan x + (m-2) = 0$$

با فرض $t = \tan x$ معادله $mt^2 - 2mt + (m-2) = 0$ بدست می آید این معادله وقتی جواب دارد که:

$$\Delta' = (-m)^2 - m(m-2) \geq 0 \rightarrow 2m \geq 0 \rightarrow m \geq 0$$
 گزینه (۴) درست است.

سؤال ۶۰: معادله $\sin 3x - \sin x + 2 \sin^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (خارج از کشور ریاضی ۹۰)

$$3 \sin x - 4 \sin^2 x - \sin x + 2 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$-4 \sin^2 x + 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x (2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2 \sin x - 1)(-2 \sin^2 x + 1) = 0 \Rightarrow (2 \sin x - 1)(\cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

پس کلاً ۶ جواب دارد. گزینه (۴) درست است.

$$\begin{aligned} \sin 3x - \sin x &= 2 \sin \frac{3x-x}{2} \cos \frac{3x+x}{2} = 2 \sin x \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin^2 x = 1 \\ \Rightarrow 2 \sin x \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0 \\ \Rightarrow \cos 2x (2 \sin x - 1) &= 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \text{ یا } \sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

سؤال ۶۱: جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ (خارج از کشور ریاضی)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$$\cot x (4 \sin x + \tan x) = 4 \cot x \cdot \sin x + \cot x \cdot \tan x = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{3}{2} \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ . گزینه (۳) درست است.}$$

سؤال ۶۲: جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه ی

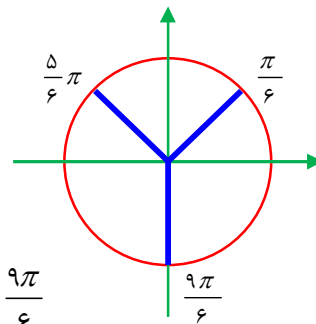
مقادیر i کدام است. (سراسری ریاضی ۸۳)

(۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{4k\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = (4k+1)\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{9\pi}{6} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}, i \in \{1, 5, 9\} \text{ . گزینه (۴) درست است.}$$

سؤال ۶۳: جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \text{ : چون دو زاویه ی } x + \frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{\pi}{4} - x \text{ متتام یکدیگرند. پس } \tan \text{ یکی } \cot \text{ دیگری است یعنی:}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \cot\left(2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 2 \cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2 \tan 2x = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{گزینه (1) درست است}$$

$$\text{روش دوم)} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(\tan x + 1)^2 - (\tan x - 1)^2}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۴۴: یکی از جواب های کلی معادله $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 1$ به کدام صورت است.

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \end{cases} \text{گزینه (۴) درست است.}$$

سؤال ۵۵: در معادله مثلثاتی $\sin 2x (\sin x + \cos x) = \cos 2x (\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$

\Rightarrow مجموع جواب ها $\frac{5\pi}{4}$

روش دوم)

$$\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow \sin 2x \sin x + \sin 2x \cos x = \cos 2x \cos x - \cos 2x \sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \cos 2x \cos x \cdot \sin 2x \sin x \Rightarrow \sin(2x + x) = \cos(2x + x)$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \cos 3x \Rightarrow \tan 3x = 1 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

سؤال ۶۶: مجموع تمام جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است.

۱۱π (۴)

۱۰π (۳)

۹π (۲)

۸π (۱)

$$\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow \sin \Delta x = -\sin 4x = \sin(-4x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi - 4x \Rightarrow 9x = 2k\pi \\ \Delta x = 2k\pi + \pi - (-4x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9}, x \in (0, 2\pi):$$

$$x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

حاصل جمع این جواب ها می شود 10π اگر بخواهیم سریع بگوییم، مقادیر بالا دنباله ای حسابی تشکیل داده اند. اولین جمله صفر و

آخرین جمله 2π و تعداد جملات ۱۰ تا است: $S_{10} = \frac{10}{2}(0 + 2\pi) = 10\pi$ و اگر $x = (2k+1)\pi$ و چون $0 \leq x \leq 2\pi$ پس

$x = \pi$ است پس مجموع جواب های این فاصله می شود $10\pi + \pi = 11\pi$. گزینه (۴) درست است.

سؤال ۶۷: جواب کلی معادله ی $\cos^3 x \cos x = \cos^7 x$ کدام است؟

$2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۴)

$k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳)

$k\pi$ (۲)

$\frac{k\pi}{2}$ (۱)

$$\cos^3 x \cos x = \cos^7 x \Rightarrow \cos^3 x \cos x - \cos^7 x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^3 x - \cos^5 x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \cos^3 x = \cos^5 x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2} & (1) \\ \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi & (2) \\ x = \frac{k\pi}{2} & (3) \end{cases} \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \cup (3) = \frac{k\pi}{2}. \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

سؤال ۶۸: جواب کلی معادله ی $\sqrt{2} \sin x = \tan x$ روی دایره ی مثلثاتی رئوس یک n ضلعی هستند. کوچکترین

زاویه ی این n ضلعی کدام است؟

90° (۴)

60° (۳)

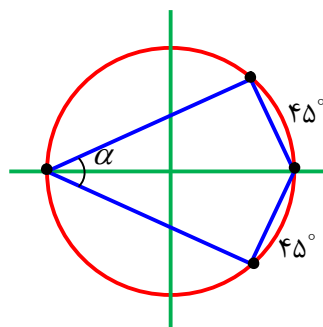
45° (۲)

30° (۱)

$$\sqrt{2} \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{\sin x \neq 0} \sqrt{2} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sqrt{2} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{گزینه (۲) توجه کنید که هیچ کدام از جواب ها مخرج را صفر نمی کنند. پس همه ی جواب ها درست اند.}$$



$$\text{کوچکترین زاویه } \alpha = \frac{45^\circ + 45^\circ}{2} = 45^\circ$$

سؤال ۶۹: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \tan x \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \xrightarrow[\text{طرفین را بر } \cos^2 x \text{ تقسیم می کنیم}]{\text{چون } \cos x \neq 0} 2 \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x - 2 \tan x = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

سؤال ۷۰: جواب کلی معادله‌ی $3\sqrt{3} \sin^2 x + \sin^2 x \cos x = \cos x$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

$$3\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x - \sin^2 x \cos x = \cos x (1 - \sin^2 x) \Rightarrow 3\sqrt{3} \sin^2 x = \cos^2 x$$

با شرط $\sin x \neq 0$ طرفین را بر $\sin^2 x$ تقسیم می کنیم:

$$3\sqrt{3} = \cot^2 x \Rightarrow \sqrt{3} = \cot x \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = \cot^2 x \Rightarrow \cot x = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۷۱: تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) = 1 - \tan x \cot x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\tan x \cdot \cot x = 1, x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ (ریشه های مخرج)}$$

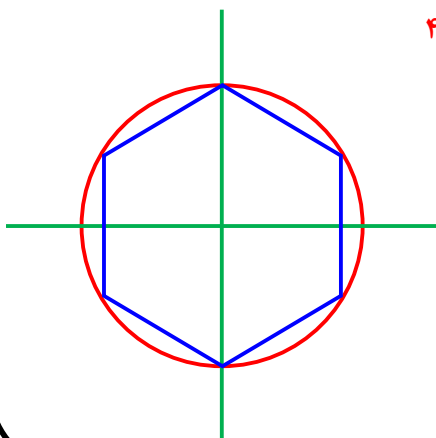
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow \sin x \cdot \sin x = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

با توجه به ریشه‌های مخرج $x = k\pi$ ها جواب نیستند پس معادله‌ی فوق ریشه ندارد.

