احتمالات را قورت بده!

درس نامه ای کامل از مباحث:

به همراه پاسخ تشریحی

- ✓ آنالیز ترکیبی
- ✓ احتمالات
- ✓ مجموعه ها
- ✓ احتمال شرطی
- ✓ متغیر های تصادفی

- ✓ به همراه تست های تالیفی و تست های کنکور های سراسری رشته های ریاضی و تجربی
- ✓ قابل استفاده برای دانش آموزان رشته ریاضی و تجربی

مولف: محسن سعیدی پور

مقدمه:

کتابی که پیش روی شماست حاصل چندین سال مطالعه، آموزش و تدریس مفاهیم آنالیز ترکیبی و تئوری احتمالات و کاربرد های آن می باشد. تمام هدف و تمرکز این کتاب بر ارائه روشی نوین در بیان مطالب و کمک به دانش آموزان در ایجاد درک عمیق از موضوعات مورد بحث می باشد.برای رسیدن به این هدف، هر فصل از کتاب به دو بخش اصلی تقسیم می شود.در بخش اول، متن هر فصل به صورتی ساده و شیوا بیان شده است.ارائه مثالهایی فراوان در هر قسمت از متن،موجب افزایش سرعت یادگیری و تفهیم مطالب می گردد.از آنجاییکه برای کسب مهارت بالا و تسلط کامل بر موضوعات آنالیز ترکیبی و تئوری احتمالات، نیاز به حل مسائل متنوع است،از این رو بخش دوم هر فصل از کتاب شامل تعداد نسبتا زیادی مساله در قالب سوالات چهار گزینه ای می باشد.جهت اثر بخشی بیشتر، همه سوالات دارای پاسخ های کاملا تشریحی بوده و در بسیاری از موارد بیش از یک راه حل برای آنها پیشنهاد شده است. بنابراین به نظر می رسد دانش آموزان با حل سوالات چهار گزینه ای و تکرار آنها می توانند به سطح بالایی از مهارت در حل مسائل مختلف آنالیز ترکیبی و تئوری احتمالات دست یابند. همچنین سعی شده است که تست های مشابه در کنار هم قرار بگیرند تا روند یادگیری نکات ساده تر شود.البته قرار دادن تست های مشابه کنار هم سبب می شود تا خوانندگان فقط این کتاب را به عنوان یک مرجع یادگیری مد نظر قرار دهند و نتوانند از آن برای امتحان گرفتن از خود استفاده کنند.برای خوانندگانی که قصد آزمون گرفتن از خود در این درس را دارند،توصیه می شود جزوه تست های تالیفی مولف را مطالعه نمایند.

- ❖ در بعضی از کتاب های کنکور مباحثی مطرح شده است (که گاها در امتحانات آزمایش موسسات نیز آورده می شود) که از کتاب حذف شده اند یا از سطح کتاب و کنکور سراسری بالاتر است.برای کامل تر شدن مطالب این کتاب، این مباحث نیز بیان شده است که در اولویت دوم برای مطالعه می باشد که خوانندگان در صورت کمبود وقت می توانند از ان چشم پوشی کنند.این مطالب در این کتاب با علامت فوق مشخص شده است.
- بسیاری از مطالب آنالیز ترکیبی و احتمالات برای رشته ریاضی فیزیک و تجربی مشابهت دارد.اما مطالبی هستند که مختص دانش آموزان رشته ریاضی می باشد و خواندن آنها برای دانش آموزان رشته تجربی ضرورتی ندارد.این مطالب و تست ها با علامت فوق نشان داده شده است.

بسیاری از سوالات چهار گزینه ای، شامل مسائلی است که در کنکور سراسری رشته های ریاضی و تجربی و انسانی وجود دارد.بخش دیگری از سوالات نیز از کتاب های مرجع جمع آوری شده است و یا توسط مولف طراحی گردیده است.در طراحی و انتخاب سوالات سعی شده است تا مسائلی انتخاب شوند که از نظر کمک به فراگیری مطالب، به اندازه کافی ارزشمند و قابل تامل باشند.

جهت پشتیبانی از مطالب ارائه شده در این مجموعه و نیز جهت ارتقاء آمادگی دانش آموزان برای شرکت در کنکور کارشناسی، یک وبلاگ به آدرس www.Saeedipour.blogfa.com طراحی گردیده است که خدمات متنوعی از جمله مشاوره و پرسش و پاسخ جهت مطالعه دروس کنکور به خوانندگان این کتاب ارائه می دهد.

برخود لازم می دانم که از اساتید این درس و دروس مرتبط با آن در زمان تحصیلم، جناب آقای پروفسور نورالسناء ، جناب آقای دکتر ایوزیان ، جناب آقای دکتر حیدری ، جناب آقای استاد نادر پور و جناب آقای استاد میرحسینی قدر دانی نمایم.

در پایان امیدوارم که این مجموعه بتواند در توسعه دانش احتمالات در کشور اثر بخش بوده و گامی هر چند کوچک در اعتلای این دانش پایه در میهن عزیزمان باشد.

محسن سعیدی پور

فهرست مطالب

فصل ۱

آنالیز ترکیبی

۱-۱- مقدمه-

در این فصل با روش هایی آشنا می شویم که به وسیله ی آنها بتوان تعداد عناصر یک مجموعه ی گسسته و متناهی را شمارش نمود و در فصل های آتی مشاهده خواهیم نمود که یکی از روش های اصلی و اساسی در محاسبه ی احتمال، استفاده از "نظریه ی شمارش" و یا "آنالیز ترکیبی" می باشد .

البته باید به این مسأله توجه داشت که همیشه روش های ثابت و معینی در تعیین تعداد عناصر یک مجموعه وجود ندارد و هدف این فصل ، یادگیری اصول اساسی شمارش و بدست آوردن توانایی تعمیم آنها برای مسائلی که در گذشته مشاده نشده است.

۱-۲- اصل اساسی شمارش(اصل ضرب)

زیر بنای کلیه روش های شمارش، اصلی می باشد که به آن اصل اساسی شمارش یا اصل ضرب می گویند و به صورت زیر بیان می شود:

اصل ضرب:

فرض کنید دو آزمایش باید اجرا شود. اگر آزمایش ۱ بتواند یکی از n نتیجه ممکن را کسب نماید و برای هر نتیجه آن، m نتیجه ممکن برای آزمایش ۲ وجود داشته باشد ، آنگاه برای انجام دو آزمایش با هم، mn نتیجه ممکن وجود خواهد داشت.

یک نکته بسیار مهم در استفاده از اصل ضرب توجه به عبارت "برای هر نتیجه آن " می باشد.

با وجود اینکه توجه به این مسأله واضح به نظر می رسد، ولی بسیاری از اشتباهاتی که دانش آموزان در استفاده از اصل ضرب مرتکب می شوند؛ ناشی از بی توجهی به همین نکته است. به مثال های ساده زیر توجه کنید.

مثال۲-۱- فرض کنید یک جامعه کوچک شامل ۱۰ زن وجود دارد هر کدام ۳ فرزند دارند. اگر بخواهیم یکی از زن ها و یکی از فرزندانش را به عنوان مادر و فرزند نمونه سال انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟

حل:

واضح است که آزمایش اول(انتخاب مادر نمونه) را می توان به ۱۰ طریق انجام داد و برای هر مادر که در آزمایش اول انتخاب شود؛ آزمایش دوم (انتخاب فرزند نمونه) را می توان به ۳ طریق انجام داد. پس طبق اصل ضرب کل آزمایش ها را می توان به ۳۰=۳×۱۰ طریق انجام داد.

مثال ۲-۲ - فرض کنید ۶ تن از مادران مثال ۲-۱ دارای ۲ فرزند و ۴ تن از آنها دارای ۳ فرزند می باشند. در این صورت اگر بخواهیم مادر و فرزند نمونه سال را انتخاب کنیم به چند طریق این کار ممکن است؟

حل:

از آنجاییکه به ازای بعضی از نتایج آزمایش اول(انتخاب مادران) تعداد ۲ نتیجه برای آزمایش دوم(انتخاب فرزندان) و به ازای برخی نتایج آزمایش اول تعداد ۳ نتیجه ممکن برای آزمایش دوم وجود دارد، برای حل این مسأله نمی توان به صورت مستقیم از اصل ضرب استفاده نمود. در چنین شرایطی باید مسأله را به چند قسمت تقسیم و تعداد حالات هر قسمت را با استفاده از اصل ضرب محاسبه نمود، سپس تعداد حالات بدست آمده در قسمت های مختلف را با هم جمع کنیم. بنابراین تعداد حالات این مسأله برابر است با :

۶×۲+۴×۳=۲۴

در حالت کلی تر اگر به ازای n_1 حالت از حالات آزمایش اول، n_2 حالت برای آزمایش دوم و به ازای m_1 حالت از حالات آزمایش اول، m_2 حالت برای آزمایش دوم وجود داشته باشد، آنگاه این دو آزمایش را همزمان به $n_1 n_2 + m_1 m_2$ حالت ممکن می توان انجام داد.

هنگامی که بیش از دو آزمایش انجام گیرد، اصل ضرب به صورت زیر قابل تعمیم است:

تعمیم اصل ضرب

فرض کنید r آزمایش انجام گیرد به طوریکه اولین آزمایش n_1 نتیجه ممکن داشته باشد و برای هر نتیجه آزمایش اول، n_2 نتیجه ممکن برای آزمایش دوم و برای هر نتیجه از دو آزمایش اول و دوم n_3 نتیجه برای آزمایش سوم، .... و برای هر نتیجه از $r-1$ آزمایش اول n_r نتیجه برای آزمایش r ام وجود داشته باشد.آنگاه $n_1 n_2 \ldots . n_r$ نتیجه ممکن برای انجام r آزمایش وجود خواهد داشت.

نکته ۱: برای استفاده از اصل ضرب همواره توجه به دو نکته اساسی ضروری است:

الف) آزمایش ها را از جایی اجرا کنید که محدودیت وجود دارد.

ب)حتماً یکی از آزمایش ها را اجرا کنید.

