



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



ریاضی یازدهم

فصل ۶

حد و پیوستگی



ص

✓ میل کردن: در این درس اصلاً معنای رایج خود را که سر سفره های ناهار و شام استفاده می شود را ندارد، میل کردن در حد یعنی نزدیک شدن تا اندازه دلخواه به عدد a مثلاً:

← میل کردن x به 1 از سمت راست $\rightarrow 1/9 \ 1/8 \ 1/6 \ 1/4 \ 1/1 \ 1/0.1 \ 1/0.001 \ 1/0.0001$ و نمایش میدهیم $x \rightarrow 1^+$

← میل کردن x به 1 از سمت چپ $\rightarrow 0.2 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 0.99 \ 0.999$ و نمایش میدهیم $x \rightarrow 1^-$

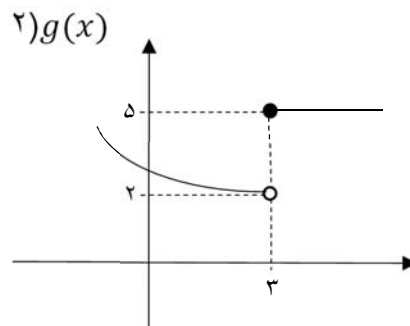
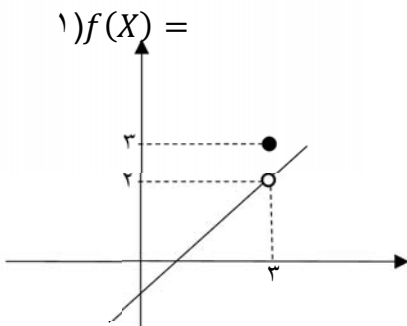
تمرین ۱: معنی عبارات زیر چیست؟

$x \rightarrow 0^+$	$x \rightarrow \sqrt{3}^-$	$x \rightarrow 145^-$
$x \rightarrow 3^+$	$x \rightarrow \frac{1}{2}^-$	$x \rightarrow 2^+$

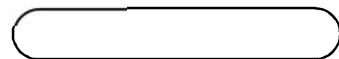
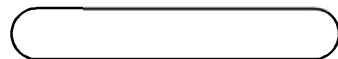
تمرین ۲: تفاوت حد و مقدار تابع چیست؟

✓ محاسبه حد با توجه به نمودار تابع: وقتی بخواهیم حد یک عبارت را در نقطه ای مانند a محاسبه کنیم باید بررسی کنیم که وقتی به سمت نقطه میل میکنیم مقدار تابع به چه عددی نزدیک میشود. واضح است که دو نوع حد داریم. یکی برای میل کردن از چپ و دیگری برای میل کردن از راست. می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (حد راست) و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (حد چپ)

تمرین ۳: حد توابع زیر را در نقطه $x = 3$ شده بیابید.

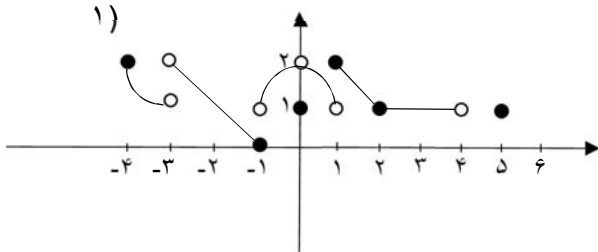


www.riazisara.ir





تمرین ۴: با توجه به نمودار زیر حد تابع را در تمام نقاط صحیح محاسبه کنید.



تمرین: نمودارهای زیر را رسم کنید و حد تابع را از سمت چپ و راست در نقطه‌ی شکستگی (مرز دامنه‌ها) بیابید.

$$۵) f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > ۳ \\ -x + ۷ & x < ۳ \end{cases}$$

$$۶) f(x) = \begin{cases} x + ۲ & x \neq 1 \\ ۴ & x = 1 \end{cases}$$

$$۷) f(x) = \begin{cases} x^2 & x > ۲ \\ -1 & x = ۲ \\ x + ۳ & x < ۲ \end{cases}$$

$$۸) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x > ۰ \\ ۲ & x = ۰ \\ x^3 - ۲ & x < ۰ \end{cases}$$

تعریف حد: اگر تابع حد چپ و حد راست موجود و با هم برابر باشند آنگاه می‌گوییم تابع در نقطه a حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

از تعریف حد نتیجه می‌گیریم که ...

← -۱

← -۲

← -۳



✓ همسایگی ها: برای اینکه بتوان حد یک نقطه را محاسبه کرد. باید الزاما یک همسایگی اطراف نقطه a تعریف شده

باشد (که بتوان به a نزدیک شد ← در تعریف حد گفتم حد چپ و راست داشته باشد).

← توجه: الزامی نیست همسایگی متقارن باشد یعنی نیازی نیست عددی که می‌خواهیم همسایگی آن را اعلام کنیم وسط

بازه باشد، مثلا $(1 و 5)$ همسایگی نقطه a است.



✓ انواع همسایگی



۱- همسایگی محذوف: الزامی نیست حتما a تعریف شده باشد

← مثلا $\{4\} - (1 و 5)$ ← همسایگی محذوف

۲- همسایگی راست: اگر $r > 0$ باشد $(a, a + y)$ همسایگی راست مثلا ...

۳- همسایگی چپ: اگر $r > 0$ باشد $(a - y, a)$ همسایگی چپ هستند. مثلا ...

تمرین ۱۰: برای نقطه $x = 5$ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ بنویسید.