سؤال ۷۲: مجموعه جواب‌های معادله $(\sin x)^{\cos^2 x - 2} = 1 + \cot^2 x$ روی دایره‌ی مثلثاتی، رئوس یک n ضلعی هستند. مساحت این n ضلعی کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۴



$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, (x \neq k\pi)$$

$$\Rightarrow (\sin x)^{\cos^2 x - 2} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow (\sin x)^{\cos^2 x} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$S = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۱

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۷۳: جواب های معادله $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چگونه اند؟

- (۱) یک ریشه مضاعف و دو ریشه ساده
 (۲) یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده
 (۳) فقط یک ریشه مضاعف
 (۴) فقط یک ریشه ساده

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} - 1 \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \xrightarrow{\sin x - \cos x = 0} -1 = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x = -1$$

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \{\pi\}$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

پس $x = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$ ریشه های ساده و $x = \{\pi\}$ ریشه های مضاعف معادله در بازه $[0, 2\pi]$ هستند.

نکته: ریشه های معادلات $\cos^2 = \pm 1, \sin^2 = \pm 1$ ریشه های مضاعف هستند.

سؤال ۷۴: معادله $\sin x - \cos x = 1$ چند ریشه متمایز در بازه $[0, \pi]$ دارد.

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۴

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases}$$

گزینه (۳) درست است

سؤال ۷۵: حدود تغییرات m برای اینکه معادله $2 \sin x + m \cos x = \sqrt{2m+3}$ جواب داشته باشد شامل چند

مقدار منفی است.

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) بی شمار

برای اینکه معادله فوق جواب داشته باشد باید $\sqrt{2m+3}$ در محدوده $2 \sin x + m \cos x$ قرار داشته باشد فقط دقت کنید

که عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد یعنی: $2m+3 \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{3}{2}$

$$\boxed{-\sqrt{a^2+b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\underbrace{-\sqrt{2^2+m^2} \leq \sqrt{2m+3} \leq \sqrt{2^2+m^2}}_{\text{همواره برقرار}} \Rightarrow \sqrt{2m+3} \leq \sqrt{4+m^2} \xrightarrow{\text{به توان } 2}$$

همواره برقرار

$$2m + 3 \leq 4 + m^2 \rightarrow m^2 - 2m + 1 \geq 0 \rightarrow (m - 1)^2 \geq 0$$

بنابراین محدوده‌ی m ، $m \geq -\frac{3}{2}$ است که شامل عدد منفی (-1) است. گزینه (2) درست است.

سؤال ۷۶: معادله‌ی $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$ چند ریشه در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ دارد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

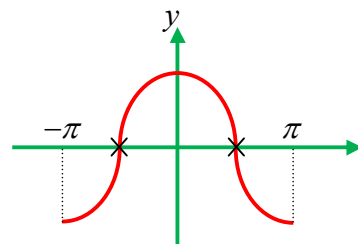
$$2 \sin \theta \cos \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta (2 \sin \theta + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ 2 \sin \theta + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\theta \in [-\pi, \pi]} \theta = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \\ \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\theta \in [-\pi, \pi]} \theta = \left\{-\frac{\pi}{4}\right\} \\ \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\theta \in [-\pi, \pi]} \theta = \left\{-\frac{3\pi}{4}\right\} \end{cases}$$

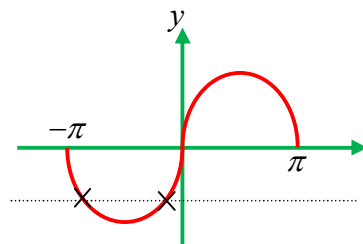
(راه حل دوم)

$$\cos \theta = 0$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



دو جواب



دو جواب

پس معادله ۴ جواب دارد.

سؤال ۷۷: جواب کلی معادله‌ی $\cos^2 x = \sin x (\sin x + 1)$ کدام است.

$2k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴)

$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ (۳)

$k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲)

$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۱)

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \sin x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} & (1) \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

چون جواب دسته‌ی دوم در دسته‌ی اول قرار دارد بنابراین جواب کلی معادله همان $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ است. گزینه (1) صحیح است.

سؤال ۷۸: جواب کلی معادله $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است.

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} \xrightarrow{\sin x \neq 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

گزینه (۴) درست است.

سؤال ۷۹: جواب کلی معادله $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۸۰: جواب کلی معادله $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} 2 \sin x \cos x = \sin 2x \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \sin 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۸۱: جواب کلی معادله $1 + \tan x \tan 2x = 2 \sin 2x$ کدام است.

- (۱) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$


$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \Rightarrow \frac{\cos x \cos 2x + \sin x \cos x}{\cos x \cos 2x} = 2 \sin 2x \Rightarrow \frac{\cos(2x - x)}{\cos x \cos 2x} = 2 \sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x \cos 2x} = 2 \sin 2x \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \Rightarrow 1 = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow 1 = \sin 4x$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه (۲) درست است.

دقت کنید که این جواب ها مخرج کسرهای معادله‌ی اولیه $(\cos x, \cos 2x)$ را صفر نمی کنند. پس قابل قبول هستند.

سؤال ۸۲: جواب کلی معادله‌ی $\tan^2 x \cot x + \cos^2 x = 1$ کدام است. 

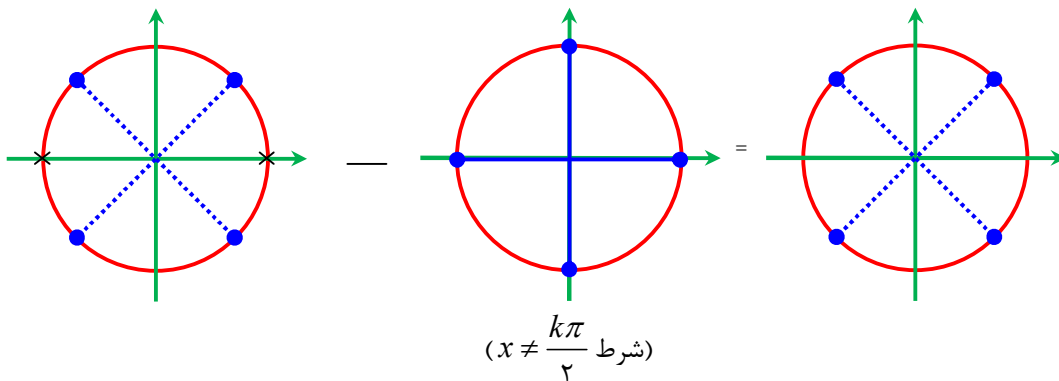
- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$\tan x \cdot \cot x = 1, x \neq \frac{k\pi}{2}$$


$$\Rightarrow \tan^2 x (\tan x \cdot \cot x) + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos^2 x = \cos^2 \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha}$$



جواب کلی = $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

سؤال ۸۳: میانگین ریشه‌های معادله‌ی $\cos x (1 + \cos x) = \sin x + \sin \frac{5\pi}{6}$ در بازه‌ی $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ کدام است. 

