



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



جزوه آموزشی حد و پیوستگی

دهم، یازدهم و دوازدهم

email : adel۳۱۱۵@gmail.com

channel : telegram.me/math_akh

phone : ۰۹۱۹۰۶۹۰۰۶۳ - ۰۹۳۵۶۷۸۳۳۷۲

id : @al_5867

مؤلف: عادل آخکندی

به نام خالق زیبایی‌ها

منحنی قائم‌تالیع ابروی توست خط‌مجانِب بر آن، طره‌ی کیسوی توست، حد رسیدن به تو، مبهم و بی‌انتهاست، بازه تعریف دل، در حرم کوی توست، بی‌تو وجودم بود یک سری و اگر، ناچیه، مکرش دایره روی توست، مهر تو چون می‌دهد سمت به بردار دل، هر طرفی رو کنی، هم‌بخت و سوی توست، پر تو خورشید شد مشق از آن چشم تو، گرمی و جان بخشی اش جزئی از آن خوی توست، چون به عدد، یک تویی، من همه صفرها، آن چه که معنا دهد قامت دجوی توست، گر شود آن دم که مازوج مرتب شویم، سر به رهت می‌نهم، چون که سرم کوی توست، بجز و فراق شکست قائم قائمی، نقطه پرگار عشق و اله و پی جوی توست

میچگاه دلی رامسکن چون ممکن است خانه خدا باشد. میچگاه انسانی را تحقیر نکن چون ممکن است حمیب خدا باشد، میچگاه کناهانمت را کوچک شمار

چون ممکن است آن نقطه، نقطه مرکب تو باشد.

این نوشته می‌تواند برای هردانش آموزی مورد استفاده قرار گیرد و خواننده می‌تواند از مباحث شتوع آن بهره‌ی کافی را ببرد توصیه می‌کنم که تمام بخش‌ها را کامل مطالعه نمایید

در خاتمه تاکید می‌کنم از آنجا که هیچ کلامی جز کلام خداوند خالی از اشتباه نیست، از خوانندگان عزیز تقاضا می‌کنیم ما را از نظرات، انتقادات و پیشنهادات خویش بهره‌مند ساخته تا در تالیفات بعدی از آنها استفاده شود.



عنوان

جزوه آموزشی حد و پیوستگی

نگارش

عادل آخکندی

دبیر ریاضی : عادل آخکندی

www.riazisara.ir



دانلود از سایت ریاضی سرا

صفحه	فهرست
حد	۱
۱	۱.۱ حد راست
۲	۲.۱ حد چپ
۳	۱.۲.۱ محاسبه ی حد از روی نمودار
۵	۳.۱ قضایای حد
۸	۱.۳.۱ روش های تشخیص اینکه تابع در چه نقاطی حد ندارد
۹	۴.۱ بررسی حد در توابع شامل قدر مطلق
۱۰	۵.۱ بررسی حد در توابع چند ضابطه ای و جز صحیح
۱۸	۱.۵.۱ بررسی هایی از بخش پذیری ها
۲۰	۲.۵.۱ رفع ابهام 00
۲۱	۱.۶ قاعده ی هوپیتال
۲۱	۱.۶.۱ فرمول های مشتق
۲۲	۲.۶.۱ مشتق جمع و تفریق دو یا چند تابع
۲۲	۳.۶.۱ مشتق توابع ضربی
۲۳	۱.۶.۴ مشتق توابع کسری
۲۳	۵.۶.۱ مشتق توابع توان دار
۲۴	۱.۶.۶ مشتق توابع رادیکالی
۲۵	۷.۶.۱ مشتق توابع هموگرافیک
۲۶	۸.۶.۱ مشتق توابع ساده ی مثلثاتی
۲۶	۹.۶.۱ مشتق تابع مرکب (ترکیب توابع)
۳۰	۱۰.۶.۱ روش هم ارزی
۴۴	۷.۱ حد بی نهایت
۵۲	۸.۱ حد توابع وقتی $x \rightarrow \infty$ (حد در بی نهایت)
۶۲	۱.۹ تست های جمع بندی حد
۷۰	۱۰.۱ پیوستگی
۷۳	۱۱.۱ پیوستگی یک طرفه
۷۴	۱.۱۱.۱ پیوستگی تابع در یک فاصله
۷۶	۱۲.۱ تست های جمع بندی پیوستگی



معذرت

معذرت میخواهم فضاغورس ... چرا که مادر من سخت ترین معادلات است!

معذرت میخواهم نیوتن ... چرا که مادر من راز جاذبه است!

معذرت میخواهم ارسون ... چرا که مادر من اولین چراغ زندگی من است!

معذرت میخواهم افلاطون ... چرا که این مادر من است که شهر فاضله قلب من است!

معذرت میخواهم رومیو ... چرا که همه راه ها به عشق مادر من ختم میشود!

معذرت میخواهم ژولیت ... چرا که مادر من عشق من است!

وقتی که مقادیر متوالی به یک متغیر نسبت داده می شود، و آن متغیر بی نهایت به عدد ثابتی نزدیک شود، به طوری که اختلاف آنها از مقدار ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حد همه مقادیر متغیر می گویند. به عبارت دیگر: فرض کنید در تابع f مقدار متغیر به یک عدد ثابت به نام a میل کند (یعنی به آن نزدیک شود ولی به آن نرسد) آن گاه اگر مقدار تابع آن، به عددی ثابت به نام L میل کند، L حد تابع f در نقطه a خواهد بود گرچه a می تواند در دامنه تابع وجود نداشته باشد.

کاربرد مفهوم حد در ریاضی در توصیف مقداری است که یک تابع یا دنباله به آن نزدیک می شود، هنگامی که ورودی آن تابع یا شمارنده ی آن دنباله به یک مقدار مشخص نزدیک می شود. حد یک مفهوم اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و در حالت کلی در آنالیز ریاضی است و در تعریف پیوستگی، مشتق و انتگرال کاربرد دارد. موضوع حد، به منظور بیان رفتار یک تابع می پردازد و می تواند رفتار آن را در نقاط روی صفحه و یا در بی نهایت هم ارزیابی کند.

مفهوم حد یک دنباله به حالت کلی تر حد شبکه ی مکان شناسی گسترش می یابد و ارتباط نزدیکی با حد و حد مستقیم در نظریه ی رده ها دارد. ریاضی دانان پیش از آنکه مفهوم دقیق تر حد را ارائه کنند، در مورد آن مجادله های بسیار کرده اند. یونانی ها در عصر باستان درکی از مفهوم حد داشته اند. برای نمونه ارشمیدس مقدار تقریبی را با استفاده از پیرامون چند ضلعی های منتظم محاط در دایره به شعاع یک، وقتی که تعداد اضلاع بدون کران افزایش می یابد به دست می آورد. در قرون وسطی نیز تا دوره ی رنسانس مفهوم حد برای بدست آوردن مساحت شکل های گوناگون بکار گرفته می شد.

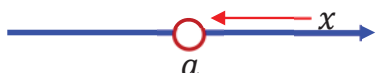
در نوشتار ریاضی حد را گاهی به صورت \lim نمایش می دهند مانند $\lim(a_n) = a$. گاهی با یک پیکان رو به راست (\rightarrow) نمایش می دهند مانند: $a_n \rightarrow a$ و گاهی هم به فارسی حد می نویسند.



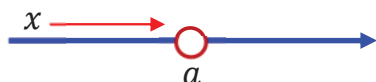


۱ حد

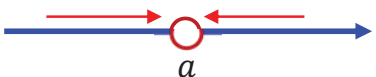
تعریف: وقتی می‌گوییم x از سمت راست به عدد a میل می‌کند (می‌نویسیم $x \rightarrow a^+$) یعنی x با مقادیر بیشتر از a به عدد a نزدیک می‌شود.



تعریف: وقتی می‌گوییم x از سمت چپ به عدد a میل می‌کند (می‌نویسیم $x \rightarrow a^-$) یعنی x با مقادیر کمتر از a به عدد a نزدیک می‌شود.



تعریف: وقتی می‌گوییم x به سمت عدد a میل می‌کند (می‌نویسیم $x \rightarrow a$) یعنی x از هر دو طرف به عدد a بسیار نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه به عدد a نمی‌رسد.



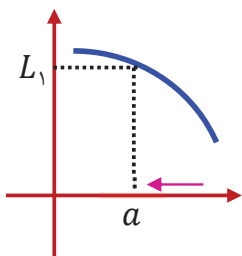
میل کردن متغیر به سمت $+\infty$: هرگاه متغیر x از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی، بزرگتر باشد، می‌گوییم x به سمت $+\infty$ میل کرده است و می‌نویسیم $x \rightarrow +\infty$.

میل کردن متغیر به سمت $-\infty$: هرگاه متغیر x از هر عدد منفی بسیار کوچکی، کوچکتر باشد، می‌گوییم x به سمت $-\infty$ میل کرده است و می‌نویسیم $x \rightarrow -\infty$.

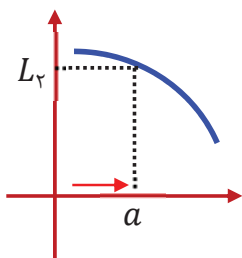
۱.۱ حد راست

هرگاه روی محور x ها با مقادیر بیشتر از a (از سمت راست) به a نزدیک شویم و مقادیر $f(x)$ روی محور y به عدد L_1 نزدیک شود می‌گوییم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه a برابر با L_1 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$



۲.۱ حد چپ

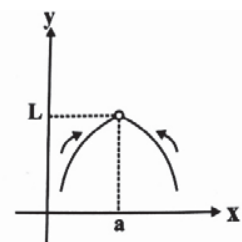


هرگاه روی محور x ها با مقادیر کمتر از a (از سمت چپ) به a نزدیک شویم و مقادیر $f(x)$ روی محور y به عدد L نزدیک شود می‌گوییم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه a برابر با L است

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{و می‌نویسیم:}$$

ضراحت کنید: اگر حد راست تابع با حد چپ تابع در نقطه a برابر باشند، می‌گوییم تابع در نقطه a دارای حد است و می‌نویسیم:

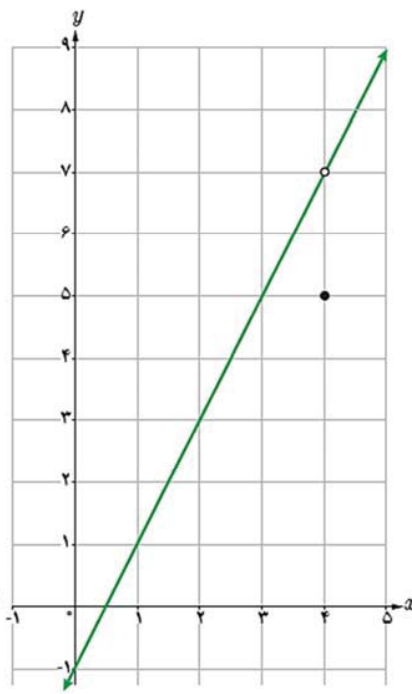
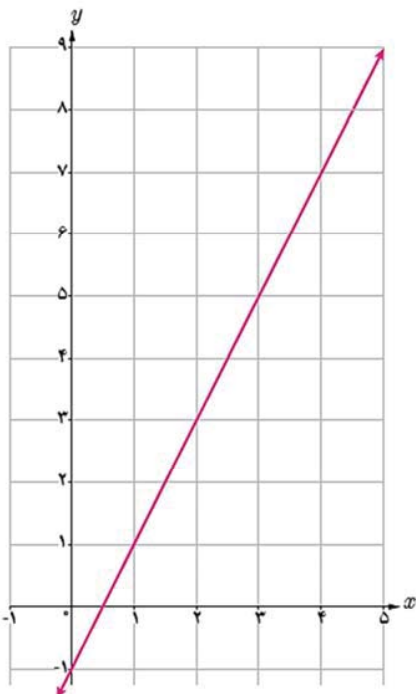
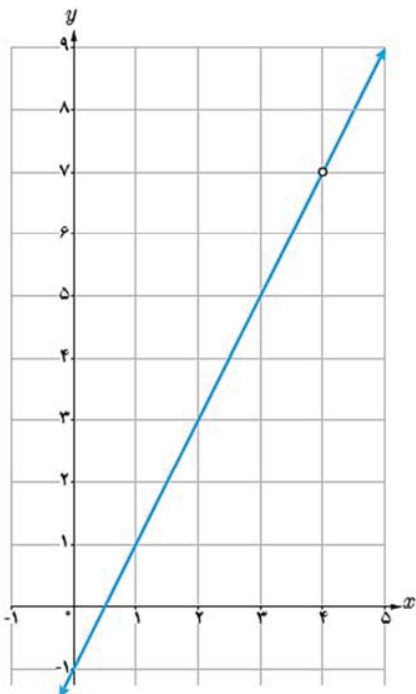
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

توجه: فرض شده است تابع f در بازه I باز شامل عدد a تعریف شده باشد مگر احتمالاً در خود a .

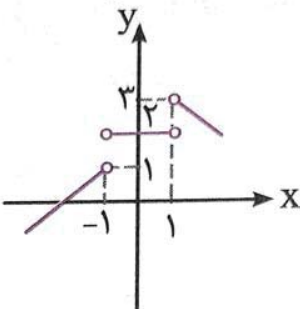
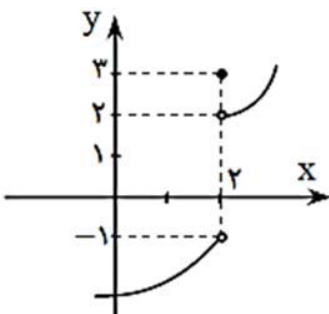
نکته: برای اینکه تابع در یک نقطه حد داشته باشد لازم نیست در آن نقطه تعریف شده باشد.