مثال ۲-۳ - چند عدد ۶ رقمی بین صد هزار و یک میلیون وجود دارد، بصورتیکه ارقام متوالی یکسان نباشند؟

حل:

در این مسأله برای آزمایش اول (انتخاب رقم اول) ، ۹ حالت (صفر نمی تواند قرار گیرد) و به ازای هر نتیجه از آزمایش اول ، ۹ حالت برای آزمایش دوم وجود دارد (هر عدد غیر از عدد اول). همچنین برای هر یک از ۹×۹ نتیجه از آزمایش اول و دوم ۹ حالت برای آزمایش سوم وجود دارد) و..... بنابراین تعداد کل حالات برابر است با :

$$9\times9\times9\times9\times9\times9=9^{6}$$

مثال ۲-۴ - با اعداد ۵،۴،۳،۲،۱،۰ چند عدد ۳ رقمی زوج ، بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

حل:

روش اول: برای آزمایش اول(انتخاب عدد یکان) ۳ نتیجه ممکن ۴،۲،۰ وجود دارد ولی در تعداد نتایج ممکن آزمایش دوم (انتخاب عدد صدگان) باید دقت نمود که به ازای بعضی از نتایج آزمایش اول نتایج (۲و۴) ، تعداد ۴ نتیجه ممکن برای آزمایش دوم وجود دارد . در نتیجه باید مسأله را به دو قسمت تقسیم نمود و جواب آن برابر است با:

آز ۱	آز ۳	آز۲
(۰) ۱حالت	۴ حالت	۵ حالت

آز ۱	آز ۳	آز ۲
(۲و۴) ۲ حالت	۴ حالت	۴ حالت

$$4\times4\times2+5\times4\times1=52$$

روش دوم:

اگر آزمایش اول را انتخاب عدد صدگان و آزمایش دوم را انتخاب عدد یکان تعیین کنیم به ازای ۳ نتیجه ممکن از آزمایش اول (۵،۳،۱) ، تعداد ۳ نتیجه برای آزمایش دوم (۴،۲،۰) و به ازای ۲ نتیجه دیگر از آزمایش اول(۴،۲) ، تعداد ۲ نتیجه برای آزمایش دوم وجود دارد. بنابراین تعداد حالات ممکن به صورت زیر محاسبه می شود.

$$3\times4\times3+2\times4\times2=52$$

۱-۳- جایگشت ها(ترتیب ها)

۱-۳-۱- جایگشت یا ترتیب n عنصر متمایز(مرتب کردن n عنصر متمایز در یک ردیف)

مطابق اصل ضرب، تعداد حالاتی که می توان n عنصر متمایز را در یک ردیف مرتب کرد، برابر است با:

$$n(n-۱)\times \dots .\times ۳\times ۲\times ۱ = n!$$

مثال ۳-۱- با حروف a, b, c, d چند کلمه ی ۴ حرفی می توان ساخت؟

حل: طبق نکته بالا ۴ حرف را می توان به !۴ حالت در یک ردیف جابجا کرد.

مثال ۳-۲- ۵ دانش آموز ریاضی و ۴ دانش آموز تجربی را به چند طریق می توان در ردیف مرتب نمود؟

حل : !۹

مثال۳-۳- به چند طریق می توان ۵ پسر بچه و۵ دختر بچه را در یک ردیف قرار داد ، بطوریکه :

الف) دختر بچه ها کنار هم و پسر بچه ها کنارهم باشند؟

ب)دختر بچه ها کنار هم باشند؟

ج) دختر بچه ها و پسر بچه ها یک در میان بشینند؟

حل:

الف) پسر بچه ها به !۵ و دختر بچه ها هم به !۵ می توانند در کنار هم قرار بگیرند. همچنین دو گروه پسر بچه ها و دختر بچه ها می توانند به !۲ جابجا شوند. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با:

$\boxed{B_۱ B_۲ B_۳ B_۴ B_۵}$ $\boxed{G_۱ G_۲ G_۳ G_۴ G_۵}$

ب) دختر بچه ها به !۵ طریق می توانند در کنار هم قرار بگیرند. همچنین گروه دختر بچه ها به همراه ۵ پسر باقی مانده تشکیل۶ گروه متفاوت را می دهند که می توانند به !۶ حالت جابجا شوند بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با : $۶!\times ۵!$

$B_۱ B_۲ B_۳ B_۴ B_۵$ $\boxed{G_۱ G_۲ G_۳ G_۴ G_۵}$

ج) تعداد حالات برابر است با :

تعداد: $۱۰\times ۵\times ۴\times ۴\times ۳\times ۳\times ۲\times ۲\times ۱\times ۱ = ۵!\times ۵!\times ۲$

مثال ۳-۴-۵ دانش آموز گروه ریاضی و ۳ دانش آموز گروه تجربی در یک صف ایستاده اند. تعداد حالاتی که اول و آخر صف دانش آموز ریاضی باشند را بیابید.

حل: ۵ حالت برای اول صف و ۴ حالت برای آخر صف وجود دارد ، سپس ۶ نفر باقی مانده نیز می توانند به !۶ در ۶ مکان بین نفرات اول و آخر قرار گیرند.

۴ حالت ۱حالت ۲حالت ۳ حالت ۴ حالت ۵ حالت ۶ حالت ۵حالت

!۶ × !۲۰: تعداد کل

۱-۳-۲- جایگشت یا ترتیب n عنصر که برخی از آنها ارزش یکسانی دارند.

مثال ۳-۵- با حروف a, a, c چند کلمه ی ۳ حرفی می توان ساخت؟

حل: در این مسأله ارزش دو حرف a یکسان است و جابجایی آنها حالت متفاوتی ایجاد نمی کند. برای حل مسأله روشی ارئه می گردد تا خوانندگان بتوانند از آن در حل بسیاری از مسائل وتعمیم جواب های مسائل قبلی به مسائل جدید استفاده کنند.

نکته ی ۲: در بسیاری از مواقع با حل مسائل جدیدی مواجه می شویم که شباهت زیادی با برخی مسائل گذشته دارد که در گذشته آنها را حل کرده ایم و جواب آنها را می دانیم. یک روش برای حل چنین مسائل جدیدی یافتن نسبتی بین تعداد حالات مسأله جدید و تعداد حالات مسأله قدیمی می باشد.

$$\text{تعداد حالات مسأله جدید} = \left(\text{با تعداد حالات معلوم}\right) \text{تعداد حالات مسأله قدیمی} \times k$$

با یافتن k ، تعداد حالات مسأله جدید محاسبه می گردد

برای حل این مثال نیز به سراغ یک مسأله قدیمی می رویم :

هر دو حالت جایگشت حروف a_1, a_2, c (مسأله ی قدیمی) ، معادل یک حالت مسأله جدید است، پس می توان نتیجه گرفت که تعداد حالات مسأله جدید نصف تعداد حالات مسأله ی قدیمی می باشد.

تعداد کلمات ۳ حرفی با $a_۱, a_۲, c$ برابر است با $۳! = ۶$

$a_۱, a_۲, c \rightarrow aac$

$a_۲, a_۱, c \rightarrow aac$

$c, a_۱, a_۲ \rightarrow caa$

$c, a_۲, a_۱ \rightarrow cca$

$a_۱, c, a_۲ \rightarrow aca$

$a_۲, c, a_۱ \rightarrow aca$

(a, a, c) **تعداد حالات مسأله جدید** $= (a_۱, a_۲, c)$**تعداد حالات مسأله قدیمی** $\times \frac{۱}{۲} =$

$۳! \times \frac{۱}{۲} = ۳$

مثال۳-۶- با حروف a, a, b, b چند کلمه ی ۴ حرفی می توان ساخت؟

حل: تعداد حالات مرتب کردن $a_۱, a_۲, b_۱, b_۲$ (یک مسأله قدیمی) برابر با !۴ است همچنین داریم :

از آنجاییکه هر $۲! \times ۲!$ حالت مسأله ی قدیمی معادل یک حالت مسأله جدید است پس تعداد حالات مسأله جدید برابر است با: $۶ = \frac{۴!}{۲!۲!}$

حالت مسأله قدیمی | حالت مسأله جدید

$a_۱, a_۲, b_۲, b_۱$

$a_۲, a_۱, b_۱, b_۲$ $\rightarrow$ $aabb$

$a_۲, a_۱, b_۲, b_۱$

مثال ۳-۷- با حروف aabbccc چند کلمه ی ۷ حرفی میتوان ساخت؟

حل: تعداد حالات برابر است با :

$$\frac{۷!}{۳!\,۲!\,۲!}$$

نکته ۳: تعداد حالات جایگشت n عنصر که برخی از آنها ارزش یکسانی دارند برابر است با:

n_i : تعداد دفعات تکرار عنصر i ام

$$\frac{n!}{n_۱!\,n_۲!\ldots n_k!}$$

مثال۳-۸- با حروف کلمه ی mississippi چند کلمه می توان ساخت که حروف s همواره کنار هم باشند.

حل: چهار حرف s را داخل یک گروه قرار می دهیم و سپس این گروه با بقیه حروف که برخی از آنها مثل هم هستند جابجا می شوند.

توجه شودکه جابجایی s ها در گروه حالت جدیدی را ایجاد نمی کند.