- (۱) $-\frac{\pi}{8}$ (۲) $-\frac{\pi}{4}$ (۳) $-\frac{3\pi}{8}$ (۴) $-\frac{\pi}{2}$

$$\cos x + \cos^2 x = \sin x + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x + \frac{1 + \cos^2 x}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x + \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{2} = \sin x - \cos x \Rightarrow \cos^2 x = 2(\sin x - \cos x) \xrightarrow{\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = -2(\cos x - \sin x)$$

$$\xrightarrow{\cos x - \sin x \neq 0} \cos x + \sin x = -2$$

$$\boxed{-\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \\ \cos x + \sin x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]} x = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\} \xrightarrow{\text{میانگین}} \left\{ -\frac{\pi}{4} \right\}$$

سؤال ۸۴: مجموع ریشه های معادله $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan 2x = 2$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است.

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴) π

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

معادله: $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} - \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \tan x)^2 - 2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 2 - 2 \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} = \tan^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\tan^2 x = \tan^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه ها}} = 0$$

سؤال ۸۵: جواب کلی معادله $\frac{1}{\sin 2x} = 1 + \cot x$ کدام است.

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

روش اول $\frac{1}{\sin 2x} = 1 + \cot x \Rightarrow \frac{1}{2}(\tan x + \cot x) = 1 + \cot x \Rightarrow \tan x + \cot x = 2 + 2 \cot x \Rightarrow \tan x - \cot x = 2$

$$\Rightarrow -2 \cot 2x = 2 \Rightarrow \cot 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

روش دوم $\Rightarrow \frac{1}{\sin 2x} = 1 + \cot x \Rightarrow \sin 2x + \sin 2x \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = 1 \Rightarrow \sin 2x + 2 \sin x \cos x \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \xrightarrow{\sin x \neq 0} 1$

$$\Rightarrow \sin 2x + 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin 2x + 1 + \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = k - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

که این جواب $\sin x$ را صفر نمی کند. گزینه (۳) درست است.

سؤال ۸۶: جواب کلی معادله $\tan 2x + \tan x = \cot x$ کدام است.

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$

$$6 \tan 2x = \cot x - \tan x = 2 \cot 2x \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{3} \cot 2x = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan^2 2x = \frac{1}{3} = \tan^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\tan^2 x = \tan^2 \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۸۷: جواب کلی معادله $\frac{1}{3} + \cos x = \cos x \sin^2 x$ کدام است.

(۱) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$ (۴) $k\pi \pm \frac{2\pi}{9}$

$$\cos x \sin^2 x = \frac{1}{3} + \cos x \Rightarrow \cos x(1 - \cos^2 x) = \frac{1}{3} + \cos x \Rightarrow \cos x - \cos^3 x = \frac{1}{3} + \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x - \cos^3 x = \frac{1}{3} \Rightarrow -\cos^3 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^3 x = -\frac{1}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

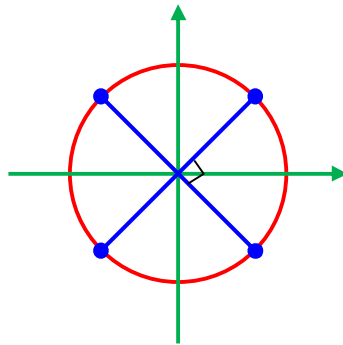
سؤال ۸۸: انتهای کمان های جواب معادله $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3}$ بر روی دایره ی مثلثاتی، رأس های کدام چهار ضلعی است.

(۱) دوزنقه (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) غیر مشخص

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3} \xrightarrow{x \neq \frac{k\pi}{2}}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sqrt{3}(2 \sin x \cos x) \Rightarrow -\cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x \Rightarrow \cot 2x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$



چهار نقطه تشکیل مربع می دهند.

سؤال ۸۹: جواب کلی معادله $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به کدام صورت است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{گزینه (۱) درست است.}$$

سؤال ۹۰: یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\sqrt{3} \sin x = 1 - \cos x$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 \Rightarrow 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

یادآوری $\cos x + \tan \theta \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta} \cos(x - \theta)$

سؤال ۹۱: معادله ی $\cos 2x - \cos x = \sin x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

$$\cos 2x = \cos x + \sin x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x \Rightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \\ \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \left\{0, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\} \Rightarrow \text{۵ جواب دارد}$$

گزینه (۴) درست است.

سؤال ۹۲: جواب کلی معادله ی $\tan x + \cot x = -8 \cos 2x \cos 4x$ کدام است.

- (۱) $\frac{k\pi \pm \pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi - \pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi \pm \pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi - \pi}{4}$

$$\frac{2}{\sin 2x} = -8 \cos 2x \cos 4x \xrightarrow{x \neq \frac{k\pi}{2}}$$

$$2 = -8 \underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} \cos 4x = -4 \underbrace{\sin 4x \cos 4x}_{\frac{1}{2} \sin 8x}$$

$$2 = -2 \sin 8x \Rightarrow \sin 8x = -1 \Rightarrow 8x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۹۳: جواب های معادله $\tan x (\sqrt{3} \tan x - 4) = -\sqrt{3}$ روی دایره ی مثلثاتی رئوس یک چهارضلعی هستند.

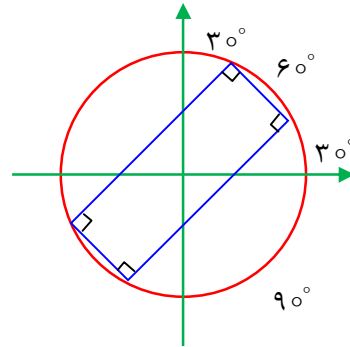
مساحت این چهارضلعی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

$$\sqrt{3} \tan^2 x - 4 \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} \tan^2 x - 4 \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



چهار ضلعی حاصل مربع است در ضمن مساحت چهار ضلعی نصف حاصل ضرب قطرهای آن است و قطر مربع به ضلع ۱ برابر $\sqrt{2}$

$$S = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

است.

سؤال ۹۴: معادله $\sin x + \cos x = \sqrt{2 + \cos^2 2x}$ چند جواب در بازه ی $[-\pi, \pi]$ دارد.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

$$\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2 + \cos^2 2x} \geq \sqrt{2}$$

یعنی عبارت سمت چپ همواره کوچکتر یا مساوی $\sqrt{2}$ و عبارت سمت راست، بزرگتر یا مساوی $\sqrt{2}$ است پس تساوی تنها زمانی رخ می دهد که هر دو عبارت برابر $\sqrt{2}$ باشند یعنی:

$$\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sqrt{2} \rightarrow 2 + \cos^2 2x = 2 \rightarrow \cos^2 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$x \in [-\pi, \pi] \rightarrow \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

اما توجه کنید که به ازای $\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ سمت چپ عبارت برابر صفر می شود که با فرض مسأله یعنی $\sqrt{2}$ شدن سمت چپ و

راست معادله در تناقض است پس تنها جواب مسأله $x = \frac{\pi}{4}$ است. گزینه (۲) درست است.