۱.۲.۱ محاسبه ی حد از روی نمودار

برای محاسبه ی حد راست تابع در $x = a$ ، از همسایگی سمت راست بر روی نمودار حرکت کرده تا به نقطه $x = a$ برسیم و سپس بر روی محور y ها عمود می کنیم تا مقدار حد بدست آید. برای محاسبه ی حد چپ هم به همین ترتیب عمل می کنیم ولی از همسایگی چپ به سمت $x = a$ حرکت می کنیم.

سوال: شکل رو به رو نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ را بیابید.



تست ۱: با توجه به نمودار شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام

است؟

۱ (د)

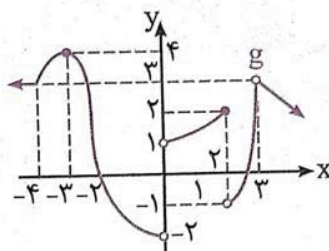
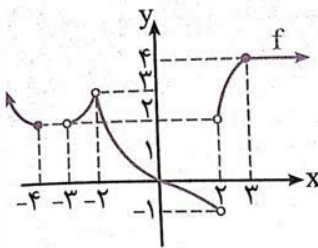
-۲ (ج)

-۱ (ب)

۲ (الف)

با توجه به نمودارهای مقابل به تست های زیر پاسخ

دهید.



تست ۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - 5g(x))$ کدام است؟

-۳ (د)

۳ (ج)

-۷ (ب)

۷ (الف)

تست ۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)g(x)$ کدام است؟

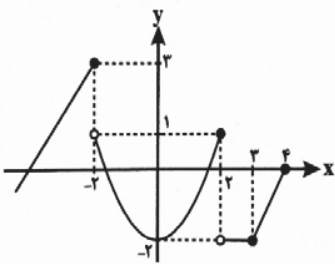
- الف) -۲ ب) ۵ ج) ۴ د) وجود ندارد

تست ۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ کدام است؟

- الف) -۱ ب) ۲ ج) ۱ د) وجود ندارد

تست ۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - f(x)^2}{2f(x) + g(x)}$ کدام است؟

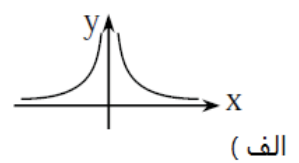
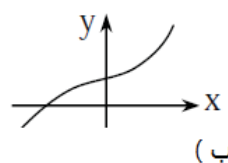
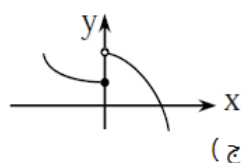
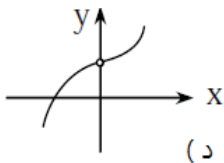
- الف) $-\frac{3}{2}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{5}{2}$ د) وجود ندارد



سوال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است، مطلوب است محاسبه ی حدود زیر:

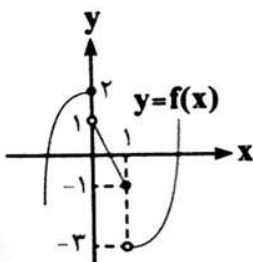
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x+1) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 2)$$

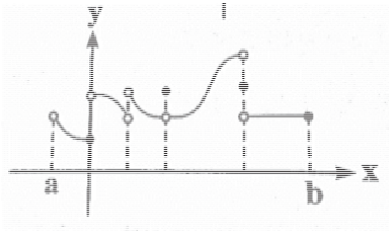
تست ۶: کدام یک از توابعی که نمودار آن ها در زیر رسم شده است در $x = 0$ دارای حد نیست، ولی حد راست دارد؟



تست ۷: با توجه به شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(1-x^2) + f(x^2) + f(x^2-1))$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) -۲ ج) صفر د) ۲





تست ۸: با توجه به نمودار شکل مقابل، تابع داده شده در چند نقطه حد ندارد؟

۵ (د)

۴ (ج)

۳ (ب)

۲ (الف)

سوال: با فرض اینکه $f(x) = \begin{cases} x \notin \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow \delta} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{\delta}} f(x)$ را بیابید.

نکته: اگر در اطراف نقطه $x = a$ بحث کنیم آنگاه $x \rightarrow a$ با $x \neq a$ می توانند هم ارز باشند.

سوال: با فرض اینکه $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 3 \\ -22 & x = 3 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را بیابید.

۳.۱ قضایای حد

نکته: اگر $f(x) = c$ (یک عدد ثابت) آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

نکته: اگر $f(x) = mx + n$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + n$.

نکته: اگر $P(x)$ یک چند جمله ای باشد آنگاه $P(x)$ در هر نقطه دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

نکته: اولین مرحله در حد جایگذاری است.

نکته: توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در هر نقطه دارای حد هستند و داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \\ \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \end{cases}$$

نکته: تابع $f(x) = \tan x$ در هر نقطه ای بجز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

نکته: تابع $g(x) = \cot x$ نیز در هر نقطه دارای حد است بجز $x = k\pi$ و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ آنگاه:

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_1$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = L_1^n$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \quad (\text{اگر } n \text{ زوج باشد باید } L_1 \geq 0 \text{ باشد.})$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L_1|$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$$

سوال: حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2x - \sqrt{x}}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 - x} + \frac{x+2}{x+1})$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 - 2} + \frac{2}{x})$$

تذکر: $f(b^+)$ یعنی حد راست f در نقطه b و $f(b^-)$ یعنی حد چپ f در نقطه b .

تست ۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|(x^2 + 3)}$ کدام است؟

الف) صفر

ب) ۱

ج) -۳

د) غیر قابل بررسی



تست ۱۰: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ و $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ ، آنگاه تابع $(f+g)(x)$ در $x = -2$:

الف) حد ندارد و مقدار دارد ب) حد و مقدار ندارد ج) حد و مقدار دارد د) حد دارد و مقدار ندارد

تست ۱۱: اگر تابع $f(x)$ در $x = 1$ حد داشته باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۷۸)

الف) ۲ ب) -۳ ج) ۳ د) -۲

تست ۱۲: در صورتی که $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

الف) ۲ ب) -۳ ج) صفر د) ۵

تست ۱۳: تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \geq 1 \\ bx^3 - 2x - a & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد دارد، a, b کدام است؟

الف) $a \in R, b = 1$ ب) $a \in R, b = -1$ ج) $b \in R, a = \frac{3}{4}$ د) $b \in R, a = \frac{-3}{4}$

تست ۱۴: در صورتی که $f(x) = 2^{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3x$ باشد، حاصل حد تابع $f \circ g$ در $x = -1$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $-\frac{1}{4}$ د) $-\frac{1}{8}$

تست ۱۵: اگر $f(x-2) = x^2 - 4x$ باشد، حاصل حد تابع $f(3-x)$ در $x = 2$ کدام است؟

الف) -۳ ب) -۶ ج) ۳ د) ۶

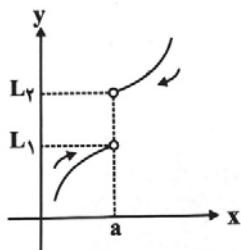
تست ۱۶: اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ کدام است؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) -۱ د) ∞

تست ۱۷: اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۶)

- الف) -۴ ب) -۳ ج) -۲ د) -۱



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

تعریف نشده است: $f(a)$

حد چپ و راست موجود ولی نابرابرند.
بنابراین تابع در $x = a$ حد ندارد.

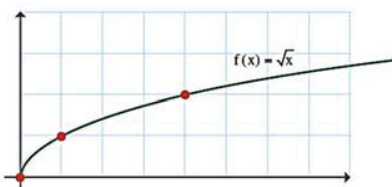
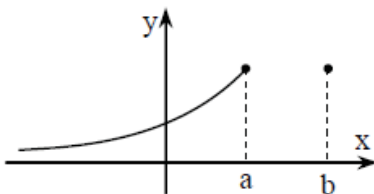
۱.۳.۱ روش های تشخیص اینکه تابع در چه نقاطی حد ندارد

(۱) اگر حاصل حد چپ و راست، مقدار برابری نباشد.

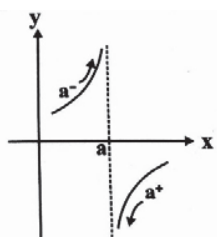
سوال: حد تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ را بررسی کنید.

تذکر: در شکل زیر تابع در $x = b$ حد تعریف شده ندارد و در $x = a$ حد راست

تعریف شده ندارد. تابع در هر دو همسایگی $x = b$ و در همسایگی راست $x = a$ نامعین (تعریف نشده) است. با توجه به این تصویر در نقطه $x = a$ فقط حد چپ بررسی می شود. اما تابع در $x = a$ حد ندارد.



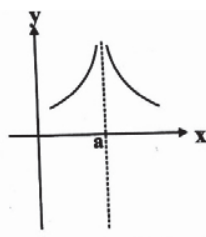
مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ فقط از راست تعریف شده است در مجموع در نقطه ی صفر حد ندارد.



حد چپ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

حد راست $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

حد چپ و راست وجود ندارد.
و تابع در $x = a$ حد ندارد.



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

مقدار و حد تابع در $x = a$
موجود نمی‌باشد.

۲) اگر تابع در اطراف نقطه (همسایگی محذوف) $x = a$ تعریف شده باشد و حد چپ یا راست (یا هر دو) تابع در $x = a$ موجود نباشد (بی‌نهایت باشد) آنگاه تابع در $x = a$ حد ندارد.

تذکر: در برخی از موارد یکی از طرف‌های حد، عدد و دیگری بی‌نهایت است که در این حالت نیز وجود حد ندارد.

سوال: حد تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ \cot \pi x & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ را بررسی کنید.

دقت کنید که بعداً در مورد بی‌نهایت بیشتر بحث خواهد شد و چون آشنایی ذهنی وجود دارد بدان اشاره شده است.

سوال: توابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید، ابتدا این توابع را رسم نموده سپس در مورد حد آنها در نقطه $x = 0$ بحث کنید.

۴.۱ بررسی حد در توابع شامل قدر مطلق

در محاسبه‌ی حد توابع شامل قدر مطلق، در صورت لزوم ابتدا با توجه به خواص قدر مطلق، **قدر مطلق را تعیین علامت کرده** و بعد از **حذف قدر مطلق**، حد را محاسبه می‌کنیم.

تست ۱۸: تابع $f(x) = \begin{cases} 4x + a & x \geq 0 \\ \frac{2x}{|x|} & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

الف) ۲

ب) ۱

ج) -۱

د) -۲



تست ۱۹: قدرمطلق تفاضل حد چپ و راست تابع $y = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ به معادله $y = 1$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶

۵.۱ بررسی حد در توابع چند ضابطه ای و جز صحیح

۱) توابع چند ضابطه ای: در نقاطی که ضابطه ی تابع عوض میشود، باید حد چپ و راست جداگانه حساب شود

تست ۲۰: به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟ (سراسری تجربی ۸۰)

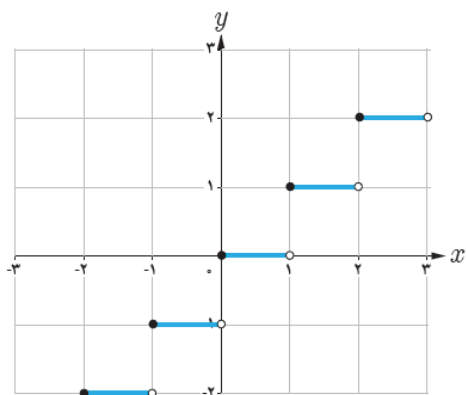
- الف) $\{0\}$ ب) $\{2\}$ ج) \emptyset د) R

تست ۲۱: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام مقدار است؟ (ریاضی ۸۹)

- الف) ۱ ب) -۱ ج) صفر د) وجود ندارد

۲) حد توابع جزء صحیح:

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = [x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



- الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$
 پ) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$
 ث) $\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{5}} [x]$ ج) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [x]$

برای بدست آوردن حد تابع $y = [f(x)]$ در نقطه $x = a$ ابتدا حد تابع $f(x)$ را در نقطه $x = a$ را بدست می آوریم
 ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$) که در این حالت دو حالت داریم :

الف) اگر L عددی صحیح شود ، آنگاه باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم .

ب) اگر L عددی صحیح نباشد آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [L]$$

سوال: حد تابع $f(x) = [2x - 1]$ در $x = 2$ و $x = 0/6$ را بررسی کنید .

تست ۲۲: حد راست عبارت $[2x]$ از حد چپ آن در نقطه $x = 2$ چقدر بیشتر است؟

الف) ۱ ب) -۲ ج) -۱ د) ۲

تست ۲۳: حد چپ تابع $f(x) = \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$ در $x = 0$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $-\frac{1}{2}$ د) -۱

تست ۲۴: مقدار حد $f(x) = [\sin x]$ در نقطه $x = \pi$ کدام است ؟

الف) صفر ب) ۱ ج) -۱ د) حد ندارد

تست ۲۵: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = [x]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x)$ کدام است ؟

الف) ۲ ب) صفر ج) -۱ د) وجود ندارد

تست ۲۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[-x] + [x^2]}{x^3 + 1}$ کدام است؟

- الف) $-\frac{1}{2}$ ب) صفر ج) -1 د) 1

تست ۲۷: حد عبارت $\frac{[4x + \frac{1}{3}] + [1 - 3x]}{[-5x + 0.7]}$ وقتی $x \rightarrow \frac{2}{3}^-$ کدام است؟

- الف) $-\frac{2}{3}$ ب) $-\frac{1}{4}$ ج) $-\frac{1}{3}$ د) $-\frac{1}{2}$

نکته: اگر تابع f در a حد داشته باشد و تابع g در a نداشته باشد توابع $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ قطعاً در a حد ندارند ولی توابع $f \cdot g$

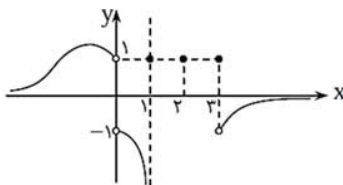
و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند یا نداشته باشند. مثلاً تابع $f(x) = \frac{2}{x^2}$ در $x = 0$ فاقد حد است و حد تابع $g(x) = x^2$ در $x = 0$ برابر صفر است و حد حاصل ضرب آنها برابر ۲ است.