$\boxed{\text{ssss}}$ miiiipp

$$\text{تعداد حالات} = \frac{۸!}{۴!\,۲!}$$

❖ ۱-۳-۳- جایگشت یا ترتیب n عنصر متمایز دور میز

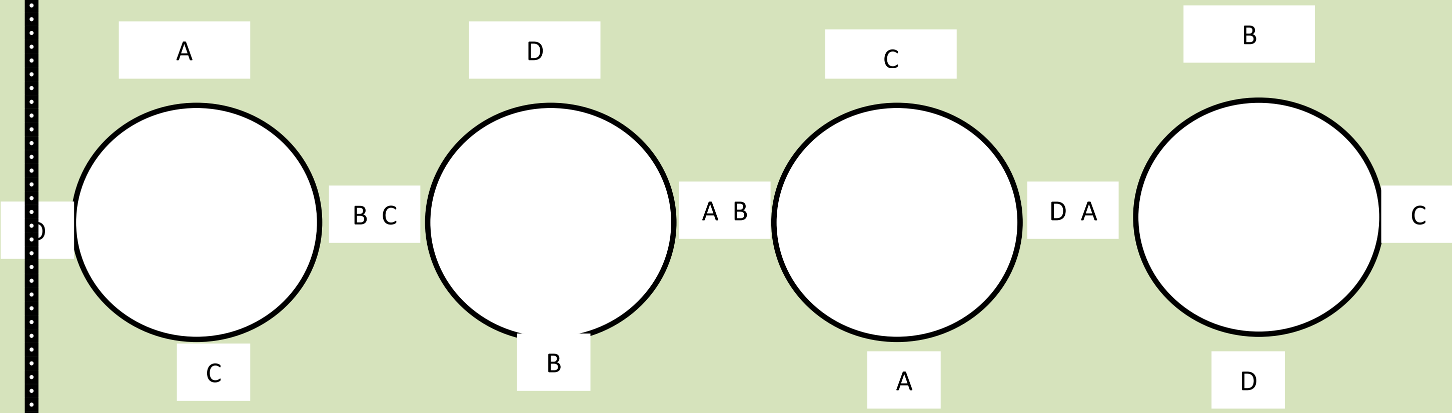
نکته ۴: تعداد حالاتی که می توان n عنصر متمایز را دور میز مرتب نمود برابر با $(n-۱)!$ است.

اثبات:

روش اول:

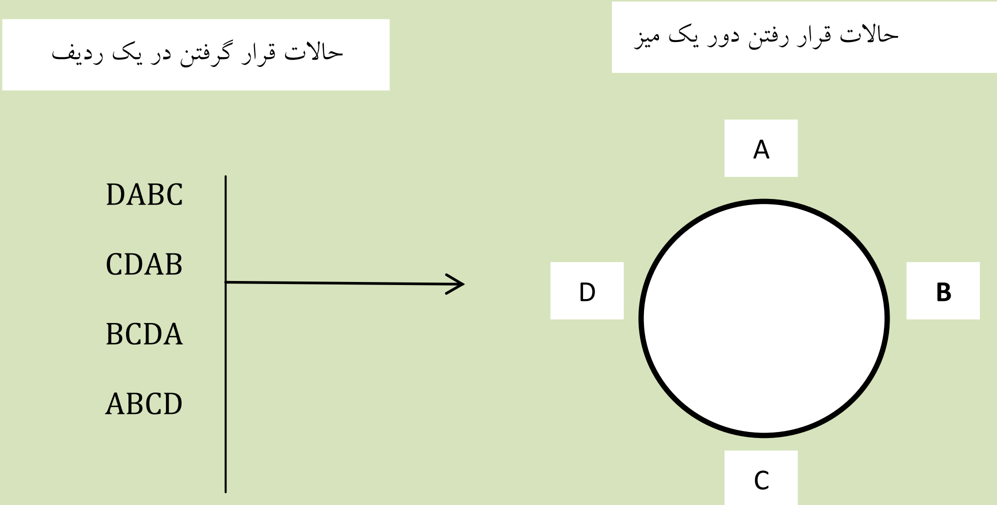
تفاوت مسأله چیدن افراد به دور یک میز با مسأله چیدن افراد در یک ردیف ، این است که در مسأله چیدن افراد به دور یک میز محل قرار گرفتن افراد مهم نمی باشد و تنها شیوه و چگونگی قرار گرفتن افراد نسبت به هم مهم است. حال در این قسمت سعی می کنیم که بین تعداد حالات این مسأله و تعداد حالات مسأله قرار گرفتن افراد در یک ردیف ، رابطه برقرار کنیم. می توان نشان داد که هر n حالت از مسأله قرار گرفتن افراد در یک ردیف معادل یک حالت از مسأله قرار گرفتن افراد دور یک میز است.

همانطور که اشاره شد در مسأله قرار گرفتن افراد دور یک میز تنها شیوه قرار گرفتن افراد در کنارهم مهم است و حالات زیر یکسان در نظر گرفته می شود .



(به طور مثال در همه ی ۴ حالت بالا روبروی A فرد C و روبروی D فرد B است و این چهار حالت در مسأله دور میز فرقی با هم ندارند.)

لذا بین حالات مسأله قرار گرفتن افراد در یک ردیف و مسأله قرار گرفتن افراد دور یک میز رابطه زیر برقرار است.



بنابراین داریم :

$$\text{تعداد حالات قرار گرفتن دور یک میز} = \text{تعداد حالات قرار گرفتن در یک ردیف} \times \frac{1}{n} =$$

$$n! \times \frac{1}{n} = (n-1)!$$

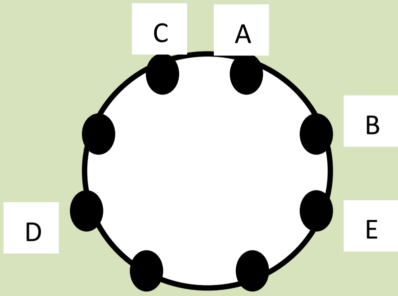
روش دوم: همانطور که بیان شد برای هر فرد محل قرارگرفتن اهمیت ندارد فقط چگونگی قرار گرفتن نسبت به بقیه افراد مهم است.

فرض کنید n نفر از جمله $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ داریم :

برای فرد اول (A_1) یک حالت وجود دارد زیرا برای او فرقی نمی کند در کدام محل قرار گیرد. برای فرد دوم $n-1$ حالت وجود دارد زیرا $n-1$ حالت متفاوت که نسبت به فرد اول برای او وجود دارد. بنابراین مطابق اصل ضرب تعداد کل حالات برای این n نفر برابر است با:

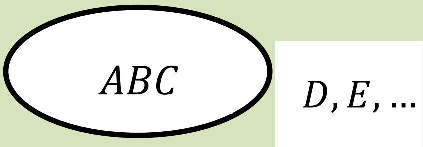
طبق اصل ضرب : $1 \times (n-1)(n-2) \times \ldots\ldots \times 1 = (n-1)!$

مثال ۳-۹- اگر قرار باشد n نفر به دور یک میز بنشینند تعداد حالاتی که آقای A کنار آقای B و آقای C باشد را بیابید.$(n > ۴)$



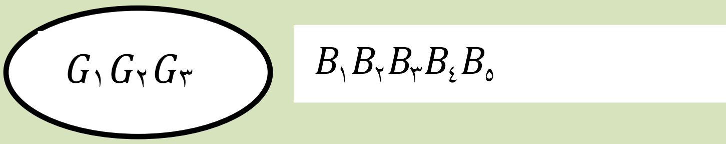
حل: برای فرد A یک حالت وجود دارد چون فرد B قرار است کنار A قرار بگیرد ۲ حالت ممکن وجود دارد و برای فرد C نیز یک حالت وجود دارد که در کنار A باشد .فردD $n - ۳$ حالت برای نشستن دارد.بنابراین طبق اصل ضرب کل حالات برای n نفر برابر است با $۲(n - ۳)!$

روش دوم:



A, B, C را یک گروه در نظر می گیریم کلیه حالات جابجایی این ۳ نفر !۳ است که تنها ۲ حالت مطلوب است CAB , BAC. $n - ۳$ نفر باقی مانده به همراه این گروه، $n - ۲$ گروه را تشکیل می دهند که طبق نکته ۴ به $(n - ۲ - ۱)!$ حالت دور میز جابجا می شوند.

مثال ۳-۱۰ - ۵ مرد و۳ زن به چند طریق می توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که زن ها همواره کنار هم باشند؟



حل:

۵ مرد و یک گروه زن طبق نکته ی ۴ به !۵ حالت دور یک میز قرار می گیرند. زن ها نیز در گروه به !۳ حالت جابجا می شوند. بنابراین کل حالات برابر است با :

$۵! \times ۳!$

۱-۴- مسائل انتخاب r شی از n شی (ترتیب و ترکیب)

تا کنون در مسائلی که مورد بررسی قرار گرفت n عنصر موجود بود و همه ی این n عنصر مورد استفاده قرار می گرفت.به طور نمونه در مثال ۳-۶ چهار حرف موجود و همه ی این حروف احتیاج بود(ساختن کلمه ۴ حرفی). در بسیاری از مسائل همه ی n عنصر را احتیاج نداریم و می بایست r عنصر را انتخاب نمود(به طور مثال: چند کلمه ی ۳ حرفی با $a_۱, a_۲, b_۱, b_۲$ می توان نوشت؟)

انتخاب r عنصر از n عنصر متمایز به دو صورت قابل انجام است:

الف) ترتیب انتخاب شدن مهم باشد.(اهمیت داشته باشد کدام عنصر اول و کدام عنصر دوم و......انتخاب شود.)

ب) ترتیب انتخاب شدن مهم نباشد.

نکته ۵ : تعداد حالات انتخاب با ترتیب r عنصر از n عنصر متمایز(جایگشت r عنصر از n عنصر متمایز) برابر است:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نکته۶ : تعداد حالات انتخاب بدون ترتیب (ترکیب) r عنصر از n عنصر متمایز برابر است با :

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(r!)}$$

مثال ۴-۱- به چند طریق می توان از یک کلاس ۱۰ نفره ، ۳ نفر را انتخاب نمود به طوریکه:

الف) رتبه های اول تا سوم مسابقه ای برای دریافت مدال های طلا و نقره و برنز را کسب کنند.

ب) یک شورای ۳ نفره تشکیل داد.

حل:

الف) هر دو قسمت انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر است در حالی که در قسمت الف اهمیت دارد که کدام فرد اول ، کدام فرد دوم یا سوم انتخاب می شود. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$P_۳^{۱۰} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$$

ب) در این حالت ترتیب انتخاب شدن مهم نیست و فقط انتخاب شدن اهمیت دارد. در نتیجه تعداد حالات برابر است با :

$$C_{۳}^{۱۰} = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۷! \times ۳!} = ۱۲۰$$

نکته ۷: در مسائلی که انتخاب با ترتیب r عنصر از n عنصر است می توان مسأله را بدون استفاده از فرمول ذکر شده و با استفاده از اصل ضرب نیز حل کرد.