سؤال ۹۵: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ کدام است.

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin 3x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}$$

دسته جواب اول (مضارب $\frac{\pi}{2}$)، دسته جواب دوم (مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$) را هم شامل می شود پس جواب معادله $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

گزینه (۱) درست است.

سؤال ۹۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ به کدام صورت است.

(خارج از کشور ریاضی ۸۶) (رشته ریاضی)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = \left(2 \sin \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} \right) + \sin 2x$$

$$= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x(2 \cos x + 1) \Rightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ خود مسئله گفته}) \\ \cos x = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۹۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin 4x \cos 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۳)

(رشته ریاضی)

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (۴) \quad \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \quad (۱)$$

$$\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

$$\sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin(4x+2x) + \sin(4x-2x)) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) \Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\sin 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

گزینه (۴) درست است.

سؤال ۹۸: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 5x \cos 3x - \sin 3x \sin x}{\cos 2x} = 1$ به کدام صورت است.

(سراسری ریاضی ۹۰) (رشته ریاضی)

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۴) \quad \frac{2k\pi}{5} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\cos 5x \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos(5x+3x) + \cos(5x-3x)] = \frac{1}{2}[\cos 8x + \cos 2x]$$

$$\sin 3x \sin x = \frac{1}{2}[\cos(3x-x) - \cos(3x+x)] = \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x]$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 5x \cos 3x - \sin 3x - \sin x}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}[\cos 8x + \cos 2x] - \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x]}{\cos 2x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}[\cos 8x + \cos 4x]}{\cos 2x} = \frac{\frac{1}{2}(2 \cos 6x \cos 2x)}{\cos 2x} \xrightarrow{\cos 2x \neq 0} \cos 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi$$

$$x = \frac{2k\pi}{6} = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \text{گزینه (1) درست است.}$$

سؤال ۹۹: مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ زیر مجموعه ای از کدام مجموعه‌ی زیر است؟

(سراسری ریاضی ۹۴) (رشته ریاضی)

$$\left\{ \frac{2k\pi}{5} \mid k \in Z \right\} \quad (2) \qquad \left\{ \frac{4k\pi}{5} \mid k \in Z \right\} \quad (1)$$

$$\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{5} \mid k \in Z \right\} \quad (4) \qquad \left\{ \frac{2k\pi}{5} \mid k \in Z \right\} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = 2 \sin \frac{x+2x}{2} \cos \frac{x-2x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ \cos x + \cos 2x = 2 \cos \frac{x+2x}{2} \cos \frac{x-2x}{2} = 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}} \xrightarrow{\cos \frac{x}{2} \neq 0} \tan \frac{3x}{2} = \cot x \Rightarrow \tan \frac{3x}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\xrightarrow{\tan X = \tan \alpha \Rightarrow X = k\pi + \alpha} \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \frac{5x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 5x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{1}{5}(2k+1)\pi$$

$$\boxed{\cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2k+1)\pi}$$

پس مجموعه جواب $\frac{(2k+1)\pi}{5}$ نیست بلکه زیرمجموعه‌ای از آن است!!!

گزینه (۴) درست است.

سؤال ۱۰۰: در تست قبل نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چند ضلعی اند؟

(رشته ریاضی)

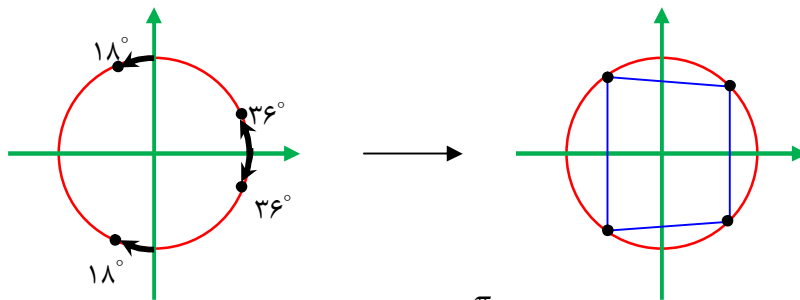
(۱) مثلث (۲) مستطیل (۳) دوزنقه (۴) پنج ضلعی منتظم

در حل تست قبل به $\frac{(2k+1)\pi}{5}$ رسیدیم. اما گفتیم همه‌ی این x جواب معادله نیستند. در واقع باید دو شرط $\cos x + \cos 2x \neq 0$ و $\sin x \neq 0$ (به خاطر $\cot x$) را لحاظ کنیم. $\sin x \neq 0$ ایجاب می‌کند x مضرب π نباشد و $\cos x + \cos 2x \neq 0$ ایجاب می‌کند $\cos x$ مساوی -1 یا $\frac{1}{2}$ نباشد چون:

$$\cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$$

$$\Rightarrow \cos x + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow (\cos x + 1)(2\cos x - 1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

حالا باید این چیزها را جمع و جور کنیم! $\frac{(2k+1)\pi}{5}$ یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{5}$ ، $\left(\frac{\pi}{5} = 36^\circ\right)$ و در شکل زیر نقاط پایانی کمان های $9 \times 36^\circ = 324^\circ = 36^\circ - 36^\circ$ و $7 \times 36^\circ = 252^\circ = 270^\circ - 18^\circ$ و $5 \times 36^\circ = 180^\circ$ و $3 \times 36^\circ = 90^\circ + 18^\circ$ و $1 \times 36^\circ = 36^\circ$ یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{5}$ را در یک دور پادساعتگرد مشخص کرده ایم. انتهای کمان سایر مضارب فرد $\frac{\pi}{5}$ هم روی همین نقاط واقع می شود. حالا از روی این نقاط سه شرط $\cos x \neq \frac{1}{2}$ ، $\cos x \neq -1$ ، $\sin x \neq 0$ را بررسی می کنیم: $\cos x \neq -1$ ، $\sin x \neq 0$ باعث می شود نقطه‌ی $(\pi = 180^\circ)$ از جمع نقاط حذف شود.



توجه کنید که $\cos x = \frac{1}{2}$ هم فقط به ازای مضرب هایی از $\frac{\pi}{3}$ که در ربع اول یا چهارم قرار دارند اتفاق می افتد و قطعاً هیچ مضربی از $\frac{\pi}{5}$ مضرب $\frac{\pi}{3}$ نیست. پس از 5 نقطه‌ی شکل بالا یک نقطه حذف می شود و چهار نقطه‌ی باقیمانده یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین می سازند.

