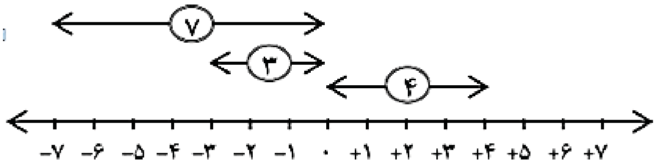
## قدرمطلق

قدر مطلق یک عدد یعنی فاصله‌ی آن از مبدأ




$$|+۴| = +۴$$
$$|-۳| = +۳$$
$$|-۷| = +۷$$

**تعریف**: اگر $x$ یک عدد حقیقی باشد قدرمطلق آن را به صورت $|x|$ نمایش می دهیم و داریم: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq ۰ \\ -x, & x < ۰ \end{cases}$

این تعریف بیان می کند که اگر عبارت داخل قدرمطلق مثبت باشد خود عبارت را می نویسیم یعنی: $|x| = x$

در صورتی که عبارت داخل قدرمطلق مقداری منفی باشد، قرینه ی عبارت داخل قدرمطلق را می نویسیم یعنی: $|x| = -x$

درحالت کلی $|u| = \begin{cases} u & u \geq ۰ \\ -u & u < ۰ \end{cases}$

**نکته**: تابع قدرمطلق را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\sqrt{x^۲} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq ۰ \\ -x, & x < ۰ \end{cases}$

مثال ۱ : حاصل عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-۵| = -(-۵) = +۵$

ب) $\underbrace{|۱-\sqrt{۲}|}_{\text{منفی}} = -(۱-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۱$

پ) $\underbrace{|۲-\sqrt{۲}|}_{\text{مثبت}} = ۲ - \sqrt{۲}$

ت) $|-۶ \div ۳ \times ۲| = |-۲ \times ۲| = |-۴| = -(-۴) = ۴$

ث) $\underbrace{|a^۲ + ۱|}_{\text{مثبت}} = a^۲ + ۱$

ج) $|x^۲ + ۴x + ۴| = \underbrace{|(x+۲)^۲|}_{\text{نامنفی}} = (x+۲)^۲$

چ) $\underbrace{|-(x-۱)^۲ - ۳|}_{\text{منفی}} = -(-(x-۱)^۲ - ۳)$

**مثال:** حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف ) $|-۵ - (-۳)| = |-۲| = ۲$

ب ) $|\sqrt{۳} - \sqrt{۵}| = -(\sqrt{۳} - \sqrt{۵}) = \sqrt{۵} - \sqrt{۳}$

پ ) $\left|۱/۵ - ۱\frac{۱}{۲}\right| = |۰| = ۰$

تمرین:

۱) $|\sqrt{۵} - ۲|$ ۲) $|\sqrt{۵} - ۳|$

**سؤال۴: اگر $b < ۰ < a$ باشد حاصل $|a-b| + |a+۱| - |۱-b|$ چقدر است؟**

۱) ۲a ۲) ۲b ۳) −۲a ۴) −۲b

$$b < ۰ < a \Rightarrow \begin{cases} a > b \Rightarrow a - b > ۰ \\ a > ۰ \Rightarrow a + ۱ > ۰ \\ b < ۰ \Rightarrow -b > ۰ \Rightarrow ۱ - b > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|a-b|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|a+۱|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|۱-b|}_{\text{مثبت}} = a - b + a + ۱ - (۱ - b) = ۲a$$

**سؤال۷: اگر $a < b < ۰ < x$ آنگاه حاصل $|x-b| + |a-b-x|$ کدام است.**

$$a<b<0<x \Rightarrow \begin{cases} x-b>0 \\ a-b<0, -x<0 \Rightarrow a-b-x<0 \end{cases} \Rightarrow |\underbrace{x-b}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{a-b-x}_{\text{منفی}}| = x-b-(a-b-x)=2x-a$$

**سؤال۸: اگر $|a+1|<1-b$ باشد حاصل عبارت $|a+b|+|a-b+2|-|b-2|$ کدام است.**

۱) $-b$ ۲) $4-3b$ ۳) $3b-4$ ۴) $b-2a-4$

## روش تبدیل تابع قدرمطلق به یک تابع چند ضابطه ای و رسم آن:

در این روش ابتدا عبارت درون قدر مطلق را برابر صفر قرار می دهیم تا ریشه های آن ها را به دست آوریم. سپس دامنه ی تابع قدرمطلقی را به ازای ریشه های به دست آمده به قسمت های مختلفی تقسیم می کنیم. با توجه به محدوده $x$ ، در هر قسمت، علامت عبارت درون قدرمطلق ها را مشخص کرده و آن گاه قدرمطلق را بر می داریم. در نهایت نمودار ضابطه های به دست آمده در هر قسمت را با توجه به محدوده ی $x$ آن ها رسم می کنیم.

**مثال:** با استفاده از تعیین علامت ، ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|=\begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$

| x | | −۱ | | ۱ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

ب) $g(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1 \\ -x^2+1 & -1<x<1 \end{cases}$

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases} -x+(-x-1)=-2x & x\leq -1 \\ -x+1+x+1=2 & -1<x<1 \\ x-1+x+1=2x & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x & x\leq -1 \\ 2 & -1<x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$

**مثال :** اگر $1<x<3$ حاصل عبارت $|x-1|+|x-3|$ را به دست آورید.

$$1<x<3 \Rightarrow |\underbrace{x-1}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{x-3}_{\text{منفی}}| = (x-1)+\big(-(x-3)\big)=x-1-x+3=2$$

**مثال :** حاصل $|2-x|+|2x-1|$ وقتی $-1<x<0$ باشد کدام است؟

۱) $-3-3x$ ۲) $3-3x$ ۳) $-3+3x$ ۴) $1+x$

$$-1<x<0 \Rightarrow |\underbrace{2x-1}_{\text{منفی}}|+|\underbrace{2-x}_{\text{مثبت}}| = -(2x-1)+(2-x)=-3x+3$$

**مثال :** اگر $|x^2-2x|=2x-x^2$ باشد آن گاه محدوده‌ی $x$ کدام است؟

$$|u|=-u \Rightarrow u\leq 0 \Rightarrow x^2-2x\leq 0$$

**مثال:** اگر $-1<x<0$ ، آن گاه حاصل عبارت $A=|x+1|-|2x-3|+|x|$ را به دست آورید.

$$A=|\underbrace{x+1}_{\text{مثبت است}}|-|\underbrace{2x-3}_{\text{منفی است}}|+|\underbrace{x}_{\text{منفی است}}| = (x+1)-\big(-(2x-3)\big)+(-x)=x+1+2x-3-x=2x-2$$

## رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق

روش کلی **رسم نمودار** توابع شامل قدر مطلق استفاده از تعریف قدرمطلق وتبدیل به یک تابع چند ضابطه‌ای به کمک تعیین علامت است

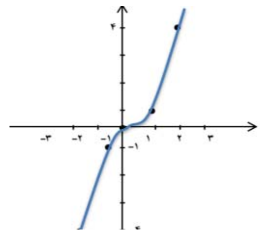
برای رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ریشه‌های داخل قدر مطلق را به دست می‌آوریم.وعبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم

۲- با توجه به ریشه‌های بدست آمده و جدول تعیین علامت، قدر مطلق را برمی‌داریم و تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

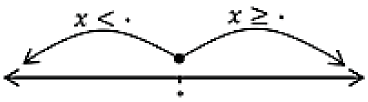
۳- نمودار هر ضابطه را با توجه به محدوده‌ی مورد نظر رسم می کنیم.

مثال:



ب) $y = x|x|$

I $x = ۰$

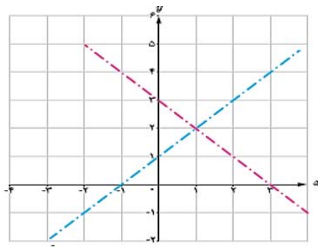



II $y = \begin{cases} x(x) = x^۲ & x \geq ۰ \\ x(-x) = -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$

$y = x + |x|$

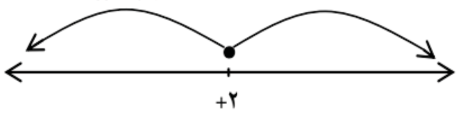
مثال: نمودار تابع $y = |x - ۱| + ۲$ را رسم کنید.

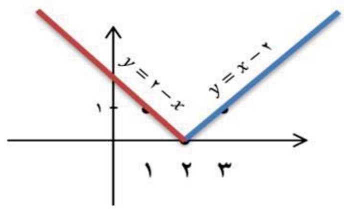
$$y = |x - ۱| + ۲ = \begin{cases} x - ۱ + ۲ & , x \geq ۱ \\ -x + ۱ + ۲ & , x < ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ & x \geq ۱ \\ -x + ۳ & x < ۱ \end{cases}$$



**مثال :** نمودار تابع $y = |x - ۲|$ را رسم کنید.

I $x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = +۲$




II $y = \begin{cases} x - ۲ \; ; & x \geq +۲ \\ -(x - ۲) \; ; & x < +۲ \end{cases}$

$\Longrightarrow y = \begin{cases} x + ۲ \; ; & x \geq +۲ \\ ۲ - x \; ; & x < +۲ \end{cases}$

مثال: نمودار تابع $f$ با ضابطه $f(x) = |x-۱| + |x+۲|$ را رسم کنید .

| x | | −۲ | | ۱ | |
|---|---|---|---|---|---|
| x − ۱ | − | | − | ○ | + |
| x + ۲ | − | ○ | + | | + |

$f(x) = (x-۱) + (x+۲) = ۲x+۱$

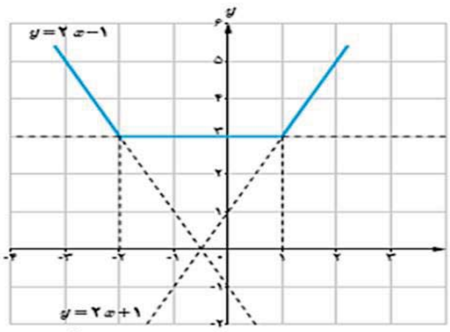
$f(x) = -(x-۱) + (x+۲) = ۳$

$f(x) = -(x-۱) - (x+۲) = -۲x-۱$

$$f(x) = \begin{cases} -۲x-۱ & , \quad x < -۲ \\ ۳ & , -۲ \le x \le ۱ \\ ۲x+۱ & , \quad x > ۱ \end{cases}$$

| −۲ | −۳ |
|---|---|
| ۳ | ۵ |

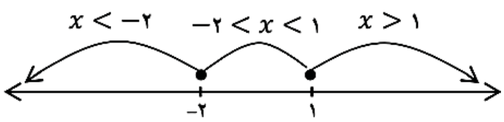
| ۱ | ۲ |
|---|---|
| ۳ | ۵ |

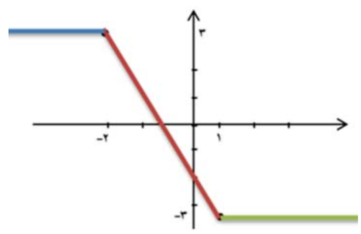



**مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x-۱| - |x+۲|$

I $\begin{cases} x-۱ = ۰ \to x = ۱ \\ x+۲ = ۰ \to x = -۲ \end{cases}$



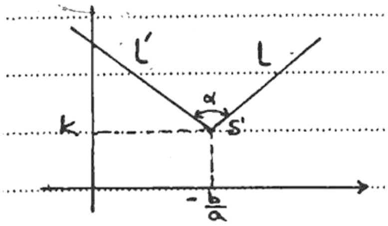
II $y = \begin{cases} (x-۱) - (x+۲) = -۳ & ; x > ۱ \\ -(x-۱) - (x+۲) = -۲x-۱ & ; -۲ \le x \le ۱ \\ -(x-۱) - \big(-(x+۲)\big) = ۳ & ; \ x < -۲ \end{cases}$

**روش سریع رسم نمودارهای توابع قدر مطلقی (حالت‌های خاص)**

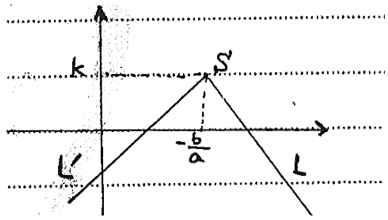
۱- توابع به فرم $\pm d$ |عبارت درجه یک| $y = a$ (نمودار به فرم $\bigvee$ ($a > ۰$) یا $\bigwedge$ ($a < ۰$) می‌شود)

ابتدا ریشه داخل قدر مطلق که همان رأس نمودار است را به دست می‌آوریم سپس یک عدد سمت راست ریشه و یک عدد سمت چپ ریشه (ترجیحاً با فواصل یکسان) می‌نویسیم و با توجه به نقاط به دست آمده نمودار را رسم می‌کنیم.

نمودار معادله $y=|ax+b|+k$ :



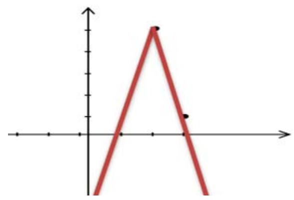

نمودار معادله $y=-|ax+b|+k$




**تذکر**: برای تابع $y=k|x-\alpha|+\beta$ نقطه $S=(\alpha,\beta)$ راس می باشد. برای رسم نمودار آن علاوه بر راس می توانیم مختصات دو نقطه دیگر در طرفین راس و به فاصله مساوی از آن تعیین می کنیم. خط $x=\alpha$ محور تقارن آن است (مانند سهمی رسم می شود). اگر $|k|>1$ منحنی به محور $y$ ها نزدیک می شود و اگر $|k|<1$ منحنی از محور $y$ ها دور می شود.

$$y=-۲|۳x-۶|+۵$$
$$۳x-۶=۰ \Rightarrow x=۲$$

| | | ریشه | |
|---|---|---|---|
| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ |
| $y$ | -۱ | ۵ | -۱ |

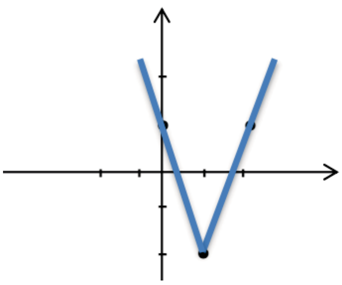


**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳|x-۱|-۲$

$x-۱=۰ \to x=۱$

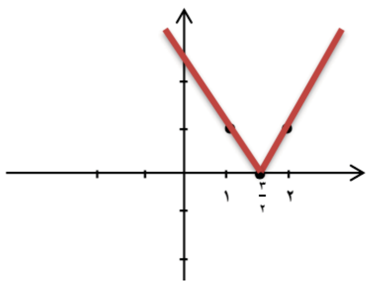
| | | رأس | |
|---|---|---|---|
| $x$ | ۰ | ۱ | ۲ |
| $y$ | ۱ | -۲ | ۱ |



ب) $y=|۳-۲x|$

$۳-۲x=۰ \to x=\frac{۳}{۲}$

| | | رأس | |
|---|---|---|---|
| $x$ | ۱ | $\frac{۳}{۲}$ | ۲ |
| $y$ | ۱ | ۰ | ۱ |




ج) $y=-|۳-۲x|$

د) $y=۳|x-۱|+۲$

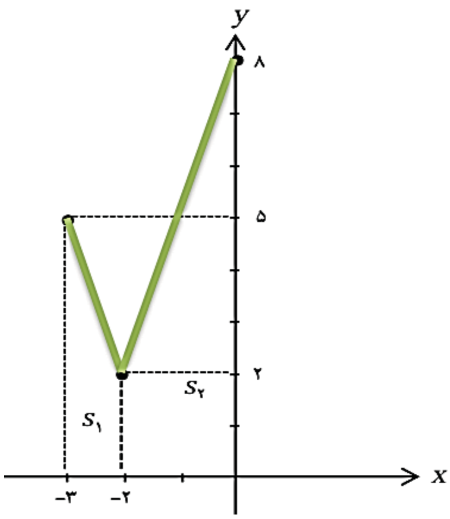
**مثال :** مساحت محدود به نمودار $f(x)=|۳x+۶|+۲$ و محور $x$ها در بازه‌ی $[-۳,۰]$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۲}$    ۲) ۱۴    ۳) $\frac{۱۳}{۲}$    ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

$f(x)=|۳x+۶|+۲$

$۳x+۶=۰\Longrightarrow x=-۲$

| | اول بازه | رأس | آخر بازه |
|---|---|---|---|
| $x$ | -۳ | -۲ | ۰ |
| $f(x)$ | ۵ | ۲ | ۸ |



ارتفاع × (مجموع قاعده‌ها) $\frac{۱}{۲}$ = مساحت ذوزنقه

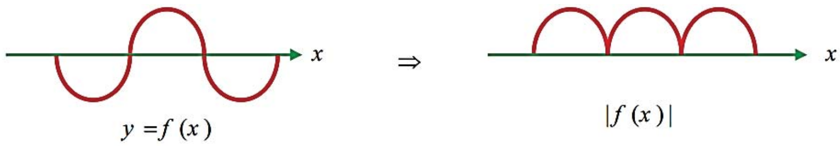
$s_۱=\frac{۱}{۲}\times(۲+۵)\times ۱=\frac{۷}{۲}$

$s_۲=\frac{۱}{۲}\times(۲+۸)\times ۲=۱۰$

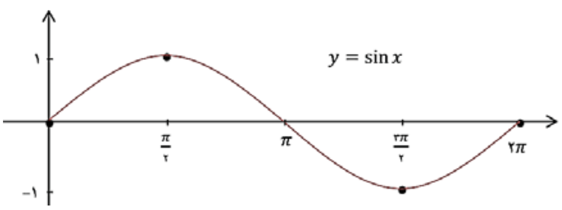
کل $s=s_۱+s_۲=\frac{۷}{۲}+۱۰=\frac{۲۷}{۲}$

۲- توابع به فرم $y=|f(x)|$ ($y$ مثبت می‌شود)

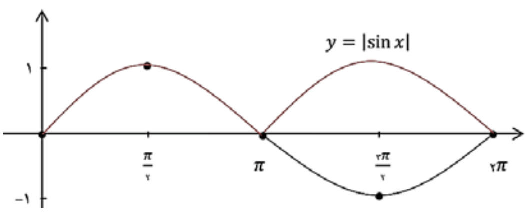
ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم (قدر مطلق را در نظر نمی‌گیریم) سپس قسمت بالای محور $x$ها را نگه می‌داریم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست ، تصویر آینه وار نمودار f(x) را نسبت به محور x ها رسم کنیم و قسمت پایین محور $x$ها را حذف می‌کنیم.



$y=|\sin x|$    $۰\le x\le ۲\pi$



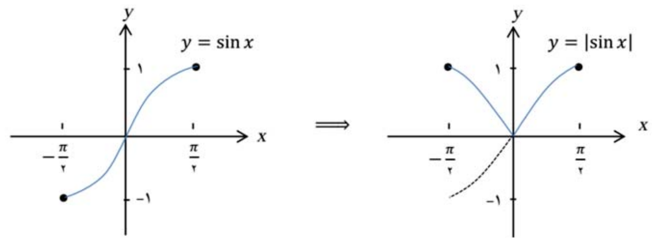
قسمت بالای محور $x$ها را نگه می‌داریم و قسمت پایین را نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم.



**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

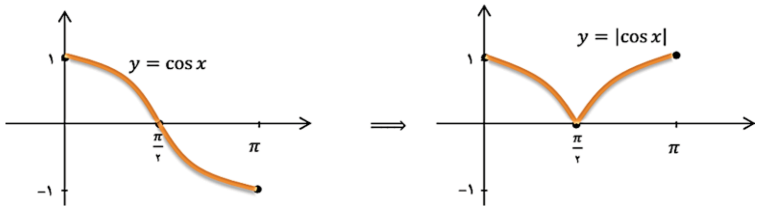
الف) $y=|\sin x|$     $-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}$

| $x$ | $-\frac{\pi}{۲}$ | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ |
|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ | -۱ | ۰ | ۱ |



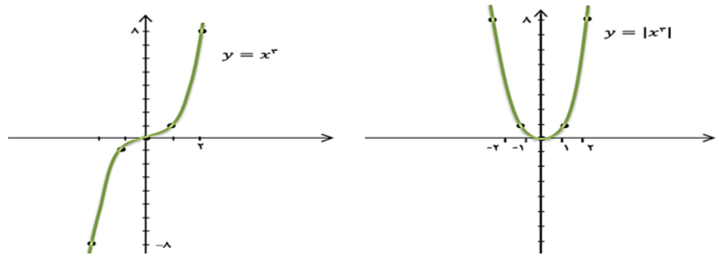

ب) $y=|\cos x|$     $۰\le x\le\pi$

| $x$ | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y=\cos x$ | ۱ | ۰ | -۱ |




پ) $y=|x^۳|$

| $x$ | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^۳$ | -۸ | -۱ | ۰ | ۱ | ۸ |

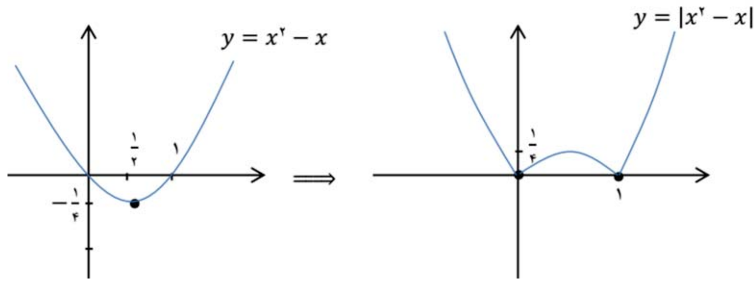



ت) $y=|x^۲-x|$

$$y=x^۲-x$$

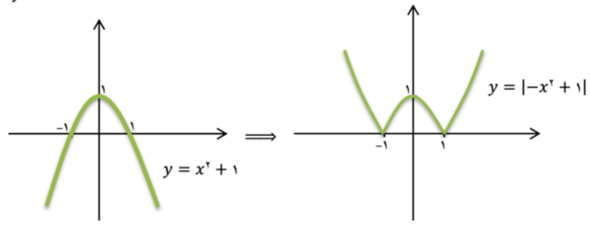
$$x_s=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱}{۲(۱)}=\frac{۱}{۲}$$

| $x$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱ |
|---|---|---|---|
| $y=x^۲-x$ | ۰ | $-\frac{۱}{۴}$ | ۰ |

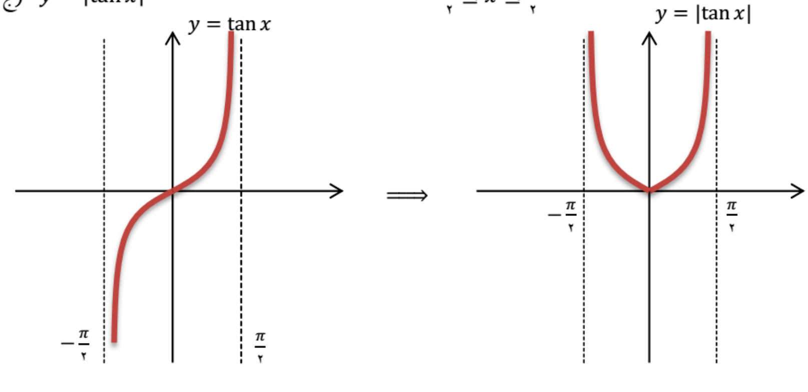



ث) $y=|۱-x^۲|$

$$y=۱-x^۲=-x^۲+۱$$

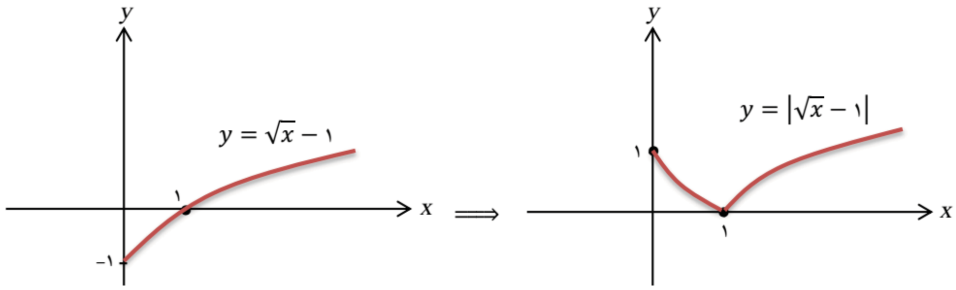



ج) $y=|\tan x|$     $-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}$

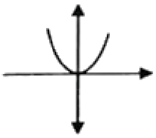


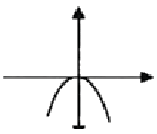
**مثال :** نمودار $f(x)=|\sqrt{x}-۱|$ را رسم کنید.