(به طور مثال برای مثال ۴-۱ قسمت الف داریم :

۷۲۰=۸×۹×۱۰=کل حالات رتبه ۳ رتبه ۲ رتبه ۱

مثال ۴-۲- اگر یک شورا شامل ۷ مرد و ۵ زن باشد :

الف) به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفره از آنها را انتخاب نمود؟

حل: اعضای انتخاب شده در گروه دارای جایگاه یکسانی هستند(ترتیب انتخاب شدن مهم نیست) پس جواب عبارت است از :

$$\binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!\,۳!} = ۲۲۰$$

ب) به چند طریق می توان یک گروه ۵ نفره شامل ۲ زن و ۳ مرد انتخاب نمود ؟

حل:$\binom{۵}{۲}$ حالت ممکن برای انتخاب زن ها و به ازای هر یک از حالات انتخاب زن ها، $\binom{۷}{۳}$ برای انتخاب مرد ها وجود دارد ، پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۳} = ۱۰ \times ۳۵ = ۳۵۰$$

ج) به چند طرق می توان یک گروه ۳ نفره شامل حداقل ۲ زن انتخاب نمود؟

حل: مسأله انتخاب ۳ نفر از بین ۱۲ نفر می باشد، به طوریکه حداقل ۲ زن انتخاب شود پس حالات برابر است با:

۱) ۲ زن و ۱ مرد انتخاب شود← $\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱}$
۲) ۳ زن انتخاب و مردی انتخاب نشود← $\binom{۵}{۳}$

کل حالات=$\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱} + \binom{۵}{۳} = ۸۰$

د) به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفره شامل حداکثر ۲ زن انتخاب نمود؟

حل:

۱) ۲ زن و ۱ مرد انتخاب شود.← $\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱}$

۲) ۱ زن و ۲ مرد انتخاب شود.← $\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۲}$

۳) ۳مرد انتخاب و زنی انتخاب نشود.← $\binom{۷}{۳}$

کل حالات=$\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱} + \binom{۵}{۱}\binom{۷}{۲} + \binom{۷}{۳} = ۲۱۰$

مثال ۴-۳- با حروف کلمه ی DELAVAR چند کلمه ۳ حرفی می توان ساخت ؟

حل:

چون دو حرفA وجود دارد بنابراین ۳ دسته کلمه می توان ساخت

A, A

D, E, L, V, R

دسته اول: کلمات ۳ حرفی فاقد A : در مرحله اول از ۵ حرف به جز A (D, E, L, V, R) ۳ حرف انتخاب کرده و در مرحله ی دوم این ۳ حرف را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم.

$$\binom{۵}{۳} \times ۳! = ۶۰$$

دسته دوم: کلمات ۳ حرفی که دارای یک حرف A است: ابتدا باید دو حرف باقی مانده را از ۵ حرف (D, E, L, V, R) انتخاب نمود، سپس با این دو حرف انتخابی و یک حرف A یک کلمه (جایگشت) ۳ حرفی ساخت.

$$\binom{۵}{۲} \times ۳! = ۶۰$$

دسته سوم: کلمات ۳ حرفی که دو حرف آن A است: ابتدا باید یک حرف باقی مانده را انتخاب ، سپس با این حرف انتخابی و دو حرف A یک کلمه ۳ حرفی ساخت .

$$\binom{۵}{۱} \times \frac{۳!}{۲!} = ۱۵$$

بنابراین کل کلمات ۳ حرفی برابر است با : ۱۳۵=۱۵+۶۰+۶۰

مثال ۴-۴- به چند طریق می توان با حروف abcddee یک کلمه ی ۷ حرفی ساخت به طوریکه حروف a, b, c کنار هم نباشند؟

حل: در بسیاری از مسائل مانند مثال فوق بیان شده است که تعدادی عنصر کنار هم نباشند. شیوه حل مسائل در ۳ قدم زیر بیان می شود:

قدم اول:

آن عناصری که قرار است کنارهم نباشند را کنار گذاشته و بقیه عناصر را با جایگشت های متفاوت کنار هم قرار می دهیم.(مرتب می کنیم)

قدم دوم:

ازمکان ها و جاهای به وجود آمده از چیدن بقیه حروف به تعداد عناصری که نمی خواهند کنار هم باشند انتخاب می کنیم.

قدم سوم :

این عناصر را در این مکان های انتخابی قرار می دهیم.(مرتب می کنیم)

برای مثال فوق داریم:

قدم اول: چیدن d, d, e, e $\leftarrow \frac{۴!}{۲!۲!}$

قدم دوم: پس از چیدن d, d, e, e ، ۵ مکان به طور بالقوه ایجاد می شود که در قدم ۲، از این ۵ مکان، ۳ مکان را انتخاب می کنیم.

$$\binom{۵}{۳} = ۱۰$$

$\square$ d $\square$ d $\square$ e $\square$ e $\square$

قدم سوم :

۳حرف a, b, c را به !۳ حالت در این ۳ مکان انتخابی قرار می دهیم.

بنابراین کل حالات برابر است با $\frac{۴!}{۲!۲!} \times \binom{۵}{۳} \times ۳! = ۳۶۰$

به طور مثال یکی از حالات برابر است با cdadbee $\leftarrow$

مثال ۴-۵- به چند طریق می توان ۷ زن و ۱۰ مرد را در یک ردیف مرتب نمود بـه طوریکـه هـیچ دو زنـی کنـار هـم نباشند؟

حل:

طبق نکته مثال ۴-۴ داریم :

$$۱۰! \times \binom{۱۱}{۷} \times ۷!$$

۱-۵- روابط مهم در ترکیبات

$$۰! = ۱ \qquad (۱-۵)$$

$$\binom{n}{i} = ۰ \text{ اگر } i > n \qquad (۲-۵)$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad (۳-۵)$$

برای اثبات رابطه ی(۵-۳) فرض کنید یک مجموعه ی n عضـوی داریـم کـه مـی خـواهیم r تـای آن را انتخـاب مـی کنیم(سمت چپ رابطه) این کار را می توان به این صورت انجام داد که ابتدا $n-r$ عضو از مجموعه را انتخاب کـرده و آنها را کنار بگذاریم(سمت راست رابطه) و r عضو باقی مانده را به عنوان اعضای اصلی گروه در نظر گرفت.

مثال:

$$\binom{۵}{۲} = \binom{۵}{۳} = ۱۰ \qquad \binom{۵}{۱} = \binom{۵}{۴} = ۵$$

$$\binom{۱۲}{۲} = \binom{۱۲}{۱۰} = ۶۶ \qquad \binom{۵}{۰} = \binom{۵}{۵} = ۱$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۱}{r} \qquad (۴-۵)$$

یک مجموعه ی n عضوی را در نظر بگیرید و فرض کنید مـی خـواهیم r عضـو از آنهـا را انتخـاب کنیم(سـمت چـپ رابطه). این کار را می توان به این صورت انجام داد که ابتدا یک عضـو خـاص و مشـخص ماننـد عضـو"A" را درنظـر بگیریم و کل حالات ممکن را به دو گروه تقسیم کنیم، گروه اول شامل حالاتی است که در آن عضو خـاص "A" جـزء r عضو انتخاب شده می باشد و گروه دوم شامل حالاتی است که عضو "A" جزء r عضو انتخابی نمی باشد.

تعداد حالات ممکن برای گروه اول $\binom{n-1}{r-1}\binom{1}{1}$ و تعداد حالات ممکن برای گروه دوم $\binom{n-1}{r}\binom{1}{0}$ است پس کل حالات برابر است با :

$$\binom{n}{r}=\binom{1}{0}\binom{n-1}{r}+\binom{1}{1}\binom{n-1}{r-1}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

مثال: $\binom{17}{5}=\binom{16}{4}+\binom{16}{5}$

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\,(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2} \qquad (5-5)$$

مثال:

$$\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15 \qquad \binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$$

مثال ۵-۱- حاصل عبارت $\binom{17}{10}+\binom{16}{6}+\binom{15}{5}+\binom{15}{4}$ را بیابید.

حل:

طبق نکته ی (۵-۳) داریم :

$$\binom{17}{10}=\binom{17}{7}$$

طبق نکته ی (۵-۴) داریم :

$$\binom{15}{4}+\binom{15}{5}=\binom{16}{5}$$

$$\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\binom{17}{6}$$

$$\binom{17}{6}+\binom{17}{7}=\binom{18}{7}$$

بسط دو جمله ای(۵-۶):

$$(x+y)^n=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

برای درک بهتر رابطه ی فوق ، $n=۳$ در نظر گرفته می شود.

$$(x+y)^۳=(x+y)(x+y)(x+y)=x^۳+۳x^۲y+۳xy^۲+y^۳$$

مشاهده می شود که $(x+y)^۳$ شامل یک سری جمله است. هر عضو آن از حاصل ضرب ۲عامل (xها و yها) تشکیل شده است.حال سئوال این است که چند عضو از این عضوهای موجود دارای k عامل x و $n-k$ عامل y است (ضریب جمله ی x^ky^{n-k} چیست)؟ برای ایجاد عضوی که k عامل x و $(n-k)$ عامل y داشته باشد، باید k تا از جملات سمت چپ رابطه که در هم ضرب شده اند، عامل x و بقیه ی آنها، عامل y را بدهند. لذا تعداد دفعاتی که جمله ی x^ky^{n-k} تکرار شده است، برابر با تعداد حالات انتخاب k تا از n جمله ای است که در سمت چپ رابطه در هم ضرب شده اند. بنابراین ضریب جمله ای x^ky^{n-k} برابر $\binom{n}{k}$ است.

بنابراین بسط $(x+y)^۳$ شامل یک تعداد جمله است که مجموع توان هر جمله $n=۳$ است به طور مثال جمله ی $x^۲y$ زمانی ایجاد می شود که از ۳ پرانتزی که در سمت چپ رابطه در هم ضرب شده اند، ۲تای آنها عامل x و بقیه عامل y بدهند.