همسایگی محذوف همسایگی راست همسایگی چپ

تکته: تقاطعی که تابع در آنها حد ندارد:

۱- اگر تابع فقط در یک طرف نقطه a تعریف شده باشد (مثل ابتدا و انتهای بازه) چون حد راست یا حد چپ را ندارد

پس در کل حد ندارد. (نبود همسایه)

۲- اگر در دو طرف تابع تعریف شده باشد و حد راست و چپ متفاوتی داشته باشد. (پرش)

(۱۱) آیا تابع $f(x) = \sqrt{x - 2}$ در نقطه $x = 2$ حد دارد؟

(۱۲) آیا تابع $f(x) = \frac{-4+x^2}{x}$ در نقطه $x = 0$ حد دارد؟

(۱۳) آیا تابع $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ در نقطه $x = \sqrt{2}$ حد دارد؟



☑ محاسبه‌ی حد با استفاده از ضابطه‌ی تابع: در این قسمت حد توابع زیر را بررسی میکنیم.

الف) توابع چند ضابطه ای

ب) توابع پراکتی

ج) توابع چند ضابطه ای

د) توابع گویا

ه) توابع مثلثاتی

و) توابع قدر مطلق

ز) توابع رادیکالی

الف) توابع چند ضابطه‌ای: اگر حد را در نقطه مرزی خواسته شده باشند، کافیه حد چپ و راست را با توجه به دامنه

ضابطه ها محاسبه کنیم. حواست باشه تابع ای حد دارد که حد چپ با حد راست در نقطه مورد نظر برابر باشد.

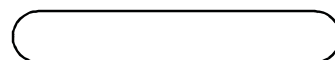
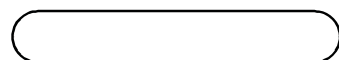
تمرین: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱۴) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$۱۵) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$۱۶) f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2x + 4 & x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$۱۷) f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \neq 4 \\ 2 & x = 4 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$





تمرین ۱۸: به ازای مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟ (کنکور ۸۰)

(۱) $\{0\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) \emptyset (۴) \mathbb{R}

تمرین ۱۹: اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد چند است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^-} f(x) =$$

تمرین ۲۰: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 2x-1 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟

نکته: فصل *تام این تابع: $\begin{cases} f & x \in \mathbb{Q} \\ g & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ دیریکله است. و وقتی هر دو ضابطه باهم برابر باشند. به نظرت چرا؟

تمرین ۲۱: اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 + a \sin x & x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{\pi} - 1 & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ حد داشته باشد a کدام است؟

حد عبارات شامل جز صحیح: دو حالت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [f(a)] \quad f(a) \notin \mathbb{Z}$$

۱- اگر مقدار $f(a)$ (عبارت داخل براکت) صحیح نشود $f(a) \notin \mathbb{Z}$ کار خاصی نمی کنید فقط حد می گیرید و بعد براکت محاسبه می کنید.

۲- اگر $f(a)$ مقداری صحیح باشد، باید حد راست و چپ را جداگانه با خواص حد و براکت محاسبه کرد و سپس نظر داد.

۲۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] =$

۲۳) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[3x - \frac{2}{3} \right] =$





$$۲۴) \lim_{x \rightarrow 0} [x] =$$

$$۲۵) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [2x - 1] =$$

$$۲۶) \lim_{x \rightarrow 0} [x^2] =$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow 1} [x^2] =$$

حد توابع برکت شامل عبارات مثلثاتی:

علاوه بر مقدار عبارت مثلثاتی ربع سنجی کنید یا از روی نمودار مقدار کمتر یا بیشتر آنرا محاسبه کنید

$$۲۸) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[\cos x]}{x} =$$

$$۲۹) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^-} [3x] =$$

$$۳۰) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left[x + \frac{3}{2} \right] =$$

$$۳۱) \lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{x}{2} \right] + [-2x] =$$

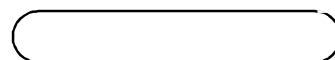
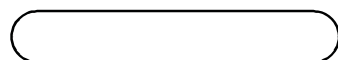
$$۳۲) \lim_{x \rightarrow 2} 2 - [x + 1] + [2x] =$$

$$۳۳) \lim_{x \rightarrow 4} [\sqrt{x}] + [x^2] =$$

$$۳۴) \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{6 - 7x}{3} \right] =$$

$$۳۵) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} [2x - 5] =$$

$$۳۶) \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{8x + 4}{3} \right] =$$





✓ حد توابع چند جمله‌ای: (درجه ۱ و درجه ۲ و):

انگار که نه انگار حدی در کار است، و همان مقدار تابع را جای حد آن قرار دهید حد تابع برابر است با مقدار تابع

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$۳۷) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 2x^2 - 7 =$$

$$۳۸) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 4x + 2x^2 =$$

$$۳۹) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 3x}{4} =$$

$$۴۰) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 3x^2 - 7x\sqrt{x} =$$

✓ حد توابع گویا: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ سه حالت داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} =$$

الف) a ریشه‌ی صورت و مخرج نباشد ← فقط عدد گذاری است.

$$۴۳) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x - 1}{3x + 4} =$$

$$۴۴) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 4x}{5x} =$$

در حالت الف اگر صورت صفر شد اشکالی ندارد

$$۴۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{2 + x} =$$

ب) اگر a ریشه‌ی صورت باشد ولی ریشه‌ی صورت نباشد ← کسر به سمت $\pm\infty$ می‌رود. (در سال دوازدهم یاد می‌گیرید)

$$۴۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$$

ج) اگر a هم ریشه‌ی صورت باشد و هم ریشه‌ی صورت ← \div می‌شود به آن ابهام می‌گوییم. (در درس‌های بعدی همین

امسال)

$$۴۷) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x} - 6x - 1} =$$



$$۴۸) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - ۴}{13 - [-x]} =$$

$$۴۹) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 3}{7x^2 + 4x - 1} =$$

$$۵۰) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\log x - 2 \log x^2}{x^2 + x} =$$

$$۵۱) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^x - 3^x}{5^{-x}} =$$

✓ حد توابع مثلثاتی :

توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در تمام نقاط حقیقی حد دارند و مانند چند جمله ای ها حدشان، مقدارشان است اما توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$ در همه ی نقاط دامنه شان حد دارند و حدشان، مقدارشان است. حواستون باشه که گفتیم $\tan x$ و $\cot x$ در دامنه خودشان، یعنی مثلا $y = \tan x$ در $\frac{\pi}{2}$ حد ندارد. بیشتر توضیح ندم سال دوازدهم، یک درس راجع به $\tan x$ و $\cot x$ دارید.

$$۵۲) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \sin x =$$

$$۵۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 2} =$$

$$۵۴) \lim_{x \rightarrow \alpha} \sin^2 x + \cos^2 x =$$

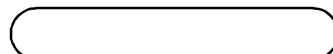
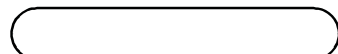
$$۵۵) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x \times \tan x} =$$

$$۵۶) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{[\sin x] + x}{[\cos x] + 2x} =$$

$$۵۷) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x}{2 + \sin \pi x} =$$

$$۵۸) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x + x^2}{2} =$$

$$۵۹) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin x}{(1+x) \cos x} =$$





تمرین ۵۹: اگر $f(x) = \begin{cases} 2\sin x + b & x > \frac{\pi}{4} \\ a & x = \frac{\pi}{4} \\ b \cos x + 1 & x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ حد داشته باشد a, b کدام است؟

✓ حد توابع قدر مطلق: باید با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، حذف و سپس حد گیری را انجام دهیم، معمولاً تابع قدر مطلق تبدیل به توابع چند جمله ای یا چند ضابطه ای می شود؛ در حالت کلی حد $\frac{|x-a|}{x-a}$ و عبارتی به این ریشه صورت و مخرج باشد باید حد چپ و راست جدا بشوند.

۶۱) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2|x-4|}{x-4} =$

۶۲) $\lim_{x \rightarrow 2^+} |x^2 + 4x - 5| =$

۶۳) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + [x]}{x} =$

۶۴) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[x^2 + x + \frac{1}{2} \right]}{\left[x^2 + x + \frac{1}{2} \right]} =$

حد توابع رادیکالی در توابع رادیکالی با فرجه فرد مشکلی پیش نمی آید، یعنی اگر $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 7) = 27$ آنگاه

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{2x + 7} = 3$ ؛ اما در حالتی که فرجه زوج است، این جا باید حواسمان باشد تابع زیر رادیکال در همسایگی

محذوف a منفی نباشد مثلاً: همانطور که ملاحظه کردید در حالت دوم سوم حد نداریم.

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x + 3} =$

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 5} =$

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} =$





تمرین: حد عبارات زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$۶۵) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1 - x^2} =$$

$$۶۶) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x^2} =$$

$$۶۶) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2}$$

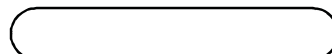
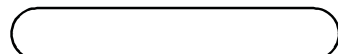
تمرین: توابعی مانند آنچه در سوالات گفته شده رسم کنید. در هر مورد شکل خود را با بقیه دوستان مقایسه کنید آیا جواب همگی شکل هم است؟

<p>(۶۸) تابع در $x = 1$ تعریف نشده باشد ولی در همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.</p>	<p>(۶۷) تابع در همسایگی $x = 2$ تعریف شده باشد اما در این نقطه حد نداشته باشد.</p>
<p>(۷۰) تابع در همسایگی $x = 1$ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در $x = 1$ باشد.</p>	<p>(۶۹) تابع در یک همسایگی $x = 0$ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع باشد.</p>
<p>(۷۲) تابع در همسایگی راست $x = 2$ تعریف شده باشد اما حد نداشته باشد.</p>	<p>(۷۱) تابع در همسایگی محذوف $x = 0$ تعریف شده باشد اما حد راست و حد چپ متفاوتی داشته باشد.</p>

تمرین ۷۳: اگر $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] =$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] =$$





تمرین ۷۴: راجع به حد توابع زیر در نقاط روبرو چه می توان گفت؟

$$f(x) = \frac{x-2}{[x-2]} \quad x=2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 - |x|} \quad x = 0.9999$$

$$f(x) = \sqrt{x^2(x-1)} \quad x=0$$

$$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2} \quad x = 0.9999$$

صبر شاید مهمترین کلید موفقیت

برشی از من، دکتر شهاب اناری:

۱. در مقطع دبیرستان وارد مدرسه تیزهوشان (علامه حلی تهران) شدم.

اغلب هم کلاسی ها از مقطع راهنمایی در مدرسه تیزهوشان بودند، اما من جزو آنهایی بودم که تازه وارد به حساب می آمدم.

تیزهوشانی ها ما جدیدالورودها را 'پایینتر' و کند ذهنتر از خود حساب می کردند.

سال اول در مدرسه رتبه بیست و سوم شدم.

سال دوم نهم، سال سوم رتبه ششم، و سال آخر رتبه اول کنکور سراسری ایران بین یک میلیون و

دویست هزار نفر

و البته یادم نرفته که چند سال قبلترش، آن 'جدیدالورود کند ذهن' به حساب می آمدم.



قضایای حد

☑ قضایای حد: در درس قبل بدون اینکه قضایا را بلد باشیم از آنها استفاده کردیم.

الف) حد ثابت: حد تابع $f(x) = c$ در نقطه دلخواه a برابر c است. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

ب) حد تابع همانی: حد تابع $f(x) = x$ در نقطه دلخواه a برابر a است. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ج) حد مجموع دو تابع:

$$L + M = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$$

د) حد تفاضل دو تابع:

$$L - M = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$$

ه) حد حاصل ضرب دو تابع:

$$L \times M = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x) \times f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$$

و) حد خارج قسمت دو تابع: حد تقسیم

$$\frac{L}{M} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

شرط تقسیم: طبق معمول تقسیم ها مخرج نباید صفر بشه ...