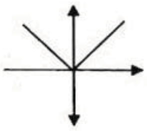
$y=\sqrt{x}-۱$

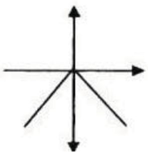


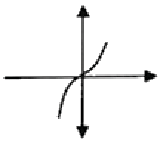

یادآوری چند نمودار مهم:

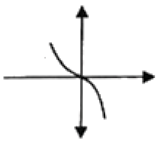
۱) $y=x^۲$


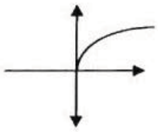
۲) $y=-x^۲$


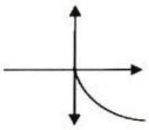
۳) $y=|x|$


۴) $y=-|x|$


۵) $y=x^۳$


۶) $y=-x^۳$


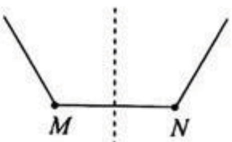
۷) $y=\sqrt{x}$


۸) $y=-\sqrt{x}$


۳- توابع به فرم $y=|x+a|+|x+b|$ (جمع دو قدر مطلق درجه یک) (**نمودارهای گلدانی**) ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها را بدست می‌آوریم سپس مربعی به ضلع $|a-b|$ (فاصله بین ریشه‌ها) به سمت بالا رسم می‌کنیم ضلع بالایی مربع را پررنگ می‌کنیم تا کف گلدان مشخص سپس وسط ضلع مربع را بدست می‌آوریم از وسط ضلع مربع دو نیم خط رسم می‌کنیم.

به طور کلی نمودار تابع $y=|x-a|+|x-b|\,,(a\neq b)$ به صورت زیر است که به آن نمودار گلدانی نیز گفته می شود.

$N\begin{vmatrix} b \\ |b-a| \end{vmatrix}$ $M\begin{vmatrix} a \\ |b-a| \end{vmatrix}$



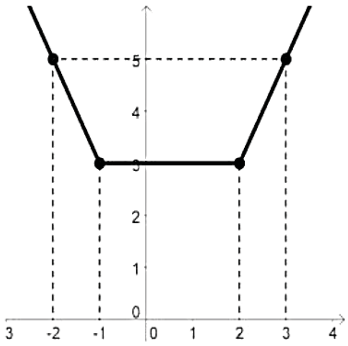

دامنه این تابع $R$ و برد آن $[|a-b|,+\infty)$ می باشد.

**مثال:** نمودار تابع $y=|x-۲|+|x+۱|$ را رسم کنید.

**حل:** ابتدا ریشه های عبارت های داخل قدرمطلق را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲=a \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱=b \end{cases}$$

| $x$ | $-۲$ | $-۱$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ۵ | ۳ | ۳ | ۳ | ۳ | ۵ |

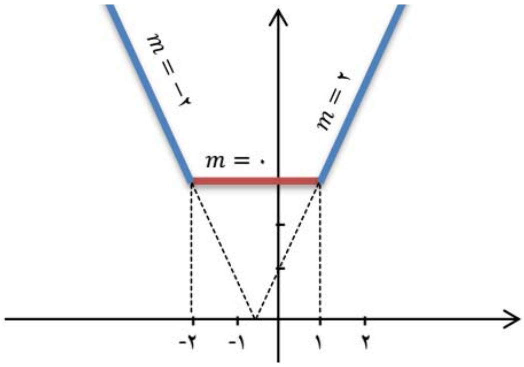


$|a-b|=|۲-(-۱)|=۳$

دامنه ی این تابع R و برد آن $[۳,+\infty)$ می باشد.

$$y=|x-۱|+|x+۲|$$

$$\begin{cases} x-۱=۰ \to x_۱=۱ \\ x+۲=۰ \to x_۲=-۲ \end{cases}$$



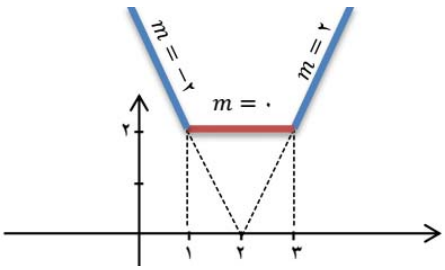

* معادله‌ی محور تقارن این نمودار $x=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$ می‌باشد.
* طبق نمودار می‌توانیم برد نمودار ، صعودی یا نزولی بودن ، مساحت و ... را بدست آوریم.
* اگر $x$ها ضریب یکسان داشته باشند همیشه گلدان درست می‌شود و به تعداد ضریب‌ها مربع (کاشی) درست می کنیم.

**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید. سپس برد هر کدام را مشخص کنید.

الف) $y=|x-۱|+|x-۳|$

$$\begin{cases} x-۱=۰ \to x=۱ \\ x-۳=۰ \to x=۳ \end{cases}$$

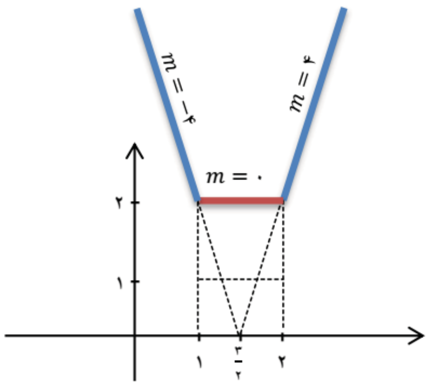
برد : $[۲,+\infty)$




ب) $y=|۲x-۲|+|۲x-۴|$

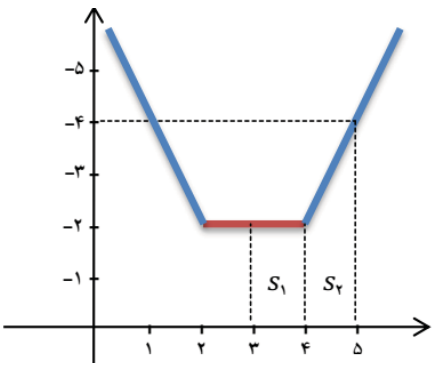
$$\begin{cases} ۲x-۲=۰ \to x=۲ \\ ۲x-۴=۰ \to x=۴ \end{cases}$$

برد : $[۲,+\infty)$



**مثال :** مساحت محصور بین نمودار $y=|x-۲|+|x-۴|$ و محور $x$ها و خطوط $x=۳$ و $x=۵$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



$$\begin{cases} x-۲=۰ \to x=۲ \\ x-۴=۰ \to x=۴ \end{cases}$$

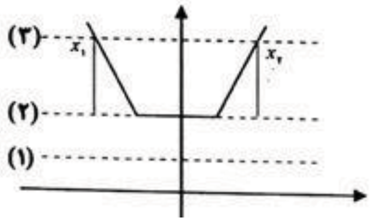
مساحت مستطیل $s_۱=۱\times۲=۲$

مساحت ذوزنقه $s_۲=\frac{۱}{۲}\times(۲+۴)\times۱=۳$

کل $s=s_۱+s_۲=۲+۳=۵$

**بحث درباره تعداد ریشه های معادله $a\neq b$ , $|x-a|+|x-b|=k$**

باید تعداد نقاط برخورد منحنی گلدانی $y=|x-a|+|x-b|$ با خط افقی $y=k$ را بیابید.



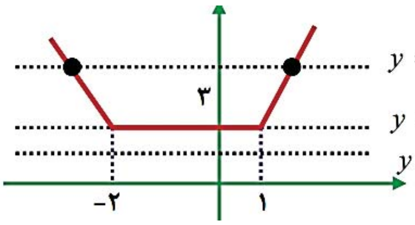

ریشه نداریم: ۱) $k<|b-a|$

بی شمار ریشه: ۲) $k=|b-a|$

دو ریشه: ۳) $k>|b-a|$

اگر دو ریشه را $x_۱$ , $x_۲$ بنامیم: $x_۱+x_۲=a+b$ , $x_۲=\frac{a+b+k}{۲}$ , $x_۱=\frac{a+b-k}{۲}$

**سؤال۱۲: تعداد جواب های معادله‌ی گلدانی $|x-۱|+|x+۲|=k$ را در حالت های $k=۲,۳,۵$ بررسی کنید.**




$y=۵ \Rightarrow$ دو جواب دارد

$y=۳ \Rightarrow [-۲,۱]$ بیشمار جواب در بازه‌ی

$y=۲ \Rightarrow$ جواب ندارد

**در حالتی که معادله‌ی گلدانی دو جواب دارد $(|a-b|<k)$ می توان ریشه های معادله‌ی گلدانی را به طریق زیر بدست آورد.**

$|x-۲|+|x-۴|=۳$

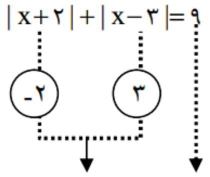
$x=\frac{۲+۴}{۲}\pm\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\frac{۹}{۲},\frac{۳}{۲}$

$|x-a|+|x-b|=k$

$x=\frac{a+b}{۲}\pm\frac{k}{۲}$

$\boxed{x_۱+x_۲=a+b \qquad |x_۱-x_۲|=k}$

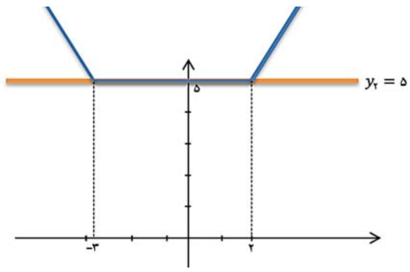
**سؤال۱۳: جواب های معادله‌ی $|x+۲|+|x-۳|=۹$ را بدست آورید.**




$$\frac{-۲+۳}{۲} \pm \frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۱}{۲}-\frac{۹}{۲}=-۴ \\ x_۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۲}=۵ \end{cases}$$

**مثال :** معادله‌ی $|x-۲|+|x+۳|=۵$ دارای چند ریشه است؟

۱) ۰     ۲) ۱     ۳) ۲     ۴) بیشمار




$y_۱=|x-۲|+|x+۳|=۵$

$$\begin{cases} x-۲=۰ \to x=۲ \\ x+۳=۰ \to x=-۳ \end{cases}$$

$y_۲=۵$

**سؤال۱۴: معادله‌ی $|x-a|+|x+۱|=۴$ بی شمار ریشه داشته باشد، a کدام است.**

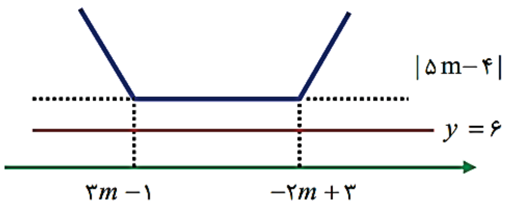
**۱) $-۵$ یا ۲     ۲) $-۲$ یا ۵     ۳) ۳ یا $-۵$     ۴) ۳ یا $-۲$**

**سؤال۱۷: در معادله‌ی $|x+۶a|+|x-۲a|=-۱۰a$ تفاضل ریشه‌ی کوچکتر از ریشه‌ی بزرگتر برابر ۱۰ است. در این معادله مجموع ریشه ها کدام است.**

**۱) ۲     ۲) ۳     ۳) ۴     ۴) ۵**

**سؤال۷: به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $|x+۲m-۳|+|x-۳m+۱|=۶$ جواب ندارد.**

۱) $m<-\frac{۲}{۵}$ یا $m>۲$     ۲) $m>\frac{۲}{۵}$ یا $m<-۱$     ۳) $-\frac{۲}{۵}<m<۲$     ۴) $-۲<m<\frac{۲}{۵}$

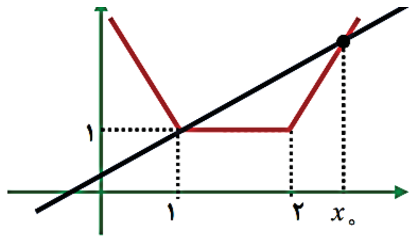



توجه: در تابع $y=|ax+b|+|cx+d|$ شیب بازوی راست برابر با $(|a|+|c|)$ و شیب بازوی چپ برابر با $-(|a|+|c|)$ است.

**سؤال۸:** خط $y=2x+3$ نمودار $y=|x-2|+|x+a|$ را در بی شمار نقطه قطع می کند. مقدار a کدام است.

۱) $-2$ ۲) $3$ ۳) $-1$ ۴) $5$

**سؤال۱۰:** مجموعه جواب نامعادله‌ی روبرو را بدست آورید. $|x-1|+|x-2|>x$




مجموعه جواب نامعادله $(-\infty,1)\cup(x_0,+\infty)$ است برای بدست آوردن $x_0$ نمودار دو تابع را به ازای $x>2$ تقاطع می‌دهیم:

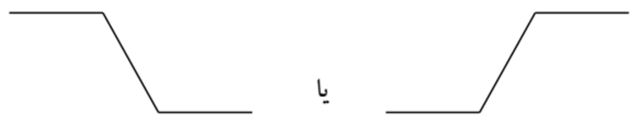
$(x-1)+(x-2)=x \Rightarrow x_0=3$

$\Rightarrow$ اگر $|x-1|+|x-2|>x \Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

**تمرین:** مساحت محصور بین نمودار $y=|x-2|+|x-4|$ و محور $x$ها و خطوط $x=1$ و $x=4$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴- توابع به فرم $y=|x+a|-|x+b|$ (تفریق دو قدر مطلق) (**سرسره‌ای یا آبشاری**) ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق را بدست می‌آوریم سپس یک مربع به ضلع $|a-b|$ به سمت بالا و یک مربع به سمت پایین رسم می‌کنیم که نمودار به یکی از صورت‌های زیر است.



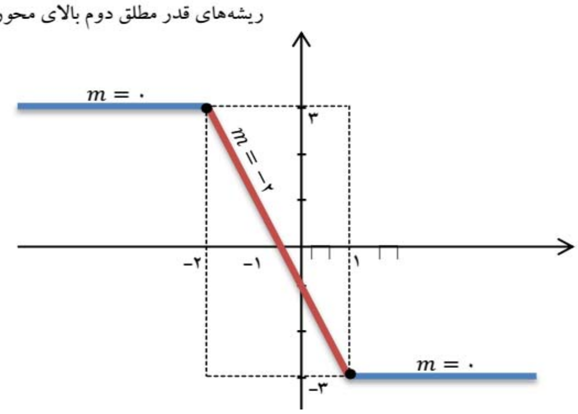

**برد تابع در هر دو حالت:** $[-|b-a|,|b-a|]$

مساله: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ریشه‌های قدر مطلق اولی زیر محور $x$هاست — ریشه‌های قدر مطلق دوم بالای محور $x$هاست

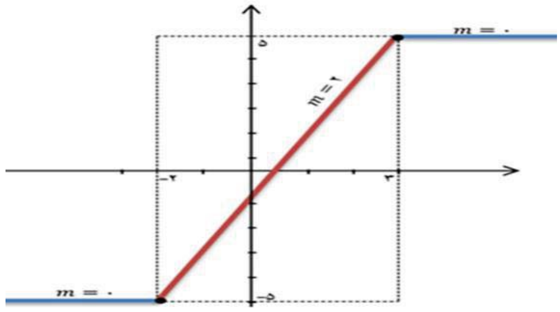
$y=\overbrace{|x-1|}-\overbrace{|x+2|}$

$\begin{cases} x-1=0 \to x=1 \\ x+2=0 \to x=-2 \end{cases}$




برد : $[-3,3]$

**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید سپس برد آن را مشخص کنید.




الف) $y = |x+۲| - |x-۳|$

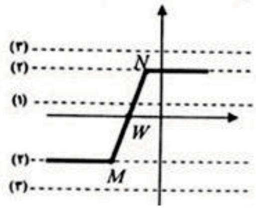
$\begin{cases} x+۲=\cdot \to x=-۲ \to \text{زیر محور } x\text{ها} \\ x-۳=\cdot \to x=۳ \to \text{بالای محور } x\text{ها} \end{cases}$

برد : $[-۵,۵]$

**مثال :** طول پاره خط شکسته تابع $f(x) = |x+۱| - |x-۱|$ در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}+۱$ ۲) $۲\sqrt{۵}+۱$ ۳) $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $۲\sqrt{۳}+۱$

بحث درباره ی ریشه های معادله $a \neq b$ , $|x-a| - |x-b| = k$ :

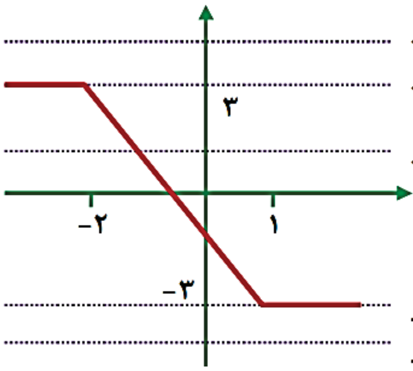



یک ریشه ۱) $|k| < |b-a|$

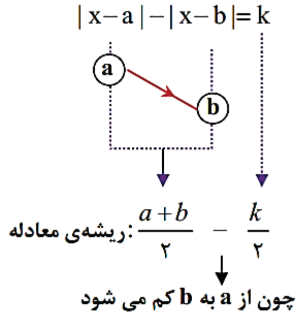
بی شمار ریشه ۲) $|k| = |b-a|$

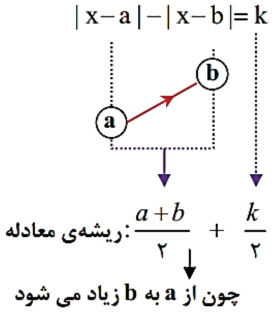
بدون ریشه ۳) $|k| > |b-a|$

**سؤال۲۵: تعداد جواب های معادله‌ی آبشار $|x-۱| - |x+۲| = k$ را در حالت های $k = -۴,-۳,۱,۳,۴$ بررسی کنید.**



**اگر k بین کمترین و بیشترین مقدار تابع آبشاری باشه، در این صورت دو تابع فقط در یک نقطه با هم برخورد دارن در نتیجه معادله فقط یک ریشه دارد و ریشه‌ی معادله‌ی آبشاری به روش زیر بدست می آید.**




تست: معادله $|x+1|-|x-1|=1$ چند جواب دارد؟

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

تست: معادله $|x|-|x+2|=-3$ چند جواب دارد؟

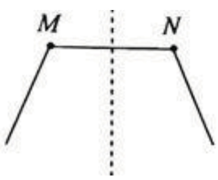
۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

**سؤال ۳۰: حدود m برای آنکه معادله‌ی $|x+3m+2|-|x+m+1|=m$ فقط یک ریشه داشته باشد.**

**نمودار تابع** $\quad a \neq b \quad , \quad y=-|x-a|-|x-b|$ :

نمودار این تابع شبیه یک گلدان برعکس به صورت زیر می باشد:

$N\left|\begin{array}{l} b \\ -|b-a| \end{array}\right.$　　$M\left|\begin{array}{l} a \\ -|b-a| \end{array}\right.$




در این تابع خط $x=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن است. دامنه این تابع $R$ و برد آن $(-\infty,-|b-a|]$ می باشد.

خط $x=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن است (محور تقارن ندارد).

مثال: نمودار تابع $y=-|2-x|-|x-4|$ را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $y=-|x+1|-|x-4|$ را رسم کنید.