مثال۵-۲- در بسط $(x+y)^{۱۰}$ ضریب جمله ی $x^۶y^۴$ را بدست آورید؟

حل:

$(x+y)^{۱۰}$ حاصل ضرب ۱۰ بار $(x+y)$ است بنابراین زمانی جمله ی $x^۶y^۴$ به وجود می آید که از ۱۰ پرانتز، ۶ پرانتز را انتخاب که آنها x بدهند(و بقیه پرانتزها y بدهند)

بنابراین ضریب جمله $x^۶y^۴$ در بسط فوق $\binom{۱۰}{۶}$ است.

مثال۵-۳- در بسط $(۲x+۳y)^{۱۰}$ ضریب جمله ی $x^۶y^۴$ را بدست آورید.

حل:

بسط فوق حاصل ضرب ۱۰بار $(۲x+۳y)$ است برای آنکه جمله ی $x^۶y^۴$ حاصل شود می بایست از ۱۰ پرانتزی که در هم ضرب شده اند ۶ تای آن ۲x بدهند وبقیه ۳y . در نتیجه داریم :

$$(۲x + ۳y)^{۱۰} = \cdots + \binom{۱۰}{۶}(۲x)^{۶}(۳y)^{۴}$$

ضریب = $\binom{۱۰}{۶}۲^{۶} \times ۳^{۴}x^{۶}y^{۴}$

مثال ۵-۴- در بسط $(x+\frac{۱}{x})^{۸}$ ضریب جمله ی فاقد x را بیابید.

حل: فرم کلی جملات بسط فوق به صورت $\binom{۸}{i}x^{i}(\frac{۱}{x})^{۸-i}$ می باشد.

در نتیجه داریم:

فرم کلی جملات= $\binom{۸}{i}x^{i}(\frac{۱}{x})^{۸-i} = \binom{۸}{i}x^{i}.x^{i-۸} = \binom{۸}{i}x^{۲i-۸}$

برای آنکه جمله فاقد x باشد باید توان x صفر شود.

$\rightarrow ۲i - ۸ = ۰ \rightarrow i = ۴ \rightarrow$ ضریب $= \binom{۸}{۴}$

اگر در بسط دو جمله ای (رابطه ی ۵-۶) x را برابر ۱و y را برابر ۱ قرار دهیم داریم :

$$(x+y)^{n} = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}x^{i}y^{n-i}$$

$$\rightarrow ۲^{n} = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i} \qquad (۷-۵)$$

به طور مثال برای $n = ۵$ داریم:

$$\sum_{i=۰}^{۵} = \binom{۵}{i} = ۲^{۵}$$

$$\rightarrow \binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵} = ۲^{۵}$$

نکته۸: $\binom{n}{i}$ برابر تعداد زیر مجموعه های i عضوی یک مجموعه ی n عضوی است که طبق نکته ی بالا تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر ۲^{n} است.

تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی ← $\binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۴}$

تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی ← $\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۵}$

طبق نکته ی (۵-۳) داریم:

$$\binom{۵}{۰} = \binom{۵}{۵}$$

$$\binom{۵}{۱} = \binom{۵}{۴}$$

$$\binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲}$$

$$\rightarrow \binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۴} = \binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۵} = \frac{۲^۵}{۲} = ۲^۴ = ۱۶$$

نکته۹: اگر مجموعه ای دارای n عضو باشد ۲^n زیر مجموعه دارد که از این تعداد، نصف آن یعنی $۲^{n-۱}$ فرد عضوی ونصف دیگر زوج عضوی است.

مثال۵-۵- تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی مجموعه ی $\{۱,۲, \ldots ۱۰\}$ کدام است؟(مجموعه تهی با صفر عضو نیز زوج عضوی است)

حل: طبق نکته ی ۹، تعداد زیر مجموعه ی زوج عضوی برابر با $۲^۹$ است.

۱-۶- تعداد حالات قرار گرفتن اشیا در ظرف ها

در برخی از مسائل آنالیز ترکیبی هدف شمارش تعداد حالات قرار گرفتن چند شی در چند ظرف (اتاق) است. در این نوع مسائل منظور از اشیاء یکسان این است که فقط تعداد اشیاء قرارگرفته درون هر ظرف مهم است و جابجایی یک شی از یک ظرف با یکی شی دیگر از یک ظرف دیگر حالت جدیدی ایجاد نمی کند(ارزش اشیاء یکسان است) مانند تقسیم کردن ۱۰سکه یکسان بهار آزادی بین ۳ نفر(برای هر نفر اهمیت ندارد که کدام سکه را به وی می دهند، بلکه تنها برایش اهمیت دارد که چند سکه دریافت می کند.)در مقابل منظور از اشیاء متفاوت این است که هم تعداد اشیاء قرار گرفته درون هر ظرف مهم است و هم ارزش و ماهیت اشیاء قرار گرفته درون هر ظرف. به عبارت دیگر اگر ارزش اشیاء متفاوت فرض شود، جابجایی یک شی از یک ظرف با یک شی دیگر از یک ظرف دیگر حالت جدید ایجاد می کند مانند تقسیم کردن ۵ سکه ۵۰ تومانی و ۴ سکه ۱۰ تومانی و ۳ سکه ۲۵ تومانی بین ۳ نفر(در این مثال هم تعداد و هم ماهیت سکه هایی که هر فرد دریافت می کند مهم است.)

همچنین در این نوع مسائل، منظور از ظروف(اتاق ها) یکسان این است که برای هر شی فقط هم گروهی های آن اهمیت دارد. ولی منظور از ظرف ها متفاوت این است که برای هر شی علاوه بر هم گروهی های آن، در اتاق یا ظرفی که در آن قرار گرفته نیز اهمیت دارد.

قرارداد: در هنگام تقسیم افراد در مکان های فیزیکی(مثل کلاس و اتاق و....) افراد را اشیا متفاوت فرض می کنیم، مگر اینکه در مسئله به گونه ای خلاف آن ذکر شده باشد(مثلا مستقیما ذکر شده باشد ارزش افراد یکسان است یا اینکه ذکر شده باشد فقط تعداد افراد قرار گرفته در هر محل مهم است).همچنین مکان های فیزیکی را ظرف های متفاوت فرض می کنیم، مگر اینکه در مسئله به گونه ای خلاف آن ذکر شده باشد(مثلا مستقیما ذکر شده باشد که برای هر فرد فقط همگروهی های او مهم است نه محلی که در آن قرار می گیرد)

در ادامه برای درک بهتر این مفاهیم به بررسی حالات مختلف قرار گرفتن اشیاء در ظروف می پردازیم .

نوع ۱ : قرار گرفتن اشیاء متفاوت در ظرف های متفاوت به طوریکه تعداد اشیاء هر ظرف دقیقاً معلوم است.

ویژگی های مسئله نوع ۱:

۱. اشیاء متفاوت(n شی)
۲. ظرف ها متفاوت(r شی)
۳. دقیقاً معلوم است که هر ظرف (اتاق) چه تعدادعضو می پذیرد.

مثال۶-۱- به چند طریق می توان ۷ نفر را در ۳ اتاق با شماره های ۱،۲،۳ تقسیم نمود، به طوریکه در اتاق اول ۳ نفر در اتاق دوم ۲ نفر و اتاق سوم هم ۲ نفر قرار گیرند؟

حل:

اتاق ۳	اتاق ۲	اتاق ۱
۲ نفر	۲ نفر	۳ نفر

ابتدا از بین ۷ نفر موجود ۳ نفر را انتخاب و در اتاق ۱ قرار می دهیم سپس از ۴ نفر باقی مانده ۲نفر را انتخاب و در اتاق ۲ و ۲ نفر باقی مانده را در اتاق شماره ی ۳ قرار می دهیم. در نتیجه تعداد کل برابر است با :

$$\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲} = \frac{۷!}{۳!\,۲!\,۲!}$$

توجه شود چون در این مسائل محدودیتی وجود ندارد که ابتدا افراد کدام اتاق را مشخص کنیم می توان به طور مثال ابتدا از اتاق ۲ یا ۳ شروع کرد.

$$\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۲}=\frac{۷!}{۳!\,۲!\,۲!}$$

نکته ۶-۱- تعداد حالات ممکن برای تقسیم n شی متفاوت در r ظرف متفاوت که در ظرف اول n_1 و......و در ظرف r ام n_r شی قرارگیرد برابر است با :

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots\ldots\times n_r!}$$

مثال ۶-۲- به چند طریق می توان از یک گروه ۹ نفره، سه کمیته مالی ، فرهنگی و ورزشی تشکیل داد ، به طوریکه ۴ نفر در کمیته مالی ، ۳ نفر در کمیته فرهنگی و ۲ نفر در کمیته ورزشی قرار گیرند؟

حل: تعداد حالات مورد نظر برابر است با :

$$\binom{۹}{۴}\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۲}=\frac{۹!}{۴!\,۳!\,۲!}$$

نوع ۲: قرار گرفتن اشیاءمتفاوت در ظرف های متفاوت طوریکه در یک ظرف n_1 شی و در یک ظرف n_2 شی و.... (مشخص نیست کدام ظرف n_1 شی و کدام ظرف n_2 شی و....می گیرد).

ویژگی های مسأله نوع ۲:

۱. اشیاء متفاوت(n شی)
۲. ظرف ها متفاوت(r ظرف)
۳. دقیقاً مشخص نیست کدام ظرف n_1 شی و کدام ظرف n_2 شی و.... می گیرد.