ز) حد ضرب عدد ثابت در تابع: $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cM$

ح) با شرط $M \neq 0$ داریم که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{M}$

ط) اگر f در نقطه a حد داشته باشد و $y = \sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad \text{ث}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)| \quad \text{ج}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3f(x)+g(x))}{\sqrt{g(x)}} \text{ حاصل } f(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}, g(x) = 1 \text{ اگر } 1$$



(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ ، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x) \cdot g(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\sqrt{g(x)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{3g(x) - 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2f + g)^r(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) + \sqrt{f(x)}}{f^r(x) - 6} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + 1) + g\left(\frac{2x - 4}{x - 4}\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\Delta f + 2g)(x) =$$

$$(۳) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \text{ آنگاه } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(2x-1) + f(\Delta-x)}{f(x^r-1)} = ?$$

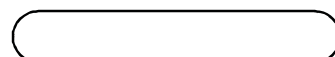
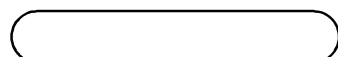
$$(۴) \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+4}{f(x)} = \frac{7}{6} \text{ باشد، } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{2x+3} \text{ چند است؟}$$

$$(۵) \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - g(x)) = 15 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = 6 \text{ باشد؛ مقدار } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ چند است؟}$$

(۶) اگر توابع f, g در نقطه a حد داشته باشند با اطلاعات زیر حد تابع را در نقطه a برای f, g بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^r(x) - 2g(x)) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + 2g(x)) = 8$$





؟ $\lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} f(g(x))$ حاصل حد $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، $f(x) = x+2$ (۷)

نکته: سطح بالا برای علاقه مندان خفن:

جدول زیر بسیار مهم است.* $\sqrt{\quad}$ حد دارد \times حد ندارد ؟ نمی توان نظرداد

f	g	f + g	f - g	f × g	g/f	f/g
$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$?	?
$\sqrt{\quad}$	\times					
\times	$\sqrt{\quad}$					
\times	\times					

تمرین ۸: دو تابع مثال بزنید که هیچکدام در نقطه ای دلخواه حد نداشته باشند اما:

(برای هر قسمت دو تابع مثال بزنید)

الف) مجموع آن ها در نقطه حد داشته باشد:

ب) تفاضل آن ها در نقطه حد داشته باشد:

ج) تقسیم آن ها در نقطه حد داشته باشد.

از بیل گیتس ثروتمند ترین انسان روی زمین پرسیدند: از تو ثروتمند تر هم هست؟
گفت: بله فقط یک نفر از من ثروتمند تر است
چه کسی؟ -

سالها پیش زمانی که از اداره اخراج شدم -
و به تازگی اندیشه های خود و در حقیقت به طراحی میکروسافت می اندیشیدم
روزی در فرودگاهی در نیویورک بودم که قبل از پرواز چشمم به نشریه ها و
روزنامه ها افتاد
از تیترا یک روزنامه خیلی خوشم اومد
دست کردم توی جیبم که روزنامه رو بخرم دیدم که پول خرد ندارم
خواستم منصرف بشم که دیدم یک پسر بچه سیاه پوست روزنامه فروش وقتی این
نگاه پر توجه مرا دید
گفت: این روزنامه مال خودت بخشیدمش بردار برای خودت



ابهام و رفع ابهام صفر صفر

✓ صفر مطلق: همان عدد صفر محور عدد حقیقی، حاصل $\left[\begin{matrix} + \\ \cdot \\ - \end{matrix} \right]$

✓ صفر حدی: عدد بسیار کوچک نزدیک به صفر $(0, +)$ ، یا عدد بسیار بزرگ منفی $(-, -)$ ، $X \rightarrow \cdot$

✓ مفاهیم تعریف نشده ریاضی، اگر در حد گیری به عبارات زیر برخورد کردید تعریف نشده اند.

- الف) $\frac{\cdot}{\cdot}$ مطلق
 ب) $\frac{\cdot}{\cdot}$ حدی
 ج) $\frac{\cdot}{\cdot}$ عدد مطلق
 د) $\frac{\infty}{\cdot}$ مطلق
 ه) (\cdot) مطلق

✓ مفاهیم ابهام در ریاضی، علت اینکه به حالت های زیر ابهام می گوئیم این است که بسته به شرایط می توانند هر

مقداری را بگیرند بنابراین ممکن است ∞ یا ∞ شوند.

- الف) $\frac{\cdot}{\cdot}$ حدی
 ب) $\frac{\infty}{\infty}$
 ج) $\infty - \infty$
 د) $\cdot \times \infty$

- ه) (\cdot) حدی
 و) (1) حدی
 ز) ∞ حدی

← توجه: حالت های زیر جز مفاهیم تعریف شده اند که برخی اوقات به دلیل تشابه ظاهری اشتباه گرفته می شوند.

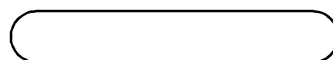
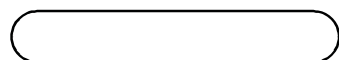
- الف) $\frac{\cdot}{\cdot} = \cdot$ مطلق
 ب) $\frac{\cdot}{\infty} = \cdot$ عدد
 ج) $\cdot \times \infty = \cdot$ مطلق

- د) (\cdot) حدی
 و) (\cdot) حدی
 ز) $\frac{\cdot}{\cdot} = \cdot$ عدد \neq

- ه) $\frac{\cdot}{\infty} = \cdot$ حدی

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} =$

۲) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 9} =$





۳) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - [x]} =$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]} =$

✓ رفع ابهام حالت محترم عزیز: ام (مهمترین قسمت درس)

- اگر در روند محاسبه حد به کسر ابهام دار ÷ رسیدی . باید ابهام آنرا برطرف کنی برای این کار چهار روش داریم که دو تای آنها روش های کتاب درسی است و دو روش هم صرفاً تستی است و شما را در چند ثانیه به جواب میرساند ، که توی کتاب نیست.