نکته: اگر دو تابع f و g هر دو در a حد نداشته باشند توابع $f \cdot g, f \pm g, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$ ممکن است در a حد داشته باشند یا نداشته باشند.

تست ۲۸: اگر تابع $f(x)$ در نقطه 1 حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{f(x) - 2} = 3$ آنگاه حد $f(x)$ در 1 کدام است؟

- الف) 5 ب) 3 ج) 9 د) صفر

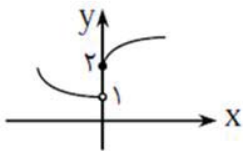
تست ۲۹: در شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟



- الف) 1 ب) -1 ج) 0 د) وجود ندارد

تست ۳۰: نمودار $y = f(x)$ شکل مقابل است، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x^2 - 1) + f(1 - |x|)$ کدام است؟

الف (۱) ب (۲) ج (۳) د (وجود ندارد)



تست ۳۱: مقدار حد $f(x) = x!$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

الف (۶) ب (۴) ج (۲۴) د (وجود ندارد)

تست ۳۲: اگر تابع $f(x)$ در $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)+4}{f(x)} = 4$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$ کدام است؟

الف ($\frac{1}{4}$) ب (۱) ج (۲) د ($\frac{3}{2}$)

تست ۳۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [(1 - x^2)]$ کدام است؟

الف (صفر) ب (۱) ج (-۱) د (-۲)

تست ۳۴: حد تابع $y = \frac{(\sin^2 x + 2 \cos x)}{(2 \sin^2 x - \cos x)}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (آزاد پزشکی ۸۴)

الف (-۲) ب (۲) ج ($\frac{1}{2}$) د ($-\frac{1}{2}$)

تست ۳۵: حد راست عبارت $2[x]$ از حد چپ آن در نقطه $x = -2$ چقدر بیشتر است؟ (سراسری تجربی ۷۵)

الف (-۲) ب (-۱) ج (۱) د (۲)

تست ۳۶: در تابع با ضابطه ی $f(x) = (x + a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

الف) ۱ ب) ۲ ج) -۱ د) صفر

تست ۳۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) \left[\frac{1}{x+1} \right]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

الف) -۱ ب) صفر ج) $\frac{1}{2}$ د) ۱

تست ۳۸: در تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right] + [\sqrt{x}]$ مجموع حد چپ و راست تابع در $x = 2$ کدام است؟ (آزاد ۷۷)

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۱

تست ۳۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 1}$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) -۱ د) وجود ندارد

تست ۴۰: اگر $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 - 6$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(2x - 1)$ کدام است؟

الف) ۳۰ ب) ۸ ج) صفر د) ۱۰

تست ۴۱: اگر $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \sqrt{25 - x^2}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۲ ج) ۱ د) ۴

تست ۴۲: هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ و تابع $f(x)$ در $x = a$ فاقد حد باشد حد $g(x)$ در $x = a$:

الف) برابر صفر است ب) اگر موجود باشد برابر صفر است ج) برابر $g(0)$ است د) وجود ندارد

تست ۴۳: مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left[\frac{1}{\sin x} \right]$ کدام است؟

الف) ۱- ب) ۰ ج) ۲- د) حد ندارد

تست ۴۴: اگر $f(x) = \begin{cases} x + 2a & x > 2 \\ -x + 6 & x < 2 \end{cases}$ و مقدار حد راست در نقطه $x = 2$ ، مربع مقدار حد چپ در این نقطه

است. a کدام است؟

الف) ۵ ب) ۷ ج) ۶- د) ۴-

تست ۴۵: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x < -2 \\ 3x + 4 & x > -2 \end{cases}$ و مقدار حد چپ در نقطه $x = -2$ ، عکس مقدار حد راست در این نقطه

است. a کدام است؟

الف) ۳ ب) ۳/۵ ج) ۴- د) ۴/۵-

تست ۴۶: اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{2} & x > 1 \\ -x+3 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{x^2 - 1} & x > 1 \\ 2 + bx & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ ، دارای

حد باشد. $a + b$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۲ ج) ۳- د) ۲-

سوال: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4a} & x \geq 2 \\ x + b & -2 \leq x < 2 \\ x^2 + bx + 3a & x < -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، دارای حد بوده و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ آنگاه دوتایی (a, b) را بیابید.

تست ۴۷: در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 1 \\ \frac{m+1}{m-1} & x = 1 \\ \frac{2x}{x+1} & x < 1 \end{cases}$ مجموع حدهای چپ و راست تابع f در $x = 1$ ، با مقدار آن در $x = 1$ برابر است. m کدام است؟

- الف) ۲ (ب) ۱ (ج) -۲ (د) -۱

تست ۴۸: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ -x + 3 & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x)$ کدام است؟

- الف) ۳ (ب) ۱ (ج) -۳ (د) -۱

تست ۴۹: اگر $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$ باشد، کدام تابع در $x = 0$ حد دارد؟

الف) $g - f$ (ب) $f + g$ (ج) $f - g^2$ (د) $f \cdot g$

تست ۵۰: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ -x^2+3 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2+3 & x > 1 \\ 4x & x \leq 1 \end{cases}$ مفروض اند، کدام تابع در $x = 1$ حد دارد؟

الف) $g - f$ ب) $f + g$ ج) $\frac{g}{f}$ د) $f \cdot g$

تست ۵۱: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ -x + 4 & x < 2 \end{cases}$ باشد، ضابطه g کدام باشد تا $f \cdot g$ در $x = 2$ حد داشته باشد؟

الف) $x^2 + 5x - 8$ ب) $x^3 + x - 10$ ج) $x^3 + x^2 - 4$ د) $2x^2 + x - 6$

تست ۵۲: اگر $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x))$ کدام است؟

الف) ۶ ب) -۴ ج) ۲ د) ۱

۱.۵.۱ بررسی هایی از بخش پذیری ها

تست ۵۳: باقی مانده تقسیم عبارت $3x^2 - 5x - 2$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

تست ۵۴: باقی مانده تقسیم عبارت $x^3 - x^2$ بر $x^2 + 2$ کدام است؟

- (۱) $x + 2$ (۲) $-x + 2$ (۳) $2x + 4$ (۴) $-2x + 4$

تست ۵۵: مقدار خارج قسمت تقسیم عبارت $x^5 + 32$ بر دو جمله ای $x^2 + 4$ حاصل خارج قسمت به ازای $x = -3$ است؟

- (۱) -13 (۲) -15 (۳) ۹ (۴) ۱۲

تست ۵۶: چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $x - 1$ (۲) $x + 1$ (۳) $x - 2$ (۴) $x + 2$

تست ۵۷: باقی مانده تقسیم عبارت $x^6 - 5x^4 + 14$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

تست ۵۸: به ازای کدام مقدار m عبارت $2mx + 3 + (m-1)x^2 + x - 1$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است؟

- (۱) $-2/7$ (۲) $-2/3$ (۳) $-2/1$ (۴) $-2/5$

تست ۵۹: اگر عبارت $x^4 + ax^2 + bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد. $a + b$ کدام است؟

$\frac{-17}{8}$ (۴)

$\frac{-15}{8}$ (۳)

$\frac{-17}{4}$ (۲)

$\frac{-15}{4}$ (۱)

تست ۶۰: اگر $2bx + ax^2 + x^3$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $2x + bx^2 + ax^4$ بر $x + 1$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۴ (۲)

صفر (۱)

۲.۵.۱ رفع ابهام $\frac{0}{0}$

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آنگاه حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نمی تواند با استفاده از آنچه که تا کنون بیان کردیم بدست آید، اصطلاحاً گوییم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ (تقسیم دو عدد بسیار کوچک بر هم) بوجود آمده و باید رفع ابهام شود. یعنی پی ببریم که این دو صفر نسبت به هم چه اندازه ای دارند، برای تعیین مقدار این حد با توجه به نوع توابع $f(x)$ و $g(x)$ روش های زیر جهت رفع ابهام وجود دارد:

روش های رفع ابهام:

(۱) عملیات جبری متعارف (تجزیه ، ضرب در مزدوج ، فرمول های مثلثاتی و ...)

(۲) قواعد هم ارزی

(۳) قاعده ی هوییتال

عملیات جبری متعارف

الف) هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله ای هایی برحسب x باشند، توابع را تجزیه کرده و عامل صفر شونده احتمالاً $(x - a)$ در صورت و مخرج را پیدا کرده و کسر را ساده کرده و سپس برای بدست آوردن حد مقدار $x = a$ را جایگذاری می کنیم.

تست ۶۱: حاصل حد تابع $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 - 1}$ در نقطه ی $x = 1$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{5}{3}$

تست ۶۲: حد عبارت $\frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ وقتی $x \rightarrow 4$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{12}$ ج) $\frac{1}{16}$ د) $\frac{1}{32}$

تست ۶۳: حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

الف) -۳ ب) -۲ ج) ۳ د) ۲

تست ۶۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۱ د) ۳

۶.۱ قاعده ی هوییتال

۱.۶.۱ فرمول های مشتق

۱.۱.۶.۱ مشتق توابع خطی

الف) تابع ثابت: در تابع ثابت مشتق همواره برابر صفر خواهد بود.

$$y = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0 \quad y = \sqrt{2} \quad y = \pi \quad y = \frac{1}{2}$$

ب) تابع همانی: در تابع همانی مشتق همواره برابر عدد یک خواهد بود.

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

ج) تابع خطی: در این نوع تابع مشتق همواره برابر شیب خط می باشد.

$$y = ax + b \Rightarrow y' = a \quad y = 2x - 3 \quad y = \frac{x}{3} - 5 \quad y = -7x$$

د) یکی از مهم ترین فرمول های مشتق، فرمول زیر می باشد:

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = x^r \Rightarrow y' =$$

$$y = x^{-\Delta} \Rightarrow y' =$$

$$y = x^{\frac{\Delta}{r}} \Rightarrow y' =$$

$$y = x^{-\frac{\Delta}{r}} \Rightarrow y' =$$

$$y = \sqrt{x^r} \Rightarrow y' =$$

نکته: در مشتق گیری، ضریب عددی می تواند از مشتق عبور کند، به عبارتی دیگر:

$$y = af(x) \Rightarrow y' = af'(x) \text{ و } y = -ax^y \Rightarrow y' = \text{ و } y = ax^{\frac{y}{r}} \Rightarrow y' =$$

۲.۶.۱ مشتق جمع و تفریق دو یا چند تابع

نکته: هرگاه در توابع بین آنها اعمال جبری جمع یا تفریق باشد، برای مشتق گیری بایستی از تک تک عوامل مشتق گرفت:

$$y = f \pm g \pm h \Rightarrow y' = f' \pm g' \pm h'$$

$$y = 2x^2 + 1 \Rightarrow y' =$$

$$y = 3x^{-2} + 3x - 1 \Rightarrow y' =$$

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \Rightarrow y' =$$

۳.۶.۱ مشتق توابع ضربی

$$y = f \times g \Rightarrow y' = f' \times g + g' \times f$$

$$y = (2x + 7)(3x - 1) \Rightarrow y' =$$

$$y = (2x^5 + 17x)3x^3 \Rightarrow y' =$$

خاصیت فوق قابل تعمیم (گسترش) است :

$$y = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n \Rightarrow y' = (f'_1 \times f_2 \times \dots \times f_n) + \dots + (f_1 \times f_2 \times \dots \times f'_n)$$

$$y = (2x^{-3} + 1)3x^2(3x^2 + 5) \Rightarrow y' =$$

۴.۶.۱ مشتق توابع کسری

$$y = \frac{f}{g} \Rightarrow y' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$$

$$y = \frac{5x + 3}{4x - 1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \frac{5 - 4x}{4x - 1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \frac{5x^2 - 3x}{2x + 1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \frac{a}{f} \Rightarrow y' = \frac{-af'}{f^2} \quad y = \frac{-3}{4x - 1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \frac{f}{a} \Rightarrow y' = \frac{f'}{a} \quad y = \frac{x^2 - 3}{4} \Rightarrow y' =$$

نکته: تابع زیر از مثال های پُرکاربرد در مشتق گیری است، سعی کنید مشتق آن را به خاطر بسپارید.