$1)\ |x|\geq 0$

$2)\ |-x|=|x|$

$3)\ |x|=|y|\Rightarrow x=\pm y$

$4)\ |x|=a\ ,\ \ a\geq 0\Rightarrow x=\pm a$

$5)\ |xy|=|x|.|y|$

$8)\ \sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|$ $\qquad 9)\ \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

$10)\ |x|\geq x\Rightarrow\begin{cases}|x|=x & : \text{اگر } x\geq 0 \text{ باشد}\\ |x|>x & : \text{اگر } x<0 \text{ باشد}\end{cases}$

$11)\ \begin{cases}x=y\ \Rightarrow\ |x|=|y| & \text{عکس این مطلب درست نیست}\\ |x|=|y| & \Leftrightarrow\ x=\pm y\end{cases}$

$12)\ x^2=y^2\ \Leftrightarrow\ |x|=|y|$

$13)\ |x^{2k}|=|x|^{2k}=x^{2k}\qquad |x|^2=|x^2|=x^2=(-x)^2=|x^2|$

$14)\ |x^{2k+1}|=|x|^{2k+1}\neq x^{2k+1}\qquad |x|=\sqrt{x^2}\neq\left(\sqrt{x}\right)^2\qquad |x|^3=|x^3|\neq x^3$

$15)\ -|x|\leq x\leq|x|$

$16)\ |a+b|\leq|a|+|b|$

نکته:

$1)\ |-a-b|=|a+b|$

$2)\ |b-a|=|a-b|$

$3)\ |a\pm b|^2=(a\pm b)^2$

$4)\ \big||a|+|b|\big|^2\neq(a+b)^2$

مثال:

$|-2x-3|=|2x+3|$

$|5-7x|=|7x-5|$

**سؤال۹: برای $x$ , $y$ , $z$ مخالف صفر، حداقل $\left(\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{x}{z}\right|\right)\left(\frac{|y|+|z|}{|x|}\right)$ چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

**یادآوری:** $\begin{cases}a+\frac{1}{a}\geq 2 & a>0\\ a+\frac{1}{a}\leq -2 & a<0\end{cases}$

$$\left(\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{x}{z}\right|\right)\left(\left|\frac{y}{x}\right|+\left|\frac{z}{x}\right|\right)=1+\left|\frac{z}{x}\right|+\left|\frac{y}{z}\right|+1=2+\left|\frac{z}{y}\right|+\left|\frac{y}{z}\right|$$

**سؤال۱۰: به ازای چه مقادیری از x نامساوی $|4x+3|+|3-x|\geq 3|x+2|$ برقرار است.**

۱) $x\geq 3$ یا $x\leq \frac{3}{4}$　　۲) $-\frac{3}{4}\leq x\leq 3$　　۳) $x\geq -2$　　۴) $R$

**ادامه ویژگی های قدر مطلق:**

۱۶) $|a|\geq a \Rightarrow a\in R$

۱۷) $|a|>a \Rightarrow a<0$

۱۸) $|a|\leq a \Rightarrow a\geq 0$

۱۹) $|a|<a \Rightarrow a\in \phi$

**سؤال۱۵: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-2}{x-3}\right|>\frac{x-2}{x-3}$ را بدست آورید.**

$$\frac{x-2}{x-3}<0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} & 2 \quad & 3 \\ + & - & + \end{array} \Rightarrow 2<x<3$$

**معادلات قدر مطلقی:**

**حل معادلات قدر مطلقی**
- روش جبری
  - استفاده از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای
  - استفاده از ویژگی‌ها
  - ابتکاری (معمولاً همان به توان ۲ رساندن است)
- روش هندسی
- روش رد گزینه‌ها (برای تست‌هایی که مجموعه جواب داده می‌شود)

**حل معادلات شامل قدرمطلق به کمک بازه بندی:**

ابتدا عبارتهای داخل قدرمطلق را برابر صفر قرار می دهیم ریشه درون قدرمطلق ها را یافته و به کمک بازه بندی مناسب قدرمطلق ها را حذف می کنیم. در واقع در هر کدام از این فواصل مقدار عبارت داخل قدرمطلق علامت مشخصی دارد. بنابراین می توان در هر کدام از این فواصل معادله یا نامعادله را بدون قدرمطلق نوشت. **توجه شود جوابی که در هر حالت بدست می آید به شرطی قابل قبول است که در بازه ی همان حالت صدق کند.**

**تذکر**: وقتی که تعداد عبارت های شامل قدرمطلق و در نتیجه تعداد ریشه هایی که موجب تقسیم بازه ها می شود زیاد شود بهتر است برای اجتناب از اشتباهات احتمالی علامت عبارت های داخل قدر مطلق را برای هر فاصله در جدولی مشخص کنیم.

مثال: معادله $|x-2|=2x-10$ را حل کنید.

برای حل اینگونه معادلات معمولا روش های زیر را به کار می گیریم:

$$۱)\quad |u| = a \quad \rightarrow \begin{cases} a < ۰ & \text{امکان ندارد} \\ a \geq ۰ & \rightarrow \quad u = \pm a \end{cases}$$

$۲)\quad |x| = x \quad \rightarrow \quad x \geq ۰$

$۳)\quad |x| = -x \quad \rightarrow \quad x \leq ۰$

$۴)\quad |x| = |y| \quad \rightarrow \quad y = \pm x$

$۵)\quad |a+b| = |a| + |b| \quad \rightarrow ab \geq ۰$

**مسئله:** بر روی محور اعداد حقیقی فاصلهٔ چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟

**مثال:** هر یک از عبارت های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب

را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

$$|x - ۳| = ۷ \rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۷ & \rightarrow \quad x = ۱۰ \\ x - ۳ = -۷ & \rightarrow \quad x = -۴ \end{cases}$$

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است .

$$\boxed{|f(x)| = |g(x)| \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}}$$

مثال: معادله $|۳x - ۲| = |x - ۴|$ را حل کنید .

$$|۳x - ۲| = |x - ۴| \Longrightarrow \begin{cases} ۳x - ۲ = x - ۴ \rightarrow x = -۱ \\ ۳x - ۲ = -(x - ۴) \rightarrow x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

روش دوم: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $۹x^۲ - ۱۲x + ۴ = x^۲ - ۸x + ۱۶$

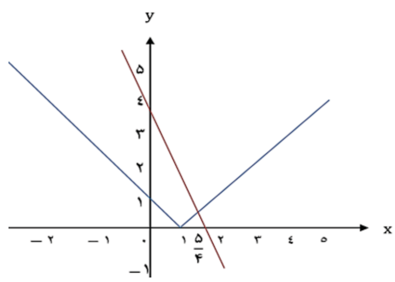
**مثال:** معادله قدر مطلقی $|x - ۱| = ۴ - ۳x$ را به سه روش زیر حل کنید.

روش اول: با استفاده از تعریف قدر مطلق (شرط ،چندضابطه ای کردن،کلی)

$$|x - ۱| = ۴ - ۳x \Longrightarrow \begin{cases} if \quad x \geq ۱ \Rightarrow x - ۱ = ۴ - ۳x \Rightarrow x = \frac{۵}{۴} \xrightarrow{x \geq ۱} x = \frac{۵}{۴} \text{ ق ق} \\ if \quad x < ۱ \Rightarrow -(x - ۱) = ۴ - ۳x \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{x < ۱} x = \frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

روش دوم: ( روش هندسی)

ابتدا نمودار توابع $y = |x - ۱|$ و $y = ۴ - ۳x$ را رسم می کنیم.




روش سوم: ( به توان رساندن طرفین)

$|x-۱| = ۴-۳x \quad \rightarrow \quad |x-۱|^۲ = (۴-۳x)^۲$

$x^۲ - ۲x + ۱ = ۱۶ - ۲۴x + ۹x^۲ \rightarrow ۸x^۲ - ۲۲x + ۱۵ = ۰$

**مثال :** ریشه‌های معادله‌ی $|۲x-۴| = ۶$ کدامند؟

۱) $\{۱,-۵\}$ ۲) $\{-۱,-۵\}$ ۳) $\{۱,۵\}$ ۴) $\{-۱,۵\}$

راه اول : روش جبری _ روش شرط

$$|۲x-۴| = ۶ \Rightarrow \begin{cases} if \quad x \geq ۲ \Rightarrow ۲x-۴=۶ \Rightarrow x=۵ \xrightarrow{x\geq۲} x=۵ \\ if \quad x \leq ۲ \Rightarrow -۲x+۴=۶ \Rightarrow x=-۱ \xrightarrow{x\leq۲} x=-۱ \end{cases}$$

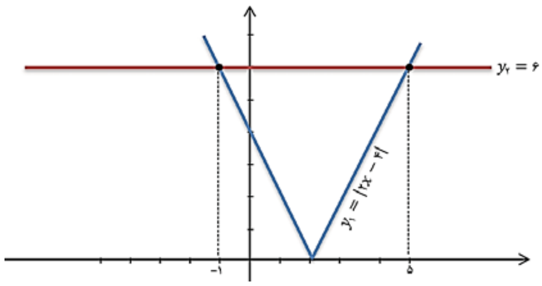
راه دوم : روش جبری _ استفاده از ویژگی‌ها

$$|۲x-۴| = ۶ \xrightarrow{|u|=a \Rightarrow u=\pm a} ۲x-۴=\pm۶ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۴=+۶ \Rightarrow x=۵ \\ ۲x-۴=-۶ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

راه سوم : روش جبری _ ابتکاری

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x^۲-۱۶x+۱۶=۳۶ \Rightarrow ۴x^۲-۱۶x-۲۰=۰$$
$$\Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{matrix} x=۵ \\ x=-۱ \end{matrix}$$

راه چهارم : روش هندسی (بیشتر زمانی که تعداد ریشه‌ها را از ما بخواهد این روش بهتر است




$$\underbrace{|۲x-۴|}_{y_۱} = \underbrace{۶}_{y_۲} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = |۲x-۴| \\ y_۲ = ۶ \end{cases}$$

| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| $y_۱$ | ۲ | ۰ | ۲ |

راه پنجم : حذف گزینه‌ها

**مثال:** بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی

محور x ها برابر ۶ باشد؟

$|x-(-۱)| + |x-۳| = ۶$

$$\begin{cases} -۲x+۲ \quad x \leq -۱ \quad \rightarrow -۲x+۲=۶ \rightarrow -۲x=۴ \rightarrow x=-۲ \text{ ق ق} \\ ۴ \quad -۱ < x < ۳ \\ ۲x-۲ \quad x \geq ۳ \rightarrow ۲x-۲=۶ \quad ۲x=۸ \quad x=۴ \text{ ق ق} \end{cases} \qquad \left|\begin{matrix} -۲ \\ ۰ \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

**مثال :** تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|2x-1|=5$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بیشمار

**مثال :** تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|x^2-1|=1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**مثال :** مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\big||x-1|-2\big|-3=0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

$$\big||x-1|-2\big|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|-2=+3 \to |x-1|=5 \Rightarrow \begin{cases} x-1=5 \to x=6 \\ x-1=-5 \to x=-4 \end{cases} \\ |x-1|-2=-3 \to |x-1|=-1 \Rightarrow \text{جواب ندارد .} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 6+(-4)=2$$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{|2x|}{|x+1|}=3$ کدام است؟

۱) $\left\{-\frac{3}{5},-3\right\}$ ۲) $\{3,-2\}$ ۳) $\emptyset$ ۴) $\left\{-3,\frac{3}{5}\right\}$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $|2x+4|=|x-3|$ را بدست آورید.

**مثال :** تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x+1|=|x-1|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بیشمار

**مثال :** کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $|x^2-2x-1|=|x^2-2x+3|$ صحیح است؟

۱) ریشه حقیقی ندارد ۲) دو ریشه دارد

۳) مجموع ریشه‌های آن برابر یک است ۴) مجموع ریشه‌های آن برابر ۲ است

$$\begin{cases} x^2-2x+3=x^2-2x-1 \Rightarrow 3=-1 \xrightarrow{\text{غیر ممکن}} \text{جواب}=\emptyset \\ x^2-2x+3=-(x^2-2x-1) \Rightarrow 2x^2-4x+2=0 \xrightarrow[\text{یک ریشه‌ی مضاعف دارد}]{\Delta=0} s=-\frac{-4}{2}=2 \end{cases}$$

**مثال:** به روش جبری و با استفاده از ویژگی های قدر مطلق معادلهٔ $|x^2-1|=|2x-1|$ را حل کنید.

$$|x^2-1|=|2x-1| \begin{cases} \xrightarrow{\text{حالت اول}} x^2-1=2x-1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2 \\ \xrightarrow[\text{حالت دوم}]{} x^2-1=-(2x-1) \Rightarrow x^2+2x-2=0 \quad \Delta=12 \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1 \ ,\pm\sqrt{3} \to \begin{cases} x=-1+\sqrt{3}\cong 0/73 \\ x=-1-\sqrt{3}\cong -2/73 \end{cases}$$

تست: اگر یک ریشه معادله $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=k^2$ عدد ۵ باشد ریشه دیگر کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

تست: معادله $3|4-2x|+|6x+18|=30$ چند ریشه دارد؟

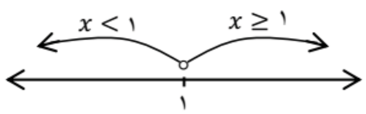
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچی ۴) بی شمار

**نکته کاربردی : وقتی معادله یا نامعادله‌ای داخل قدر مطلق یک ریشه داشته باشد و بیرون قدر مطلق عبارت $x$دار داشته باشیم استفاده** از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه **ای معمولاً بهترین روش است.**

**مثال :** تعداد ریشه‌های معادله‌ی $2x+|x-1|=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$x-1=0 \to x=1$




$$\begin{cases} if \quad x\geq 1 \Rightarrow 2x+(x-1)=1 \to \boxed{x=\frac{2}{3}} \to \text{غیر قابل قبول چون باید } x\geq 1 \text{ باشد} \\ if \quad x<1 \Rightarrow 2x+\left(-(x-1)\right)=1 \to \boxed{x=0} \to \text{قابل قبول چون } x<1 \text{ است} \end{cases}$$

**مثال :** معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|}=1 \xrightarrow{x\neq 3} |x-3|=2-x \to \begin{cases} x\geq 3 \to x-3=2-x \to 2x=5 \quad x=\frac{5}{2} \text{ غ ق ق} \\ x<3 \to x-3=x-2 \to -3=-2 \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$

ب) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1 \to \sqrt{(x-1)^2}=2x+1 \to |x-1|=2x+1$

$$\begin{cases} x\geq 1 \to x-1=2x+1 \to x=-2 \quad \text{غ ق ق} \\ x<1 \to x-1=-2x-1 \to 2x=0 \to x=0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

**مثال:** معادلات قدر مطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x|-1|=5$ ب) $|2x-1|+|x|=7$ ج) $x|x|=-4$

الف) $||x|-1|=5 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1=5 \\ |x|-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=6 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-6 \end{cases} \\ |x|=-4 \ \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

ب) $|2x-1|+|x|=7 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1+x=7 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1+x=7 & 0<x<\frac{1}{2} \\ -2x+1-x=7 & x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3} & x \geq \frac{1}{2} \\ x=-6 \ (\text{غ ق ق}) & 0<x<\frac{1}{2} \\ x=-2 & x \leq 0 \end{cases}$

ج) $x|x|=-4 \Rightarrow \begin{cases} x^2=-4 \ \text{غیر ممکن} \ , \ x \geq 0 \\ -x^2=-4 \ , \ x<0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \ \text{غیر قابل قبول} \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$

**سؤال۱:** $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$

$|x-1|^2-5|x-1|+4=0 \Rightarrow (|x-1|-4)(|x-1|-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow x=0,2 \\ |x-1|=4 \Rightarrow x-1=\pm 4 \Rightarrow x=-3,5 \end{cases}$

**سؤال۳:** مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$ کدام است؟(داخلی تجربی۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

**سؤال۴:** مجموع جواب های معادله‌ی $2|x|=1+|x-1|$ کدام است.

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) ۱

$2|x|-|x-1|=1$

$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow 2x-(x-1)=1 \Rightarrow x+1=1 \Rightarrow x=0 \ \text{غ ق ق} \\ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 2x-(1-x)=1 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \ ✓ \\ x \leq 0 \Rightarrow -2x-(1-x)=1 \Rightarrow -x=2 \Rightarrow x=-2 ✓ \end{cases}$

**سؤال۸: نمودار تابع $y=||3x|-|x||$ بر نمودار کدام تابع منطبق است.**

۱) $|3x|-|2x|$ ۲) $|3x|-x$ ۳) $|4x|$ ۴) $|2x|$

$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0 \Rightarrow y=|3x-x|=|2x| \\ x\le 0 \Rightarrow y=|(-3x)-(-x)|=|-3x+x|=|-2x|=|2x| \Rightarrow y=|2x| \end{array}\right\} \rightarrow y=|2x|$$

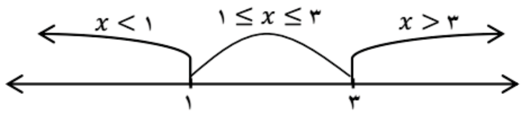
**حل نا معادلات قدر مطلقی**
- روش جبری
  - استفاده از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای
  - استفاده از ویژگی‌ها
  - ابتکاری (معمولاً همان به توان ۲ رساندن است)
- روش هندسی
- روش رد گزینه‌ها (برای تست‌هایی که مجموعه جواب داده می‌شود)

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $|x-1|>|x-3|$ کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(-\infty,3)$ ۴) $(1,3)$

راه اول : روش جبری _ روش شرط:

$$\underbrace{|x-1|}_{\text{ریشه } x=1} > \underbrace{|x-3|}_{\text{ریشه } x=3}$$




$$\begin{cases} x>3 \Rightarrow x-1>x-3 \Rightarrow -1>-3 \rightarrow \boxed{1<3} \xrightarrow{\cap} x>3 \\ 1\le x\le 3 \Rightarrow x-1>3-x \Rightarrow 2x>4 \rightarrow \boxed{x>2} \xrightarrow[\cap]{1\le x\le 3} 2<x\le 3 \\ x<1 \Rightarrow 1-x>-x+3 \rightarrow \boxed{1>3} \text{ غ ق ق } \xrightarrow{\cap} \emptyset \end{cases}$$

جواب نهایی : $x>3 \cup 2<x\le 3 \Rightarrow x>2$

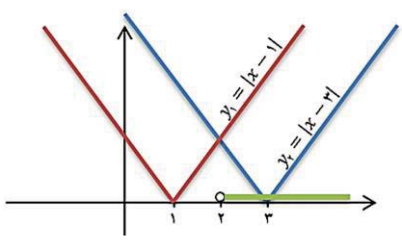
راه دوم : روش جبری استفاده از ویژگی‌ها و ابتکاری

$$|u| \lesseqgtr |v| \xrightarrow[\text{طرفین نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا قدرمطلق از بین برود .}]{\text{اگر طرفین نامعادله قدرمطلق داشته باشد}} u^2 \lesseqgtr v^2$$

$$|x-1|>|x-3| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-1)^2>(x-3)^2 \Rightarrow x^2-2x+1>x^2-6x+9 \Rightarrow 4x>8 \rightarrow x>2$$

راه سوم : روش هندسی

$$\underbrace{|x-1|}_{y_1} > \underbrace{|x-3|}_{y_2}$$



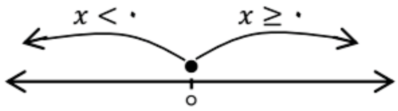
نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ است $\Longrightarrow$ $y_۱ > y_۲$

راه چهارم : رد گزینه‌ها : با انتخاب $x = ۲$ (اختلاف گزینه‌های ۱ و ۲) گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

**مثال :** مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید؟

الف) $x|x| - ۵x - ۶ > ۰$

$x = ۰$



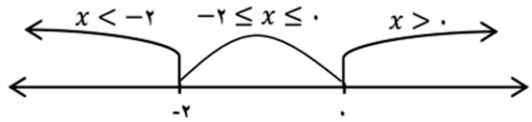

$$\begin{cases} if \quad x \geq ۰ \Rightarrow x(x) - ۵x - ۶ > ۰ \rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \\ \qquad \{x \geq ۰\} \cap \{x < -۱ \cup x > ۶\} \rightarrow \boxed{x > ۶} \\ if \quad x < ۰ \Rightarrow x(-x) - ۵x - ۶ > ۰ \rightarrow -x^۲ - ۵x - ۶ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \\ \qquad \{x < ۰\} \cap \{-۳x < -۲ \cup x > ۶\} \rightarrow \boxed{-۳ < x < -۲} \end{cases}$$

| $x$ | | -۱ | | ۶ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲ - ۵x - ۶$ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | ۰ | - | ۰ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ |

| $x$ | | -۳ | | -۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x^۲ - ۵x - ۶$ | - | ۰ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | ۰ | - |

جواب نهایی : $x > ۶ \cup -۳ < x < -۲$

ب) $|x + ۲| \leq ۴ - |x| \Rightarrow \begin{cases} x + ۲ = ۰ \rightarrow \boxed{x = -۲} \\ x = ۰ \end{cases}$




$$\begin{cases} if \quad \boxed{x > ۰} \Rightarrow x + ۲ \leq ۴ - x \rightarrow \boxed{x \leq ۱} \rightarrow \boxed{۰ < x \leq ۱} \\ if \quad \boxed{-۲ \leq x \leq ۰} \Rightarrow x + ۲ \leq ۴ - (-x) \rightarrow ۲ \leq ۴ \rightarrow \text{جواب همیشه درست} = \boxed{R} \Rightarrow \boxed{-۲ \leq x \leq ۰} \\ if \quad \boxed{x < -۲} \Rightarrow -(x + ۲) \leq ۴ - (-x) \rightarrow -۲x < ۶ \rightarrow \boxed{x > -۳} \rightarrow \boxed{-۳ < x < -۲} \end{cases}$$

جواب نهایی : $\{۰ < x \leq ۱\} \cup \{-۲ \leq x \leq ۰\} \cup \{-۳ < x < -۲\} = [-۳, ۱]$

پ) $$\frac{۳x^۲ - ۸|x| - ۳}{x^۲ + ۲x + ۳} \geq ۰$$

$$\begin{cases} if\ x \geq \Rightarrow \dfrac{۳x^۲ - ۸x - ۳}{x^۲ + ۲x + ۳} \geq ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x - ۳ \rightarrow \\ \{x \geq ۰\} \cap \left\{x \geq ۳ \ U \ x \leq -\dfrac{۱}{۳}\right\} = x \geq ۳ \\ if\ x < ۰ \Rightarrow \dfrac{۳x^۲ - ۸(-x) - ۳}{x^۲ + ۲x + ۳} \geq ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x - ۳ \\ \quad \{x < ۰\} \cap \left\{x \leq -۳ \cup \ x \geq -\dfrac{۱}{۳}\right\} \rightarrow x \leq -۳ \\ \quad \text{جواب نهایی}\ x \geq ۳ \cup \ x \leq -۳ = R - (-۳, ۳) \end{cases}$$