📖 سؤال ۱۰۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۶ - ریاضی)

$$(1) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{3}$$

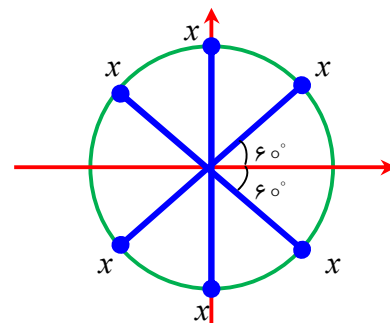
$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\cos(3x - x) - \cos(3x + x)] = \cos 2x \Rightarrow \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 4x] = \cos 2x \xrightarrow{-x^2}$$

$$\cos 2x - \cos 4x = 2\cos 2x \Rightarrow -\cos 4x = \cos 2x \Rightarrow \cos 4x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \quad \text{یا} \quad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۱۰۲: جواب کل معادله $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ کدام است.

(خارج از کشور ۹۶ - ریاضی)

$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)
 $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲)
 $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳)
 $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴)

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x (2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{x \neq \frac{k\pi}{2}} * \text{ غ ق ق} \\ 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

سؤال ۱۰۳: اگر مجموع دو ریشه‌ی معادله $2\cos x + k\sin x + 1 = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر باشد، k کدام است.

-1 (۱)
 1 (۲)
 2 (۳)
 -2 (۴)

$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$,	$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
--	---	--

معادله: $\frac{2 - 2 \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{2k \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{2 - 2 \tan^2 \frac{x}{2} + 2k \tan \frac{x}{2} + 1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow -\tan^2 \frac{x}{2} + 2k \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

مجموع ریشه‌های معادله (x_1, x_2) برابر $\frac{3\pi}{2}$ است پس:

$$x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

از طرفین تساوی آخر \tan می‌گیریم:

$$\tan\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\tan\left(\frac{x_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{x_2}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x_1}{2}\right)\tan\left(\frac{x_2}{2}\right)} = -1$$

$\tan\left(\frac{x_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{x_2}{2}\right) = \frac{-b}{a} = 2k$
$\tan\left(\frac{x_1}{2}\right)\tan\left(\frac{x_2}{2}\right) = \frac{c}{a} = -3$

$$\Rightarrow \frac{2k}{1 - (-3)} = -1 \Rightarrow \frac{2k}{4} = -1 \Rightarrow 2k = -4 \Rightarrow k = -2$$

سؤال ۱۰۴: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 5x \cos 3x = \cos^2 x$ کدام است؟ (رشته ریاضی)

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$\cos 5x \cos 3x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\rightarrow \cos 8x + \cos 2x = 1 + \cos 2x \rightarrow \cos 8x = 1 \rightarrow 8x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

گزینه (۱) درست است

سؤال ۱۰۵: جواب کلی معادله $\sin 4x - \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$ (رشته ریاضی)

- (۱) $\frac{k\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{3}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$$\sin 4x - \sin 2x = \cos 3x \rightarrow \text{تبدیل جمع به ضرب}$$

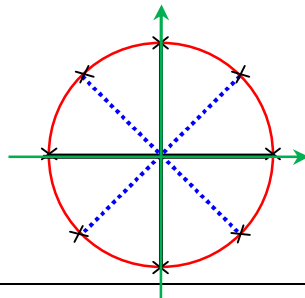
$$2 \sin x \cos 3x = \cos 3x \xrightarrow{\cos 3x = 0} 2 \sin x = 1$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 0 \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

همان طور که می بینید جواب های $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ هر دو جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ را شامل می شود پس جواب

کل $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ است.

گزینه (۴) درست است.



سؤال ۱۰۶: معادله مثلثاتی $\sin 3x - \sin x + 2 \sin^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد. (رشته ریاضی)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

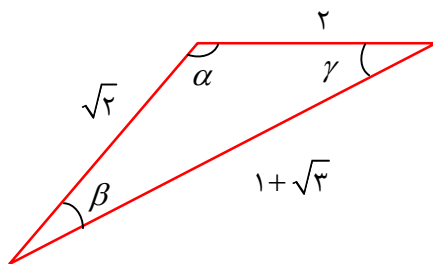
$$\sin 3x - \sin x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow 2 \sin x \cos 2x = \cos 2x \xrightarrow{\cos 2x = 0} 2 \sin x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پس در مجموع ۶ جواب دارد. $x \in [0, 2\pi] \rightarrow \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

سؤال ۱۰۷: مثلثی رسم کرده ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{3}$ است. بزرگترین زاویه‌ی این مثلث چند درجه

است؟



(۱) 105°

(۲) 150°

(۳) 95°

(۴) 115°

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

$$(\sqrt{2})^2 = (2)^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cos \beta$$

$$\Rightarrow 4 = 4 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \cos \beta \Rightarrow -2 - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \cos \beta$$

$$\Rightarrow -2(1+\sqrt{3}) = -2\sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2(2)(1+\sqrt{3}) \cos \gamma$$

$$\Rightarrow 2 = 4 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2(2)(1+\sqrt{3}) \cos \gamma \Rightarrow -6 - 2\sqrt{3} = -4(1+\sqrt{3}) \cos \gamma$$

$$\Rightarrow -2(3+\sqrt{3}) = -4(1+\sqrt{3}) \cos \gamma$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{-2(3+\sqrt{3})}{-4(1+\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{-4(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

تمرینات بیشتر

سؤال ۱: معادله $3 \sin x + 1 = 0$ چند ریشه در فاصله $[0, 2\pi]$ دارد.

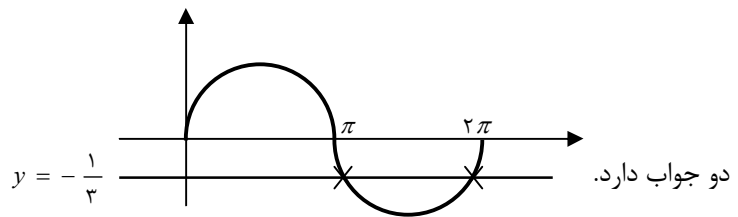
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