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$$

۵.۶.۱ مشتق توابع توان دار

$$y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

$$y = (3x + 12x^2)^5 \Rightarrow y' =$$

$$y = \left(\frac{5x+3}{4x-1}\right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y' =$$

مثال: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$۱) y = (2x+1)^y \Rightarrow y' =$$

$$۲) y = \left(3\frac{1}{x} - 1 \cdot x^2\right)^4 \Rightarrow y' =$$

$$۳) y = (2x+1)3x^2(3x^2-1) \Rightarrow y' =$$

$$۴) y = 19x - 2x^{-\frac{y}{5}} \Rightarrow y' =$$

$$۵) y = \frac{5}{4x^2-1} \Rightarrow y' =$$

$$۶) y = \left(\frac{5}{4x-1}\right)^3 (4x-3) \Rightarrow y' =$$

۶.۶.۱ مشتق توابع رادیکالی

نکته: فرمول زیر در مسایل محاسباتی بسیار مورد استفاده قرار می گیرد لذا آن را به خاطر بسپارید.

$$y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{2\sqrt{f}} \quad \text{ویژه ریشه دوم:}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt{2x-1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \sqrt{\frac{2x-1}{2x^2+3}} \Rightarrow y' =$$

فراموش نکنیم که: برای مشتق گیری از توابع رادیکالی بهتر است ابتدا آن را به توابع توانی تبدیل کنیم و سپس مشتق بگیریم هر چند که از نظر دقت ریاضی این کار درست نیست و تبدیل توان در هر شرایطی ممکن نیست.

$$y = \sqrt[3]{(2x^2 + x + 1)^5} \Rightarrow$$

سوال: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$۱) y = \sqrt{5x - 4} \Rightarrow y' =$$

$$۲) y = \sqrt[3]{2x^2 + x + 1} \Rightarrow$$

$$۳) y = \sqrt[5]{(2x + 1)^2} \Rightarrow$$

$$۴) y = \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} \Rightarrow y' =$$

تذکر: فرمول های زیر در مشتق گیری رادیکال ها وجود دارند که البته همان تبدیل رادیکال به توان بهتر است.

$$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$y = \sqrt[n]{f^m} \Rightarrow y' = \frac{mf'}{n\sqrt[n]{f^{n-m}}}$$

۷.۶.۱ مشتق توابع هموگرافیک

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

$$۱) y = \frac{x}{\lambda x + 3} \Rightarrow y' =$$

$$۲) y = \frac{2x - 1}{3x + 1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \frac{au + b}{cu + d} \Rightarrow y' = \frac{(ad - bc)u'}{(cu + d)^2}$$

$$۱) y = \frac{۲\sqrt{x} + ۱}{۳\sqrt{x} - ۱} \Rightarrow y' =$$

۸.۶.۱ مشتق توابع ساده ی مثلثاتی

$$۱) y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$۲) y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$۳) y = \tan x \Rightarrow y' = ۱ + \tan^2 x$$

$$۴) y = \cot x \Rightarrow y' = -(۱ + \cot^2 x)$$

سوال: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$۱) y = \frac{\sin x}{۱ + x} \Rightarrow y' =$$

$$۲) y = ۳\sin^2 x - ۲\cos x \Rightarrow y' =$$

$$۳) y = \frac{۲\sin x + ۱}{۳\sin x - ۱} \Rightarrow y' =$$

$$۴) y = ۳\sin x \cos x - ۲\cos x \Rightarrow y' =$$

$$۵) y = \tan^2 x - ۲\cot x \Rightarrow y' =$$

$$۶) y = \sqrt{۱ + \tan x} \Rightarrow y' =$$

$$۷) y = ۲\cos x - \sin x \Rightarrow y' =$$

۹.۶.۱ مشتق تابع مرکب (ترکیب توابع)

اگر g در x مشتق پذیر و f در $g(x)$ مشتق پذیر باشد آنگاه $f \circ g$ در x مشتق پذیر است و

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$۱) f(x) = \sin^2 x \Rightarrow y' =$$

$$۲) y = \tan(2x^2 - 2) \Rightarrow y' =$$

سوال: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$۱) y = \sin(\sqrt{2x^2 - 2}) \Rightarrow y' =$$

$$۲) y = \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y' =$$

$$۳) y = \frac{\sin^2(x-1)}{1 + \cos^2 x} \Rightarrow y' =$$

$$۴) y = \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y' =$$

سوال: اگر $g(x) = x^2 + x$ و $f'(2) = 3$ حاصل $(f \circ g)'(1)$ را بیابید.

نتیجه (قاعده هوییتال): فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف a مشتق پذیر و g' در هر نقطه از این همسایگی

مخالف صفر باشد، در این صورت اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ یعنی حد

کسر $\frac{f}{g}$ در حالت $\frac{0}{0}$ به طور جداگانه از f و g مشتق گرفته و حد $\frac{f'}{g'}$ را محاسبه می کنیم.

تذکر: اگر حد کسر $\frac{f'}{g'}$ دوباره $\frac{0}{0}$ شد حد کسر $\frac{f''}{g''}$ را محاسبه می کنیم و ...

تذکر: در بعضی از مسائل استفاد از هوییتال و در بعضی از مسائل استفاده از هم ارزی راحت تر است.

تست ۶۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} - 5x^3 - 6}{x^5 + 3x^2 - 2}$ کدام است؟

الف) ۲۵ ب) -۲۵ ج) ۳۰ د) -۳۰

تست ۶۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 5x - 3}$ کدام است؟

الف) $\frac{13}{7}$ ب) $\frac{20}{7}$ ج) $\frac{27}{7}$ د) $\frac{34}{7}$

تست ۶۷: حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^4 + 2(x^2-1)}{(x^2-1)^4 + 3(x-1)}$ کدام است؟

- الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{4}{3}$ ج) $\frac{1}{16}$ د) ۱

تست ۶۸: حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x - 2}$ چند برابر $\frac{4}{3}$ است؟

- الف) ۳ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰

تست ۶۹: اگر حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1-a) - 1} = 1$ مقدار a کدام است؟

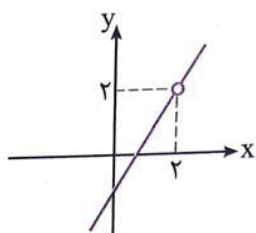
- الف) -۳ ب) $-\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) ۳

تست ۷۰: اگر حد $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + x + a} = b$ ، $b \neq 0$ مقدار b کدام است؟

- الف) $\frac{1}{7}$ ب) $-\frac{1}{6}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) $-\frac{1}{7}$

تست ۷۱: اگر حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 - x} = -1$ مقدار $a \times b$ کدام است؟

- الف) -۱۲ ب) -۶ ج) ۶ د) ۱۲



تست ۷۲: شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x - 2}$ مقدار $a - b$ کدام است؟

- الف (۱۸-) ب (۱۲-) ج (۴-) د (۲-)

تست ۷۳: حاصل حد $\frac{\tan - \cot x}{\sin^2 x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- الف (۱) ب (۲) ج (۱-) د (۲-)

تست ۷۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos^2 x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

- الف (۱) ب (۲) ج ($\frac{1}{2}$) د (۲-)

تست ۷۵: حاصل حد $\frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow \frac{1}{4}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

- الف (2π) ب (-2π) ج (π) د ($-\pi$)

تست ۷۶: حاصل حد $\frac{\sin x + \cos x}{2x^2 + 1}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- الف (۱) ب ($\frac{1}{4}$) ج (صفر) د ($-\frac{1}{4}$)

حل : (روش اشتباه)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \cos x}{4} = -\frac{1}{4}$$

حل : (روش صحیح) دقت کنید زمانی از روش هوییتال استفاده می کنیم که ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ داشته باشیم. می دانیم اولین کار در حدگیری جاگذاری است پس :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{2x^2 + 1} = \frac{0 + 1}{2(0)^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

ب) هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ در آن $f(x)$ و $g(x)$ توابع مثلثاتی بر حسب x باشند می توان از روابط مثلثاتی استفاده کرده و حد را از حالت مبهم در آوریم.

تست ۷۷: حد عبارت $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ (سراسری تجربی ۸۹) کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) $+\infty$ د) $-\infty$

تست ۷۸: حد تابع $f(x) = \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) -۱ د) ۰

تست ۷۹: حد تابع $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{\cos^2 x}}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) -۱ د) -۲

۱۰.۶.۱ روش هم ارزی

۱	$ax^n + bx^{n-1} + \dots + k \approx k$	$x \rightarrow 0$
۲	$(1 + au)^n \approx 1 + nau$	$u \rightarrow 0$
۳	$\sqrt[n]{1 + au} \approx 1 + \frac{a}{n}u$	$u \rightarrow 0$
۴	$\sin x \approx x$	$x \rightarrow 0$
۵	$\sin^n u \approx u^n$	$u \rightarrow 0$
۶	$\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2}$	$u \rightarrow 0$

۷	$1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$	$u \rightarrow 0$
۸	$1 - \cos^n u \approx \frac{nu^2}{2}$	$u \rightarrow 0$
۹	$\tan u \approx u$	$u \rightarrow 0$
۱۰	$\tan^n u \approx u^n$	$u \rightarrow 0$

سوال: حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$

تذکر: هرگاه بلافاصله بعد از استفاده هم ارزی جمع جبری برابر صفر شود و یا وقتی به جای عبارتی هم ارز آن را قرار دادیم و کل جملات که به جای عبارت هم ارز قرار داده ایم حذف شد، آنگاه استفاده از آن هم ارزی صحیح نمی باشد و باید از هم ارزی کامل تری استفاده کنیم.

تست ۸۰: حد کسر $\frac{x^3 - \sin x(1 - \cos x)}{x^3}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

الف) صفر ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) ۲

تست ۸۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{(\sin x)^2}$ کدام است؟

الف) $-\frac{3}{2}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) -۲ د) ۲

تست ۸۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) $\frac{3}{2}$

بررسی تست های جمع بندی

تست ۸۳: حد تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 3x^2 + 4}{x^2 + 8}$ در نقطه $x = -2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

تست ۸۴: اگر $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$ و $g(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 + 4x - 3}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

تست ۸۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\pm\infty$

تست ۸۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

تست ۸۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{2 - \sqrt{3-x}}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) ۸

تست ۸۸: حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ در $x = 8$ کدام است؟

۹۶ (۴)

۸۴ (۳)

۴۸ (۲)

۴۲ (۱)

تست ۸۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3x + 2}$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

تست ۹۰: حد کسر $\frac{x^2 + x - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۴ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

تست ۹۱: اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{ax+1} - 3}{\sqrt{x} - 2} = b$ ، ab کدام است؟

$\frac{8}{5}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

تست ۹۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

تست ۹۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) صفر

تست ۹۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

تست ۹۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

تست ۹۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

تست ۹۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cot^2 x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

تست ۹۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

تست ۹۹: حد کسر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos 2x)}{\sin 2x(\cos x - 1)}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) -3 (۴) 3

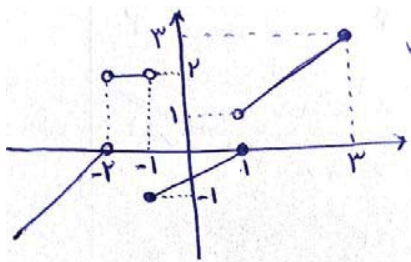
تست ۱۰۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos^2 x}{|\sin 2x - 2 \cos x|}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) $-\infty$

تست ۱۰۱: حد عبارت $f(x) = \frac{x^2 - |x - 2| - 4}{x - 2}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 5

تست ۱۰۲: نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(-\frac{x}{3}) - \lim_{x \rightarrow (1^-)} [f(2x)]$ کدام است؟



- (۱) -1 (۲) 1 (۳) 2 (۴) -2

تست ۱۰۳: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b - x^2}{1 - \sqrt{x}} = k$ باشد آنگاه حاصل $b - k$ کدام است؟ ($k \neq 0$)

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) ۳

تست ۱۰۴: حد راست تابع $y = x \left[\frac{3}{-x} \right]$ در نقطه $x = 3$ از حد چپ در همین نقطه چقدر بیشتر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

تست ۱۰۵: حاصل $\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$ وقتی که $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

تست ۱۰۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|4x - 5| - 1}{|5x - 4| - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

تست ۱۰۷: قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست تابع y به معادله $y = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست ۱۰۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

تست ۱۰۹: اگر $p(x) = x^2 + ax + b$ بر $x + 2$ بخش پذیر و باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ برابر ۳ باشد. باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱

تست ۱۱۰: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax - 1}{x^2 + x - 2} = b$ باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

تست ۱۱۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۳

تست ۱۱۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴) صفر

تست ۱۱۳: اگر چند جمله ای $f(x) = 3x^3 + ax^2 - bx + 6$ بر $x^2 + 2x - 3$ بخش پذیر باشد آن گاه حاصل $2a + b$ کدام است؟

۲۱ (۴)

-۵ (۳)

۵ (۲)

۱۷ (۱)

تست ۱۱۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۰ (۲)

۱ (۱)

تست ۱۱۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x - 2}$ چند برابر $\frac{1}{3}$ است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

تست ۱۱۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1}$ کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

تست ۱۱۷: حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$ برابر کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

تست ۱۱۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ به کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

تست ۱۱۹: اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 2a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آن گاه a کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۵

تست ۱۲۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x + 3}}$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

تست ۱۲۱: نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2ax - \sqrt{-x^2 - 7}}{-x^3 - x^2 + 3x + a + 2}$ از نقطه $(1, 1)$ می گذرد حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{6}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{11}{12}$

تست ۱۲۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

تست ۱۲۳: حد تابع با ضابطه $y = \frac{x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1}-3}$ وقتی $x \rightarrow -2^-$ کدام است؟

$-\frac{9}{8}$ (۴)

$\frac{9}{8}$ (۳)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

تست ۱۲۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$-\frac{1}{12}$ (۲)

$-\frac{1}{6}$ (۱)

تست ۱۲۵: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ آنگاه مقدار b کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

تست ۱۲۶: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ آنگاه مقدار b کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

-۶ (۲)

-۸ (۱)

تست ۱۲۷: اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{2}{5}x & x < 1 \\ \frac{2x^2 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^2 - 4x^2 + 3} & x > 1 \end{cases}$ حد داشته باشد. آنگاه مقدار a کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

تست ۱۲۸: اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x-6} + 2}{x + \sqrt{-x}}$ کدام است؟

$-\frac{1}{12}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

تست ۱۲۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + \sqrt{x}} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$ کدام است؟

$\frac{21}{2}$ (۴)

$\frac{9}{8}$ (۳)

$\frac{21}{8}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

تست ۱۳۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

تست ۱۳۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

-۷۲ (۴)

-۸۴ (۳)

-۹۶ (۲)

-۱۱۲ (۱)

تست ۱۳۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \cos x}$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۲ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تست ۱۳۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) -۲

تست ۱۳۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - |\cos 2x|}{|\sin x| \sin x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -۱ (۴) -۲

تست ۱۳۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{2}$

تست ۱۳۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ∞ (۴) $\frac{1}{2}$

تست ۱۳۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{4(1 - \sin^3 x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

تست ۱۳۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 2x}{\sqrt{2} - 2 \cos 2x}$ کدام است؟

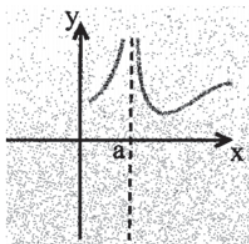
- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) -۲

تست ۱۳۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

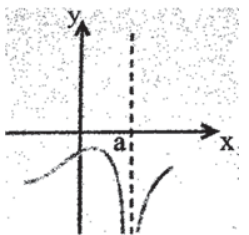
- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -۱ (۴) -۴

سوال: نمودار هر کدام از توابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ و $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ را رسم کنید و به کمک نمودار وجود حد در نقاط به ترتیب $x = -2$ و $x = 1$ را بررسی نمایید.