مثال ۶-۳- به چند طریق می توان ۱۰ توپ متفاوت با شماره های ۱ تا ۱۰ را در ۳ ظرف آبی، زرد ، قرمز قرار دارد به طوریکه در یک ظرف ۴توپ و در دوظرف دیگر ۳ توپ قرار داشته باشد؟

حل:

فرق این مسأله با مثال های قبل این است که مشخص نکرده هر ظرف دقیقاً چند توپ بگیرد و فقط ذکر کرده که یکی از ظرف ها ۴ توپ و دو تای دیگر ۳ توپ بگیرد. برای حل این مسأله باید ابتدا تعیین کنیم که کدام ظرف ۴

توپ بگیرد که این کار به $\binom{۳}{۱}$ طریق ممکن است. حال با انتخاب ظرفی که ۴ توپ در آن قرار می گیرد(مثلاً ظرف قرمز) معلوم می شود که هر ظرف دقیقاً چند توپ می گیرد (مثلاً قرمز ۴ ، زرد ۳، آبی ۳ توپ) و ادامه مسأله نوع ۱ می شود پس کل حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{۳}{۱}\frac{۱۰!}{۴!\,۳!\,۳!}$$

نکته ۶-۲- تعداد حالات ممکن برای تقسیم n شی متفاوت در r ظرف متفاوت که در یک ظرف $n_۱$ و....و در یک ظرف n_r شی قرار می گیرد (مشخص نکرده کدام ظرف $n_۱$ شی و کدام ظرف $n_۲$ شی و....) برابر است با :

$$\frac{n!}{n_۱!\,n_۲!\times\ldots\times n_r!}\times\left[\text{تعداد حالات انتخاب اینکه هر ظرف دقیقاً چند شی بگیرد}\right]$$

مثال ۶-۴- به چند طریق می توان ۱۰ جایزه متفاوت را بین افراد C, B, A تقسیم نمود که یک نفر ۵ جایزه و یک نفر ۳ جایزه و یک نفر هم ۲ جایزه بگیرد؟

حل: اگر چنین ذکر شده بود که ۵ جایزه برای نفر A ، ۲جایزه برای نفر B و ۳ جایزه برای نفر C ، مسأله مانند مثال های ۶-۱ و ۶-۲ حل می شد. ولی در این مسأله ابتدا باید مشخص کنیم چه کسی ۵ جایزه ،چه کسی ۳ جایزه و چه کسی ۲ جایزه بگیرد که این کار به $۳! = \binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}$ طریق امکان پذیر است. پس جواب مسئله عبارت است از: $\frac{۱۰!}{۵!۳!۲!}\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}$

❖ نوع ۳: قرار گرفتن اشیاء متفاوت در ظرف های یکسان به طوریکه تعداد اشیاء هر ظرف معلوم است.

ویژگی های مسأله نوع ۳:

۱. اشیاء متفاوت(n شی)
۲. ظرف ها یکسان(برای هر شی اهمیت ندارد که در کدام ظرف قرار گیرد بلکه فقط هم گروهی های آن مهم است)
۳. تعداد اشیاء هر ظرف معلوم

مثال ۶-۵- به چند طریق می توان ۴ نفر را در ۲ اتاق ۲ نفره تقسیم نمود(در هر دو حالت اتاق ها یکسان و متفاوت)

حل:

۴ نفر در ۲ اتاق یکسان (نوع ۳)

$$\frac{۴!}{۲!\times ۲!\times ۲!}$$

۴ نفر در ۲ اتاق ۲ نفره متفاوت (نوع ۱)

$$\frac{۴!}{۲!\,۲!}=۶$$

اتاق ۱۰۲	اتاق ۱۰۱
CD	AB
AB	CD
BD	AC
AC	BD
BC	AD
AD	BC

$\longrightarrow$

CD	AB
BD	AC
BC	AD

توضیح : در مسائل نوع ۱(سمت چپ) برای هر نفر علاوه بر اینکه اهمیت دارد با کدام فرد هم اتاق شده است محل و اتاقی که در آن قرار گرفته مهم است.(زیرا اتاق ها متفاوت هستند) ولی در مسائلی که اتاق ها یکسان است برای هر نفر اهمیت ندارد که در کدام اتاق قرار گرفته بلکه تنها هم گروهی او اهمیت دارد.

بنابراین هر ۲ حالت در مسائل نوع ۱ با یک حالت در مسائل نوع ۳ معادل است..

نکته ۶-۳- تعداد حالات قرار گرفتن n شی متفاوت در r ظرف یکسان به طوریکه در یک ظرف $n_۱$ شی در یک ظرف $n_۲$ شی و...... در یک ظرف n_r شی قرار گیرد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\,n_۲!\,\ldots .\,n_r!}\times\frac{۱}{k_۱!\,k_۲!\,\ldots}$$

که k_i تعداد ظرف هایی است که تعداد اشیاء یکسان دارند که در مثال قبل $k=۲$ بود.

(به مسائل نوع ۳ (اتاق ها یکسان) گروه بندی نیز می گویند)

مثال ۶-۶- به چند طریق می توان ۹ نفر را به ۳ گروه ۳ نفره تقسیم کرد؟

حل: در این مثال $k = 3$ **است.**

$$\frac{9!}{3! \times 3! \times 3! \times 3!}$$

مثال ۶-۷- به چند طریق می توان ۲۰ ورزشکار را به ۱۰ گروه ۲ نفره تقسیم کرد.

حل:

در اینجا ۱۰ اتاق وجود دارد که تعدادشان یکسان است در نتیجه $k = 10$ **است**

$$\text{تعداد حالات} = \frac{20!}{(2!)^{10} \times 10!}$$

بسط چند جمله ای:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \binom{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_r} {x_1}^{n_1} \times \ldots {x_r}^{n_r}$$

مثال۶-۸ – در بسط $(x+y+z)^{10}$ **ضریب جمله ای** $x^2y^3z^5$ **را بدست آورید ؟**

حل: شیوه حل مانند بسط دو جمله ای است . $(x+y+z)^{10}$ **حاصل ضرب ۱۰ پرانتز است. زمانی جمله ی** $x^2y^3z^5$ **ایجاد می گردد که از ۱۰ پرانتز که در هم ضرب شده است ۲ تای آن** x **، ۳تای آن** y **و ۵ تای باقی مانده** z **بدهند بنابراین ضریب جمله ی** $x^2y^3z^5$ **برابر است با :**

$$\binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{5} = \frac{10!}{2!\,3!\,5!}$$

مثال ۶-۹- در بسط $(3x + 2y + 2z)^{10}$ **ضریب جمله ی** $x^2y^3z^5$ **را بدست آورید ؟**

حل: مانند مثال ۵-۳

$$\text{ضریب:} \binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{5} 3^2 \times 2^3 \times 2^5 = \frac{10!}{2!\,3!\,5!} \times 3^2 \times 2^3 \times 2^5$$

نوع ۴: قرار گرفتن اشیا متفاوت در ظرف های متفاوت به طوریکه محدودیتی در تعداد اشیا ظرف ها نباشد.

ویژگی های مسأله نوع ۴:

۱. اشیاء متفاوت (n شی)
۲. ظرف ها متفاوت (r ظرف)
۳. بدون محدودیت در تعداد اشیاء ظرف ها

مثال ۶-۱۰- به چند طریق می توان ۱۰ پلیس یک شهر کوچک را در ۳ خیابان مهم این شهر مستقر نمود؟

حل: مسأله تخصیص یا قرار دادن پلیس ها در این ۳ خیابان است. برای پلیس شماره ی ۱ سه حالت امکان پذیر است(خیابان ۱ یا ۲ یا ۳) برای پلیس شماره ۲ نیز سه حالت و برای بقیه ی پلیس ها نیز ۳ حالت امکان پذیر است، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات مسأله برابر است با: 3^{10}

نکته ۶-۴- تعداد کل حالات قرار گرفتن n شی متفاوت در r ظرف بدون محدودیت در تعداد اشیاء ظرف ها برابر است با: r^n

نوع ۵: قرار گرفتن اشیاء یکسان در ظرف های متفاوت طوریکه محدودیتی در تعداد اشیاء ظرف ها نباشد.

ویژگی های مسأله نوع ۵:

۱. اشیاء یکسان (فقط تعداد اشیاء قرار گرفته در هر ظرف مهم است)
۲. ظرف ها متفاوت(r ظرف)
۳. بدون محدودیت در تعداد اشیاء ظرف ها

مثال ۶-۱۱- به چند طریق می توان ۵ سکه یکسان بهار آزادی را بین ۳ نفر C, B, A تقسیم نمود؟

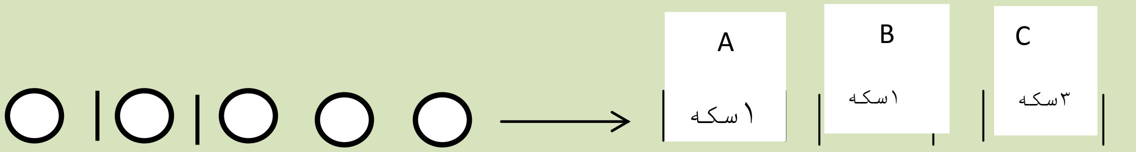
حل: برای حل این مسأله ابتدا مسأله ی دیگری را حل می کنیم:

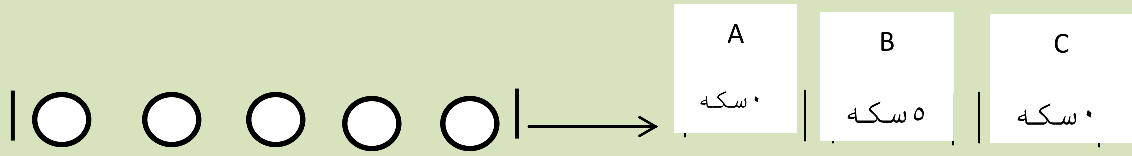
با پنج دایره ○ و دو خط | چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

طبق نکته ی ۳ تعداد این مسأله عبارت است از:

$$\frac{۷!}{۲!\,۵!}=\binom{۷}{۲}$$

حال با کمی توجه می توان فهمید که هر یک از نتایج این مسأله معادل یکی از نتایج تقسیم ۵ سکه بهار آزادی بین ۳ نفر است، که چند حالت از آن در زیر آمده است.