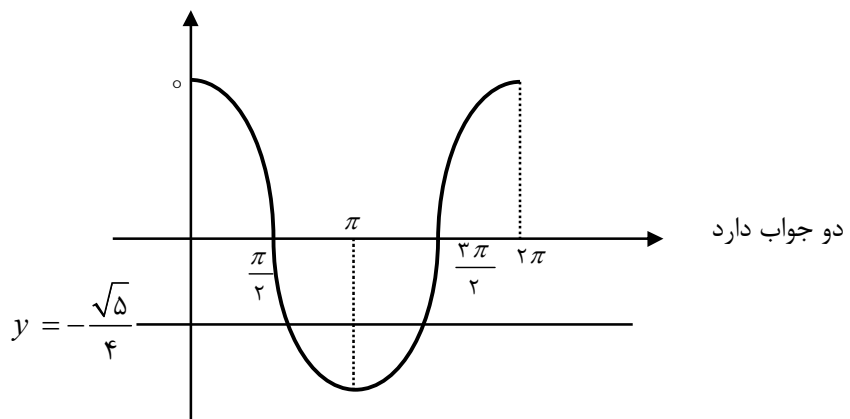
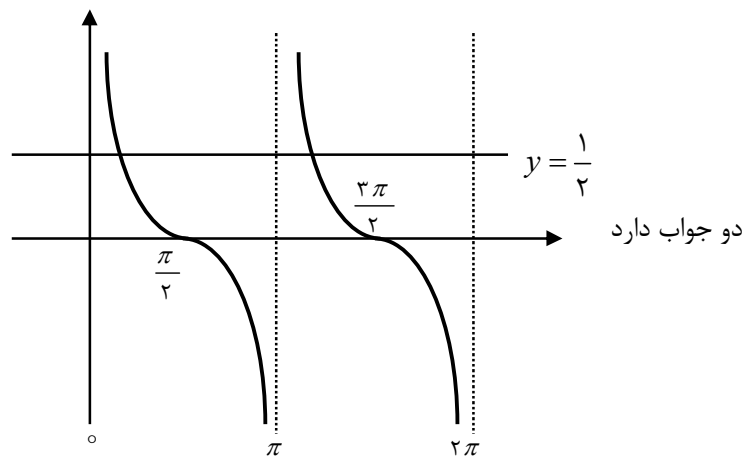
(۴) ۴

$$3 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{3}$$



سؤال ۲: معادله $(2 \cot x - 1)(4 \cos x + \sqrt{5}) = 0$ چند ریشه‌ی متمایز در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

$$\begin{cases} 2 \cot x - 1 = 0 \rightarrow \cot x = \frac{1}{2} \\ 4 \cos x + \sqrt{5} = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$



پس معادله در کل ۴ جواب دارد.

سؤال ۳: مجموع ریشه‌های معادله $3 \sin^2 x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) π

(۲) 2π

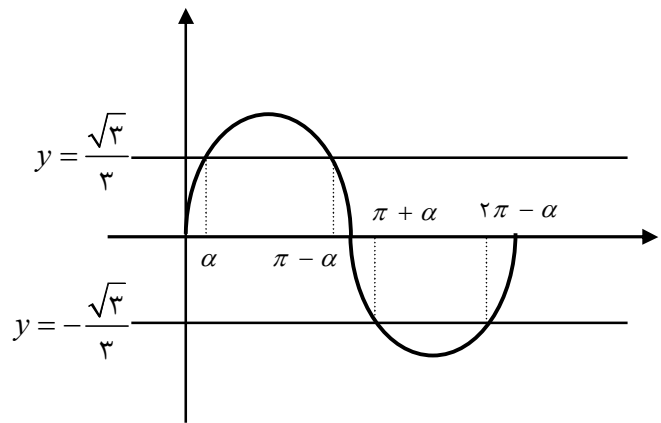
(۳) 3π

(۴) 4π

$$3 \sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مجموع ریشه ها $\alpha + \pi - \alpha + \pi + \alpha + 2\pi - \alpha = 4\pi$

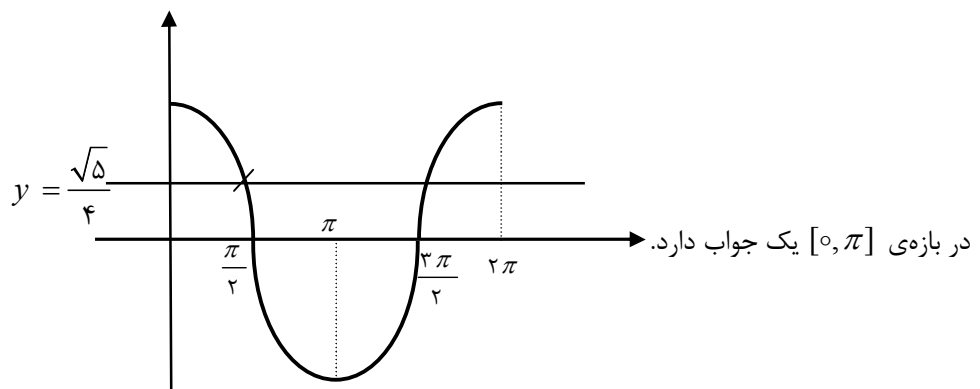
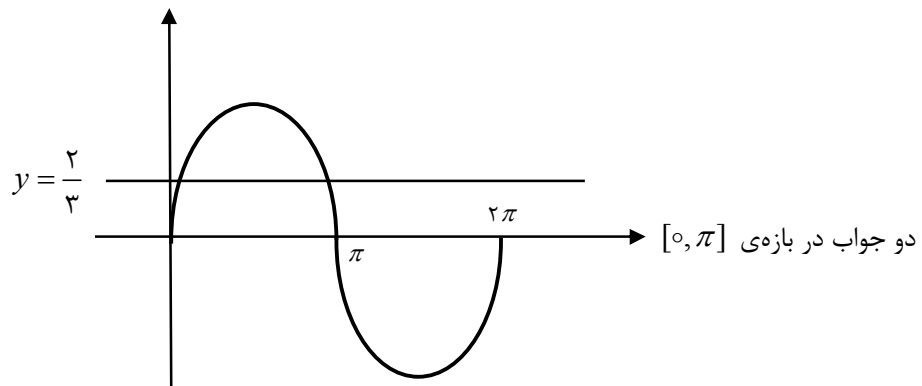
گزینه (۴) درست است.



سؤال ۴: معادله $(3 \sin x - 2)(4 \cos x - \sqrt{5}) = 0$ در فاصله $0 \leq x \leq \pi$ چند ریشه‌ی متمایز دارد.

- (۱) دو ریشه (۲) سه ریشه (۳) چهار ریشه (۴) ریشه ندارد

$$(3 \sin x - 2)(4 \cos x - \sqrt{5}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2}{3} \\ \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$



پس معادله در کل ۳ جواب دارد. گزینه (۲) درست است.

سؤال ۵: جواب کلی معادله $\sin^3 x + \sin x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $k\pi$ (۴) $2k\pi$

$$\sin^3 x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x + 1) = 0$$

همواره مثبت

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \text{ . گزینه (۳) درست است.}$$

سؤال ۶: مجموعه جواب های معادله $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است.

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = 2k\pi \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \text{ در ناحیه اول مثلثاتی است.}$$

با توجه به گزینه ها واضح است که گزینه (۱) صحیح است.

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{در ناحیه اول است}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۷: مجموع جواب های معادله $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = \tan \pi$ در بازه $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ کدام است.

$$\frac{3\pi}{2} \quad (1) \quad \frac{5\pi}{2} \quad (2) \quad \pi \quad (3) \quad 2\pi \quad (4)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin 2x = \sin(-2x)$$

می دانیم $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ یعنی:

$$\sin(-2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]} \text{در این بازه جواب ندارد} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]} x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \text{ و } x = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

سؤال ۸: معادله $2 \cos 2x + 3 = 0$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

$$3 \quad (1) \quad 6 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 4 \text{ صفر} \quad (4)$$

$$2 \cos 2x + 3 = 0 \rightarrow \cos 2x = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{-1 \leq \cos 2x \leq 1}$$

$\cos 2x$ هرگز نمی تواند برابر $-\frac{3}{2}$ شود پس معادله ی فوق جواب ندارد. گزینه (۴) درست است.