۷.۱ حد بی نهایت



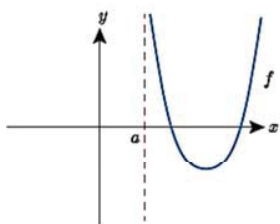
تعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ کنیم (از هر عدد دلخواهی بزرگتر) به شرط آنکه x را به قدر کافی به a نزدیک اختیار کرد.



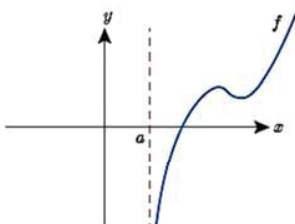
تعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می توان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه کوچک و منفی کرد (از هر عدد دلخواهی کوچکتر) به شرط آنکه x را به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

تذکر: علامت های $+\infty$, $-\infty$ یک عدد حقیقی نیستند و رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ صرفاً حالت خاصی از عدم وجود حد در a است.

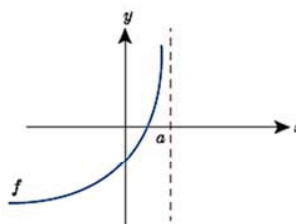
حدهای یکطرفه نیز به روش مشابه قابل تعریف است:



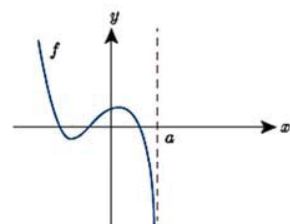
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



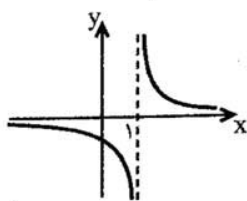
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مثال: به هر کدام از نمودارهای زیر که حدود آنها مشخص شده توجه کنید:

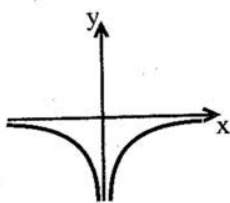
① $f(x) = \frac{1}{x-1}$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

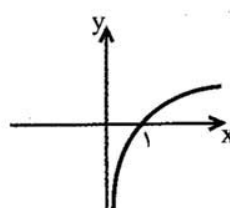
② $f(x) = \frac{-1}{x^2}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

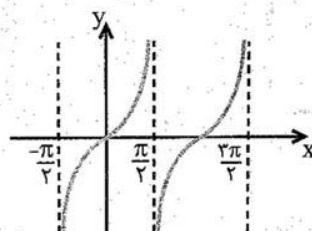
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

③ $f(x) = \log_x x$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

④ $f(x) = \tan x$



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = -\infty$$



به طور کلی می توان نتیجه گرفت که :

$$\frac{C}{\text{حدی } \cdot} = \infty \rightarrow \begin{cases} \frac{C > \cdot}{\cdot +} = \infty \\ \frac{C < \cdot}{\cdot +} = -\infty \\ \frac{C > \cdot}{\cdot -} = -\infty \\ \frac{C < \cdot}{\cdot -} = +\infty \end{cases} \quad (\text{حدی } \cdot = \cdot + \text{ یا } \cdot - , C \neq \cdot)$$

سوال : حاصل هر کدام از حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

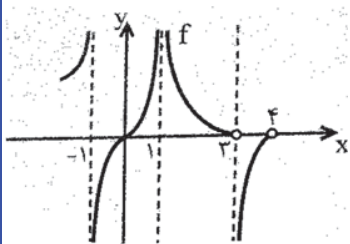
ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{1}{\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x$

ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$



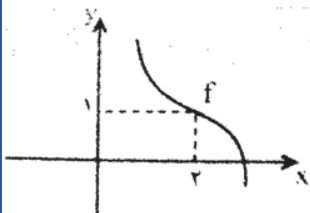
تست ۱۴۰: هرگاه نمودار تابع f به شکل زیر باشد، کدام یک از حدهای زیر نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \quad (۱)$$

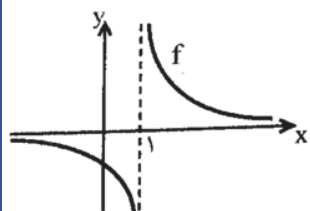
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad (۳)$$



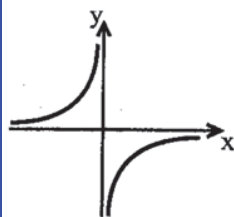
تست ۱۴۱: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-4}{f(x)-1}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) -1 (۳) 0 (۲) $-\infty$ (۱)



تست ۱۴۲: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)|$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) -1 (۳) 1 (۲) $-\infty$ (۱)



تست ۱۴۳: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{|x|}$ کدام است؟

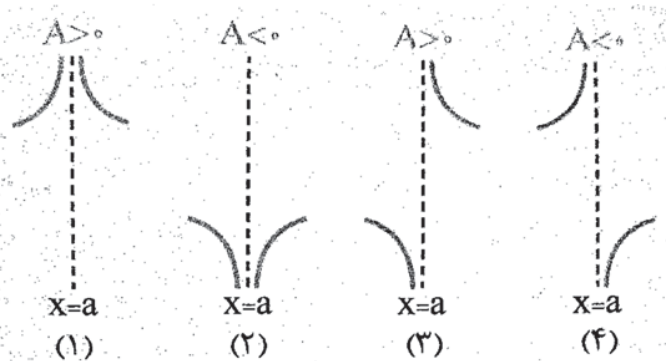
$+\infty$ (۴) 0 (۳) 1 (۲) $-\infty$ (۱)

تست ۱۴۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x^2-x}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) 0 (۳) -1 (۲) $-\infty$ (۱)

تست ۱۴۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{x-1}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) 1 (۳) -1 (۲) $-\infty$ (۱)



نکته: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$ بطوریکه

$n \in \mathbb{N}$ در همسایگی $x = a$ به صورت زیر است:

الف) اگر n زوج باشد، به شکل های (۱) یا (۲) است.

ب) اگر n فرد باشد، به شکل های (۳) یا (۴) است.

سوال: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، آنگاه مقادیر a و b را بیابید.

تست ۱۴۶: اگر بازه $(2x - 1, 3x + 2)$ یک همسایگی عدد -1 باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-1, 2)$

تست ۱۴۷: دربارهٔ مجموعه جواب نامعادله $|\frac{2x+1}{x-1}| < 1$ کدام عبارت نادرست است؟

(۱) همسایگی محذوف عدد ۱ است.

(۲) همسایگی چپ عدد صفر است.

(۳) همسایگی راست عدد -2 است.

(۴) همسایگی عدد -1 است.

تست ۱۴۸: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴) ۱

تست ۱۴۹: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{2x - 1}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

تست ۱۵۰: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|} \times \frac{x+1}{\sin^2 x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

تست ۱۵۱: حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - 3x}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) $+\infty$ و $+\infty$ (۲) $-\infty$ و $-\infty$ (۳) $-\infty$ و $+\infty$ (۴) $-\infty$ و $-\infty$

تست ۱۵۲: حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$ و $\lim_{x \rightarrow (\pi)^+} \cot x$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) $-\infty$ و $+\infty$ (۲) $+\infty$ و $-\infty$ (۳) $+\infty$ و $+\infty$ (۴) $-\infty$ و $-\infty$

تست ۱۵۳: حاصل کدام حد $+\infty$ نیست؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sin x}$ (۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cot x}$ (۳) $\lim_{x \rightarrow (\frac{9\pi}{2})^-} \tan x$ (۴) $\lim_{x \rightarrow (\frac{7\pi}{2})^+} \cot x$

تست ۱۵۴: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) ۱ (۴) -۱

تست ۱۵۵: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) ۱ (۴) ۰

تست ۱۵۶: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(1-x)^2(x^2 - 5x + 2)}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

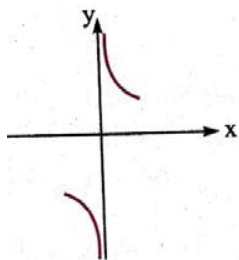
تست ۱۵۷: حاصل حد راست تابع $f(x) = \frac{[x] - 3}{x|x| - 9}$ در $x = 3$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $+\infty$ (۴) صفر

تست ۱۵۸: چند تا از تساوی های زیر درست است؟

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sin x]}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{|x|} = +\infty$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

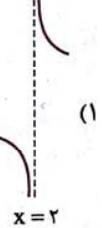
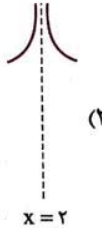
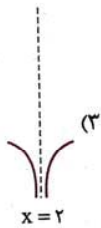
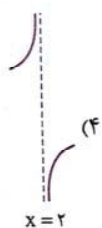


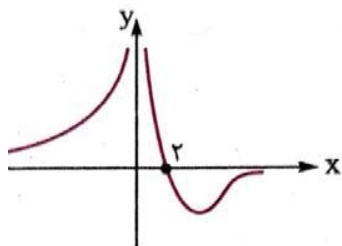
تست ۱۵۹: نمودار کدام یک از توابع زیر در $x = 0$ ، شبیه شکل مقابل است؟

(۱) $y = \frac{1}{x}$ (۲) $y = \frac{x-1}{x}$

(۳) $y = \frac{1}{x^2}$ (۴) $y = \frac{-1}{\sqrt{x}}$

تست ۱۶۰: نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 4x + 4}$ در کنار خط $x = 2$ چگونه است؟





تست ۱۶۱: شکل روبه رو نمودار تابع $f(x) = \frac{ax + 2}{x^2 + b}$ است. $f(4)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

تست ۱۶۲: در تابع $f(x) = \frac{2x}{x^2 + ax + b}$ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ ، مقدار $f(2)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{9}$

تست ۱۶۳: حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 1}{x^2 - 3x}$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{[x]}{|2x + 1|}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) $-\infty$ و $+\infty$ (۲) $+\infty$ و $-\infty$ (۳) $+\infty$ و $+\infty$ (۴) $-\infty$ و $-\infty$

تست ۱۶۴: در صورتی که $f(x + 2) = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$ $f(x + 2)$ آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 13^-} f(x - 7)$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) ۰ (۴) ۲

تست ۱۶۵: نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب آن به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)



تست ۱۶۶: نمودار تابع $y = \frac{1}{x-|x|}$ در کنار مجانب قائم چگونه است؟



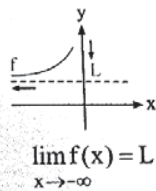
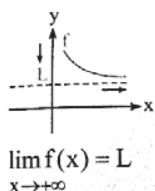
تست ۱۶۷: نمودار تابع $y = \frac{\sin x}{-1+\cos x}$ در مجاورت $x = 0$ شبیه کدام است؟



۸.۱ حد توابع وقتی $x \rightarrow \infty$ (حد در بی نهایت)

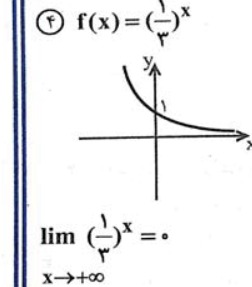
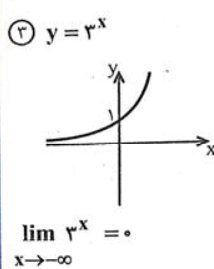
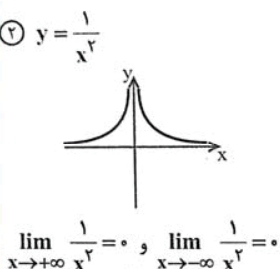
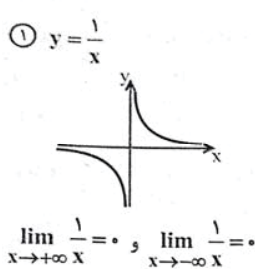
فرض کنید تابع f برای هر $x > X$ تعریف شده است، اگر بخواهیم x بدون هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می نویسیم $x \rightarrow +\infty$. و اگر تابع f برای هر $x < X$ تعریف شده باشد، اگر بخواهیم x بدون هیچ محدودیتی کاهش یابد، در این صورت می نویسیم $x \rightarrow -\infty$.

در تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است و با بزرگ شدن متغیر x مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک می شوند، خواهیم داشت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

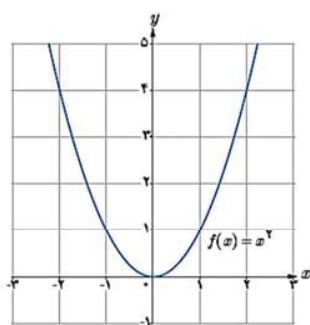


در تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده است و با بزرگ شدن متغیر x مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک می شوند، خواهیم داشت: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

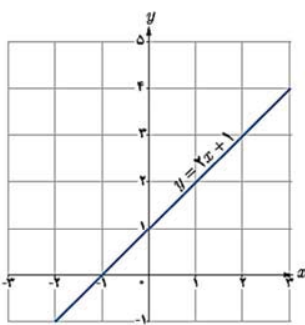
به محاسبه حد در بی نهایت در شکل های زیر توجه کنید



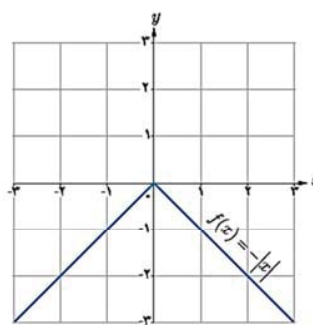
سوال: با توجه به نمودارهای زیر جاهای خالی را کامل کنید.