۱- حالت اول : حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج : اگر در روند محاسبه حد به $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = :$ رسیدید که

f و g هر دو عبارت چند جمله ای باشند . برای محاسبه حد باید آنها را جداگانه بر $(x - a)$ تقسیم کرد. و یا بتوان با تجزیه کردن عامل صفر کننده $(x - a)$ در صورت و مخرج را ساده کرد و بعد حد گیری کرد.

۲- حالت دوم : گویا کردن و سپس حذف عامل ابهام : اگر در صورت و مخرج یا حداقل یکی از آنها عبارت رادیکالی جود

اشته باشد باید به نحوی کسر را گویا کرد تا بتوان بر عامل صفر شونده تقسیم کرد. باید اتحاد های مورد نیاز گویا کردن را بلد باشی

$$\left\{ \begin{array}{l} (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\ (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{array} \right.$$

اتحاد های مورد نیاز گویا کردن

۳- روش سوم : هوپیتال :

۴- روش چهارم : هم ارزی :





تمرین: حاصل حد های مبهم زیر را به دست آورید؟

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 8} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x^2 + 2x} =$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x - 12} =$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} =$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} =$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 6}{9x^2 + 3x - 12} =$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^5 + 1} =$$

توجه مهم: محاسبه حد توابع شامل |___| قدر مطلق [___] براکت که دارای ابهام ÷ هستند.

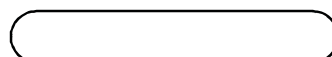
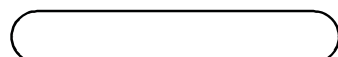
باید از شر قدر مطلق و براکت خلاص شوید .

← برای این کار کافیه هر جا قدر مطلق دیدی با تعیین علامت ، علامتشو پیدا کنی و قدر مطلق را حذف کنی اگه مثبت بود

خودش اگه منفی بود قرینش

← در مورد براکت هم اول ببین X داره به چه سمتی میره ، بعد براکتشو تو لون نقطه حساب کن . حواست به بیشتر یا کمتر

عدد باشه خیلی مهمه...





$$۱۳) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2[x]}{x^2 + 2x - 8}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2[x] - 16}{x[x] - 4}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - |x|}{[x + 1] - x}$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1 - x^x|}{x - [x]}$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^x[x] - 8}{x[x] - 4}$$

حد ۰/۰ رادیکالی :

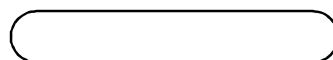
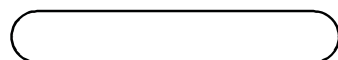
برای محاسبه ی حدهای مبهم به صورت $\frac{0}{0}$ که در آنها حداقل یکی از توابع صورت یا مخرج رادیکالی باشند باید به نحوی کسر را گویا کرد تا بتوان بر عامل صفر شونده تقسیم کرد. باید اتحاد های مورد نیاز گویا کردن را بلد باشی

$$\begin{cases} (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\ (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{cases}$$

اتحاد های مورد نیاز گویا کردن

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} =$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - 4}{9 - x^2} =$$





$$۲۳) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$۲۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^r - 4}{3 - \sqrt{x+7}} =$$

$$۲۵) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x - \sqrt{2-x}} =$$

$$۲۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} =$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$۲۸) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt{x}-2} =$$

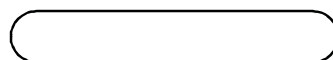
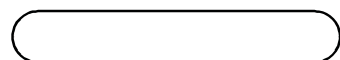
$$۲۹) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^r - 1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} =$$

$$۳۰) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2+x-2}}}{x-7} =$$

$$۳۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} =$$

$$۳۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{7 + \sqrt{4+3x}}}{x - [x^r]} =$$

$$۳۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r + x}{\sqrt{x^r}} =$$





حدگیری از بهای مثلثاتی :

در حالت کلی باید با توجه به روابط مثلثاتی دهیم و یازدهم حد را طوری ساده کرد که عامل صفر شونده از صورت و مخرج ساده بشه که دیگه حد ÷ نشه.

یاد آوری روابط :

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$	$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$	
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$		$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

تمرین : حاصل حد های زیر را محاسبه کنید.

۳۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} =$

۳۵) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x} =$

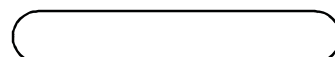
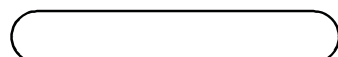
۳۶) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sin x \cos x} =$

۳۷) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x} =$

۳۸) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\tan x - \cot x)^2}{1 + 2 \sin x \cos x} =$

۳۹) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} =$

۴۰) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\tan x - 1} =$





☑ توجه: ریاضی : با استفاده از قضیه ای به نام فشردگی که در آینده شرح آن را خواهید دید اثبات می شود که

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \right) \text{ این خاصیت برای } \tan x \text{ هم است.}$$

در حالت کلی می توان به خاطر سپرد که اگر به x سمت صفر میل کند :
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ یا $\begin{cases} \sin ax \sim ax \\ \tan ax \sim ax \end{cases}$