سؤال ۹: قدر مطلق تفاضل بزرگترین و کوچکترین ریشه‌ی معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ کدام است.

(۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) π (۴) $\frac{13\pi}{12}$

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین قدر مطلق تفاضل بزرگترین ریشه از کوچکترین آن برابر است با: $\left| \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right| = \pi$

سؤال ۱۰: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است.

(۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$$= 2(\sin x)(\sin x) + 3 \cot x (-\sin x) = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) \quad \underline{\sin x \neq 0} \quad 2 \sin^2 x - 3 \cos x$$

$$\underline{\sin x \neq 0} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x - 1)(\underbrace{\cos x + 2}_{\text{همواره مثبت}}) = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

دقت کنید که $(\sin x = 0)$ تأثیری در جواب ندارد.

سؤال ۱۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$$(\sin x - \tan x) \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cdot \cot x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\sin x \neq 0, \cos x \neq 0} \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۱۲: جواب کلی معادله‌ی $\tan x - \tan 2x = 0$ کدام است.

(۱) $x = \frac{k\pi}{2}$ (۲) $x = k\pi$ (۳) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $x = 2k\pi$

$$\tan 2x = \tan x \xrightarrow{\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0} 2x = k\pi = k\pi + x \rightarrow x = k\pi$$

سؤال ۱۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است.

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}. \text{ گزینه (۴) درست است.}$$

سؤال ۱۴: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}. \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

سؤال ۱۵: مجموع جواب های معادله‌ی $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه‌ی $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

(۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{10\pi}{3}$ (۳) 3π (۴) $\frac{11\pi}{3}$

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow -2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \text{ مجموع جواب ها می شود}$$

گزینه (۱) صحیح است.

سؤال ۱۶: اگر α و β حاده باشند و جواب کلی معادله‌ی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$

یا $x = 2k\pi \pm \beta$ باشد مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) $\frac{5\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{5\pi}{6}. \text{ گزینه (۳) درست است.}$$

سؤال ۱۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \cos x - \sin x = 1 + \cos x$$

$\Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ گزینه (۳) درست است.

سؤال ۱۸: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x \sin(\pi - x) - \sin 3x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$\cos 3x \sin x - \sin 3x(-\cos x) = 0 \Rightarrow \cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x = 0$$

$\Rightarrow \sin(3x + x) = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$ گزینه (۱) درست است.

سؤال ۱۹: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \right) = 1 + \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1$$

$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۲۰: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2} + (\cos x)(-\sin x) = 0 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ گزینه (۱) درست است.

سؤال ۲۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$$-\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

گزینه (۲) درست است $\rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$ جواب کلی

سؤال ۲۲: معادله‌ی $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه‌ی متمایز دارد.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۳

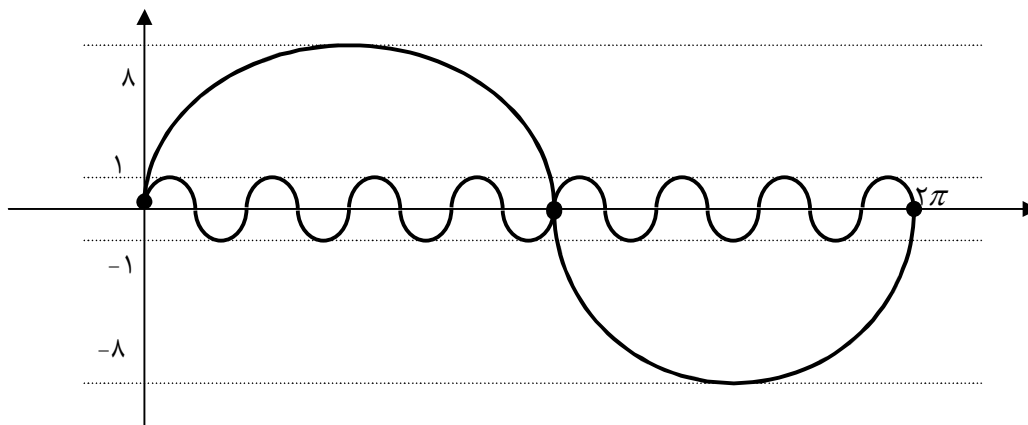
(۴) ۵

$$\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$$

$$\frac{1}{2} \sin 4x$$

$$\frac{1}{2} \sin 8x$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \sin 8x = 2 \sin x \rightarrow \sin 8x = 8 \sin x$$



بنابراین معادله در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ سه ریشه دارد.

سؤال ۲۳: جواب‌های معادله‌ی $(\tan x)^{\sin^2 x} \times (\cot x)^{\cos^2 x} = 1$ روی دایره‌ی مثلثاتی رؤس کدام یک از چند ضلعی

های زیر هستند.

(۱) مربع

(۲) مستطیل غیرمربع

(۳) شش ضلعی منتظم

(۴) هشت ضلعی منتظم

$$(\tan x)^{\sin^2 x} = \frac{1}{(\cot x)^{\cos^2 x}} = \left(\frac{1}{\cot x}\right)^{\cos^2 x} \Rightarrow (\tan x)^{\sin^2 x} = (\tan x)^{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

چهار رأس یک مربع اند.

گزینه (۱) درست است.

سؤال ۲۴: جواب کلی معادله‌ی $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$$

$$\left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x\right) \sin 3x + \left(\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x\right) \cos 3x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cos x \sin 3x + \frac{1}{4} \cos 3x \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} (\cos x \sin 3x + \sin x \cos 3x) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

سؤال ۲۵: در معادله $2 \sin x \cos 3x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$ مجموعه جواب ها به کدام صورت است. (رشته ریاضی)

(۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$2 \sin x \cos 3x = 1 - \sin 2x \rightarrow \sin 4x - \sin 2x = 1 - \sin 2x$$

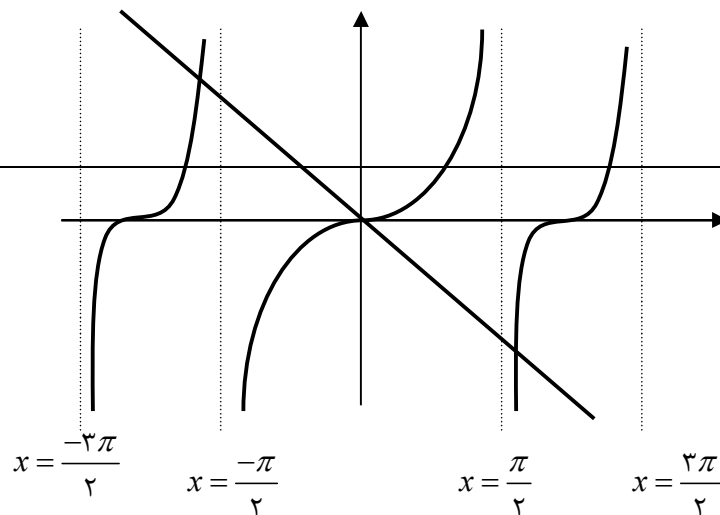
$$\sin 4x = 1 \rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۲۶: معادله $\sin x + x \cos x = 0$ چند جواب در بازه $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

$$\sin x = -x \cos x \Rightarrow \tan x = -x$$



مشخص است که معادله ۳ جواب دارد.