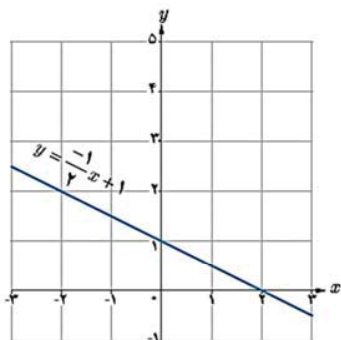
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots$



ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = \dots$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = \dots$

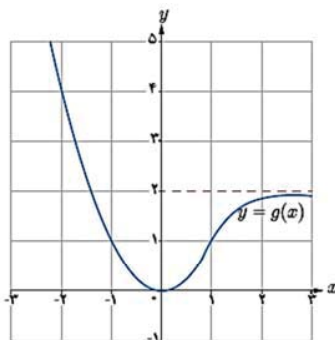


ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$



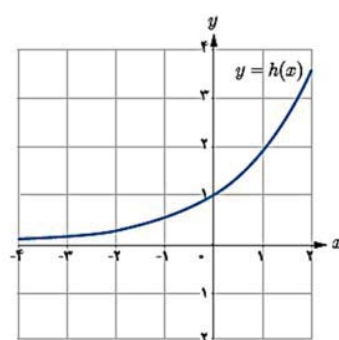
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = \dots$



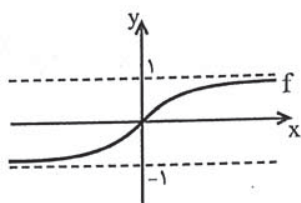
ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$



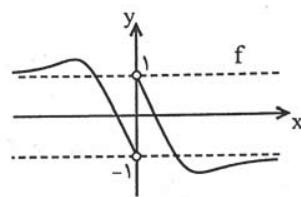
ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$



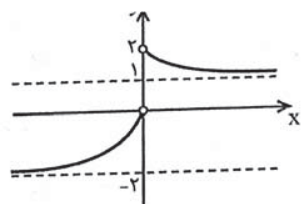
تست ۱۶۸: اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (-۱) ۳ (۰) ۴ وجود ندارد



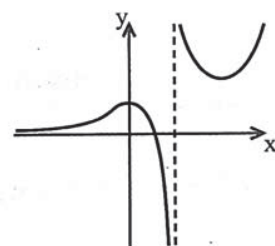
تست ۱۶۹: اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (-۱) ۳ (۰) ۴ $+\infty$



تست ۱۷۰: اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$ ، کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۵)



تست ۱۷۱: اگر دامنه تابع f با نمودار زیر برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ باشد، حاصل کدام حد نادرست است؟

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (۲)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ (۴)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ (۳)

بررسی چند هم ارزی

سوال: حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$$

$$3) \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x}$$

بررسی چند هم ارزی در بی نهایت:

۱	$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + k'} = 0 \quad m > n$	$x \rightarrow \infty$
۲	$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + k'} = \frac{a}{a'} \quad m = n$	$x \rightarrow \infty$
۳	$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + k'} = \infty \quad m < n$	$x \rightarrow \infty$
۴	$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k} \approx \sqrt[n]{a} \left x + \frac{b}{na} \right $	$x \rightarrow \infty$ زوج n
۵	$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k} \approx \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right)$	$x \rightarrow \infty$ فرد n
۶	$ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d \approx ax^n$	$x \rightarrow \infty$

در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ اگر صورت و مخرج چند جمله ای باشند از تقسیم جمله ی پرتوان صورت بر جمله ی پرتوان مخرج استفاده می کنیم.

تست ۱۷۲: مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x^3 + 4}{2x^3 + 1}$ کدام است؟

- الف) صفر ب) $-\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) ∞

تست ۱۷۳: اگر حد کسر $\frac{ax^m + x}{x^3 + 1}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر ۲ باشد آنگاه:

- الف) $m = 3, a = 1$ ب) $m = 2, a = 2$ ج) $m = 1, a = 3$ د) $m = 2, a = 2$

تست ۱۷۴: حد عبارت $\frac{4x - \sqrt{2x+1}}{x + \sqrt{x^2+2}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

- الف) صفر ب) ۲ ج) ۴ د) ∞

تست ۱۷۵: حد عبارت $\frac{3x + \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x}-1}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- الف) حد ندارد ب) -۲ ج) $\frac{4}{3}$ د) ۲

تست ۱۷۶: حد عبارت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ آنگاه حد راست این عبارت در $x = -2$ کدام است؟ (ریاضی خارج کشور ۹۰)

- الف) $-\frac{4}{3}$ ب) $-\frac{2}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{4}{3}$

تست ۱۷۷: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام گزینه است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

- الف) -۶ ب) -۴ ج) ۳ د) ۵

در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ اگر صورت و مخرج تابع نمایی باشند و $-\infty \rightarrow x$ از تقسیم کوچکترین پایه ی صورت بر کوچکترین پایه مخرج استفاده می کنیم و در حالت $+\infty \rightarrow x$ از تقسیم بزرگترین پایه صورت بر بزرگترین پایه مخرج استفاده می کنیم.

تست ۱۷۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 2^x}{5^x}$ است؟

- الف) ∞ ب) $\frac{2}{5}$ ج) $\frac{2}{5}$ د) صفر

تست ۱۷۹: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

تست ۱۸۰: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1} \times \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۱۵ ۴) -۱۵

تست ۱۸۱: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^3})$ چند برابر حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$ است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

تست ۱۸۲: حاصل حد عبارت $\frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

- ۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $-\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

تست ۱۸۳: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)(x+1)}{(4-a)(x-2)} = \frac{1}{2}$ ، کدام است a ؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

تست ۱۸۴: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^3 + nx^2 + 4}{(m+2)x^2 + x - 1}$ برابر ۱- باشد، $m+n$ کدام است

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

تست ۱۸۵: اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 4x - 1}{(m-1)x^4 + nx^2 - 2} = 4$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

تست ۱۸۶: حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر ۲- است. $m+n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

تست ۱۸۷: اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + 2x + 3}{3x^2 - 5x + 1}$ برابر ۲ باشد، $a+n$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸

تست ۱۸۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + (x+1)^4 + (x+2)^4}{x(2x-1)^3}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $+\infty$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $-\frac{3}{8}$

تست ۱۸۹: در تابع $f(x) = \frac{ax^m - 3x + 2}{3x - 5x^3 + x^2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{5}$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

تست ۱۹۰: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 2 (۴) 3

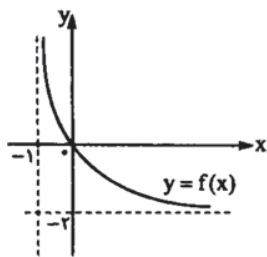
تست ۱۹۱: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه $x = -2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

تست ۱۹۲: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - \sqrt{2x+1}}{x + \sqrt{x+2}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 4 (۴) $\sqrt{2}$

تست ۱۹۳: چند تا از عبارت های زیر درباره تابع f درست است؟



ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

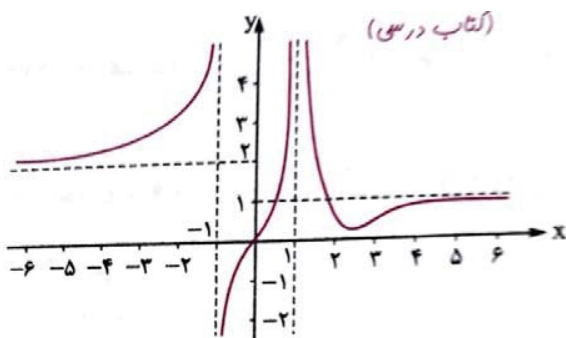
۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)

تست ۱۹۴: شکل مقابل نمودار کدام تابع f است، کدام گزینه نادرست است؟



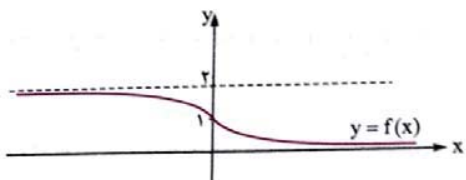
۱) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

۲) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

۳) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

۴) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

تست ۱۹۵: با توجه به نمودار نمودار تابع f ، کدام مورد نادرست است؟



۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0$

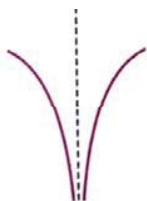
۲) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = 1$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = 0$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = 0$

تست ۱۹۶: وضعیت تابع $f(x) = \frac{3x + a}{x^2 - 2ax + 2a + 3}$ در اطراف جایی که حدش بی نهایت می شود، در شکل مقابل

نمایش داده شده است. a کدام است؟



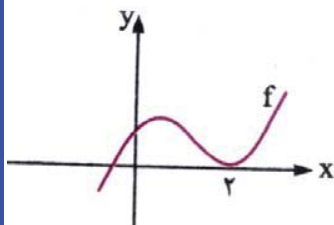
۲) $a = 3$

۱) $a = -1$

۴) مقداری برای a وجود ندارد.

۳) $a = -1$ یا $a = 3$

تست ۱۹۷: با توجه به نمودار f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{f(x)}$ کدام است؟



۱ (۱)

$+\infty$ (۲)

$-\infty$ (۳)

صفر (۴)

تست ۱۹۸: حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 9}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

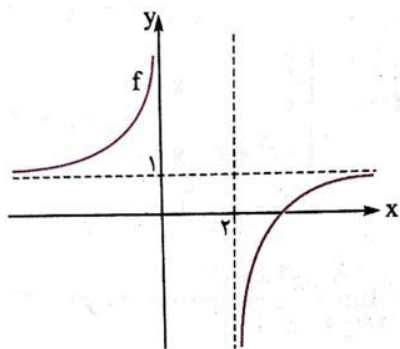
۶ (۴)

۳ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

صفر (۱)

تست ۱۹۹: شکل مقابل نمودار تابع f است. کدام گزینه نادرست است؟



$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = 1$ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = 1$ (۲)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 1$ (۳)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = 1$ (۴)

کار با بی نهایت ها

نکته:

$$۱) +\infty + \infty = +\infty$$

$$۱۰) \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$$

$$۲) -\infty - \infty = -\infty$$

$$۱۱) \frac{k}{\pm\infty} = ۰$$

$$۳) (\pm\infty)^{2k} = +\infty \quad (2k \text{ زوج}) \quad ۱۲) \frac{k}{\text{حدی } ۰} = \pm\infty \quad (۰ \text{ یا } ۰^+ = ۰ \text{ حدی } ۰)$$

$$۴) (\pm\infty)^{2k+1} = \pm\infty \quad (2k+1 \text{ فرد}) \quad ۱۳) \frac{k}{\text{مطلق } ۰} = \text{تعریف نشده}$$

$$۵) (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$۱۴) \frac{\text{مطلق } ۰ \text{ یا حدی } ۰}{k} = ۰$$

$$۶) (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$$

$$۱۵) (k > ۱)^{+\infty} = +\infty$$

$$۷) k \pm \infty = \pm\infty$$

$$۱۶) (k > ۱)^{-\infty} = ۰$$

$$۸) (\pm k\infty) = \pm\infty \quad (k > ۰)$$

$$۱۷) (۰ < k < ۱)^{+\infty} = ۰$$

$$۹) (۰ < k < ۱)^{-\infty} = +\infty$$

نکته:

$$۱) \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & a > ۱ \\ -\infty & ۰ < a < ۱ \end{cases}$$

$$۲) \log_a(۰^+) = \begin{cases} -\infty & a > ۱ \\ +\infty & ۰ < a < ۱ \end{cases}, \quad \log_a(\text{مطلق } ۰) = \text{وجود ندارد}$$

نکته:

$$a^{+\infty} = \begin{cases} ۰^+ & ۰ < a < ۱ \\ +\infty & a > ۱ \end{cases}, \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & ۰ < a < ۱ \\ ۰^+ & a > ۱ \end{cases}$$

۹.۱ تست های جمع بندی حد

تست ۲۰۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۷)

- الف) ۸ (ب) ۱۲ (ج) ۱۶ (د) ۲۴

تست ۲۰۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3 - \sqrt{x}} - 1}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۷)

- الف) ۱۱۲ (ب) ۹۶ (ج) ۸۴ (د) ۷۲

تست ۲۰۲: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

- الف) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{5}{4}$ (د) $\frac{5}{6}$

تست ۲۰۳: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه b کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

- الف) ۲ (ب) ۱ (ج) ۰ (د) ۲

تست ۲۰۴: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی ۹۴)

- الف) ۶ (ب) ۴ (ج) ۳ (د) ۵

تست ۲۰۵: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^{n-6}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۴)

- الف) $-\frac{1}{6}$ ب) $-\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{3}$

*تست ۲۰۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

- الف) $-\frac{7}{12}$ ب) $-\frac{5}{12}$ ج) $\frac{5}{12}$ د) $\frac{7}{12}$

تست ۲۰۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۳)

- الف) $-\frac{1}{12}$ ب) $-\frac{1}{6}$ ج) $\frac{1}{12}$ د) $\frac{1}{6}$

تست ۲۰۸: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

*تست ۲۰۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x} \right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۲)

- الف) ۱ ب) $+\infty$ ج) $-\frac{1}{2}$ د) $-\infty$

تست ۲۱۰: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

- الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) $\frac{3}{2}$

تست ۲۱۱: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه $(2, 1)$ بگذرد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ برابر کدام یک از اعداد زیر است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

- الف) $-\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) ۱

تست ۲۱۲: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

- الف) -۲ ب) $\frac{3}{2}$ ج) ۳ د) ۲

تست ۲۱۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos^2 x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