پس اگر بخواهیم تعداد حالات تقسیم n شی یکسان در r ظرف متفاوت بشماریم (به عبارتی تنها تعداد اشیاء قرار گرفته در هر ظرف مهم باشد) کافی است تعداد جایگشت هایی که می توان با $r-۱$ خط و n دایره ایجاد نمود را محاسبه کنیم.بنابراین تعداد قرار گرفتن n شی یکسان در r ظرف متفاوت برابر است با :

$$\frac{(n+r-۱)!}{(r-۱)!\,n!}=\binom{n+r-۱}{r-۱}=\binom{n+r-۱}{n}$$

مثال ۶-۱۲- به چند طریق می توان ۱۱ پرتقال سالم را بین ۴ نفر تقسیم کرد؟

حل: برای هر نفر تنها تعداد پرتقال هایی که به او می رسد مهم است پس اشیاء یکسان هستند در این مسأله $n=۱۰$, $r=۴$ بنابراین تعداد کل حالالات برابر است با :

$$\binom{۱۱+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۴}{۳}$$

مثال ۶-۱۳- به چند طریق می توان ۷ پرتقال سالم و ۵ سیب سالم را بین ۴ نفر تقسیم کرد؟

حل: پرتقال ها را می توان $\binom{۷+۴-۱}{۴-۱}$ طریق بین افراد تقسیم نمود و به ازای هر یک از نتایج تقسیم پرتقال ها، $\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}$ طریق برای تقسیم نمودن سیب ها بین افراد وجود دارد. پس کل حالات برابر است با :

$$\binom{۷+۴-۱}{۴-۱}\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۰}{۳}\binom{۸}{۳}$$

مثال ۶-۱۴- معادله ی زیر چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$

$x_i \geq ۰$

حل: با کمی دقت متوجه می شوید که این مسأله دقیقاً مانند قرار دادن ۷ توپ یکسان ، در ۳ ظرف متفاوت ($x_۳, x_۲, x_۱$) است. (هر حالت حل معادله ی فوق ، معادل یکی از حالات قرار دادن ۷ توپ یکسان در ۳ ظرف متفاوت است) به طور مثال۲ $x_۳ = ۲, x_۲ = ۳, x_۱ =$ معادل این است که به فرد $x_۱$، ۲ توپ ، به فرد $x_۲$ ، ۳ توپ و به فرد $x_۳$ ، ۲ توپ برسد. پس تعداد جواب های معادله های فوق عبارت است از:

$$\binom{۷+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲} = \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$$

مثال ۶-۱۵- تعداد جملات بسط $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_r)^n$ را بیابید ؟

حل: برای بدست آوردن تعداد جملات بسط فوق، مسأله را در مقیاس کوچکتر $r = ۲ , n = ۳$ حل می کنیم.

$(x_۱ + x_۲)^۳ = x_۱{}^۳x_۲{}^۰ + ۳x_۱{}^۲x_۲{}^۱ + ۳x_۱x_۲{}^۲ + x_۱{}^۰x_۲{}^۳$

این بسط شامل تعدادی جمله است که مجموع توان هر جمله $n = ۳$ است. در این بسط هر جمله زمانی ایجاد می شود که توان x_i ها تغییر کند به شرط آنکه مجموع توان ها ۳ بماند.

اگر $n_۱$ را توان $x_۱$ و $n_۲$ را توان $x_۲$ در نظر بگیریم، پس تعداد جملات بسط بالا برابر تعداد جواب های معادله $n_۱ + n_۲ = ۳$ می باشد که برابر است با ۴ $= \binom{۴}{۱} = \binom{۳+۲-۱}{۲-۱}$

	$n_۲$	$n_۱$
جمله ی $x_۱{}^۰x_۲{}^۳$	۳	۰
جمله ی $x_۱{}^۱x_۲{}^۲$	۲	۱
جمله ی $x_۱{}^۲x_۲{}^۱$	۱	۲
جمله ی $x_۱{}^۳x_۲{}^۰$	۰	۳

نکته ۶-۵- تعداد حالات قرار گرفتن n شی یکسان در r ظرف متفاوت، تعداد جواب های صحیح و غیر منفی معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ و تعداد جملات بسط $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ همگی برابر است با :

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

نوع ۶: قرار گرفتن اشیاء یکسان در ظرف های متفاوت طوریکه درهر ظرف حداقل یک شی قرار گیرد.

مثال ۶-۱۶- به چند طریق می توان ۱۱ پرتقال سالم را بین ۴ نفر تقسیم کرد به طوریکه به هر یک حداقل یک پرتقال برسد؟

حل: ابتدا به هر پسر بچه یک پرتقال می دهیم که این کار به یک طریق ممکن است.(پرتقال ها یکسان در نظر گرفته شده اند ، پس فقط یک حالت وجود دارد تا به هرکدام از آنها یک پرتقال داده شود). سپس ۷ پرتقال باقی مانده را بین افراد به طور دلخواه(نوع۵) تقسیم می کنیم. بنابراین تعداد حالات برابر است با :

$$\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

مثال ۶-۱۷- تعداد جواب های مثبت معادله ی $x_i > 0$ و $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ را بیابید؟

حل: با کی دقت متوجه می شوید که مسأله دقیقاً معادل تقسیم ۷ توپ یکسان در ۳ ظرف است به طوری که باید در هر ظرف حداقل یک توپ قرار گیرد که برابر است با:

$$\binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

نکته ۶-۶- تعداد حالات قرار گرفتن n شی یکسان در r ظرف متفاوت به طوریکه در هر ظرف حداقل یک شی قرار گیرد و تعداد جواب های مثبت معادله ی $x_i > 0$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ برابر است با :

$$\binom{n-1}{r-1}$$

✓ تست های چهار گزینه ای فصل ۱

۱- چند عدد سه رقمی داریم که دقیقا دو رقم یکسان دارند؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۳ ۴) ۲۳۴

۲- چند عدد چهار رقمی فرد کوچکتر از ۵۰۰۰ ، با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱) ۱۰۰۸ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۱۰۸۰

۳- در یک امتحان چهار گزینه ای با پنج سوال، به چند طریق می توان به همه سوالات پاسخ داد؟

۱) $۵^۴$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) $۴^۵$

۴- اگر حروف A,B,C,D,E در یک ردیف باشند، آنگاه تعداد حالاتی که A,B در کنار هم هستند چند برابر تعداد حالاتی است که A,B,C در کنار هم هستند؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵- تعداد اعداد هفت رقمی که میتوان با اعداد ۵،۶،۶،۶،۲،۷،۷ بسازیم برابر است با؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۲۰

۶- حروف کلمه IRANIAN را به تصادف کنار هم جابجا می کنیم. در چند جایگشت حروف همانند هم، کنار هم قرار می گیرند؟

۱) $۴!$ ۲) $۴! \times (۲!)^۳$ ۳) $\frac{۷!}{(۲!)^۳}$ ۴) $(۲!)^۳$

۷- با پنج نقطه متمایز چند مثلث می توان ساخت؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۲۰

۸- مجموعه $A=\{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی، شامل عضو a دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۹- از بین ۴مرد و ۵ زن، به چند طریق می توان سه نفر را انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر آنها مرد باشند؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۴

۱۰- n نقطه متمایز روی محیط یک دایره قرار دارند.کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد پاره خط هایی که می توان با این نقاط ساخت برابر است با:$\frac{n(n-۱)}{۲}$

۲) تعداد بردار های غیر صفر برابر است با: $n^۲ - n$

۳) تعداد مثلث هایی که می توان با این نقاط ساخت برابر است با:$\binom{n}{۳}$

۴) هر سه مورد

۱۱- یک گروه ۹ نفره می خواهند در یک اتاق دو نفره، یک اتاق سه نفره و یک اتاق ۴ نفره اسکان یابند.تعداد حالات ممکن کدام است؟

۱) $\binom{۹}{۲}\binom{۷}{۴}$ ۲) $\binom{۶}{۲}\binom{۹}{۳}$ ۳) $\binom{۵}{۳}\binom{۹}{۴}$ ۴) هر سه مورد

۱۲- به چند طریق ممکن است ماه تولد سه نفر متمایز باشد؟(ماه های سال هم شانس در نظر گرفته شود)

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۰۰

۱۳- با ارقام ۱۲۲۳۳۴ چند رمز عبور چهار رقمی می توان ساخت

۱) ۶۰ ۲) ۵۴ ۳) ۴۲ ۴) ۱۰۲

۱۴- با حروف کلمه SEDARAT چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که هر دو حرف A در آن وجود داشته باشد؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۱۵- با ارقام ۳و۴و......و۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که دو تا از رقم ها زوج و دو تا از رقم ها فرد باشد؟

۱) $۱۵ \times ۴!$ ۲) $۱۲ \times ۴!$ ۳) $۱۸ \times ۴!$ ۴) $۱۴ \times ۳!$

۱۶- تعداد جایگشت های حروف کلمه computer که در آن سه حرف c,o,m به شکل com قرار گیرند و با حروف صدادار شروع شودکدام است؟

۱) $۲ \times ۵!$ ۲) $۶!$ ۳) $۵!$ ۴) $۶! - ۵!$

۱۷- شش نفر می خواهند واردکلاس شوند.به چند طریق a بعد از b وارد کلاس می شود؟(نه لزوما بلافاصله)

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۱۸- ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های زوج کنار هم باشند، تعداد ۵ رقمی های حاصل کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۱۹- از مجموعه اعداد {۱,۲, ... ,۱۲} یک زیر مجموعه ۸ عضوی انتخاب می شود.در چه تعداد از این زیر مجموعه ها از مجموعه اعداد {۱,۲ ... ,۶} حداقل ۴ عضو انتخاب می شود؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۴۸۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۳۶۰

۲۰ - با حروف کلمه BERESHTE چند جایگشت ۴ حرفی می توان ساخت؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۱۲۰

۲۱- حد اقل از برخورد چند خط در صفحه ۶۶ نقطه ایجاد می شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲۲- تعداد مقسوم علیه های عدد ۳۰۰۰ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۲۳- دو خط موازی L_1 و L_2 را در نظر بگیرید. روی هریک از این دو خط ۷ نقطه قرار دارد.تعداد مثلث هایی که با این نقطه ها می توان ساخت کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۴۷ ۳) ۲۹۴ ۴) ۳۶۴