ت) $\left|۲x - ۳\right| + ۲\left|x - ۱\right| \geq ۱$ $\qquad \begin{cases} ۲x - ۳ = ۰ \rightarrow x = \dfrac{۳}{۲} \\ x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \end{cases}$

$$\begin{cases} if\ x>\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲x-۳+۲(x-۱)\ge ۱ \to x \ge \frac{۶}{۴} \Rightarrow x>\frac{۳}{۲} \\ ۱\le x \le \frac{۳}{۲} \Rightarrow -(۲x-۳)+۲(x-۱)\ge ۱ \Rightarrow ۲\ge ۱ \to R \to ۱ \le x \le \frac{۳}{۲} \\ x<۱ \Rightarrow -(۲x-۳)+۲(-(x-۱)\ge ۱ \Rightarrow -۴x \ge -۴ \to x \le ۱ \to x \le ۱ \\ \text{جواب نهایی} = x>\frac{۳}{۲} \cup ۱\le x\le \frac{۳}{۲} \cup x \le ۱ \Rightarrow R \end{cases}$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $(x-۴)|x| < ۲x-۵$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی فیزیک ۹۲)

۱) $(۱,۵)$　　　۲) $(۱-\sqrt{۶},۱+\sqrt{۶})$

۳) $(۱,۵)\cup(۱+\sqrt{۶},+\infty)$　　　۴) $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$

$\mathrm{I}\ if, x\ge ۰ \Rightarrow x(x-۴)<۲x-۵ \Rightarrow x^۲-۶x+۵<۰ \to ۱<x<۵$

$\mathrm{II}\ if, x\le ۰ \Rightarrow -x(x-۴)<۲x-۵ \Rightarrow x^۲-۲x-۵>۰ \begin{cases} x>۱+\sqrt{۶} \\ x<+۱-\sqrt{۶}\end{cases}$

اجتماع : $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$

II) ویژگی‌های قدر مطلق (نامعادلات)

۱) $|u|\le \underset{\text{عدد}}{a} \xRightarrow{a>۰} -a\le u\le a$

یعنی $\begin{cases} u\le a \\ \cap \\ u\ge -a\end{cases}$

مثال: $|۱-۲x|-۴<۰$

$|۱-۲x|-۴<۰ \to |۲x-۱|<۴ \to -۴<۲x-۱<۴ \to -۳<۲x<۵ \to -\frac{۳}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$

نکته: $x^۲<a\ ,\ a\ge ۰ \Rightarrow -\sqrt{a}\le x\le \sqrt{a}$

$(۱-۲x)^۲-۴<۰$

$(۱-۲x)^۲-۴<۰ \to (۲x-۱)^۲<۴ \to -۲<۲x-۱<۲ \to -۱<۲x<۳ \to -\frac{۱}{۲}<x<\frac{۳}{۲}$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $۲ \le |x-۱|$ کدام است؟

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{۲x-۳}{x+۲}\right| < ۱$ کدام است؟

۱) $(۵,+\infty)$　　　۲) $(\frac{۱}{۳},+\infty)$　　　۳) $(-\infty,\frac{۱}{۳})$　　　۴) $(\frac{۱}{۳},۵)$

$$-1 < \frac{2x-3}{x+2} < 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+2} < 1 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{x+2} - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{x-5}{x+2} < 0 \\ \text{اشتراک} \\ \dfrac{2x-3}{x+2} > -1 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{x+2} + 1 > 0 \to \dfrac{3x-1}{x+2} > 0 \end{cases}$$

جواب نهایی : $\{-2 < x < 5\} \cap \left\{x < -2 \cup x > \frac{1}{3}\right\} = \left(\frac{1}{3}, 5\right)$

**سؤال۲: مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-2| > x^2 - 2x$ به صورت کدام بازه است؟ (خارج تجربی ۹۲)**

۱) $(-1,1)$　۲) $(-1,2)$　۳) $(0,2)$　۴) $(1,2)$

$$|x-2| > x^2-2x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > x^2-2x \\ \text{یا} \\ x-2 < -x^2+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2<0 \xrightarrow{\Delta<0} \phi \\ \text{یا} \\ x^2-x-2<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow (x-2)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<2$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left||x|-1\right| \le 2$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$　۲) $[-2,2]$　۳) $[-3,3]$　۴) $[-4,4]$

$$\left||x|-1\right| \le 2 \Rightarrow -2 \le |x| - 1 \le 2 \to -1 \le |x| \le 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le |x| \to \text{قدر مطلق همواره از منفی بزرگتر است} \Rightarrow \text{همیشه} = R \\ |x| \le 3 \Rightarrow -3 \le x \le 3 \end{cases}$$

جواب نهایی : $R \cap -3 \le x \le 3 \to -3 \le x \le 3$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left||x+2|-1\right| \le 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$-3 \le |x+2| - 1 \le 3 \Rightarrow -2 \le |x+2| \le 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \le |x+2| \to \text{قدر مطلق همیشه از منفی بزرگتر است پس همیشه برقرار است} \Rightarrow \text{جواب} = R \\ \text{و} \\ |x+2| \le 4 \Rightarrow -4 \le x+2 \le 4 \Rightarrow -6 \le x \le 2 \end{cases}$$

جواب نهایی : $R \cap -6 \le x \le 2 = -6 \le x \le 2$

**مثال :** اگر $|x-1| < 2$، آن گاه حاصل $y = |2x+3| + 2|x-3|$ را بدست آورید؟

**مثال :** اگر نامساوی $۱۰ < x < ۲۰$ معادل $|x - \alpha| < \beta$ باشد $\alpha \times \beta$ کدام است؟

۱) ۵۵  ۲) ۶۵  ۳) ۷۵  ۴) ۸۵

**سؤال۳: مجموعه جواب نامعادله‌ی $x + |x| \le \frac{۱}{۲}x + ۳$ به کدام صورت است.**

۱) $[-۴,۲]$  ۲) $[-۶,۱]$  ۳) $[-۶,۲]$  ۴) $[-۲,۶]$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x - ۳ \le x \le -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}x - ۳ \le x \Rightarrow -۳ \le \frac{۱}{۲}x \Rightarrow x \ge -۶ & (۱) \\ x \le -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \le ۳ \Rightarrow x \le ۲ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} -۶ \le x \le ۲$$

**سؤال۴: مجموعه جواب نامعادله‌ی $۲x + ۱ - |x - ۲| > |x^۲ + ۱|$ به صورت کدام بازه است؟ (خارج تجربی ۹۵)**

۱) $(-۲,۱)$  ۲) $(-۱,۱)$  ۳) $(-۱,۲)$  ۴) $(۱,۲)$

2) $|u| \ge a \Rightarrow \begin{cases} u \ge a \\ u \le -a \end{cases} \cup$

$u^۲ > a \quad , \quad a > ۰ \quad \rightarrow \quad u > \sqrt{a} \;\; or \;\; u < -\sqrt{a}$

$\left|\frac{۱}{۲}x - ۳\right| \ge ۹$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}x - ۳ \ge ۹ \rightarrow \frac{۱}{۲}x \ge ۱۲ \rightarrow x \ge ۲۴ \\ \text{یا} \\ \frac{۱}{۲}x - ۳ \le -۹ \rightarrow \frac{۱}{۲}x \le -۶ \rightarrow x \le -۱۲ \end{cases}$$

$\left(\frac{۱}{۲}x - ۳\right)^۲ \ge ۹$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}x - ۳ \ge ۳ \rightarrow \frac{۱}{۲}x \ge ۶ \rightarrow x \ge ۱۲ \\ \text{یا} \\ \frac{۱}{۲}x - ۳ \le -۳ \rightarrow \frac{۱}{۲}x \le ۰ \rightarrow x \le ۰ \end{cases}$$

مثال ۳۸ : مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-۲|>۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳　　　　۲) ۴　　　　۳) ۵　　　　۴) ۶

**مثال:** عبارت زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک نامعادله بنویسید و جواب را به دست آورید.

فاصله بین x و ۳- بزرگ تر از ۲ است.

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{۱}{x}\right|>۱$ کدام است؟

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|>۱$ به صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\left(-۳,\frac{۱}{۲}\right)\cup\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right)$　　　　۲) $\left(-۲,-\frac{۱}{۲}\right)\cup\left(-\frac{۱}{۲},۱\right)$

۳) $\left(-۳,-\frac{۱}{۲}\right)$　　　　۴) $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right)$

$$D=R-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{جهت عوض نمی‌شود}]{\times|۲x+۱|}\frac{|x-۲|}{|۲x+۱|}>۱\longrightarrow|x-۲|>|۲x+۱|$$

$$\xRightarrow{(\ )^۲}x^۲-۴x+۴>۴x^۲+۴x+۱$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۸x-۳<۰$$

| $x$ | | $-۳$ | | $\frac{۱}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۳x^۲+۸x-۳$ | + | ۰ | - | ۰ | + |

جواب : $\left(-۳,\frac{۱}{۳}\right)-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$

**سؤال۷:** مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|>۱$ به صورت کدام بازه است؟ (تجربی ۹۵ ـ با تغییر)

۱) $\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)$　　　　۲) $\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)\cup\left(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳}\right)$　　　　۳) $\left(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳}\right)$　　　　۴) $\left(\frac{۵}{۳},۲\right)$

**مثال :** اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^۲-x>۶$ را به صورت $|x-\alpha|>\beta$ نشان دهیم حاصل $\alpha-\beta$ کدام است؟ جواب ۲-

**مثال:** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۳x-۲|<۲x+۱$ کدام است؟

**نکته کاربردی : وقتی معادله یا نامعادله‌ای داخل قدر مطلق یک ریشه داشته باشد و بیرون قدر مطلق عبارت $x$دار داشته باشیم استفاده** از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه **ای معمولاً بهترین روش است.**

**مثال :** در مجموعه جواب نامعادله‌ی $x \le |۳ - ۲x|$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) بیشمار

**مثال :** جواب نامعادله ی $x^۲ - x < |x|$ را بدست آورید؟

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $۴x < |۲x - ۹|$ کدام است؟

۱) $x < ۰$　　۲) $x < -۴/۵$　　۳) $x > ۱/۵$　　۴) $x < ۱/۵$

$$\begin{cases} if \quad \boxed{x \ge \frac{۹}{۲}} \Rightarrow -(۹ - ۲x) > ۴x \longrightarrow -۲x > ۹ \longrightarrow \boxed{x < -\frac{۹}{۲}} = \emptyset \\ if \quad \boxed{x \le \frac{۹}{۲}} \Rightarrow ۹ - ۲x > ۴x \longrightarrow -۶x > -۹ \longrightarrow \boxed{x < \frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

روش شرط بهتر است

جواب نهایی : $\emptyset \cup x < \frac{۳}{۲} = x < \frac{۳}{۲}$

**نکته : اگر دو طرف قدر مطلق داشتیم به توان ۲ می‌رسانیم و قدر مطلق را برمی‌داریم.**

$$|u| \lesseqgtr |v| \xRightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم}} u^2 \lesseqgtr v^2$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x| < |x - ۱|$ کدام است؟

$$|x - ۱| > |x| \xRightarrow{(\ )^۲} (x - ۱)^۲ > x^۲ \longrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ > x^۲ \longrightarrow -۲x + ۱ > ۰ \longrightarrow \boxed{x < \frac{۱}{۲}}$$

**مثال :** اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $||x| - ۴| < |x + ۱|$ بصورت $(a\,,b)$ باشد $a \times b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲}$　　۲) $-\frac{۱۵}{۲}$　　۳) $\frac{۱۵}{۴}$　　۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

$$|x + ۱| < \big||x| - ۴\big| \xRightarrow{(\ )^۲} (x + ۱)^۲ < (|x| - ۴)^۲ \longrightarrow x^۲ + ۲x + ۱ < |x|^۲ - ۸|x| + ۱۶$$
$$\Rightarrow ۲x + ۱ < -۸|x| + ۱۶ \Rightarrow ۲x + ۸|x| < ۱۵$$

$$\begin{cases} if \quad x \geq \cdot \Rightarrow ۲x + ۸x < ۱۵ \Rightarrow x < \frac{۳}{۲} \xrightarrow{x<\frac{۳}{۲} \cap x\geq \cdot} x \in \left[\cdot , \frac{۳}{۲}\right) \\ if \quad x \leq \cdot \Rightarrow ۲x - ۸x < ۱۵ \Rightarrow x > -\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\cap} x \in \left(-\frac{۵}{۲} , \cdot\right) \end{cases}$$

$$\cup \rightarrow x \in \left(-\frac{۵}{۲} , \frac{۳}{۲}\right) = (a , b)$$

**نکته :** اگر از طرفین یک تساوی یا نامساوی رادیکال بافرجه زوج بگیریم برای هر دو طرف آن قدر مطلق می‌گذاریم

$$u^{۲n} \underset{<}{\overset{>}{=}} v^{۲n} \xrightarrow{\sqrt[۲n]{\ }} |u| \underset{<}{\overset{>}{=}} |v|$$

**مثال :** نامعادله‌ی $(x-۳)^۲ < ۶۴$ را حل کنید.

$$(x-۳)^۲ < ۶۴ \xRightarrow{\sqrt{\ }} |x-۳| < |۸| \Rightarrow |x-۳| < ۸ \Rightarrow -۸ < x-۳ < ۸ \Rightarrow -۵ < ۵ < ۱۱$$

$$\boxed{\begin{gathered} \sqrt[۲n]{u^{۲n}} = |u| \\ \sqrt[۲n+۱]{u^{۲n+۱}} = u \end{gathered}}$$

**مثال:** مجموعه ی جواب معادله ی $\sqrt{(x-۲)^۲} = ۲ - \mathrm{x}$ را بیابید.

$$\sqrt{(x-۲)^۲} = ۲ - \mathrm{x}$$

$$|x-۲| = ۲ - x \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} - ۲ = ۲ - \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{x} = ۲ & , \quad \mathrm{x} \geq ۲ \\ -(\mathrm{x}-۲) = \mathrm{x} - ۲ \quad \text{بدیهی} & , \quad \mathrm{x} < ۲ \end{cases} \rightarrow \text{مجموعه ی جواب} = (-\infty , ۲]$$

**مثال :** اگر $\cdot < a < ۱$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{a^۲ + ۱ - ۲\sqrt{a^۲}}$ کدام است؟

۱) $a - ۱$ ۲) $۱ - a$ ۳) $-۱ - a$ ۴) $a + ۱$

$$\sqrt{a^۲ + ۱ - ۲\sqrt{a^۲}} = \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲|a|} \xrightarrow{\cdot<a<۱} \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲a} = \sqrt{a^۲ - ۲a + ۱} = \sqrt{(a-۱)^۲}$$

$$= |a-۱| \xrightarrow{\cdot<a<۱} -(a-۱) = -a + ۱ = ۱ - a$$

**مثال :** اگر $a < \cdot < b$ و $|a| > |b|$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab} - \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab}$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $۲b$ ۳) $-۲a$ ۴) $-۲b$

$$\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab} = \sqrt{(a+b)^۲} = |a+b| \xrightarrow{\text{فرض می کنیم } a=-۲ , b=۱} -(a+b) = -a - b$$

$$\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab} = \sqrt{(a-b)^۲} = |a-b| \xrightarrow{\text{فرض می کنیم } a=-۲ , b=۱} -(a-b) = -a + b$$

$$\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab} - \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab} = (-a-b) - (-a+b) = -۲b$$

**مثال :** با شرط $x^{۲} < x$ حاصل عبارت $\sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} - ۲} + \sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} + ۲}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) $\frac{۲}{x}$　　۳) $۲x$　　۴) ۴

$x^{۲} < x \longrightarrow x^{۲} - x < ۰$

| $x$ | | $-۲$ | | $+۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{۲} - x$ | $+$ | ۰ | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | ۰ | $+$ |

$\boxed{۰ < x < ۱}$

$$\sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} + ۲} = \sqrt{\left(x + \frac{۱}{x}\right)^{۲}} = \left|x + \frac{۱}{x}\right| \xrightarrow[x = \frac{۱}{۲} \text{ فرض می‌کنیم}]{۰<x<۱} x + \frac{۱}{x}$$

$$\sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} - ۲} = \sqrt{\left(x - \frac{۱}{x}\right)^{۲}} = \left|x - \frac{۱}{x}\right| \xrightarrow[x = \frac{۱}{۲} \text{ فرض می‌کنیم}]{۰<x<۱} -\left(x + \frac{۱}{x}\right) = -x + \frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} + ۲} + \sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} - ۲} = \left(x + \frac{۱}{x}\right) + \left(-x + \frac{۱}{x}\right) = \frac{۲}{x}$$

$$\boxed{\underbrace{|u| + |v| \geq |u + v|}_{\text{نامساوی مثلث}} \Rightarrow \begin{cases} |u| + |v| = |u + v| & u \text{ و } v \text{ هم علامت باشند } (u.v \geq ۰) \\ |u| + |v| > |u + v| & u \text{ و } v \text{ هم علامت نباشند } (u.v < ۰) \end{cases}}$$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $|x - ۲| + |x - ۳| = |۲x - ۵|$ کدام است؟

$$\underbrace{|x - ۲|}_{u} + \underbrace{|x - ۳|}_{v} = \underbrace{|۲x - ۵|}_{u+v} \xRightarrow{u \text{ و } v \text{ هم علامتند}} (x - ۲)(x - ۳) \geq ۰ \Rightarrow$$

| $x$ | | ۲ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $+$ | ۰ | - | ۰ | $+$ |

نکته: درمعادلات و نامعادلات اگر هم زمان سه تا قدرمطلق داشتیم به احتمال زیاد باید از نامساوی مثلث استفاده کنیم.

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{۱}{۲}x - ۱\right| + \left|\frac{۱}{۲}x + ۱\right| > |x|$ کدام است؟

۱) $(-۲, ۲)$　　۲) $R - [-۲, ۲]$　　۳) $R - (-۲, ۲)$　　۴) $\{\pm ۲\}$

$$\left|\underbrace{\frac{۱}{۲}x - ۱}_{u}\right| + \left|\underbrace{\frac{۱}{۲}x + ۱}_{v}\right| > \left|\left(\underbrace{\frac{۱}{۲}x - ۱}_{u}\right) + \left(\underbrace{\frac{۱}{۲}x + ۱}_{v}\right)\right|$$

$$u.v < ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}x - ۱\right)\left(\frac{۱}{۲}x + ۱\right) < ۰$$

| $x$ | | $-۲$ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{۱}{۲}x - ۱$ | - | | - | ۰ | + |
| $\frac{۱}{۲}x + ۱$ | - | ۰ | + | | + |
| | + | | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | | + |

جواب : $(-۲, ۲)$

**نکته :** توان داخل قدرمطلق را می‌توان به بیرون از آن انتقال داد

$|u^n| = |u|^n$

**مثال :** مجموع جواب‌های $(x-۳)^۲ - ۷|x-۳| + ۶ = ۰$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) $-۶$　　۳) ۱۲　　۴) $-۱۲$

$$(x-۳)^۲ - ۷|x-۳| + ۶ = ۰ \xrightarrow{(x-۳)^۲ = |(x-۳)^۲| = |x-۳|^۲} |x-۳|^۲ - ۷|x-۳| + ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{|x-۳| = t} t^۲ - ۷t + ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \\ t = ۶ \end{cases}$$

$|x-۳| = t$

$$\begin{cases} t = ۱ \longrightarrow |x-۳| = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۳ = ۱ \longrightarrow x = ۴ \\ x-۳ = -۱ \longrightarrow x = ۲ \end{cases} \\ t = ۶ \longrightarrow |x-۳| = ۶ \Rightarrow \begin{cases} x-۳ = ۶ \longrightarrow x = ۹ \\ x-۳ = -۶ \longrightarrow x = -۳ \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها : $۴ + ۲ + ۹ - ۳ = ۱۲$

تست: اگر نامساوی های $|x-۱| < ۰.۱$ و $A < ۲x - ۳ < B$ معادل هم باشند آنگاه $A + B$ کدام است؟

۱) $-۲/۱$　　۲) $-۲$　　۳) $-۱/۱$　　۴) $-۱$

**تبدیل نامساوی به قدرمطلق:**

$$a \le x \le b \quad \to \quad \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{b-a}{2}$$

تست: اگر $-۴ \le x \le ۲$ آنگاه کدام رابطه درست است.

۱) $|x-۱| \le ۳$　　۲) $|x+۱| \le ۳$　　۳) $|x+۱| < ۳$　　۴) $|x+۱| \ge ۳$

**سؤال۱۲: اگر مجموعه جواب های نامعادله های $|۲x-۳|<۱$ , $|۳x-۱|<a$ غیرتهی باشند و هیچ نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند برای a چند عدد صحیح بدست می آید.**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

$$|۲x-۳| < ۱ \Rightarrow -۱ < ۲x-۳ < ۱ \Rightarrow ۲ < ۲x < ۴ \Rightarrow ۱ < x < ۲$$

$$|۳x-۱| < a \Rightarrow -a < ۳x-۱ < a \Rightarrow ۱-a < ۳x < a+۱ \Rightarrow \frac{۱-a}{۳} < x < \frac{a+۱}{۳}$$

$$\begin{cases} \frac{a+۱}{۳} \le ۱ \Rightarrow a \le ۲ \\ ۲ \le \frac{۱-a}{۳} \Rightarrow ۶ \le ۱-a \Rightarrow a \le -۵ \end{cases} \xrightarrow{a>۰} ۰ < a \le ۲$$

**سؤال۱۵:** اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{۳x+۴}>۲|x-۱|-x$ بازه‌ی $(a,b)$ باشد، طول وسط بازه کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$　　۲) ۳　　۳) $\frac{۷}{۲}$　　۴) ۴　　(داخل ریاضی ۹۵)

**حالت اول) اگر $x\geq ۱$ باشد:**

$$\sqrt{۳x+۴}>۲(x-۱)-x \Rightarrow \sqrt{۳x+۴}>x-۲ \xrightarrow{\text{به توان۲}}$$

$$۳x+۴>x^۲-۴x+۴ \Rightarrow x^۲-۷x<۰ \Rightarrow ۰<x<۷ \xrightarrow{x\geq ۱} \boxed{۱\leq x<۷} \qquad (۱)$$

**حالت دوم) اگر $x<۱$ باشد:**

$$\sqrt{۳x+۴}>-۲(x-۱)-x \Rightarrow \sqrt{۳x+۴}>-۳x+۲ \xrightarrow{\text{به توان۲}}$$

$$۳x+۴>۹x^۲-۱۲x+۴ \Rightarrow ۹x^۲-۱۵x<۰ \Rightarrow ۰<x<\frac{۵}{۳} \xrightarrow{x<۱} \boxed{۰<x<۱} \qquad (۲)$$

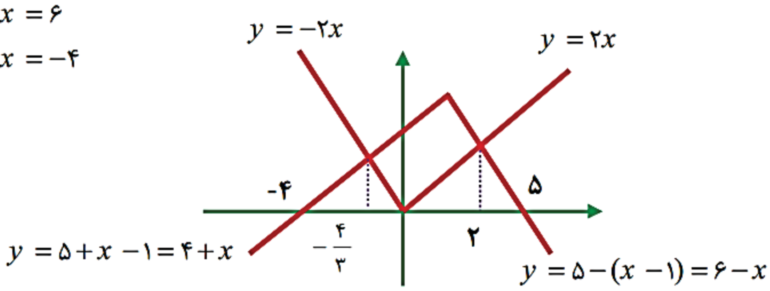
$(۱)\cup(۲) \Rightarrow ۰<x<۷ \Rightarrow x=۳/۵$ **وسط بازه**

**سؤال۱۶:** در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $f(x)=۵-|x-۱|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x)=|۲x|$ قرار دارد.