- الف) ۱ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) -۱

تست ۲۱۴: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام یک از اعداد زیر است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

- الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{2}{4}$ د) $\frac{3}{2}$

* تست ۲۱۵: حد عبارت $\frac{1-\cos^2 x}{x \sin x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

- الف) ۱ ب) ۲ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{4}$

تست ۲۱۶: حد عبارت $\frac{\cos x}{1-\sin x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

- الف) ۱ ب) ۲ ج) $-\infty$ د) $+\infty$

تست ۲۱۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos^2 x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

- الف) -۲ ب) -۱ ج) ۱ د) ۲

تست ۲۱۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۸)

- الف) -۴ ب) -۲ ج) ۲ د) ۴

تست ۲۱۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۷)

- الف) -۲ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) ۲

تست ۲۲۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۶)

- الف) $\frac{-1}{3}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{-1}{4}$

* تست ۲۲۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

- الف) $\frac{3}{8}$ ب) $\frac{3}{16}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{16}$

* تست ۲۲۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2+x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۵)

- الف) $-\frac{1}{4}$ ب) $-\frac{7}{4}$ ج) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{5}{4}$

* تست ۲۲۳: حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر -2 است حاصل $m + n$ برابر کدام

گزینه است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

- الف) ۳ ب) $\frac{3}{5}$ ج) ۴ د) $\frac{4}{5}$

* تست ۲۲۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2-1|}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

- الف) $-\pi$ ب) $-\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) π

* تست ۲۲۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

- الف) -1 ب) ۱ ج) صفر د) $+\infty$

* تست ۲۲۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۱)

- الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{3}{2}$

تست ۲۲۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۶)

- الف) $-\frac{5}{4}$ ب) $-\frac{3}{4}$ ج) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{1}{4}$

تست ۲۲۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۶)

- الف) -2 ب) $-\frac{3}{4}$ ج) $\frac{3}{4}$ د) 1

*تست ۲۲۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

- الف) -2 ب) 2 ج) $-\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{4}$

*تست ۲۳۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۶)

- الف) -1 ب) 1 ج) $-\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{4}$

*تست ۲۳۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

- الف) $-\frac{3}{4}$ ب) $-\frac{3}{4}$ ج) $-\frac{1}{4}$ د) $\frac{3}{4}$

*تست ۲۳۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۳)

- الف) -8 ب) صفر ج) 4 د) ∞

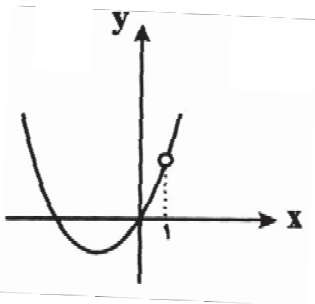
تست ۲۳۳: اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

- الف) -۳ ب) ۳ ج) ۶ د) ۱۲

تست ۲۳۴: حد عبارت $\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

- الف) ۲ ب) -۲ ج) ۳ د) -۳

تست ۲۳۵: شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{4x^3+ax+b}{x-1}$ است، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟ (تجربی داخل ۸۷)



- الف) $(-4, 0)$ ب) $(-4, 1)$ ج) $(0, -4)$ د) $(4, 0)$

*تست ۲۳۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} \right)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۶)

- الف) $-\frac{4}{5}$ ب) $-\frac{2}{3}$ ج) $\frac{2}{5}$ د) $\frac{2}{3}$

*تست ۲۳۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x^2} - 2x)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

- الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{6}$

تست ۲۳۸: حد عبارت $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{2x-4}{x^2-2x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

- الف) ۲ ب) -۲ ج) $\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{2}$

تست ۲۳۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۴)

- الف) ۱ ب) -۱ ج) ۲ د) $\frac{1}{2}$

*تست ۲۴۰: اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - ax - b) = 0$ حاصل $a + b$ کدام است؟

- الف) ± 1 ب) ± 2 ج) ± 3 د) صفر

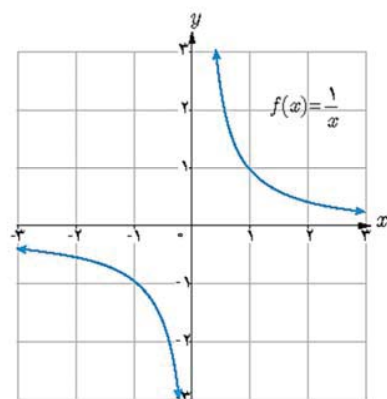
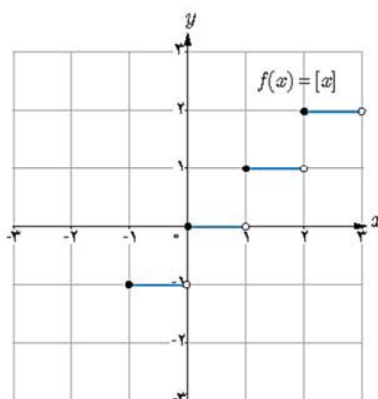
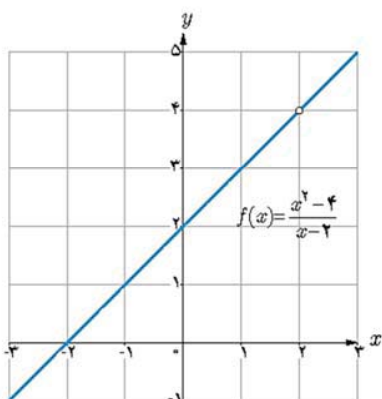
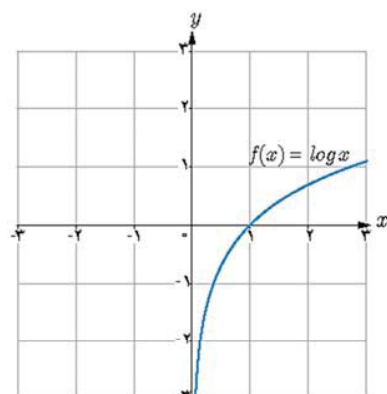
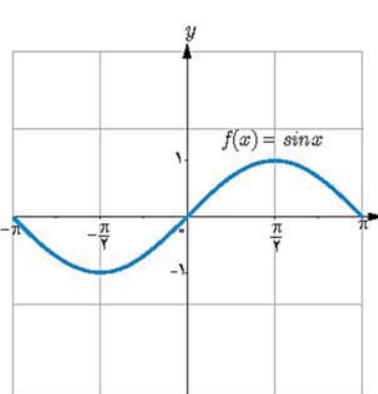
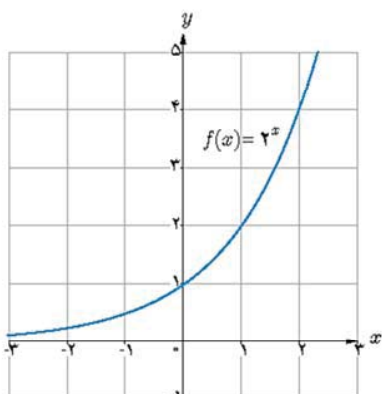
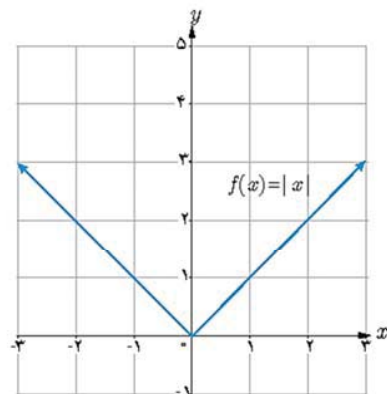
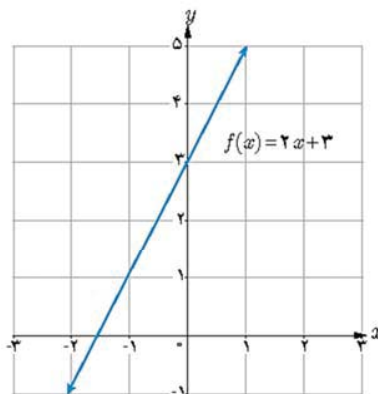
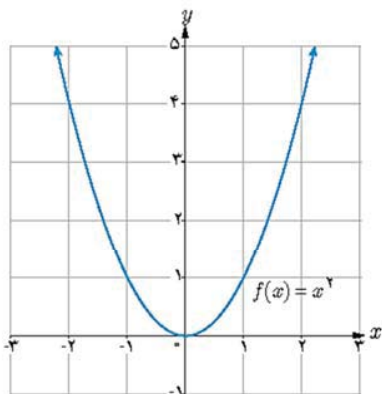
تست ۲۴۱: حد کسر $\frac{2x^2 - x + [-x]}{x^3 + 2x - 3}$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟

- الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{5}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{6}$



۱۰.۱ پیوستگی

به نمودار توابع زیر توجه کنید، کدام یک از آنها بدون برداشتن قلم قابل رسم است؟



نتیجه : به نمودارهایی که در آنها بدون برداشتن قلم ، نمودار به راحتی قابل رسم باشد ، را پیوسته گویند .

تابع f در نقطه a پیوسته است اگر فقط اگر شرط های زیر برقرار باشد :

(۱) تابع $f(x)$ در نقطه a تعریف شده باشد ، یعنی $f(a)$ موجود و عدد حقیقی باشد .

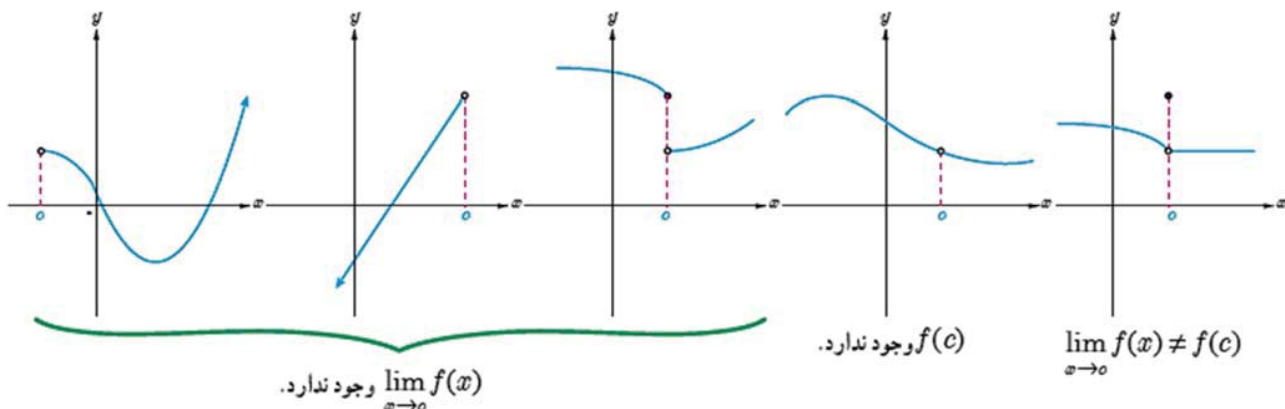
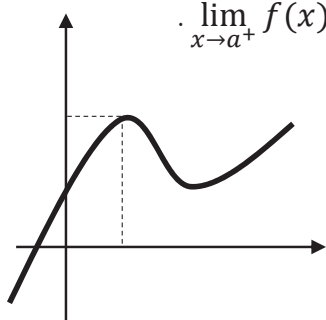
(۲) تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد و مقدار حد متناهی باشد . $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

(۳) حد تابع با مقدار تابع در نقطه a برابر باشد .

جمع بندی : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

اگر تابع f در نقطه a پیوسته نباشد f در آن نقطه منفصل یا ناپیوسته است .

نمودارهای زیر انواعی از ناپیوستگی را نشان می دهند :



سوال : حالت های مختلفی از ناپیوستگی در زیر آمده است، با رسم شکل آنها را تجسم نمایید.

الف) حد چپ و راست عدد اما نا برابر :

ب) حد موجود اما با مقدار تابع نا برابر

ج) حد بی نهایت و مقدار تابع موجود :

نکته: از لحاظ نموداری تابع باید هیچگونه پرش، حفره و بریدگی در دامنه خود نداشته باشد.

سوال: پیوستگی یا ناپیوستگی هر کدام از توابع زیر در $x = 1$ با رسم شکل و تعریف نشان دهید.

۱) $f(x) = (x - 3)^2$

۲) $g(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$

۳) $h(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$

تست ۲۴۲: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x + a & x \geq 0 \\ \frac{2}{x} \sin x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه ای به طول صفر پیوسته است، مقدار a برابر:

- الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

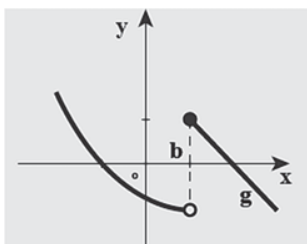
تست ۲۴۳: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 + x - 2| & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۰)

- الف) هر مقدار a ب) ۳ ج) -۳ د) هیچ مقدار a

تست ۲۴۴: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x - \sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

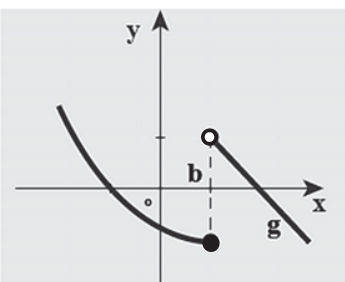
- الف) ۱ ب) ۲ ج) -۱ د) هیچ مقدار a

۱۱.۱ پیوستگی یک طرفه



(۱) تابع f را در $x = a$ از راست پیوسته گوییم هرگاه در همسایگی راست a تعریف شده باشد و :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$



(۲) تابع f را در $x = a$ از چپ پیوسته گوییم هرگاه در همسایگی چپ a تعریف شده باشد و :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

تست ۲۴۵ : تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 2 & x > 2 \\ k & x = 2 \\ \frac{\sqrt{x+6}-2}{x-2} & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوستگی چپ دارد آنگاه : (سراسری تجربی ۸۶)

الف) $k = \frac{1}{12}$ ب) $k = \frac{1}{8}$ ج) $k = \frac{1}{6}$ د) $k = 0$

تست ۲۴۶ : اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ باشد تابع f در $x = 1$ است .