۴۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} =$

۴۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 2x}{x} =$

۴۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} =$

۴۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin x \tan x} =$

۴۵) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} =$

۴۶) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} =$

گفتم : آخه من پول خرد ندارم

گفت : برای خودت بخشیدمش

سه ماه بعد بر حسب تصادف توی همان فرودگاه و همان سالن پرواز داشتم

دوباره چشمم به یک مجله خورد دست کردم تو جیبم باز دیدم پول خورد ندارم

. باز همان بچه بهم گفت : این مجله رو بردار برای خودت

گفتم : پسر چون چند وقت پیش من اومدم به روزنامه بهم بخشیدی

تو هر کسی میاد اینجا دچار این مسئله می شه بهش می بخشی؟

پسره گفت : آره من دلم می خواد ببخشم از سود خودم می بخشم

به قدری این جمله پسر و این نگاه پسر تو ذهن من موند که با خودم فکر کردم

خدایا این بر مبنای چه احساسی این را می گوید

بعد از ۱۹ سال زمانی که به اوج قدرت رسیدم تصمیم گرفتم این فرد رو پیدا کنم تا جبران

گذشته رو بکنم

گروهی را تشکیل دادم و گفتم بروند و ببینند در فلان فرودگاه کی روزنامه می فروخته

سرا



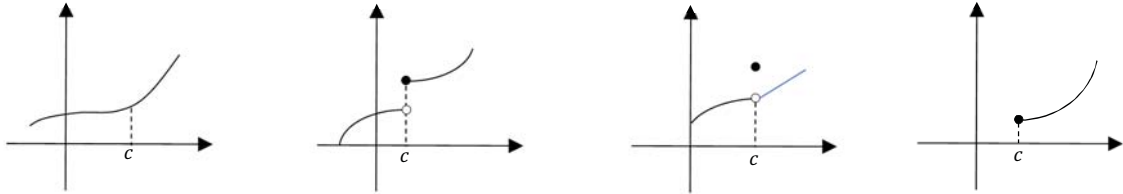
پیوستگی

☑ تعریف پیوستگی: تابع $f(x)$ را در نقطه C پیوسته گوئیم هرگاه حد تابع در نقطه $x = C$ و مقدار تابع در نقطه $x = C$ موجود و با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

← به خلاصه: وقتی تابع ای پیوسته است که بدون برداشتن دسک از روی کاغذ بتوان آنرا رسم کرد. بنابراین توابعی که در نقطه $x = C$ پرش دارند و یا توابع حفره دار در آن نقطه پیوسته نمی باشند.

تمرین ۱: پیوستگی نمودارهای زیر را بررسی کنید.



پیوستگی چپ } پیوستگی های یک طرفه
پیوستگی راست }
فقط حد چپ با مقدار تابع برابر باشد میگوئیم پیوستگی چپ و اگر حد راست با مقدار تابع برابر باشد میگوئیم پیوستگی راست.

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ پیوستگی چپ

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ پیوستگی راست

تمرین ۲: آیا $f(x) = \sqrt{x-3}$ در نقطه $x = 3$ پیوستگی راست (از راست پیوسته است) دارد؟





☑ پیوستگی روی بازه:

بازه (a, b) : تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است اگر روی تمام نقاط بازه (a, b) پیوسته باشد

بازه $[a, b)$: تابع f روی بازه $[a, b)$ پیوسته است اگر روی تمام نقاط بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.

بازه $(a, b]$: تابع f روی بازه $(a, b]$ پیوسته است اگر روی تمام نقاط بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد..

بازه $[a, b]$: تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است اگر روی تمام نقاط بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته: اگر تابعی روی $(-\infty + \infty)$ پیوسته باشد روی هر زیر بازه دلخواهی پیوسته است.

انواع ناپیوستگی:

الف) حفرة: تابع حد دارد اما حد آن با مقدار آن برابر نیست. یعنی فقط با جابجا کردن یک نقطه تابع پیوسته می شود

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

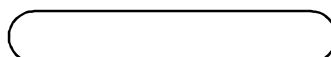
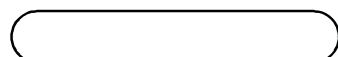
ب) پرش: اینکه تابع حد نداشته باشد یعنی حد چپ و راست متفاوت باشند

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

تمرین: پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی خواسته شده بررسی کنید.

$$10) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases} \quad \text{در } x = 2$$

$$11) f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x > 2 \\ 7 & x = 2 \\ \frac{2x - 1}{x^2 - 3} & x < 2 \end{cases} \quad \text{در } x = 2$$





$$۱۲) f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \quad \text{در } x = 1$$

$$۱۳) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & |x| > 1 \\ 2x & |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{در } x = 1 \text{ و } x = -1$$

$$۱۴) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & x \neq 2 \\ -2 & x = 2 \end{cases} \quad \text{در } x = 2$$

تمرین : مقدار مجهول را در هر تابع چند ضابطه ای طوری بیابید که تابع پیوسته باشد.

$$۱۵) f(x) = \begin{cases} a[x] - b & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2ax^2 + bx & x < 1 \end{cases} \quad \text{در } x = 1$$

$$۱۶) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & x > 1 \\ 2a + 1 & x = 1 \\ bx + 2 & x < 1 \end{cases} \quad \text{در } x = 1$$

$$۱۷) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} & x > 0 \\ b & x = 0 \\ 2[x] - 3a & x < 0 \end{cases} \quad \text{در } x = 0$$



$$18) f(x) = \begin{cases} a[x] + |x| & x < \frac{-1}{2} \\ 3x + 1 & x = \frac{-1}{2} \\ [-4x] + b[x] & x > \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \text{در } x = \frac{-1}{2}$$

$$19) \text{کنکور ۸۷} f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} & x < -1 \\ ax + 1 & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{در } x = -1$$

$$20) \text{کنکور ۸۵ و ۹۰} f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax + b & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{در } x = 1 \text{ و } -1$$

$$21) \text{کنکور ۹۲} f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x}}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad \text{در } x = 1$$