۱) $\left(-\frac{۴}{۳},۱\right)$　　۲) $\left(-\frac{۲}{۳},۱\right)$　　۳) $\left(-\frac{۴}{۳},۲\right)$　　۴) $\left(-\frac{۲}{۳},۲\right)$　　(خارج۹۳)

**ابتدا ببینیم که $f(x)$ در چه نقاطی محور x ها را قطع می کند:**

$$۵-|x-۱|=۰ \Rightarrow |x-۱|=۵ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ x=-۴ \end{cases}$$




**نقاط تقاطع دو نمودار:**

$$\begin{cases} ۲x=۶-x \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲ \\ -۲x=۴+x \Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

**با توجه به شکل واضح است که در بازه‌ی $\left(-\frac{۴}{۳},۱\right)$، $f(x)$ بالاتر از $g(x)$ قرار دارد.**

**سؤال۲۳:** مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|۲x-۱|(x+۱)<۶x-۴$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) بی شمار　　۴) هیچ

**سؤال۲۴:** چند عدد طبیعی x در نامعادله‌ی $|x-۸|>x+۱۰$ صدق نمی کند.

۱) ۶　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) ۹

$x \geq ۸ : x(x-۸) > x+۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۹x - ۱۰ > ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۱) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۱۰ \\ x < -۱ \end{cases} \xrightarrow{x \geq ۸} x > ۱۰$

$x \leq ۸ : x(۸-x) > x+۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۲) < ۰ \Rightarrow ۲ < x < ۵ \xrightarrow{x \leq ۸} ۲ < x < ۵$

تمرین: اگر $x = ۲/۹۹۳$ در اینصورت حاصل $\frac{|۲x-۲|}{x-۱} - \frac{|x-۳|}{x-۳}$ کدام است؟

۱) $-۳$ ۲) $-۱$ ۳) $-/۲۷۱$ ۴) $۴/۰۰۷$

تمرین: اگر $x^۲ < ۴$ در اینصورت حاصل $|۲ + |x + ۲| + |x - ۲|$ کدام است؟

۱) $(x-۱)$ ۲) $۴$ ۳) $۲x+۴$ ۴) $۲x$

تست: مجموعه جواب نامعادله $۲ \leq |x+۲| \leq ۴$ کدام است؟

۱) $[-۶,-۴] \cup [۰,۲]$ ۲) $[۶,۲]$ ۳) $[۶,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱]$

تست: اگر $x < ۰$ در اینصورت حاصل $\sqrt{x^۲ + ۱ + ۲\sqrt{x^۲}}$ کدام است؟

۲) $-(x-۱)$ ۲) $(x+۱)$ ۳) $x-۱$ ۴) $-(x+۱)$

مثال: اگر $x \in [۱,+\infty)$ در اینصورت حاصل $\sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱} - \sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}$ کدام است؟

تست: اگر $b < ۰ < a$ و $a < |b|$ حاصل عبارت $A = |a+b| + |a-b| + \big||a| - |b|\big|$ کدام است؟

۱) $a-b$ ۲) $a+b$ ۳) $-a-۳b$ ۴) $-۳a+b$

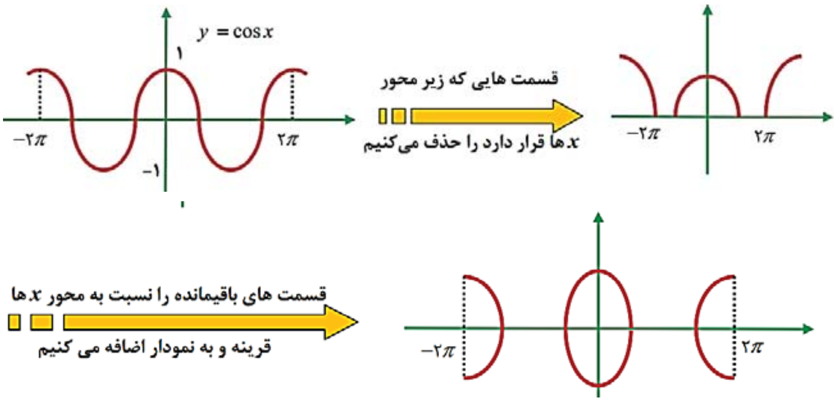
تست: مجموع ریشه های معادله $۶(x-۱)^۲ + ۵|x-۱| - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**روش رسم $|y| = f(x)$**

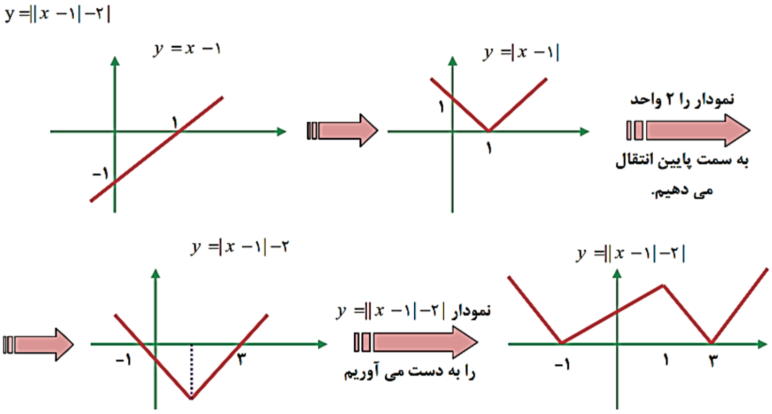
**ابتدا دقت کنید $f(x) = |y| \geq ۰$. این بدان معنی است که در نمودار $|y| = f(x)$ مقدار $f(x)$ نمی تواند منفی باشد. بنابراین قسمت هایی از نمودار $y = f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد را حذف می کنیم. بعد قرینه‌ی قسمت های باقیمانده را نسبت به محور x ها را به آن اضافه می کنیم تا نمودار حاصل نسبت به محور x ها متقارن باشد (در $f(x) = |y|$ با تغییر y به -y تغییری حاصل نمی شود).**

**سؤال۲۰: مقدار $|y|=\cos x$ را ترسیم کنید. (در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$)**




مثال: نمودار $|y|=x^{۲}-۱$ را رسم کنید.

**سؤال۱۰: نمودار تابع $y=||x-۱|-۲|$ را ترسیم کنید.**




تست: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=۲-|x|$ کدام است؟

۱) ۲    ۲) $\frac{۷}{۳}$    ۳) $\frac{۸}{۳}$    ۴) ۳

تست: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ کدام است؟

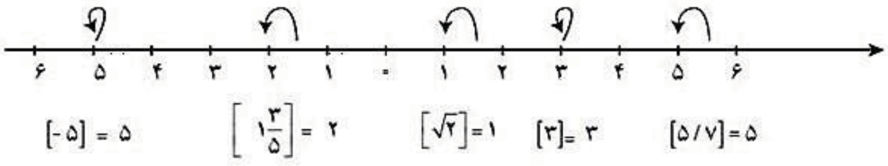
۱) $\frac{۸}{۳}$    ۲) ۴    ۳) $\frac{۱۶}{۳}$    ۴) ۶

**سؤال۲۸: اگر $f(x) = |x| - ۳$ را سه واحد به چپ و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم دو منحنی یکدیگر را در نقطه با چه طولی قطع می کنند؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

## جزء صحیح (براکت):

جزء صحیح $x$ ، اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $x$ است.




برای محاسبه جزء صحیح یک عدد روش زیر را به کار می بندیم:

الف: اگر $x$ عددی صحیح باشد $x \in Z$ ، جزء صحیح آن با خودش برابر است:

ب: اگر $x$ عددی صحیح نباشد $x \notin Z$ ابتدا دقت می کنیم که عدد $x$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. پس از یافتن آن دو عدد، جزء صحیح $x$ برابر عدد صحیح کوچک تر است.

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح قبل از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[+\square/\lozenge] = +\square$$
$$[-\square/\lozenge] = -\square - ۱$$

مثال: $< -۸.۲ <$ $< ۳.۶ <$

**نکته**: می توان برای هر عدد حقیقی $x$ را به دو قسمت جزء صحیح ($[x]$) و جزء کسری یا اعشاری ($\alpha$) به صورت زیر تقسیم نمود: $x = [x] + \alpha \quad ; \quad ۰ \le \alpha < ۱$

$[۳/۴] = ۳$ $[-۳/۴] = -۳ - ۱ = -۴$

$[۰/۷۵] = ۰$ $[-۰/۷۵] = -۰ - ۱ = -۱$

$\left[\frac{۱}{۲}\right] = [۰/۵] = ۰$ $\left[-\frac{۱}{۲}\right] = [-۰/۵] = -۰ - ۱ = -۱$

$\left[\frac{۲۷}{۵}\right] = [۵/۴] = ۵$ $\left[-\frac{۲۷}{۵}\right] = [-۵/۴] = -۵ - ۱ = -۶$

$[\sqrt{۲}] = [۱/۴] = ۱$ $[-\sqrt{۲}] = [-۱/۴] = -۱ - ۱ = -۲$

$[\sqrt{۲۸}] = [۵/۳] = ۵ \qquad [-\sqrt{۲۸}] = [-۵/۳] = -۵ - ۱ = -۶$

$$\left[\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\right] = \left[\frac{۱/۴}{۱-۱/۴}\right] = \left[-\frac{۱۴}{۴}\right] = [-۳/۵] = -۳ - ۱ = -۴$$

$$[-۲-\sqrt{۲}] = [-۲-۱/۴] = [-۳/۴] = -۴$$

$$\left[\frac{\sqrt{۳}}{۰/۵}\right] = \left[\frac{۱/۷}{\frac{۵}{۱۰}}\right] = \left[\frac{۱۷}{۵}\right] = [۳/۴] = ۳$$

$$\left[\frac{۰/۵}{\sqrt{۳}}\right] = \left[\frac{\frac{۵}{۱۰}}{۱/۷}\right] = \left[\frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۱۷}{۱۰}}\right] = \left[\frac{۵}{۱۷}\right] = [۰/۲] = ۰$$

**مثال :** حاصل عبارت $|[۵x]-[۷x]|$ به ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱  ۲) ۳  ۳) ۵  ۴) ۷

$$[۷x] \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \left[-\frac{۷}{۲}\right] = [-۳/۵] = -۳-۱ = -۴$$

$$[۵x] \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \left[-\frac{۵}{۲}\right] = [-۲/۵] = -۲-۱ = -۳$$

$$\Rightarrow |-۴-(-۳)| = |-۴+۳| = |-۱| = ۱$$

توجه : $\begin{cases}[۳^+] = ۳\\ [۳^-] = ۲\end{cases} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \boxed{\begin{cases}[k^+] = k\\ [k^-] = k-۱\end{cases}}$

توجه : $[\sqrt[n]{x}] \xrightarrow{a^n<x<(a+۱)^n} \sqrt[n]{a^n} < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{(a+۱)^n} \Rightarrow [\sqrt[n]{x}] = a$

$$[\sqrt[۳]{۳۵}] \xrightarrow{۳^۳<۳۵<(۳+۱)^۳} [\sqrt[۳]{۳۵}] = ۳$$

**مثال :** حاصل عبارت $A = [\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + [\sqrt{۳}] + \cdots + [\sqrt{۱۲}]$ کدام است؟

۱) ۱۷  ۲) ۳۲  ۳) ۲۴  ۴) ۲۵

$$A = ۱+۱+۱+۲+۲+۲+۲+۲+۳+۳+۳+۳ = ۲۵$$

**سؤال۹:** حاصل $[\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+\ldots+[\sqrt{۱۷}]$ کدام است.

۱) ۳۴  ۲) ۳۸  ۳) ۴۲  ۴) ۴۶

$$([\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}])+([\sqrt{۴}]+[\sqrt{۵}]+\ldots+[\sqrt{۸}])+([\sqrt{۹}]+[\sqrt{۱۰}]+\ldots+[\sqrt{۱۵}])+[\sqrt{۱۶}]+[\sqrt{۱۷}]$$
$$= ۳\times۱+۵\times۲+۷\times۳+۲\times۴ = ۳+۱۰+۲۱+۸ = ۴۲$$

**سؤال۱۰:** در تابع $f(x) = ۲x - [x^۲]$ حاصل $f(-۴+f(۳-\sqrt{۲}))$ کدام است.

۱) $۴(\sqrt{۲}-۱)$  ۲) $۴(\sqrt{۲}-۲)$  ۳) $-۴(\sqrt{۲}+۲)$  ۴) $-۴(\sqrt{۲}+۱)$

$$f(x) = ۲x - [x^۲] \Rightarrow f(۳-\sqrt{۲}) = ۲(۳-\sqrt{۲}) - [(۳-\sqrt{۲})^۲] = ۶-۲\sqrt{۲}-۲ = ۴-۲\sqrt{۲}$$

$$\boxed{۳-\sqrt{۲} \simeq (۱/۶)^۲ = ۲/۵۶ \Rightarrow [۳-\sqrt{۲})^۲] = ۲}$$

$$f(-۴+f(۳-\sqrt{۲})) = f(-۴+۴-۲\sqrt{۲}) = f(-۲\sqrt{۲}) \Rightarrow f(-۲\sqrt{۲}) = ۲(-۲\sqrt{۲}) - [(-۲\sqrt{۲})^۲]$$
$$= -۴\sqrt{۲} - [۸] = -۴(\sqrt{۲}+۲)$$

نکته مهم:

$$if \quad -1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^{2n+1} < 0 \Rightarrow [x^{2n+1}] = -1$$
$$if \quad -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^{2n} < 1 \Rightarrow [x^{2n}] = 0$$
$$if \quad 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^{2n+1} < 1 \Rightarrow [x^{2n+1}] = 0$$
$$if \quad 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^{2n} < 1 \Rightarrow [x^{2n}] = 0$$

**مثال :** اگر $-1 < x < 0$ حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + \cdots + [x^{20}]$ کدام است؟

۱) $-20$　　۲) $20$　　۳) $-10$　　۴) $10$

$$[x] + [x^2] + [x^3] + \cdots + [x^{20}] = -1 + 0 + (-1) + 0 + (-1) + \cdots + 0 = -10$$

**مثال :** اگر $x^2 + x < 0$ حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸ خ)

۱) $-2$　　۲) $-1$　　۳) صفر　　۴) $1$

**مثال:** برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

$$\begin{cases} 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \longrightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ \xrightarrow{\sqrt{\ }} 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \longrightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n - 1 \\ n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \longrightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ \xrightarrow{\sqrt{\ }} (n-2) < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \longrightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n - 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2n - 1 - 2(n-2) = +3$$

**روش کنکوری :** برای پیدا کردن حاصل عبارت‌ها به جای متغیر عدد دلخواهی از دامنه قرار می‌دهیم و حاصل عبارت را پیدا می‌کنیم سپس به گزینه‌ها دقت می‌کنیم اگر گزینه‌ها به شکل عدد باشند که به جواب آخر رسیده‌ایم.

تذکر ۱ : اگر گزینه‌ها بر حسب متغیر باشند به جای متغیر همان عدد را قرار داده و حاصل آنها را نیز به دست می‌آوریم گزینه‌ای صحیح است که جوابش با حاصل عبارت یکی شود.

تذکر ۲ : اگر دو گزینه مثل هم شد برای آن دو گزینه عدد جدید انتخاب کرده و مراحل فوق را تکرار می‌کنیم (اعداد لبه‌ی دامنه را انتخاب نکنید)

$$n = 3 \Rightarrow [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = [5/6] - 2[1/7] = 5 - 2 = 3$$

**مثال:** برای هر عدد طبیعی $n$ حاصل عبارت $[\sqrt{4n^2 + 2n + 1}]$ کدام است؟ (تمرین ریاضی عمومی)

۱) $3n$　　۲) $2n$　　۳) $n+1$　　۴) $n+3$

$$n = 1 \Rightarrow [\sqrt{4(1)^2 + 2(1) + 1}] = [\sqrt{7}] = [2/\ldots] = 2 \xrightarrow{n=1} \begin{cases} \text{گزینه ۱)} & 3 \\ \text{گزینه ۲)} & 2 \\ \text{گزینه ۳)} & 2 \\ \text{گزینه ۴)} & 4 \end{cases}$$

$$n = 2 \Rightarrow [\sqrt{4(2)^2 + 2(2) + 1}] = [\sqrt{21}] = [4/\ldots] = 4 \xrightarrow{n=2} \begin{cases} \text{گزینه ۲)} & 4 \\ \text{گزینه ۳)} & 3 \end{cases}$$

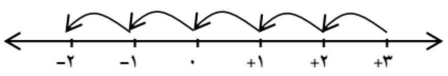
**مثال :** برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ حاصل عبارت $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]+[\sqrt{n^۲+۲n+۲}]$ کدام است؟

۱) $n+۲$ ۲) $۲n$ ۳) $۲n-۱$ ۴) $۲n+۱$

$$n=۱ \Rightarrow \left[\sqrt[۳]{۱^۳+۳(۱)^۲}\right]+\left[\sqrt{۱^۲+۲(۱)+۲}\right]=[\sqrt[۳]{۴}]+[\sqrt{۵}] \xRightarrow{\boxed{\sqrt[۳]{۴}\to ۱^۳<۴<۲^۳ \to [\sqrt[۳]{۴}]=۱}\ ,\ [\sqrt{۵}]=۲} ۱+۲=۳$$

**مثال :** اگر $۱ \le x < ۲$ باشد حاصل $[x]$ کدام است؟

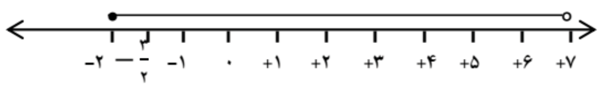
**مثال :** اگر $-۲ \le x < ۳$ باشد حاصل $[x]$ کدام است؟



$$-۲ \le x < ۳ \to \begin{cases} -۲ \le x < -۱ \to [x]=-۲ \\ -۱ \le x < ۰ \to [x]=-۱ \\ \emptyset \le x < ۱ \to [x]=۰ \\ ۱ \le x < ۲ \to [x]=۱ \\ ۲ \le x < ۳ \to [x]=۲ \end{cases}$$

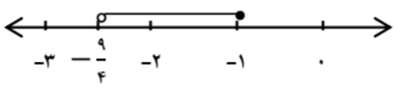
**مثال :** اگر $\frac{۵}{۲} \le x < ۳$ باشد حاصل $[x]$ کدام است؟

**مثال:** اگر $-\frac{۳}{۲} \le x \le ۷$ باشد حاصل $[x]$ کدام است؟



$$-\frac{۳}{۲} \le x \le ۷ \to \begin{cases} -\frac{۳}{۲} \le x < -۱ \to [x]=-۲ \\ -۱ \le x < ۰ \to [x]=-۱ \\ \vdots \\ ۶ \le x < ۷ \to [x]=۶ \\ x=۷ \to [x]=۷ \end{cases}$$

**مثال :** اگر $-\frac{۹}{۴} \le -۵x \le -۱$ باشد حاصل $[-۵x]$ کدام است؟



$$-\frac{۹}{۴} \le -۵x \le -۱ \to \begin{cases} -\frac{۹}{۴} \le -۵x < -۲ \to [-۵x]=-۳ \\ -۲ \le -۵x < -۱ \to [-۵x]=-۲ \\ -۵x=-۱ \to [-۵x]=-۱ \end{cases}$$

**مثال :** اگر $-۱ < x < -\frac{۲}{۳}$ باشد حاصل $[-۴x]$ کدام است؟

$$-۱ < x < -\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\times -۴} ۴ > -۴x > \frac{۸}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{۳} < -۴x < ۳ \to [-۴x]=۲ \\ ۳ \le -۴x < ۴ \to [-۴x]=۳ \end{cases}$$

تمرین: اگر $۲/۵ \le x < ۳/۴$ مطلوب است محاسبه $[x]$ .

تمرین: اگر $-\frac{۱}{۲} \le -\frac{۱}{۳}x < \frac{۱}{۴}$ مطلوب است محاسبه $[x]$ .

تمرین: اگر $-\frac{۱}{۴} \le \frac{۱}{۲}x < \frac{۱}{۲}$ مطلوب است محاسبه $[-۲x]$ .