سؤال ۲۷: معادله $x \sin x - \cos x = 0$ در بازه $(-\pi, \pi)$ چند ریشه دارد؟

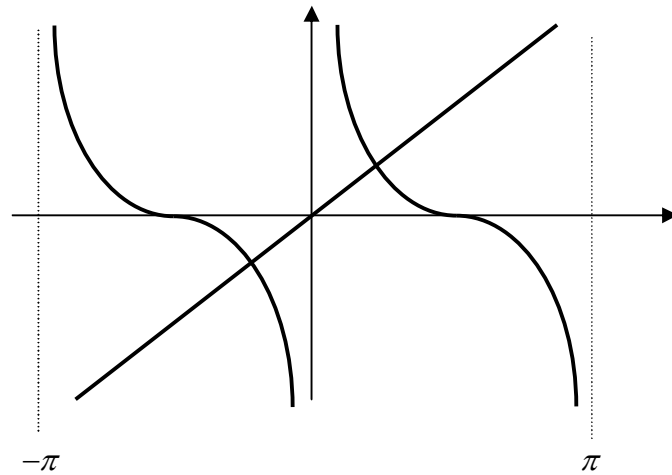
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x \sin x = \cos x \Rightarrow x = \cot x$$



معادله دو جواب دارد.

سؤال ۲۸: معادله $\tan x + |x| = \frac{\pi}{2}$ چند ریشه در بازه $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ دارد.

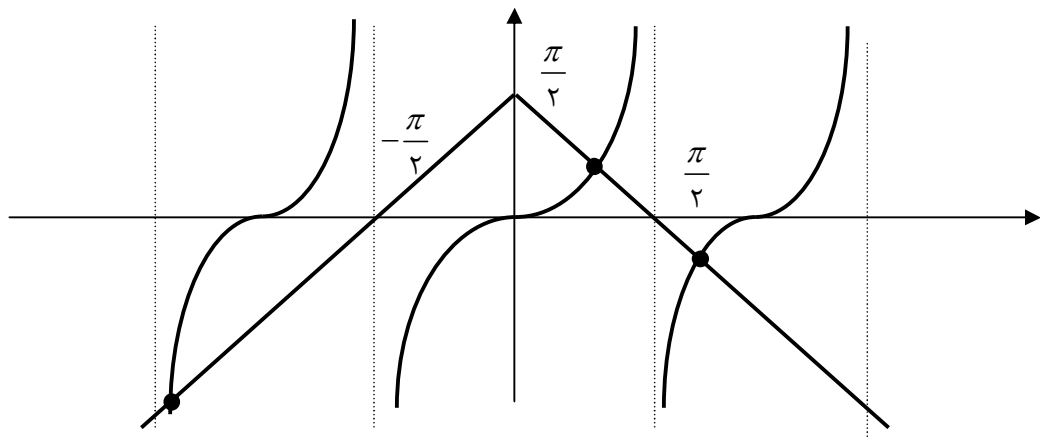
۵ (۴)

۴ (۴)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$\tan x = \frac{\pi}{2} - |x|$$



معادله ۳ ریشه دارد.

سؤال ۲۹: معادله $x \sin 2x - \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد.

۱۰ (۴)

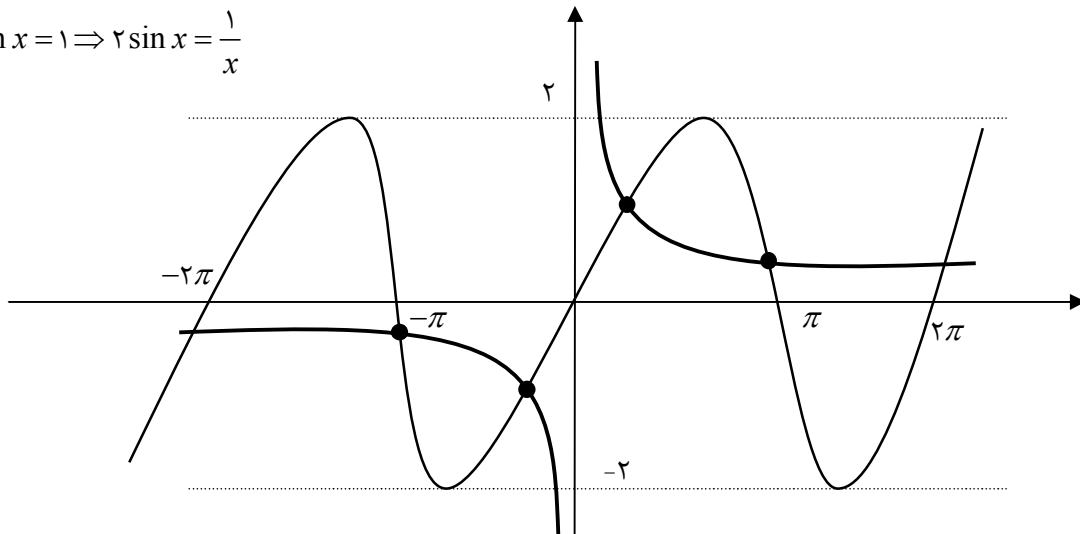
۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

$$x(2 \sin x \cos x) - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2x \sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [-2\pi, 2\pi]} \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \\ 2x \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x = \frac{1}{x} \end{cases}$$



این معادله ۴ جواب دارد.

پس کلاً معادله ۸ جواب دارد. گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۰: معادله $\sqrt{x} \sin x - \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۴ (۴)

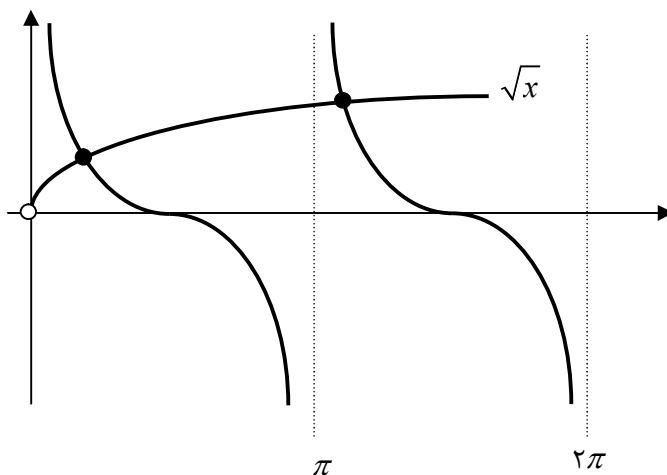
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\sqrt{x} \sin x = \cos x$$

$$\sqrt{x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$



معادله دو جواب دارد.