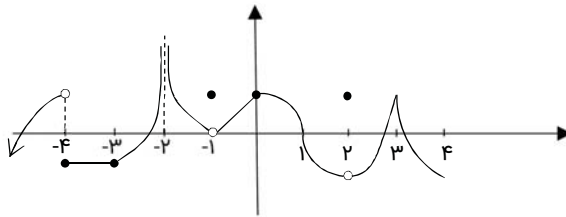
$$22) * f(x) = \begin{cases} \frac{9}{x} & x > a \\ x & x \leq a \end{cases} \quad \text{در } x = a$$



$$۲۳) f(x) = \begin{cases} b[x] + ۳ax & x > ۱ \\ ۷ & x = ۱ \\ \frac{۳a\sqrt{x^2 - ۲x + 1}}{x^3 - ۱} & x < ۱ \end{cases} \quad \text{در } x = ۱$$

$$۲۴) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تمرین ۳۳: نمودار زیر را از لحاظ پیوستگی بررسی کنید.



یک ماه و نیم تحقیق کردند متوجه شدند یک فرد سیاه پوست مسلمان بوده که الان در بان یک سالن تئاتره

خلاصه دعوتش کردند اداره از او پرسیدم: منو می شناسی؟

گفت: بله! جناب عالی آقای بیل گیتس معروفید که کل دنیا شما رو می شناسن

گفتم: سال ها قبل زمانی که تو پسر بچه بودی و روزنامه می فروختی

دو بار چون پول خرد نداشتم به من روزنامه مجانی دادی چرا این کار را کردی؟

گفت: طبیعی است چون این حس و حال خودم بود

گفتم: حالا می دونی چه کارت دارم؟

می خواهم اون محبتی که به من کردی راجبران کنم

جوان پرسید: چه طوری؟

هر چیزی که بخواهی بهت می دهم -

(خود بیل گیتس می گوید این جوان وقتی صحبت می کرد مرتب می خندید)

جوان سیاه پوست گفت: هر چی بخوام بهم می دی؟



رشته ریاضی ها این چند نکته سطح بالا را هم یاد بگیرید.

نکته * * (رشته ریاضی): توابع $f(x) = [u]$ در نقاطی که u مقدار صحیح داشته باشد ناپیوسته هستند مگر در نقاطی که u کمترین مقدار خود را بگیرد ← سال بعد می آموزید که چگونه کمترین مقدار تابع را محاسبه کنید.

نکته * * (رشته ریاضی): در توابعی که شامل دو یا چند عامل براکت می باشند برای آنکه تعداد ناپیوستگی را در بازه $[a, b]$ پیدا کنم ابتدا اعدادی که عبارت داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل می کند پیدا می کنیم. تابع حتما در نقاطی

که فقط یکی از جز صحیح ها برابر مقدار صحیحی کند ناپیوسته است. مثلا: $f(x) = [2x] - [5x]$ در $x = \frac{1}{p}$ قطعا ناپیوسته است.

اما اگر دو یا چند براکت عدد صحیح شدند باید با حد چپ و راست بررسی کنیم.

خلاصه: «تابع در نقاط غیر مشترک ناپیوسته و برای نقاطی که مشترک است باید جداگانه بررسی کرد»

یک حالت خاص مهم * : در تابع $f(x) = [ax] - [bx]$ اگر a و b هم علامت باشند x عددی باشد که هر دو عامل ax و bx در آن عدد صحیح شوند، تابع در x پیوسته است.

* تمرین ۳۴: تابع $f(x) = [x^2] + [x]$ در کدام نقاط پیوسته است؟

۱ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

* تمرین ۳۵: $y = \left[\frac{3x}{2}\right] - \left[\frac{4x}{3}\right]$ در بازه $[5, 7]$ چند نقطه ناپیوسته دارد؟

خاصیت تابع های مرکب ← مخصوص عزیزان محترم و فرهیخته ی رشته ی ریاضی

اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ باشد تابع f در نقطه ی b پیوسته باشد آنگاه $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(b)$

تمرین (رشته ریاضی):

۳۶) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}$

۳۷) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \left(\frac{x-1}{x^2+x} \right)$

۲۸



تمرین (رشته ریاضی) ۳۸: اگر $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f \circ f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f \circ f(x) =$$

تمرین (رشته ریاضی) ۳۹: دو تابع مانند f, g مثال بنویسید که هر دو در $x = 1$ پیوسته باشند ولی $f \circ g$ در $x = 1$ ناپیوسته باشد.

نکته: در $y = [u]$ اگر u مقدار صحیح داشته باشد برای بررسی نوع پیوستگی حد چپ و راست آنرا جداگانه حساب کنید.

در سال بعد هم یاد میگیرید که آنگاه تابع u صعودی باشد، y پیوستگی راست و اگر u تابعی نزولی باشد، پیوستگی چپ دارد.

تمرین ۴۰: $y = [x^3]$ در $x = 2$ چه وضعی دارد؟

تمرین ۴۱: $y = [-3x + 4]$ در $x = 7$ چه وضعی دارد؟

f	g	f + g	f - g	f × g	f/g
√	√	√	√	√	√ یا ؟
√	×	×	×	؟	× یا ؟
×	√	×	×	؟	× یا ؟
×	×	؟	؟	؟	؟

اثر اعمال جبری روی تابع در پیوستگی:

به جدول زیر دقت کنید، علامت √ یعنی حتما پیوسته و

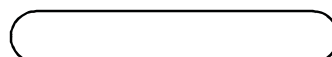
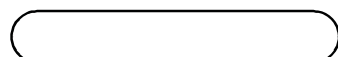
علامت × یعنی ناپیوسته و علامت ؟ یعنی باید بررسی کرد.