**ویژگی های جزء صحیح:**

$$\boxed{۱)\quad [u+k]=[u]+k \qquad (k\in\mathbb{Z})}$$

$$[x+۱]=[x]+۱$$
$$[۲-۳x]=[-۳x]+۲$$
$$[۲x-۵]=[۲x]-۵$$
$$\big[x+[x]\big]=[x]+[x]=۲[x]$$

$$\boxed{۲)\quad [ku]\neq k[u] \qquad (k\neq ۰,۱)}$$

$$[۲x]\neq ۲[x]$$
$$\left[\frac{۱}{۳}x\right]\neq \frac{۱}{۳}[x]$$

**مثال:** حاصل عبارت $\big[x-۲[x+۳[x]]\big]$ کدام است؟

۱) $۷[x]$ ۲) $-۷[x]$ ۳) $-[۷x]$ ۴) $[-۷x]$

$$\big[x-۲[x+۳[x]]\big]=[x-۲([x]+۳[x])]=[x-۲(۴[x])]=\big[x-۸[x]\big]=[x]-۸[x]=-۷[x]$$

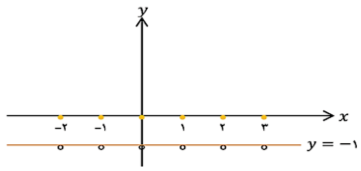
**نکته :** $[u]$ یک عبارت صحیح است پس می‌تواند از جزءِ صحیح خارج شود

مثال :

$$\big[۲x+[x]\big]=[۲x]+[x]$$
$$\big[۳x+[۳x]\big]=[۳x]+[۳x]=۲[۳x]$$
$$\big[۴x+۲[۳x]\big]=[۴x]+۲[۳x]$$

$$\boxed{۳)\quad [u]+[-u]=\begin{cases}۰ & u\in\mathbb{Z}\\ -۱ & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}}$$

$$y=[x]+[-x]$$
$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



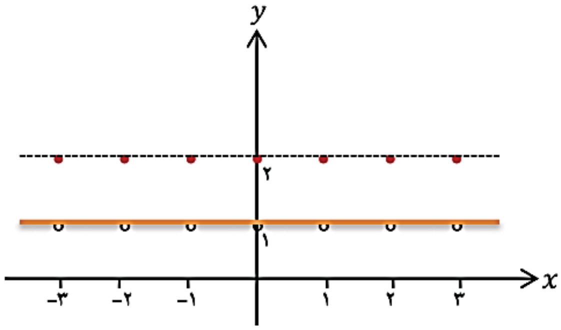

**نتیجه مهم :**

$$\boxed{\begin{array}{l} x\in\mathbb{Z}\Longrightarrow [x]+[-x]=۰\Longrightarrow [-x]=-[x]\\ x\notin\mathbb{Z}\Longrightarrow [x]+[-x]=-۱\Longrightarrow [-x]=-[x]-۱\end{array}}$$

**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=[x+۲]+[-x]$

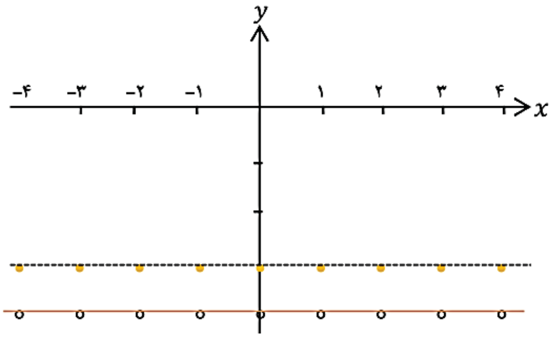
$$y=[x]+۲+[-x]=[x]+[-x]+۲$$
$$y=\begin{cases}۰+۲=۲ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱+۲=۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



۲) $y = [x] + [-x-۳]$

$y = [x] + [-x] - ۳$

$$y = \begin{cases} \cdot - ۳ = -۳ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ - ۳ = -۴ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$




۳) $y = [۲-x] + [x]$

$y = ۲ + [-x] + [x]$

$$y = \begin{cases} ۲ + \cdot = ۲ & x \in \mathbb{Z} \\ ۲ + (-۱) = ۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴) $y = [x + [-x]]$

$y = [x] + [-x]$

$$y = \begin{cases} \cdot & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۵) $y = [x - ۴ + [۳ - x]]$

$y = [x] - ۴ + [۳ - x]$

$y = [x] - ۴ + [-x] + ۳$

$\Rightarrow y = [x] + [-x] - ۱$

$$y = \begin{cases} \cdot - ۱ = -۱ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ - ۱ = -۲ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۶) $y = [۲ - x] + [x - ۳]$

$y = [-x] + ۲ + [x] - ۳$

$y = [-x] + [x] - ۱$

$$y = \begin{cases} \cdot - ۱ = -۱ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ - ۱ = -۲ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

**تمرین:** اگر $f(x) = [x+۲] + [-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ آن گاه $f(x)$ کدام ست؟

۱) ۱    ۲) ۰    ۳) $-۱$    ۴) ۲

**مثال :** دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ + x - ۲$ مفروضند اگر $g(f(x))$ باشد

مجموعه مقادیر $x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی فیزیک ۸۹)

۱) $R - \mathbb{Z}$    ۲) $\mathbb{Z}$    ۳) $R$    ۴) $\emptyset$

$$g(f(x)) = -۲ \Rightarrow f^۲(x) + f(x) - ۲ = -۲ \Rightarrow f^۲(x) + f(x) = \cdot$$

$$\Rightarrow f(x)(f(x)+۱) = \cdot \begin{cases} f(x) = \cdot \Rightarrow [x] + [-x] = \cdot \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \\ f(x) = -۱ \Rightarrow [x] + [-x] = -۱ \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب : $x \in \mathbb{Z} \cup x \notin \mathbb{Z} = R$

**تمرین :** دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ - x - ۱$ مفروضند اگر $g(f(x)) = ۱$

باشد مجموعه مقادیر $x$ کدام است؟

۱) $R - \mathbb{Z}$    ۲) $\mathbb{Z}$    ۳) $R$    ۴) $\emptyset$

**سؤال۶۴:** دامنه‌ی تابع $y = \dfrac{۱}{[x] + [-x]}$ کدام است.

$$\begin{cases} x \in Z : \xrightarrow{[x]+[-x]=\circ} y = \dfrac{۱}{\circ} \text{ غ ق ق} \\ x \notin Z : \xrightarrow{[x]+[-x]=-۱} y = \dfrac{۱}{-۱} = -۱ \end{cases} \Rightarrow D_f = R - Z$$

**سؤال۶۵: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{1}{[x]+[-x]+1}$ کدام است.**

$$\begin{cases} x\in Z: \xrightarrow{[x]+[-x]=0} y=\dfrac{1}{0+1}=1 \\ x\notin Z: \xrightarrow{[x]+[-x]=-1} y=\dfrac{1}{-1+1}= \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

**مثال:** معادله‌ی $\dfrac{1}{[x]+[-x]}=2x^2-5x+2$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

$$x\in\mathbb{Z} \xrightarrow{[x]+[-x]=0} 2x^2-5x+2=\frac{1}{0}$$ جواب ندارد

$$x\notin\mathbb{Z} \xrightarrow{[x]+[-x]=-1} 2x^2-5x+2=\frac{1}{-1}\Rightarrow 2x^2-5x+2=-1$$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+3=0\rightarrow\begin{cases} x=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z} & \text{ق ق} \\ x=1\in\mathbb{Z} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

**سؤال۷۱: اگر $f(x)=\dfrac{3^{[-x]}}{3^{-[x]}}$ باشد حاصل $f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+...+f(\sqrt{10})$ کدام است.**

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) $\frac{7}{3}$

$$f(x)=3^{[-x]+[x]}=\begin{cases}3^0 & x\in Z\\ 3^{-1} & x\notin Z\end{cases}=\begin{cases}1 & x\in Z\\ \frac{1}{3} & x\notin Z\end{cases}$$

$$f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+...+f(\sqrt{10})=3\times1+7\times\frac{1}{3}=3+\frac{7}{3}=\frac{16}{3}$$

**سؤال۷۲: معادله $2x-[-x]=[x]+[2x]$ در بازه‌ی $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ چند جواب دارد.**

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**سؤال۷۳: معادله‌ی $2x^2+3x=[x]+[-x]$ چند جواب دارد.**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$x\in Z: 2x^2+3x=0\Rightarrow x(2x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \in Z \checkmark\\ x=-\frac{3}{2} & \notin Z \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

$$x\notin Z: 2x^2+3x=-1\Rightarrow 2x^2+3x+1=0\Rightarrow(x+1)(2x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1 & \in Z \text{ غ ق ق}\\ x=-\frac{1}{2} & \notin Z \checkmark\end{cases}$$

$$\boxed{4)\quad [u]=k\quad (k\in\mathbb{Z})\Rightarrow k\le u<k+1}$$

**مثال:** معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $[x] = ۵ \Rightarrow ۵ \le x < ۵ + ۱$

۲) $[x] = -۲ \Rightarrow -۲ \le x < -۲ + ۱$

۳) $[۲x - ۵] = ۲$
$\Rightarrow ۲ \le ۲x - ۵ < ۲ + ۱ \Rightarrow ۲ \le ۲x - ۵ < ۳$
$\xRightarrow{+۵} ۷ < ۲x < ۸ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۷}{۲} \le x < ۴$

۴) $[۳x - ۲] = -۷$
$\Rightarrow -۷ \le ۳x - ۲ < -۷ + ۱ \Rightarrow -۷ \le ۳x - ۲ < -۶$
$\xRightarrow{+۲} -۵ < ۳x < -۴ \rightarrow -\frac{۵}{۳} \le x < -\frac{۴}{۳}$

۵) $\left[\frac{۱ - ۳x}{۴}\right] = ۴$
$\Rightarrow ۴ \le \frac{۱ - ۳x}{۴} < ۴ + ۱ \Rightarrow ۴ \le \frac{۱ - ۳x}{۴} < ۵$
$\xRightarrow{\times ۴} ۱۶ \le ۱ - ۳x < ۲۰ \xRightarrow{-۱} ۱۵ < -۳x < ۱۹$
$\xRightarrow{\div(-۳)} -۵ \ge x > -\frac{۱۹}{۳}$

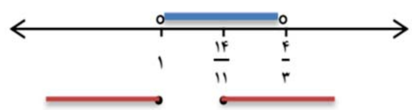
۶) $\left[-\frac{۷x + ۲}{۳}\right] = -۱$
$\Rightarrow -۱ \le -\frac{۷x + ۲}{۳} < -۱ + ۱ \Rightarrow -۱ \le -\frac{۷x + ۲}{۳} < ۰$
$\xRightarrow{\times ۳} -۳ \le -۷x - ۲ < ۰ \xRightarrow{+۲} -۱ < -۷x < ۲$
$\xRightarrow{\div(-۷)} \frac{۱}{۷} \ge x > -\frac{۲}{۷}$

۷) $[۳x - ۲] = \frac{۱}{۲}$

$$\boxed{[u] = k \quad , \quad k \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{جواب ندارد}}$$

۸) $\left[\frac{۳x - ۶}{۲x - ۲}\right] = -۴$
$-۴ \le \frac{۳x - ۶}{۲x - ۲} < -۴ + ۱ \Rightarrow -۴ \le \frac{۳x - ۶}{۲x - ۲} < -۳$

$$\begin{cases} \frac{۳x - ۶}{۲x - ۲} < -۳ \Rightarrow \frac{۳x - ۶}{۲x - ۲} + ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{۹x - ۱۲}{۲x - ۲} < ۰ \\ \cap \\ \frac{۳x - ۶}{۲x - ۲} \ge -۴ \Rightarrow \frac{۳x - ۶}{۲x - ۲} + ۴ \ge ۰ \Rightarrow \frac{۱۱x - ۱۴}{۲x - ۲} \ge ۰ \end{cases}$$




$$\left\{۱ < x < \frac{۴}{۳}\right\} \cap \left\{x \le ۱ \cup x \ge \frac{۱۴}{۱۱}\right\} = \frac{۱۴}{۱۱} \le x < \frac{۴}{۳}$$

| $x$ | | ۱ | | $\frac{۴}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۹x - ۱۲$ | - | | - | ۰ | + |
| $۲x - ۲$ | - | ۰ | + | | + |
| | + | | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | | + |

| $x$ | | ۱ | | $\frac{۱۴}{۱۱}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۱۱x - ۱۴$ | - | | - | ۰ | + |
| $۲x - ۲$ | - | ۰ | + | | + |
| | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | | - | | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ |

۹) $\left[\frac{-x}{۳} + ۲\right] = -۵$
$-۵ \le \frac{-x}{۳} + ۲ < -۵ + ۱ \Rightarrow -۵ \le \frac{-x}{۳} + ۲ < -۴ \xRightarrow{-۲} -۷ \le \frac{-x}{۳} < -۶$
$\xRightarrow{\times ۳} -۲۱ \le -x < -۱۸ \xRightarrow{\div(-۱)} ۲۱ \ge x > ۱۸$

**سؤال۵:** اگر جز صحیح $x^۲+x$ برابر (۱-) باشد، آنگاه $[x^{۲۵}]$ کدام است. (کنکور تجربی)

**سؤال۱۱:** مجموعه جواب معادله‌ی $[x^۲+۴x]=-۴$ بازه‌ی $(a,b)$ است مقدار $b-a$ کدام است.

**سؤال۲:** اگر $[x]=۲,[y]=۴$ آنگاه $[x+y]$ برابر کدام است.

۱) ۷　　　۲) ۶　　　۳) ۶ یا ۷　　　۴) ۸

$$\begin{cases}[x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳\\ [y]=۴\Rightarrow ۴\le y<۵\end{cases}\Rightarrow ۶\le x+y<۸\Rightarrow [x+y]=۶ \text{ یا } ۷$$

**مثال:** طول بازه‌ی مجموعه جواب معادله‌ی $[۳x-[۳x]]+[۳x+[۳x]]=۴$ کدام است؟

۱) ۱　　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　　۴) $\frac{۴}{۳}$

$$[۳x-[۳x]]+[۳x+[۳x]]=۴\Rightarrow [۳x]-[۳x]+[۳x]+[۳x]=۴$$
$$\Rightarrow ۲[۳x]=۴\longrightarrow [۳x]=۲\Rightarrow ۲\le ۳x<۲+۱\Rightarrow$$
$$۲\le ۳x<۳\xrightarrow{\div ۳}\frac{۲}{۳}\le x<۱\longrightarrow \text{طول بازه}=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

**مثال:** مجموعه جواب معادله‌ی $[x]^۲-۳[x]-۱۰=۰$ را بدست آورید؟

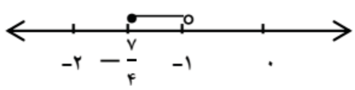
$$[x]=t\Rightarrow t^۲-۳t-۱=۰\longrightarrow (t-۵)(t+۲)=۰\begin{cases}t=۵\\ t=-۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}[x]=۵\longrightarrow ۵\le x<۵+۱\longrightarrow ۵\le x<۶\\ [x]=-۲\longrightarrow -۲\le x<-۲+۱\longrightarrow -۲\le x<-۱\end{cases}\quad \text{جواب}=\text{اجتماع}$$

**مثال:** مجموعه جواب معادله‌ی $۳[۲x]^۲-۵[۲x]+۲=۰$ را بدست آورید؟

$$[۲x]=t\Rightarrow ۳t^۲-۵t+۲-۰=۰\longrightarrow\begin{cases}t=۱\\ t=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}[۲x]=۱\longrightarrow ۱\le ۲x<۱+۱\longrightarrow ۱\le ۲x<۲\longrightarrow \frac{۱}{۲}\le x<۱\\ [۲x]=\frac{۲}{۳}\longrightarrow \quad \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

**مثال:** اگر $\left[\frac{۱-۴x}{۳}\right]=-۲$ آن گاه مقدار $[-x]$ را حساب کنید.

$$\Rightarrow -۲\le\frac{۱-۴x}{۳}<-۲+۱\Rightarrow -۲\le\frac{۱-۴x}{۳}<-۱\xRightarrow{\times ۳}-۶\le ۱-۴x<-۳$$
$$\xRightarrow{-۱}-۷\le -۴x<-۴\xrightarrow{\div ۴}-\frac{۷}{۴}\le -x<-۱$$
$$\Rightarrow [-x]=-۲$$



**مثال :** اگر $k = [x^۲ + x] = [x^۲ - x]$ باشد آن گاه $[x^۲]$ کدام است؟

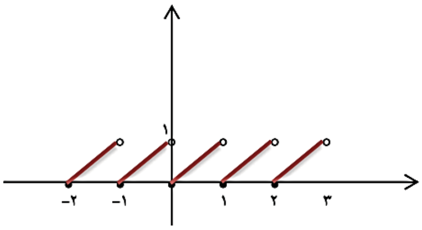
۱) $k$ ۲) $k + ۱$ ۳) $k - ۱$ ۴) $k^۲$

$$\begin{cases}[x^۲ + x] = k \longrightarrow k \le x^۲ + x < k + ۱\\ [x^۲ - x] = k \longrightarrow k \le x^۲ - x < k + ۱\end{cases}$$
$$\overline{۲k \le ۲x^۲ < ۲k + ۲}$$
$$\xrightarrow{\div ۲} k \le x^۲ < k + ۱ \Rightarrow [x^۲] = k$$

## نامعادله‌های براکتی :

$\boxed{۶)\quad ۰ \le u - [u] < ۱}$

$\boxed{y = x - [x]}$




**مثال :** برد تابع $y = ۳x - [۳x] + ۲$ کدام است؟

۱) $[۳, ۵)$ ۲) $[۲, ۳)$ ۳) $(-۲, ۳]$ ۴) $[-۵, -۲]$

$$\xRightarrow[\text{عبارت داخل جزءِ صحیح همان } u \text{ است}]{۰ \le u - [u] < ۱} ۰ \le ۳x - [۳x] < ۱ \xrightarrow{+۲} ۲ \le ۳x - [۳x] + ۲ < ۳ \Rightarrow ۲ \le y < ۳$$

**مثال :** برد تابع $y = [۲x] - ۲x + ۱$ کدام است؟

۱) $[۰, ۱)$ ۲) $(۰, ۱]$ ۳) $[-۱, ۰)$ ۴) $(-۱, ۰]$

$$۰ \le ۲x - [۲x] < ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۰ \ge -۲x + [۲x] > -۱ \xrightarrow{+۱} ۱ \ge -۲x + [۲x] + ۱ > ۰$$
$$\Rightarrow ۱ \ge y > ۰$$

**مثال :** برد تابع $y = ۲[x] - ۲x + ۱$ کدام است؟

۱) $[۰, ۲]$ ۲) $(۰, ۱]$ ۳) $[۰, ۲)$ ۴) $(-۱, ۱]$

$$۰ \le x - [x] < ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۰ \ge -۲x + ۲[x] > -۲ \xrightarrow{+۱} ۱ \ge -۲x + ۲[x] + ۱ > -۱$$
$$\Rightarrow \boxed{۱ \ge y > -۱}$$

مثال : برد توابع زیر را بیابید.

۳) $\sqrt{۵x - ۵[x] - ۱}$

$$۰ \le x - [x] < ۱ \Rightarrow ۰ \le ۵x - ۵[x] < ۵ \Rightarrow -۱ \le ۵x - ۵[x] - ۱ < ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۵x - ۵[x] - ۱} < ۲ \Rightarrow ۰ \le y < ۲$$

۴) $\sqrt{x - ۴\left[\frac{x}{۴}\right]}$

$$x - ۴\left[\frac{x}{۴}\right] = ۴\underbrace{\left(\frac{x}{۴} - \left[\frac{x}{۴}\right]\right)}_{\text{عددی که } ۰\le \;\; <۱} \Rightarrow ۰ \le ۴\left(\frac{x}{۴} - \left[\frac{x}{۴}\right]\right) < ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۴\left(\frac{x}{۴} - \left[\frac{x}{۴}\right]\right)} < ۲$$

**سؤال۵۱:** معادله‌ی $۲x-[۲x]=x^{۲}-۲x+۲$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد.

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) بی شمار

$$\underbrace{۲x-[۲x]}_{۰\le \text{عددی} <۱}=\underbrace{(x-۱)^{۲}+۱}_{\text{عددی} \ge ۱}$$

**سؤال۵۲:** برد تابع $f(x)=\sqrt{۴+x-۴\left[\dfrac{x}{۴}\right]}$ کدام است.

۱) $[۱,۴]$　۲) $[\sqrt{۶},۳]$　۳) $[۲,۲\sqrt{۲}]$　۴) $[۱,\sqrt{۲})$

$$A=۴+x-۴\left[\frac{x}{۴}\right]=۴+۴\underbrace{\left(\frac{x}{۴}-\left[\frac{x}{۴}\right]\right)}_{۰\le \text{عددی} <۱}\Rightarrow ۴\le A<۸\Rightarrow ۲\le\sqrt{A}<۲\sqrt{۲}\Rightarrow R_f=[۲,۲\sqrt{۲})$$

**سؤال۵۴:** اگر $f(x)=[x]$ مجموعه مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است. (کنکور)

۱) $\{۰\}$　۲) $\{۱\}$　۳) $\{۰,۱\}$　۴) $\{-۱,۰,۱\}$

$$f(x-f(x))\xrightarrow{f(x)=[x]}f(x-[x])=\underbrace{[x-[x]]}_{۰\le \text{عددی} <۱}=۰$$

**سؤال۵۶:** اگر $f(x)=-x+[x]$ و $g(x)=۲^{x}$ آنگاه برد تابع gof کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۰)

۱) $\left(\frac{۱}{۲},۱\right]$　۲) $(۱,۲]$　۳) $\left[\frac{۱}{۲},۱\right)$　۴) $[۱,۲)$

$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<-x+[x]\le ۰$$

$$gof(x)=۲^{[x]-x}\Rightarrow ۲^{-۱}<gof(x)\le ۲^{۰}\Rightarrow \frac{۱}{۲}<gof(x)\le ۱\Rightarrow R_{gof}=\left(\frac{۱}{۲},۱\right]$$

**سؤال۱۲:** معادله‌ی $۳[x]+|x|=۱۶$ چند جواب دارد. (آزمون گاج)

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) بی شمار

سمت راست معادله صحیح است در نتیجه x نیز صحیح است. $|x|=۱۶-۳[x]$

$$\Rightarrow|x|=۱۶-۳x\xrightarrow[x\le\frac{۱۶}{۳}]{۱۶-۳x\ge۰}x=\pm(۱۶-۳x)\Rightarrow\begin{cases}x=۱۶-۳x\Rightarrow ۴x=۱۶\Rightarrow x=۴\\ x=-۱۶+۳x\Rightarrow -۲x=-۱۶\Rightarrow x=۸\end{cases}\xrightarrow{x\le\frac{۱۶}{۳}}x=۴$$

**سؤال۱۵:** اگر $x-\sqrt{x-۱}=۱۳$ باشد حاصل $\left[\dfrac{x^{۲}}{۱۲}\right]$ کدام است. (سنجش)

۱) ۲۵　۲) ۲۴　۳) ۲۲　۴) ۲۱

$$x-\sqrt{x-۱}=۱۳\Rightarrow x-۱۳=\sqrt{x-۱}\xrightarrow[x\ge۱۳]{\begin{cases}x-۱۳\ge۰\\x-۱\ge۰\end{cases}}(x-۱۳)^{۲}=x-۱\Rightarrow x^{۲}-۲۶x+۱۶۹=x-۱$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲۷x+۱۷۰=۰\Rightarrow(x-۱۰)(x-۱۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱۰ & \text{غ ق ق}\\ x=۱۷ & \checkmark\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x^{۲}}{۱۲}\right]=\left[\frac{۱۷^{۲}}{۱۲}\right]=\left[\frac{۲۸۹}{۱۲}\right]=۲۴$$