الف) از راست پیوسته و از چپ ناپیوسته ب) از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته

ج) از چپ و راست ناپیوسته د) از چپ و راست پیوسته

۱.۱۱.۱ پیوستگی تابع در یک فاصله

تابع f را روی بازه (a, b) پیوسته می‌گوییم هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

اگر تابع f را بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، علاوه بر پیوستگی در فاصله (a, b) باید در نقطه a دارای پیوستگی راست و در نقطه b دارای پیوستگی چپ باشد.

اگر تابع f را بر بازه (a, b) پیوسته باشد، علاوه بر پیوستگی در فاصله (a, b) باید در نقطه b دارای پیوستگی چپ باشد.

اگر تابع f را بر بازه $[a, b)$ پیوسته باشد، علاوه بر پیوستگی در فاصله (a, b) باید در نقطه a دارای پیوستگی راست باشد.

کار در کلاس

سه تابع متفاوت مثال بزنید که:

الف) روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد. ب) روی بازه $[-2, +\infty)$ پیوسته باشد. پ) روی بازه $(-\infty, 0)$ پیوسته باشد.

مثال: الف) اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد، آنگاه f روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته است؛ زیرا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ($c \in \mathbb{R}$)

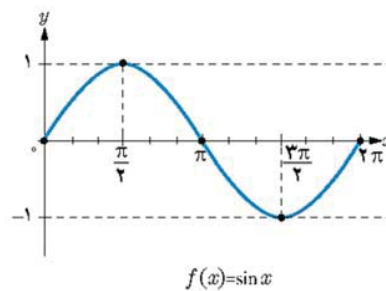
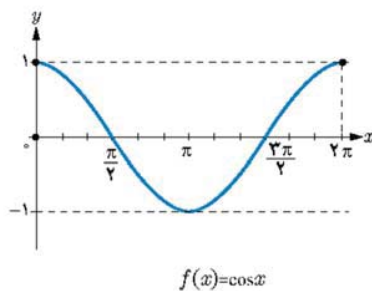
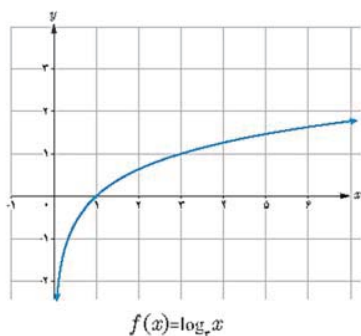
ب) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازه‌های $(-\infty, \infty)$ پیوسته‌اند.

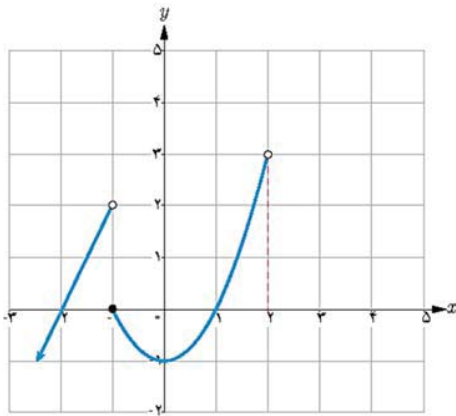
پ) تابع $f(x) = \log_r x$ روی بازه $(0, \infty)$ پیوسته است.

ت) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

ث) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازه‌های $[0, 2\pi]$ پیوسته‌اند.

ج) تابع $f(x) = \log_r x$ روی بازه $[1, 2]$ پیوسته است.





$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$

۱) تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم:

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به دست آورید.

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

۲) دربارهٔ تابع f کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

ب) f روی بازهٔ $(-\infty, -1)$ پیوسته است.

الف) f روی بازهٔ $(-\infty, -1]$ پیوسته است.

ت) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

پ) f روی بازهٔ $[2, 5]$ پیوسته است.

ج) f روی بازهٔ $(-2, 0)$ پیوسته است.

ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$

سوال : تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

تست ۲۴۷: تابع $y = \frac{x^2}{x^2 - 2ax + 3a - 2}$ به ازای چه مقدار a همواره پیوسته است؟ (آزاد ۷۵)

الف) $1 < a < 2$ ب) $a > 3$ ج) $a \geq 1$ د) $a < 1$ یا $a > 2$

۱۲.۱ تست های جمع بندی پیوستگی

*تست ۲۴۸: تابع $f(x) = \begin{cases} x+a & x \geq 0 \\ \frac{2}{x} \sin x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه صفر پیوسته است ، مقدار a چند است ؟ (سراسری تجربی ۶۸)

الف (صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

تست ۲۴۹: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+x^2-2}{x^2-1} & x \neq \pm 1 \\ a & x = \pm 1 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۷۳)

الف (۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست ۲۵۰: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+|x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته است ؟ (سراسری تجربی ۷۷)

الف (-۲ ب) -۱ ج) ۱ د) ۲

تست ۲۵۱: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2\cos x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چگونه است ؟ (سراسری تجربی ۸۱)

الف (از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته ب) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

ج (از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته د) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

تست ۲۵۲: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}} & x > 1 \\ ax - a + 4 & x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a پیوسته است ؟ (سراسری تجربی ۸۲)

الف (هیچ مقدار a ب) هر مقدار a ج) صفر د) ۴

تست ۲۵۳: مجموعه طول نقاط ناپیوستگی نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - 4} & |x| > 1 \\ 2x - 1 & |x| \leq 1 \end{cases}$ کدام است ؟

(سراسری تجربی ۸۳)

- الف) $\{-1, 1\}$ ب) $\{1\}$ ج) $\{-1\}$ د) \emptyset

*تست ۲۵۴: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x+|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ چگونه است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

- الف) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته ب) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
ج) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته د) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

تست ۲۵۵: تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 2 & x > 2 \\ k & x = 2 \\ \frac{\sqrt{x+6}-2}{x-2} & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوستگی چپ دارد آنگاه: (سراسری تجربی ۸۶)

- الف) $k = \frac{1}{12}$ ب) $k = \frac{1}{8}$ ج) $k = \frac{1}{6}$ د) $k = 0$

تست ۲۵۶: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} & x > 0 \\ a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & x \leq 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه ی $x = 0$ پیوسته است ؟

(سراسری تجربی ۸۶)

- الف) ۲ ب) ۴ ج) هیچ مقدار a د) هر مقدار a

تست ۲۵۷: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است ؟

(خارج از کشور تجربی ۹۰)

- الف) -۱ ب) صفر ج) $-\frac{1}{2}$ د) ۱

تست ۲۵۸: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & x > 1 \\ x-a+3 & x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

(خارج از کشور تجربی ۸۶)

- الف) $\frac{1}{2}$ ب) ۲ ج) هیچ مقدار a د) هر مقدار a

تست ۲۵۹: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

- الف) -۲ ب) -۱ ج) $-\frac{1}{2}$ د) ۱

تست ۲۶۰: به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & x \geq -1 \\ x^2+ax & x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۸۷)

- الف) $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ ب) $\{1, \sqrt{2}\}$ ج) \emptyset د) \mathbb{R}

تست ۲۶۱: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & |x| > 1 \\ 2x & |x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه 1 و -1 چگونه است؟

(سراسری تجربی ۸۸)

- الف) در -1 ناپیوسته، در 1 ناپیوسته ب) در -1 ناپیوسته، در 1 پیوسته
ج) در -1 پیوسته، در 1 پیوسته د) در -1 پیوسته، در 1 ناپیوسته

تست ۲۶۲: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ در بازه $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ با شرط $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ پیوسته است. $a - b$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

- الف) -۵ ب) -۴ ج) ۴ د) ۵

تست ۲۶۳: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی ۹۰)

الف) هر مقدار a (ب) ۳ (ج) -۳ (د) هیچ مقدار a

تست ۲۶۴: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

(سراسری تجربی ۹۱)

الف) هر مقدار a (ب) هیچ مقدار a (ج) فقط -۲ (د) فقط ۲

تست ۲۶۵: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی

مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

الف) ۱ (ب) -۱ (ج) ۲ (د) ۳

تست ۲۶۶: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه ی $x = 2$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی ۹۲)

الف) ۴ (ب) ۴/۵ (ج) ۵ (د) هیچ مقدار a

*تست ۲۶۷: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۲)

الف) -۱ (ب) ۱/۲ (ج) ۱ (د) صفر



تست ۲۶۸ : تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\tan^2 x}{\cos^2 x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos^3 x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است ؟

(سراسری تجربی ۹۳)

الف) $-2\sqrt{2}$ ب) -1 ج) 2 د) $\sqrt{2}$

*تست ۲۶۹ : تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & \pi < x \leq 2\pi \\ a \cos^{\frac{2x}{3}} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = \pi$ پیوسته است ؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۳)

الف) $-2\sqrt{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $\sqrt{2}$ د) $-\sqrt{2}$

تست ۲۷۰ : به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ به ازای اعداد حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است ؟

(سراسری تجربی ۹۴)

الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{4}$

تست ۲۷۱ : به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^3 x}{\cos x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin \delta x - a & \frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi \end{cases}$ بر روی بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است ؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۴)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست ۲۷۲: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $x \neq 0$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \\ a \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟
(سراسری تجربی ۹۶)

الف) ۱ ب) -۱ ج) -۲ د) ۲

تست ۲۷۳: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $x > 1$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \\ ax - a + 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟
(سراسری تجربی خارج کشور ۹۶)

الف) ۱ ب) ۲ ج) هر مقدار a د) هیچ مقدار a

تست ۲۷۴: تابع با ضابطه ی $x < 3$ $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} \\ a \log_2(1+x) \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟
(سراسری تجربی ۹۷)

الف) -۲ ب) -۱/۵ ج) ۱ د) صفر

تست ۲۷۵: تابع با ضابطه ی $x < 1$ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} \\ x^2 + ax \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است. $f(\frac{-3}{4})$ کدام است؟
(سراسری تجربی خارج ۹۷)

الف) ۰/۵ ب) -۱/۲۵ ج) ۱/۵ د) ۲/۵

تست ۲۷۶: تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{|x|}{-\sqrt{-x}}$ بر کدام مجموعه پیوسته است؟ (سراسری ریاضی ۷۵)

الف) $(-\infty, 0)$ ب) $(-\infty, 0]$ ج) $(0, +\infty)$ د) $[0, +\infty)$

تست ۲۷۷: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & |x| \leq 2 \\ \frac{1}{x} - 1 & |x| > 2 \end{cases}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

- الف (صفر) ب (۱) ج (۲) د (بی شمار)

*تست ۲۷۸: تابع $f(x) = (x-1)[x]$ در بازه $[0, 2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (سراسری ریاضی ۷۸)

- الف (سه) ب (دو) ج (یک) د (هیچ)

تست ۲۷۹: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $x \neq 1$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی غیر منفی پیوسته است؟ (سراسری ریاضی ۷۹)

- الف ($\frac{1}{2}$) ب (۱) ج ($\frac{3}{2}$) د (۲)

تست ۲۸۰: تابع f با ضابطه ی $|x| > 1$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{x} & |x| > 1 \\ ax+b & |x| \leq 1 \end{cases}$ پیوسته است. دوتایی (a, b) کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

- الف ($(0, 1)$) ب ($(1, 0)$) ج ($(0, 2)$) د ($(2, 0)$)

تست ۲۸۱: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $x > 2$ $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1+\sqrt{1-x})}{x^2-2x} & x > 2 \\ x-a & x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

- الف ($\frac{1}{2}$) ب ($\frac{1}{6}$) ج ($\frac{2}{4}$) د ($\frac{3}{2}$)

تست ۲۸۲ : در نقطه ای تابعی پیوسته و تابع دیگری ناپیوسته است با کدام عمل بین توابع ممکن است تابع حاصل در آن نقطه پیوسته باشد ؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

الف (هر دو حالت تقسیم یکی بر دیگری) ب (جمع) ج (ضرب) د (تفاضل)

تست ۲۸۳ : اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد ، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می کند ؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

الف (-۲) ب (۱) ج (-۱) د (۲)

*تست ۲۸۴ : اگر $f + g$ و $f - g$ هر دو در نقطه x پیوسته باشند کدام درست است ؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

الف (الزاماً تابع $f \circ g$ در x پیوسته است) ب ($f \cdot g$ در x ممکن است پیوسته نباشد)

ج (f یا g ممکن است در x پیوسته نباشد) د (الزاماً f و g هر دو در x پیوسته اند .)

*تست ۲۸۵ : به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ بر روی کل اعداد حقیقی پیوسته

است ؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۸)

الف ($-\pi$) ب (π) ج (۱) د (هیچ مقدار a)

* تست ۲۸۶ : به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1} & x < -1 \\ ax + 1 & x \geq -1 \end{cases}$ بر روی کل اعداد حقیقی

پیوسته است ؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۷)

- الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{5}{4}$ د) $\frac{3}{2}$

* تست ۲۸۷ : اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است ؟

(خارج از کشور ریاضی ۸۶)

- الف) $f + g$ ب) $f \circ f$ ج) $g \circ f$ د) $f \circ g$

* تست ۲۸۸ : اگر تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax + b & |x| \geq 1 \end{cases}$ بر روی کل اعداد حقیقی پیوسته باشد مقدار a کدام

است ؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۵)

- الف) -1 ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) 1

* تست ۲۸۹ : تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر روی مجموعه اعداد حقیقی

پیوسته است ؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

- الف) 1 ب) -1 ج) همواره ناپیوسته د) صفر

تست ۲۹۰: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $x \neq 0$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه ی $x = 0$ پیوسته

است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

- الف) $\frac{-1}{4}$ ب) $\frac{-1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) هیچ مقدار a