در مورد پیوستگی راست و چپ هم همین جدول صدق می کند.

پیوستگی صفر در براکت: فرض کنید تابع براکت به صورت $y = [f(x)]$ در $x = a$ ناپیوسته باشد. تابع $y = g(x)$ در $x = a$ برابر صفر شود.

(خلاصه $\leftarrow [f] \times \leftarrow$ پیوسته)

آنگاه $y = g(x) \times [f(x)]$ در $x = a$ پیوسته است.





تمرین ۴۲: اگر $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$ در نقاط $x = 2$ و $x = -1$ پیوسته باشد، a, b را بیابید.

تمرین ۴۳: تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$ در کدام دسته از نقاط زیر پیوسته است؟ (کنکور ۹۳)

الف) اعداد زوج ب) اعداد فرد ج) همه اعداد د) اعداد اول

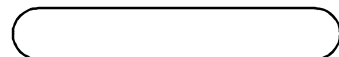
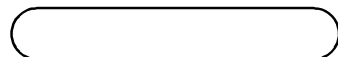
بریم سطح بالا! ✨ تمرین ۴۴: اگر $f(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)[-x]$ در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ و $x = 3$ پیوسته باشد حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ چند است؟

*تمرین ۴۵: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & x < 2 \\ a + 2 \sin \frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$ در بازه ی $[0, 3]$ پیوسته است؟

(کنکور ۸۱)

تمرین ۲۷: اگر تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه ی اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟ (کنکور ۹۱)

تمرین ۳۰: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟ (کنکور ۹۶)





تمرین ۳۱: تابع هایی مثال بزیند که :

الف) روی \mathbb{R} پیوسته باشد.

ب) روی $(3 + \infty)$ پیوسته باشد.

ج) روی $(-\infty و 2)$ پیوسته باشد.

تمرین ۳۲: تابعی مثال بزیند که حد آن در $x = 2$ برابر ۱ باشد، ولی در نقطه $x = 2$ پیوسته نباشد.

تمرین ۳۴: $f(x) = \frac{x-2}{3x-6}$ در چه بازه هایی پیوسته است؟ تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه ای پیوسته بنویسید. که پیوسته باشد.

تمرین ۳۵: $f(\cdot)$ را طوری تعریف کنید که $\frac{\sqrt{x+8}-2}{x}$ در نقطه y صفر پیوسته شده باشد، سپس ضابطه y تابع جدید را بنویسید.

تمرین ۳۶: $f(\cdot)$ را طوری تعیین کنید که $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ در نقطه y صفر پیوسته باشد، سپس تابع جدید را بنویسید.

واقعاً هر چی بخوام -! هر چی که بخواهی

بیل گیتس گفت: آره هر چی بخواهی بهت می دم من به ۵۰ کشور آفریقایی وام داده ام

به اندازه تمام آن ها به تو می بخشم

!جوان گفت : آقای بیل گیتس نمی تونی جبران کنی

گفتم : یعنی چی؟ نمی توانم یا نمی خواهم؟

گفت : می خواهی اما نمی تونی جبران کنی

پرسیدم: چرا نمی توانم جبران کنم؟

جوان سیاه پوست گفت : فرق من با تو در اینه که من در اوج نداشتمم به تو بخشیدم

ولی تو در اوج داشتنت می خواهی به من ببخشی و این چیزی رو جبران نمی کنه

!اصلاً جبران نمی کنه با این کار نمی تونی آروم بشی تازه لطف شما از سر ما زیاد هم هست

بیل گیتس می گوید : همواره احساس می کنم ثروتمندتر از من کسی نیست جز این جوان

!۳۲ ساله مسلمان سیاه پوست.

RIAZISARA



جمع بندی کلی :

← نکته: به طور کلی توابع چند جمله ای، گنگ، کسری و چند ضابطه ای و مثلثاتی در دامنه خودشان پیوسته اند، اما در مورد توابع چند ضابطه ای باید به نقاط مرزی توجه کرد.

← نکته: پیوستگی توابع دیریکله $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q \\ g(x) & x \notin Q \end{cases}$ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته باشند $h(x)$ در نقاطی پیوسته است که $g(x) = f(x)$

← نکته: توابع چند جمله ای در \mathbb{R} پیوسته اند.

← نکته: توابع گویا در تمام دامنه خود پیوسته اند، اما در ریشه ی مخرج ناپیوستگی دارند.

← نکته: توابع رادیکالی با فرجه فرد در \mathbb{R} پیوسته اند.

← نکته: توابع رادیکالی با فرجه زوج در دامنه اشان پیوستگی دارند، در ابتدا و یا انتهای دامنه خود پیوستگی یک طرفه دارند.

مثلا: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ در $[-2, 2]$ پیوسته است. در 2 پیوستگی راست و در -2 پیوستگی چپ.

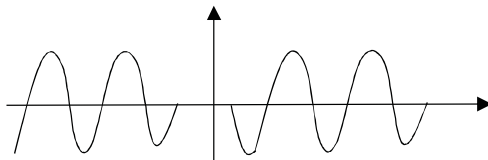
تمرین ۳: تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \in Q \\ 2-x & x \notin Q \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟

دانستنی ها برای ریاضی دوستان بافن

۱- معرفی تابع $\text{sgn}(x)$ (بخوانید تابع علامت) که به صورت $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ تعریف شده است. همانطور که سعی کن

نمودارشو بکشی همانطور که میبینی، این تابع در $x = 0$ حد ندارد و پیوسته هم نمی باشد.

۲- تابع $\sin \frac{1}{x}$ را ببین! به نظرت نزدیک صفر چه شکلی میشه؟



$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