**سؤال ۱۴:** معادله‌ی $[x]+[x^{۲}]=\frac{x}{۲}$ چند ریشه دارد.

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

$$\underbrace{۲[x]+۲[x^{۲}]}_{\text{صحیح}}=x$$

سمت چپ معادله بالا صحیح بوده لذا سمت راست نیز باید صحیح باشد یعنی: $x\in Z$

$$\Rightarrow ۲x+۲x^{۲}=x\Rightarrow ۲x^{۲}+x=۰\Rightarrow x(۲x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\in Z & \text{ق ق}\\ x=-\frac{۱}{۲}\notin Z & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

**سؤال ۲۰:** معادله‌ی $[۲x]=۳x$ چند جواب دارد.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

$$۳x\le ۲x<۳x+۱\xrightarrow{-۳x}۰\le x<۱\Rightarrow -۱<x\le ۰\xrightarrow{\text{۳x عددی صحیح است}}-۳<۳x\le ۰\xrightarrow{۳x\in Z}$$

$$۳x\in\{-۲,-۱,۰\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳},۰\right\}$$

**سؤال ۲۱:** معادله‌ی $\left[\frac{x}{۳}\right]=\frac{x}{۲}$ چند جواب دارد.

چون حاصل $\left[\frac{x}{۳}\right]$ عدد صحیح می شود پس: $\frac{x}{۲}=k\in Z\Rightarrow x=۲k$ از طرفی:

$$\frac{x}{۲}\le\frac{x}{۳}<\frac{x}{۲}+۱\xrightarrow{\times ۶}۳x\le ۲x<۳x+۶\Rightarrow(۲x-۳x)(۲x-۳x-۶)\le ۰\Rightarrow -x(-x-۶)\le ۰$$

$$\Rightarrow x(x+۶)\le ۰\Rightarrow -۶<x\le ۰\xrightarrow{x=۲k}x=-۴,-۲,۰$$

**سؤال ۳۱:** دامنه‌ی تابع $\sqrt{([x]-\sqrt{۲})(۴-[x])}$ کدام است.

۱) $۲<x<۴$ ۲) $۲\le x<۵$ ۳) $۲\le x<۴$ ۴) $۲<x\le ۵$

$$[x]=a\Rightarrow(a-\sqrt{۲})(۴-a)\ge ۰\Rightarrow\sqrt{۲}\le a\le ۴\Rightarrow\sqrt{۲}\le[x]\le ۴\Rightarrow[x]=۲,۳,۴\Rightarrow ۲\le x<۵$$

**سؤال ۳۲:** مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید.

۱) $[x]^{۲}-۵[x]+۴<۰\Rightarrow([x]-۱)([x]-۴)<۰\Rightarrow ۱<[x]<۴\Rightarrow[x]=۲,۳\Rightarrow ۲\le x<۴$

۲) $\frac{[x]-۲}{۵-[x]}\le ۰\Rightarrow[x]=a\Rightarrow\frac{a-۲}{۵-a}\le ۰\Rightarrow\frac{a-۲}{a-۵}\ge ۰\Rightarrow a>۵$ یا $a\le ۲$

$$\Rightarrow\begin{cases}[x]\le ۲\Rightarrow[x]=...,۰,۱,۲\Rightarrow x<۳\\ [x]>۵\Rightarrow[x]=۶,۷,...\Rightarrow x\ge ۶\end{cases}\Rightarrow(-\infty,۳)\cup[۶,+\infty)$$

**سؤال ۳۳:** دامنه تابع $\sqrt{۲-[x^{۲}+۲x]}$ کدام مجموعه است.

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $(-۳,۱)$ ۳) $(-۱,۴)$ ۴) $(۰,۲)$

$$D_f=۲-[x^{۲}+۲x]\ge ۰\Rightarrow[x^{۲}+۲x]\le ۲\Rightarrow x^{۲}+۲x<۳\Rightarrow x^{۲}+۲x-۳<۰$$

$$\Rightarrow(x-۱)(x+۳)<۰\Rightarrow -۳<x<۱$$

**سؤال۳۵:** دامنه‌ی تعریف تابع $\sqrt{(۳-[x])([x]-\sqrt{۲۰})}$ برابر $[m,n)$ است حاصل $m+۲n$ کدام است.

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

$$(۳-[x])([x]-\sqrt{۲۰})\geq ۰\Rightarrow ۳\leq [x]\leq \sqrt{۲۰}=۴/...\Rightarrow ۳\leq [x]<۵$$

$$\Rightarrow ۳\leq x<۵\Rightarrow \begin{cases} m=۳ \\ n=۵ \end{cases}\Rightarrow m+۲n=۳+۱۰=۱۳$$

**سؤال۳۶:** مجموعه جواب معادله‌ی $[x]+\left[x-\frac{۱}{۴}\right]-\left[x+\frac{۳}{۴}\right]=۲$ کدام است.

$$[x]+\left[x+\frac{۳}{۴}-۱\right]-\left[x+\frac{۳}{۴}\right]=۲\Rightarrow [x]+\left[x+\frac{۳}{۴}\right]-۱-\left[x+\frac{۳}{۴}\right]=۲\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow ۳\leq x<۴$$

**سؤال۳۷:** مجموعه جواب معادله‌ی $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x-\frac{۱}{۲}\right]=۵$ کدام است. (گزینه۲)

۱) $\frac{۵}{۲}\leq x<\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\leq x<\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}<x\leq \frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}<x\leq \frac{۵}{۲}$

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x-\frac{۱}{۲}\right]=\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}-۱\right]=۵\Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]-۱=۵\Rightarrow ۲\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۶$$

$$\Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۳\Rightarrow ۳\leq x+\frac{۱}{۲}<۴\Rightarrow \frac{۵}{۲}\leq x<\frac{۷}{۲}$$

**سؤال۳۸:** برد تابع $y=[x-[x+۵]]$ کدام است.

۱) $\{-۴,-۵\}$ ۲) $\{-۵\}$ ۳) $\{-۳\}$ ۴) $\{-۳,-۵\}$

$$y=[x-([x]+۵)]=[x-[x]-۵]=[\underbrace{x-[x]}_{۰\leq \text{عدد}<۱}]-۵=۰-۵=-۵$$

**سؤال۳۹:** مجموعه جواب نامعادله‌ی $[x+[x]]>۳-[x]$ کدام است.

$$[x]+[x]>۳-[x]\Rightarrow ۳[x]>۳\Rightarrow [x]>۱\Rightarrow [x]=۲,۳,...\Rightarrow x\geq ۲$$

**سؤال۴۰:** مجموعه جواب $[x+۳[x]]=۲[x-۴]$ را بدست آورید.

$$[x]+۳[x]=۲[x]-۸\Rightarrow [x]=-۴\Rightarrow -۴\leq x<-۳$$

**سؤال۶۱:** دامنه‌ی $f(x)=\sqrt{-\sin^۲\pi[x]}$ کدام است.

۱) **R** ۲) $\phi$ ۳) **Z** ۴) **N**

**سؤال۶۲:** برد $y=x-\sqrt{([x]-x)^۲}$ کدام است.

۱) $R^+$ ۲) **R** ۳) **Z** ۴) **R-Z**

**سؤال۶۳:** تابع $f(x)=\dfrac{۱}{[\cos \pi x]}$ با ضابطه‌ی در کدام بازه قابل تعریف است. (سراسری تجربی ۸۹)

۱) $[۰,۱)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $\left(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ ۴) $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$

نکته:

$[x+y] \geq [x]+[y]$

$|x+y| \leq |x|+|y|$

تست: مجموعه جواب نامعادلات $-۵ < ۲\left[-x+\frac{۱}{۲}\right] < -۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} < x \leq \frac{۵}{۲}$  ۲) $\frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۵}{۲}$  ۳) $۰ \leq x < ۲$  ۴) $۰ < x \leq ۲$

**نکته:**

$[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[۲x]$

$[\bigcirc]+\left[\bigcirc+\frac{۱}{۲}\right]=[۲\bigcirc]$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$[۲x]+\left[۲x+\frac{۱}{۲}\right]=۶\frac{۱}{۲}$

$[۳x]+\left[۳x+\frac{۱}{۲}\right]=۵$

$۲[x]^۲-۷[x]+۵=۰$

$[۲x]+x+[x+۱]=۲۱$

$۲[-x]+[x]=۳$

$\left[x-\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۱۷$

**بعضی از خواص نامساوی ها:**

۱) $a<b \rightarrow a+c<b+c$

۲) $a<b\ ,\ c<d \rightarrow a+c<b+d$

۳) $a<0 \leftrightarrow -a>0 \quad , \quad a>0 \leftrightarrow \frac{1}{a}>0 \quad , \quad a<0 \leftrightarrow \frac{1}{a}<0$

۴) $a<b \; , \; c>0 \rightarrow ac<bc$

۵) $a<b \; , \; c<0 \rightarrow ac>bc$

۶) $0<a<b \rightarrow a^n<b^n \rightarrow \sqrt[m]{a^n}<\sqrt[m]{b^n}$

۷) $0<a<b \rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

۸) $a<b<0 \rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

۹) $a<0<b \rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

نکته: هرگاه به کسری رسیدیم که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند می توان آن کسر را به چند قسمت تفکیک کرد:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \quad , \quad \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

تست: اگر $\left[\frac{1-x}{x}\right]=2$ حاصل $[-12x]$ ؟

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) $-3$ ۴) $-4$

مثال: جواب معادله $\left[\frac{x+3}{x}\right]+\left[\frac{2x+3}{x}\right]-\left[\frac{3x+3}{x}\right]=2$ را بیابید.

**رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح:**

الف) رسم نمودار توابع به فرم $y=[f(x)]$ مانند $y=[x^2]\,,y=[sinx]\,,y=[2x]$ (همه‌ی عبارت داخل جزءِ صحیح است)

ب) رسم نمودار توابعی که قسمتی از آنها شامل جزءِ صحیح است. مانند $y=x-[x]$ و $y=2[x]+1$

پ) رسم نمودار توابع شامل $[x]+[-x]$ . مانند $y=[x]+[-x]+2$ (قبلا رسم شده‌اند) (مجموع دو جزءِ صحیح)

رسم نمودار $y=[f(x)]$ :

مرحله اول: تابع درون جز صحیح $(f(x))$ را رسم می کنیم.

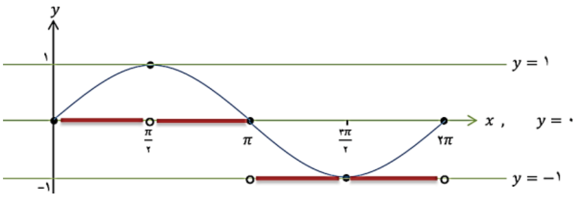
مرحله دوم: خطوط افقی $....\,, y=2\,, y=1\,, y=0\,, y=-1\,, y=-2\,, ...$ را رسم کرده، جاهایی که این خطوط با نمودار تابع $f(x)$ برخورد دارند را نقاط توپر در نظر می گیریم.

همچنین تصویر این نقاط توپر را روی خط پایینی به صورت نقاط توخالی در نظر می گیریم.

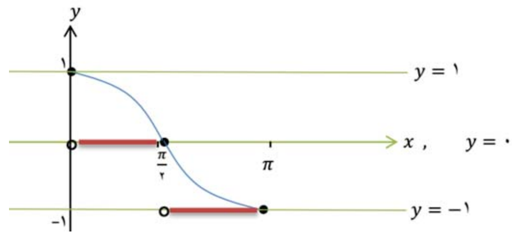
مرحله سوم: با توجه به اینکه اگر $f(x)$ بین دو عدد صحیح متوالی $n$ و $n+۱$ قرار گیرد آنگاه داریم: $[f(x)]=n$

هنگام رسم $[f(x)]$ مطابق شکل، قسمت های از نمودار $f(x)$ که بین دو خط $y=n$ و $y=n+۱$ قرار می گیرند را حذف کرده و به جای آن تصویر نمودار $f(x)$ را روی خط پایینی $(y=n)$ رسم می کنیم.

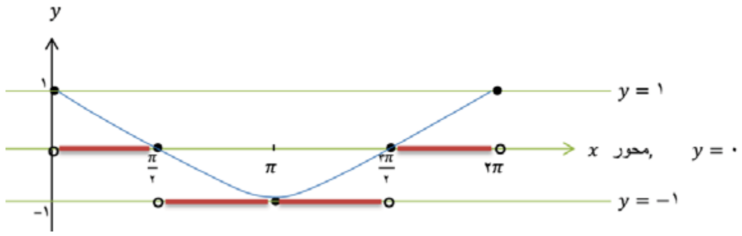
**مثال :** نمودار تابع $y=[sinx]$ را در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.




۱) $y=[\cos x]$ $\quad ۰\le x\le \pi$

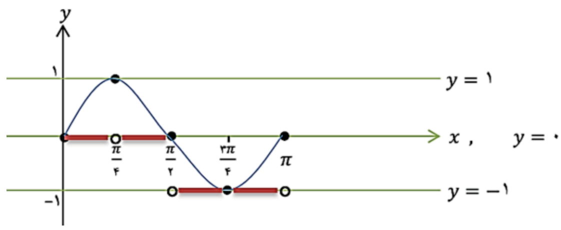



۲) $y=[\cos x]$ $\quad ۰\le x\le ۲\pi$

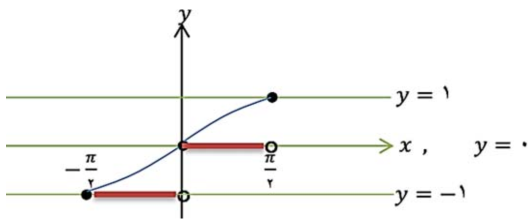



۳) $y=[\sin ۲x]$ $\quad ۰\le x\le \pi$

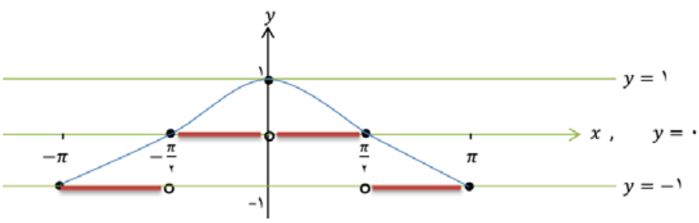
| $x$ | ۰ | $\frac{\pi}{۴}$ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\frac{۳\pi}{۴}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ۰ | ۱ | ۰ | -۱ | ۰ |




۴) $y=[\sin x]$ $\quad -\frac{\pi}{۲}\le x\le \frac{\pi}{۲}$

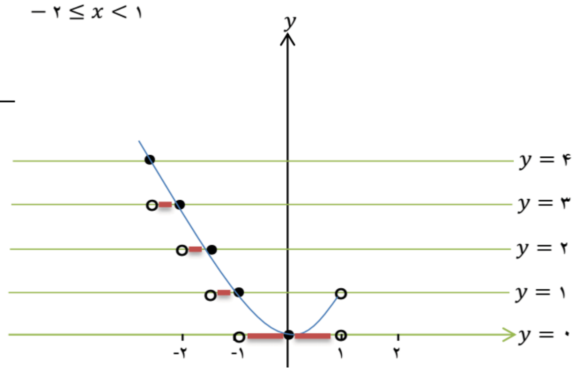



۵) $y=[\cos x]$ $\quad -\pi\le x\le \pi$



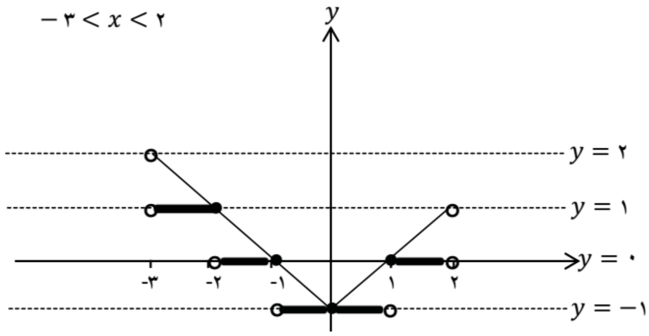
۶) $y = [x^۲]$ $\qquad - ۲ \le x < ۱$
$y = x^۲$

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| اول بازه | -۲ | ۴ |
| ریشه | ۰ | ۰ |
| آخر بازه | ۱ | ۱ |




۷) $y = [|x| - ۱]$ $\qquad - ۳ < x < ۲$
$y = |x| - ۱$

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| اول بازه | -۳ | ۲ |
| ریشه داخل قدر | ۰ | -۱ |
| آخر بازه | ۲ | ۱ |



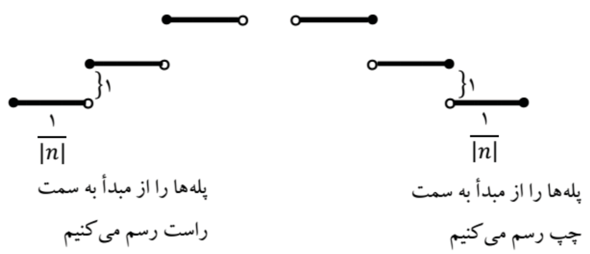

## روش کنکوری برای رسم توابع به فرم $y = [nx]$ :

روش کنکوری رسم نمودار توابع به فرم $y = [x]$

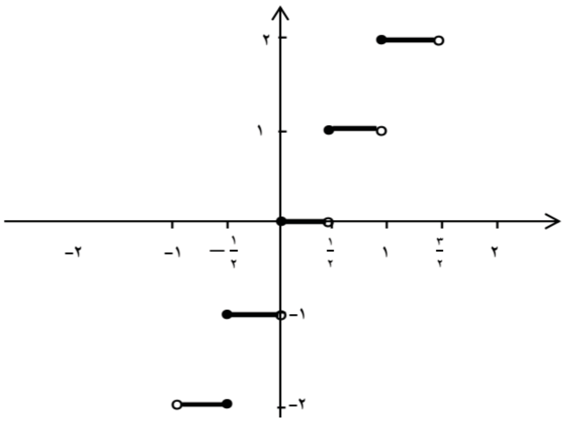
نمودار این تابع یک نمودار پلکانی است اگر $n > ۰$ پلکان صعودی و اگر $n < ۰$ پلکان نزولی است.

طول پله‌ها $\frac{۱}{|n|}$ می‌باشد.

ارتفاع پله‌ها همیشه یک است.




$y = [۲x]$
طول پله‌ها $= \frac{۱}{۲}$
ارتفاع $=$ یک
صعودی

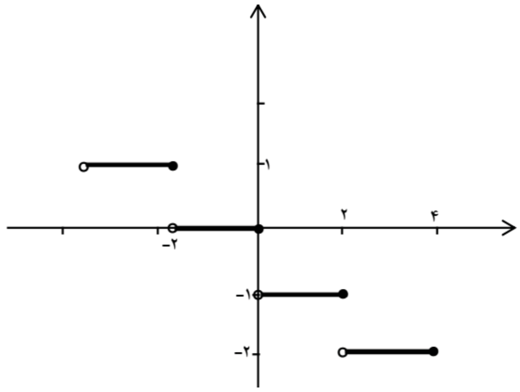


$y=\left[-\frac{1}{2}x\right]$

طول پله‌ها $= \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 2$

ارتفاع = یک

نزولی

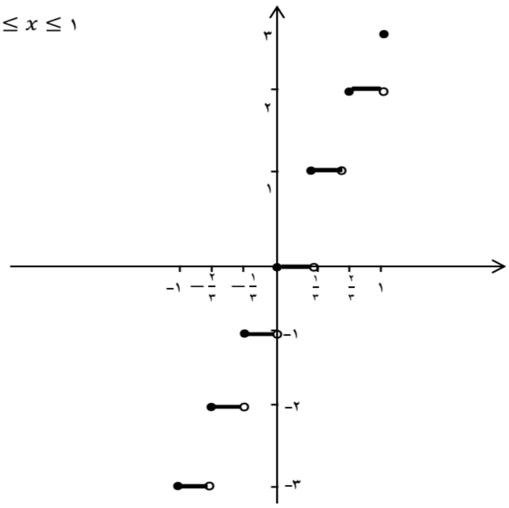


۱) $y=[3x]$ $\quad -1\le x\le 1$

طول پله‌ها $= \frac{1}{|3|} = \frac{1}{3}$

ارتفاع = یک

صعودی

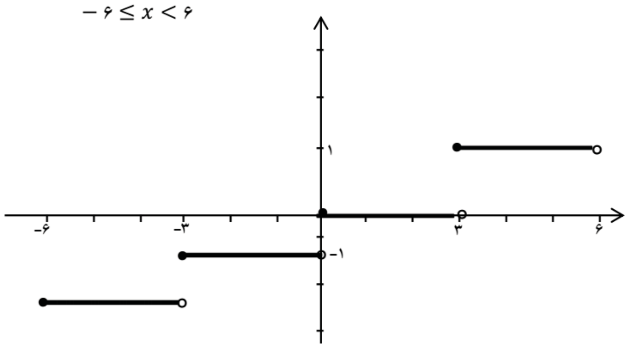


۲) $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ $\quad -6\le x< 6$

طول پله‌ها $= \frac{1}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 3$

ارتفاع = یک

صعودی

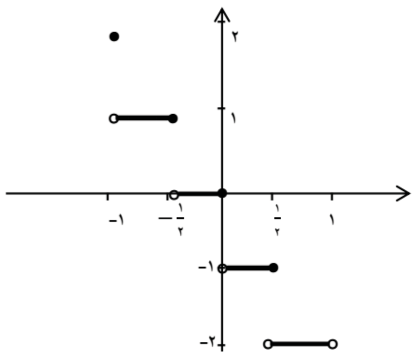


۳) $y=[-2x]$ $\quad -1\le x< 1$

طول پله‌ها $= \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$

ارتفاع = یک

نزولی

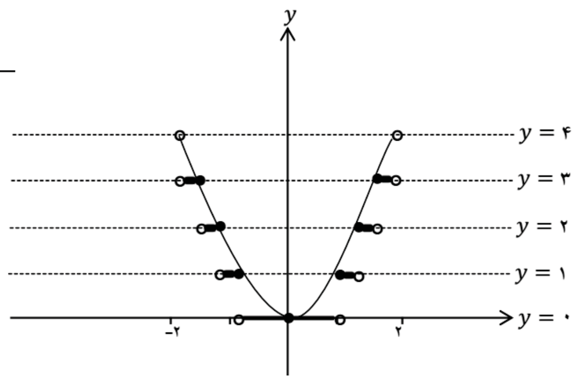


مثال ۸۸: نمودار تابع $f(x)=[x^2]$ در بازه‌ی $(-2,2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

$y = x^۲$

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| اول بازه | -۲ | ۴ |
| ریشه | ۰ | ۰ |
| آخر بازه | ۲ | ۴ |



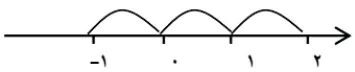

**نکته:** $y = k[ax] + b \quad (a \neq 0 \ , \ \ k \neq 0)$:

طول بازه (طول پله)= $\frac{۱}{|a|}$　　　　ارتفاع پله= $|k|$

**ب) رسم توابعی که قسمتی از آنها شامل جزءِ صحیح است**

مثال ۸۹: نمودار تابع $y = ۲x + [x]$ را در بازه‌ی $[-۱ , ۲)$ رسم کنید.

ابتدا بازه‌ی داده شده را با شکستن به چند زیر بازه تقسیم می‌کنیم و ضابطه‌ی تابع را بدون جزءِ صحیح می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم (اگر داخل جزءِ صحیح به صورت $ax$ بود ابتدا بازه را در $a$ ضرب می‌کنیم)




$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \xRightarrow{y=۲x+[x]} y = ۲x + (-۱)$

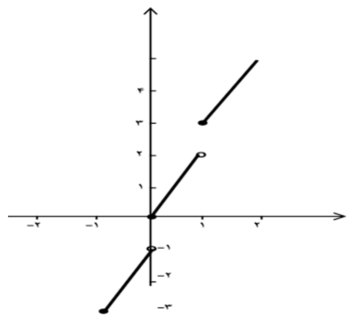
| $x$ | -۱ (اول بازه) | ۰ (آخر بازه) |
|---|---|---|
| $y$ | -۳ | -۱ |

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \xRightarrow{y=۲x+[x]} y = ۲x + (۰)$

| $x$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| $y$ | ۰ | ۲ |

$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \xRightarrow{y=۲x+[x]} y = ۲x + (۱)$

| $x$ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|
| $y$ | ۳ | ۵ |



$y = ۲[x] - ۱ \qquad -۲ \leq x < ۱$

$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = ۲(-۲) - ۱ \Rightarrow y = -۵$

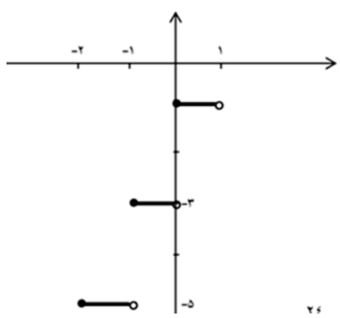
| $x$ | -۲ | -۱ |
|---|---|---|
| $y$ | -۵ | -۵ |

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۲(-۱) - ۱ \Rightarrow y = -۳$

| $x$ | -۱ | ۰ |
|---|---|---|
| $y$ | -۳ | -۳ |

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۲(۰) - ۱ \Rightarrow y = -۱$

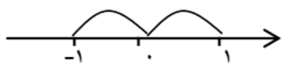
| $x$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| $y$ | -۱ | -۱ |



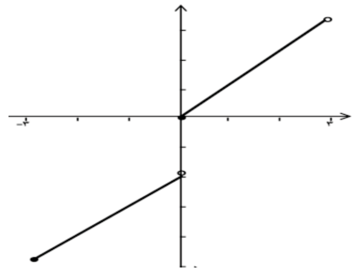
نکته : اگر داخل جزءِ صحیح به صورت $ax$ باشد ابتدا بازه‌ی داده شده را در $a$ ضرب می‌کنیم سپس بازه را می‌شکنیم.

مثال ۹۱ : نمودار تابع $y = ۲\left[\frac{۱}{۳}x\right] + x$ را در بازه‌ی $[-۳,۳)$ رسم کنید.

$$-۳ \le x < ۳ \xRightarrow{\times\frac{۱}{۳}} -۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۱$$



$$-۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \Rightarrow y = ۲(-۱) + x \Rightarrow y = x - ۲ \\ -۳ < x < ۰ \end{cases}$$



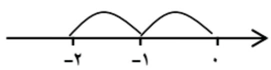
| $x$ | -۳ | ۰ |
|---|---|---|
| $y$ | -۵ | -۲ |

$$۰ \le \frac{۱}{۳}x < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \Rightarrow y = ۲(۰) + x \Rightarrow y = x \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

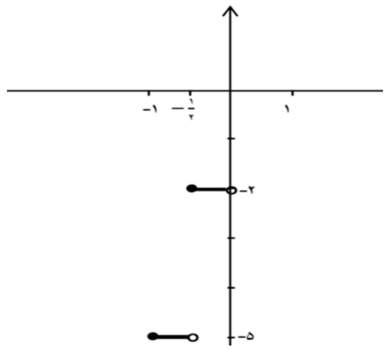
| $x$ | ۰ | ۳ |
|---|---|---|
| $y$ | ۰ | ۳ |

مثال ۹۲ : نمودار تابع $y = ۳[۲x] + ۱$ را در بازه‌ی $[-۱,۰)$ رسم کنید.

$$-۱ \le x < ۰ \xRightarrow{\times ۲} -۲ \le ۲x < ۰$$



$$-۲ \le ۲x < -۱ \Rightarrow \begin{cases} [۲x] = -۲ \Rightarrow y = ۳(-۲) + ۱ = -۵ \Rightarrow y = -۵ \\ -۱ \le x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$



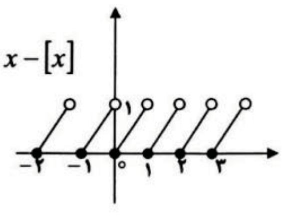
| $x$ | -۱ | $-\frac{۱}{۲}$ |
|---|---|---|
| $y$ | -۵ | -۵ |

$$-۱ \le ۲x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} [۲x] = -۱ \Rightarrow y = ۳(-۱) + ۱ \Rightarrow y = -۲ \\ -\frac{۱}{۲} \le x < ۰ \end{cases}$$

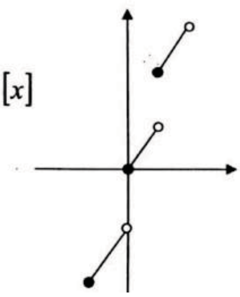
| $x$ | $-\frac{۱}{۲}$ | ۰ |
|---|---|---|
| $y$ | -۲ | -۲ |

**نکته : نمودار توابع زیر را به خاطر بسپارید :**

۱) $y = x - [x]$



۲) $y = x + [x]$



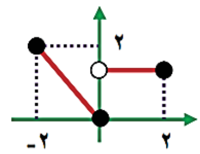
**سؤال۴۱: نمودار تابع $y = ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱; x \in [-۲,۶)$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است. (کنکور)**

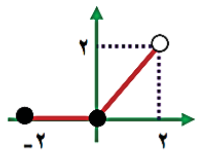
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

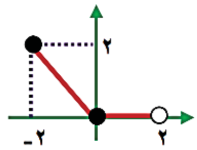
**می دانیم برای رسم $\left[\frac{x}{۲}\right]$ طول هر بازه $\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$ است.**

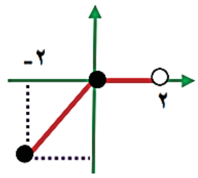
**طول بازه‌ی $[-۲,۶)$ ، $۶ - (-۲) = ۸$ است پس $y = ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱$ از $\frac{۸}{۲} = ۴$ پله تشکیل شده است.**

سؤال۴۳: نمودار تابع $y = x\left[\frac{x}{2}\right]$ در بازه‌ی $[-2,2)$ به کدام صورت است؟

۱)



۲)



۳)


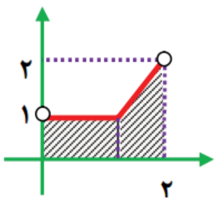

۴)



سؤال۴۶: مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{[x]}$ در بازه‌ی $(0,2)$ و محور x ها کدام است.

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x^0 = 1$

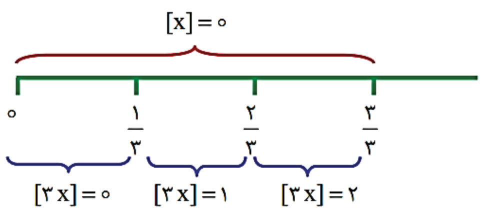
$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x^1 = x$




مساحت ناحیهٔ رنگی $= 1\times 1 + \frac{(1+2)\times 1}{2} = 2/5$

سؤال۴۷: مجموعه جواب معادله‌ی $[x]+[3x]=0$ بازه‌ی $[a,b)$ است مقدار $b-a$ کدام است.

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{2}{3}$




$[x]+[3x]=0 \Rightarrow 0 \le x < \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$

تست های تکمیلی :

سؤال۱۵: اگر $f(x)=[x]+[-x]$ , $g(x)=x^2-x-2$ هرگاه $gof(x)=-2$ مجموعه مقادیر $x$ کدام است؟

۱) $Z$ ۲) $R-Z$ ۳) $R$ ۴) $\phi$

$$\begin{cases} x \in Z : f(x)=[x]+[-x]=0 \Rightarrow g(f(x))=g(0)=0^2-0-2=-2 \quad \checkmark \\ x \notin Z : f(x)=[x]+[-x]=-1 \Rightarrow g(f(x))=g(-1)=(-1)^2-(-1)-2=0 \quad \times \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in Z$

سؤال ۷۵: اگر $f(x)=[x]+[2-x]$ , $g(x)=3^x$ جواب های معادلهٔ $(gof)(x)=27$ چگونه است؟

۱) فقط یک جواب مثبت ۲) فقط یک جواب منفی

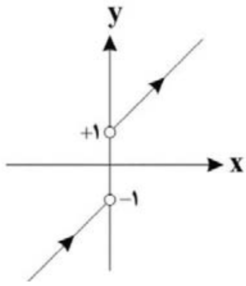
۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴) جواب ندارد

۹۱- تابع $y = 2x + \frac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

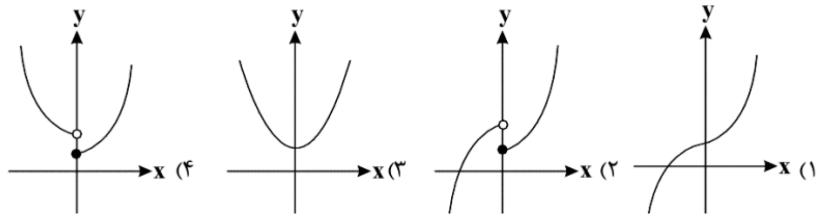
۱) اکیداً صعودی    ۲) اکیداً نزولی

۳) هم صعودی و هم نزولی    ۴) غیریکنوا

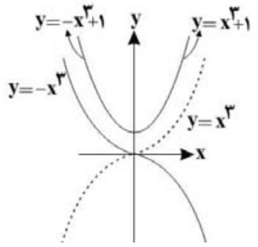
$$y = 2x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x+1 & x>0 \\ 2x-1 & x<0 \end{cases}$$




۹۲- نمودار تابع $y = x^2|x| + 1$ به کدام صورت است؟



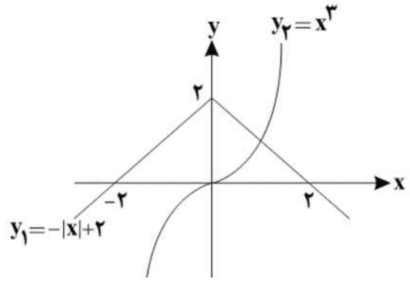

$$y = x^2|x| + 1 = \begin{cases} x^3+1 & x \geq 0 \\ -x^3+1 & x<0 \end{cases}$$




۹۴- کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادلهٔ $x^3 = -|x| + 2$ درست است؟

۱) فاقد ریشه    ۲) فقط یک ریشهٔ مثبت

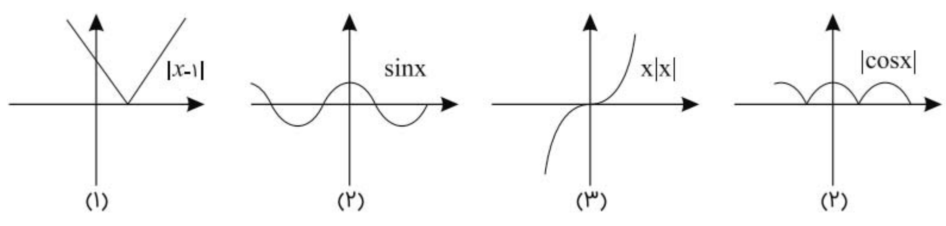
۳) فقط یک ریشهٔ منفی    ۴) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه




**۱** کدام‌یک از توابع زیر، بر روی دامنهٔ خود اکیداً یکنوا هستند؟

۱) $f(x) = |x-1|$    ۲) $g(x) = \sin x$

۳) $h(x) = x|x|$    ۴) $p(x) = |\cos x|$



**۶** اگر f تابعی نزولی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(|۳x-۵|)-f(|۲x+۳|)}$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۶　　۲) ۷

۳) ۸　　۴) ۱۰

$$f(|۳x-۵|)-f(|۲x+۳|)\geq ۰ \Rightarrow f(|۳x-۵|)\geq f(|۲x+۳|)$$

$$\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} |۳x-۵|\leq|۲x+۳| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۳x-۵)^۲\leq(۲x+۳)^۲ \Rightarrow (۳x-۵)^۲-(۲x+۳)^۲\leq ۰$$

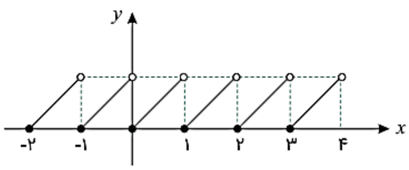
$$\Rightarrow (۳x-۵-۲x-۳)(۳x-۵+۲x+۳)\leq ۰ \Rightarrow (x-۸)(۵x-۲)\leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۵}\leq x\leq ۸ \Rightarrow x=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸ \quad (\text{۸ تا عدد صحیح})$$

**۸** تابع $f(x)=x-[x]$ در کدام بازه صعودی است؟ ([] جزء صحیح است)

۱) $(-۱,۱)$　　۲) $[۰,+\infty)$

۳) $\mathbb{R}$　　۴) $[-۲,-۱)$




$$۰\leq x<۱ \Rightarrow f(x)=x$$

$$۱\leq x<۲ \Rightarrow f(x)=x-۱$$

$$۲\leq x<۳ \Rightarrow f(x)=x-۲$$

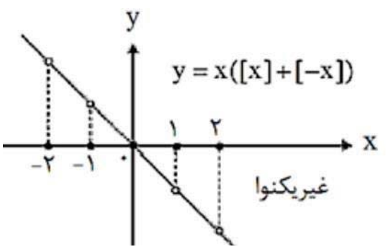
همان‌طور که از نمودار تابع $f(x)$ مشخص است، تابع در بازهٔ $[-۲,-۱)$ صعودی می‌باشد.

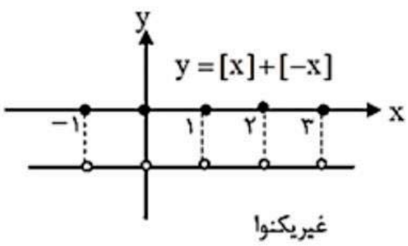
**۹** کدام تابع نزولی است؟ ([] علامت جزء صحیح است)

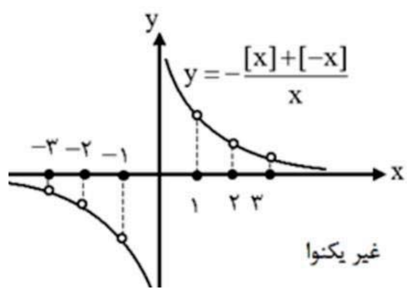
۱) $y=[x]+[-x]$　　۲) $y=x([x]+[-x])$

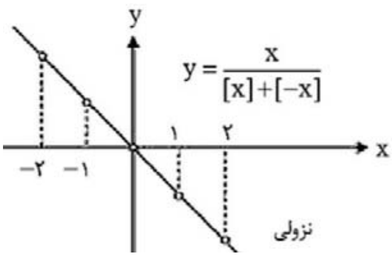
۳) $y=\dfrac{x}{[x]+[-x]}$　　۴) $y=-\dfrac{[x]+[-x]}{x}$

می‌دانیم اگر $x\in\mathbb{Z}$ آنگاه $[x]+[-x]=۰$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آنگاه $[x]+[-x]=-۱$ پس نمودار توابع به شکل زیر است:



**۱۰** بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|+|x-1|$ روی آن صعودی است، کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[-1,+\infty)$

۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $(-\infty,1]$

$$y=f(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}2x & ; x>1\\ 2 & ; -1\le x\le 1\\ -2x & ; x<-1\end{cases}$$

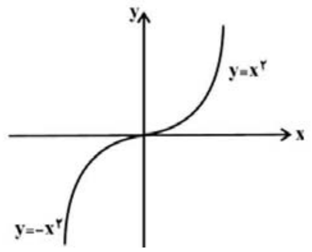
همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، بازهٔ $[-1,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f$ روی آن صعودی است.

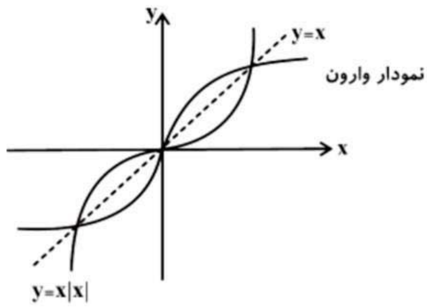
**۱۱** بزرگ‌ترین بازه‌ای که وارون تابع $y=x|x|$ در آن صعودی است، کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0]$

۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

$$x|x|=\begin{cases}x^2 & ; x\ge 0\\ -x^2 & ; x<0\end{cases}$$



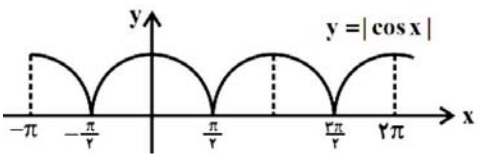




باتوجه‌به شکل، وارون تابع در $\mathbb{R}$ یعنی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

**۱۲** در کدام بازهٔ زیر، تابع $f(x)=|\cos x|$ صعودی است؟

۱) $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ۲) $(0,\frac{\pi}{2})$

۳) $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ ۴) $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$




بنابراین در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\pi)$ تابع صعودی است.

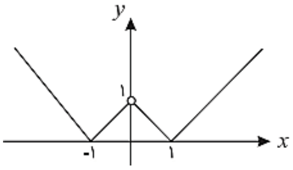
**۱۳** نمودار تابع $y=|x-\frac{x}{|x|}|$ در کدام بازهٔ زیر نزولی است؟

۱) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ۲) $[1,+\infty)$

۳) $(0,1]$ ۴) $[-1,0)$

$$y=\left|x-\frac{x}{|x|}\right|=\begin{cases}|x-\frac{x}{x}| & ; x>0\\ |x-\frac{x}{-x}| & ; x<0\end{cases}=\begin{cases}|x-1| & ; x>0\\ |x+1| & ; x<0\end{cases}$$

نمودار در بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[0,1)$ اکیداً نزولی است.




**۱۵** اگر $f=\{(1,2),(-1,0),(0,[a])\}$ و $g(x)=2^x$ باشند، به ازای چه مقادیری از a تابع $f+g$ صعودی است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است)

۱) $[0,3]$
۲) $[0,4)$
۳) $[-\frac{1}{2},3]$
۴) $[-\frac{1}{2},4)$

$$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=2+2=4\ ,\ (f+g)(-1)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ (f+g)(0)=[a]+1$$

اگر $f+g$ صعودی باشد، باید با افزایش مقادیر x مقادیر تابع هم زیاد شود، یعنی:

$$(f+g)(-1)\le(f+g)(0)\le(f+g)(1)\Rightarrow\frac{1}{2}\le[a]+1\le4\xrightarrow{-1}-\frac{1}{2}\le[a]\le3$$

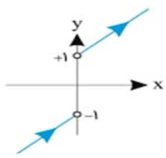
چون $[a]\in\mathbb{Z}$ است، پس $0\le[a]\le3$، یعنی $0\le a<4$ می‌باشد.

$$g(x)=-x+3\Rightarrow f(x)=-x+5$$
$$h(x)=3[-(2x-1)+5]=-6x+18$$

**۱۸** تابع $y=2x+\frac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی
۲) اکیداً نزولی
۳) هم صعودی و هم نزولی
۴) غیریکنوا

$$y=2x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}2x+1 & ;x>0\\ 2x-1 & ;x<0\end{cases}$$

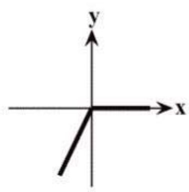



**۹۴- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x-|x|$ در آن بازه صعودی است، کدام است؟**

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

**-۹۴** (سهند ولی‌زاده)

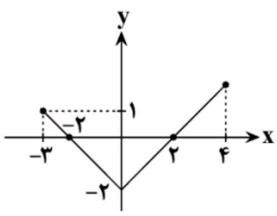
$$f(x)=\begin{cases}0 & x\ge0\\ 2x & x<0\end{cases}$$




همان‌طور که می‌بینید تابع $f$ در $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) صعودی است.

**۹۷- اگر شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-2)$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y=\sqrt{|3f(x)-1|}$ کدام است؟**

۱) $[0,\sqrt{5}]$
۲) $[-2,3]$
۳) $[0,\sqrt{8}]$
۴) $[0,\sqrt{7}]$



منابع:

۱- جزوه ریاضی استاد حبیب هاشمی

۲- جزوه ریاضی استاد ایمان نخستین

۳- جزوه ریاضی گروه آموزشی دانشگاه تهرانی ها

۴- جزوه ریاضی استاد مهدی جعفری کیا

۵- جزوات مکتبستان