۲۴- به چند طریق می توان فقط به ۱۰ پرسش از ۱۲ پرسش داده شده پاسخ داد به شرط آنکه پاسخ به حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول اجباری باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۵

۲۵- پنج حرف از ۸ حرف کلمه BUSINESS را با جایگشت های متمایز در کنار هم قرار می دهیم.تعداد گروه هایی که هر سه S در آنها موجود است، کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۴۰

۲۶- اگر در یک سالن دو ردیف صندلی که هر ردیف شامل ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش آموز سال اول، ۳ دانش آموز سال دوم و ۴ دانش آموز سال سوم می توانند روی آنها بنشینند طوریکه اولی ها در ردیف اول و دومی ها در ردیف دوم باشند؟

۱) $\frac{11!(10!)^2}{4!(7!)^2}$ ۲) $\frac{12!(11!)^2}{4!(7!)^4}$ ۳) $\frac{(10!)^2}{4!(7!)^2}$ ۴) $\frac{(10!)^2}{4!(7!)^2}$

۲۷-۴ نفر از ۷ کارگر یک کارگاه مرد هستند.به چند طریق می توان ۳ نفر از بین کارگران انتخاب نمود به طوریکه حداکثر یک نفر زن باشند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۱۸ ۴) ۷

۲۸- به چند طریق می توان با اعداد ۱ تا ۹ یک عدد ۵ رقمی ساخت به طوریکه دوتا از اعداد آن دوبار تکرار شده باشد (مانند ۲۲۷۱۷ و ۸۱۴۸۱)؟

۱) ۷۵۶۰ ۲) ۸۶۴۰ ۳) ۱۷۲۸۰ ۴) ۱۵۱۲۰

۲۹- در چند جایگشت از حروف کلمه SERESHT بین دو حرف S حد اقل یک حرف وجود دارد؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۶۰۰

۳۰- با حروف کلمه ی AVERAGE چند رمز عبور چهار حرفی میتوان ساخت؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۷۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۸۴

۳۱- ۱۰ سکه پنجاه تومانی غیر متمایز (یکسان) را به چند طریق مختلف می توان به طور کاملا دلخواه بین ۳ نفر تقسیم کرد؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۲ ۳) 3^{10} ۴) 10^{3}

۳۲- با حروف کلمه SUCCESS چند رمز عبور چهار حرفی می توان ساخت؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۱۴ ۳) ۱۴۱ ۴) ۱۴۲

۳۳- از !۳۰ جایگشت اعداد ۱و۲و۳و....و۳۰ چند جایگشت دارای این ویژگی هستند که مضرب های ۳ در مجاورت هم قرار نمی گیرند؟(یعنی اعداد ۳و۶و۹و.... ۳۰ در مجاورت هم نباشند)

۱) $\binom{۲۰}{۱۰}$!۲۰ ۲) $\binom{۲۱}{۱۰}$!۲۰ ۳) !۱۰ $\binom{۲۰}{۱۰}$!۲۰ ۴) !۱۰ $\binom{۲۱}{۱۰}$!۲۰

۳۴- با حروف کلمه " حسابداری" چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت؟

۱) !۸ ۲) !۴ ۳) $\frac{۸!}{۲!}$ ۴) $\frac{۸!}{۴!}$

۳۵- با حروف کلمه "حسابداری" چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت؟

۱) !۴ ۲) !۸ ۳) ۲۰۱۶۰ ۴) ۱۰۲۰

۳۶- از بین ۶ نفر به چند طریق می توان یک تیم حداقل ۲ نفره را انتخاب نمود؟

۱) ۲۴۷ ۲) ۲۱۶ ۳) ۱۶۴ ۴) ۵۷

۳۷- یک آسانسور از طبقه همکف با ۸ مسافر (بدون مسئول آسانسور) حرکت کرده و تا طبقه ششم همه را پیاده می کند.اگر مسافران از نظر مسئول آسانسور یکسان باشند، او به چند طریق مختلف می تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟

۱) $\binom{۱۴}{۴}$ ۲) $\binom{۱۳}{۷}$ ۳) $\binom{۱۳}{۵}$ ۴) $\binom{۱۴}{۵}$

۳۸- در سوال قبل اگر ۵ نفر از مسافران مرد و ۳ نفر زن باشند، آنگاه مسئول آسانسور به چند طریق می تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟

۱) $\binom{۸}{۵}\binom{۱۰}{۵}$ ۲) $\binom{۷}{۵}\binom{۹}{۵}$ ۳) $\binom{۸}{۳}\binom{۱۰}{۳}$ ۴) $\binom{۸}{۴}\binom{۱۰}{۴}$

۳۹- با حروف AAAABBBCCC چند کلمه ۱۰ حرفی می توان ساخت به طوریکه حرف سوم آن A و حرف هفتم آن B باشد؟

۱) ۲۱۰۰ ۲) ۴۲۰۰ ۳) ۱۱۲۰ ۴) ۵۶۰

۴۰- با حروف AAAABBBCCDD چند کلمه می توان ساخت به طوریکه هیچ کدام از A ها کنار هم نباشند؟

۱) ۱۴۷۰۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۷۳۵۰ ۴) ۱۰۸۱۰۸۰۰

۴۱- ۹ خودکار یکسان را به چند طریق می توان بین ۵ نفر توزیع کرد به طوریکه به ۲ نفر از آنها هیچ خودکاری نرسد و مابقی افراد بدون خودکار نمانند؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۸۰

۴۲- در بسط $\left(x+\frac{۲}{x}\right)^{۸}$، جمله مستقل از x چند برابر ضریب $x^{۶}$ است؟

۱) ۷۰- ۲) ۷۰ ۳) $\frac{۳۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۴۳- به چند طریق می توان از بین ۴ نفر خانم و ۵ نفر آقا یک شورا انتخاب نمود که حداقل ۴ نفر از آقایان در آن باشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۸۰ ۳) ۶ ۴) ۱۷۶

۴۴- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۴۵- از هر یک از شهر های بیرجند، بوشهر ، سنندج، زاهدان و یزد ۲۰ دانش آموز به اردوگاهی دعوت شده اند.به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر هم شهری هستند انتخاب کرد؟

۱) ۸×۱۰^{۴} ۲) ۴×۱۰^{۴} ۳) ۱۵×۱۰^{۴} ۴) $۱۰^{۴}$

۴۶- به چند طریق می توان ۷ نفر را که دو نفر آنها با هم برادر هستند در یک صف قرار داد به طوریکه دو برادر کنار هم نباشند؟

۱) $۲\times ۶!$ ۲) $۵\times ۶!$ ۳) $۶\times ۶!$ ۴) $۶!$

۴۷- به چند طریق می توان ۷ سکه یکسان بهار آزادی را بین سه نفر A,B,C تقسیم کرد به طوریکه به فرد A فقط یک سکه برسد و بقیه نیز حداقل یک سکه دریافت کنند؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳۶ ۴) ۴۶

۴۸- به چند طریق می توان یک کمیته از میان ۵ دانش آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد به طوریکه در کمیته ۲ دانش آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشند؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۴

۴۹- فضای نمونه ای آزمایش همزمان پرتاب یک سکه، یک تاس و یک چهار وجهی که اعداد ۱ تا ۴ روی وجه های آن نوشته چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۵۰- با ارقام ۴و۴و۰و۰و۲ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۵۱- به چند طریق می توان ۷ مهره غیر متمایز(مشابه) را بین ۲ نفر تقسیم کرد، به طوریکه به اولی حداقل یک مهره و به دومی حداقل ۲ مهره برسد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۲- شخصی خواستار خرید سهام از ۴ کارخانه متفاوت است. اگر قیمت سهام هر کارخانه یکصد هزار تومان باشد و شخص بخواهد حداکثر ۲ میلیون تومان سرمایه گذاری کند به چند طریق مختلف می تواند سرمایه گذاری کند؟

۱) $\binom{۲۴}{۵}$ ۲) $\binom{۲۴}{۴}$ ۳) $\binom{۲۳}{۳}$ ۴) $\binom{۲۳}{۴}$

۵۳- از گروهی شامل ۷ مرد و ۸ زن یک شورای ۶ نفره انتخاب می شود.اگر در این شورا بخواهیم حداقل ۳ زن و حداقل ۲ مرد وجود داشته باشد، به چند طریق متفاوت می توان شورا را انتخاب کرد؟

۱) ۱۷۶۴۰ ۲) ۳۴۳۰ ۳) ۱۶۸۶۰ ۴) ۲۸۴۰

۵۴- خانمی ۲۰ سیب دارد. به چند طریق می تواند آنها را در ۷ روز یک هفته مصرف کند، به طوری که سیب ها تمام نشود؟(حداقل یک سیب باقی بماند)

۱) $\binom{۲۶}{۷}$ ۲) $\binom{۲۶}{۸}$ ۳) $\binom{۲۷}{۶}$ ۴) $\binom{۲۷}{۷}$

۵۵- می خواهیم با ارقام ۲و۷و۷و۰و۰و۰و۵ به تصادف اعداد ۷ رقمی بسازیم.فضای نمونه این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۴۲۰

۵۶- به چند طریق می توان ۲۶۲ توپ یکسان را در ۸ ظرف متفاوت قرار داد که در ظرف i ام حداقل $\binom{۸}{i}$ توپ قرار داشته باشد؟

۱) $\binom{۱۳}{۷}$ ۲) $\binom{۱۴}{۷}$ ۳) $\binom{۱۵}{۷}$ ۴) $\binom{۱۴}{۸}$

۵۷- با شش عدد ۱و۱و۲و۳و۴و۵ چند عدد ۴ رقمی می توان ساخت که عدد ۵ حتما در آن باشد؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۶۸ ۴) ۱۲۰

۵۸- در بسط $\left(X+\frac{۱}{\sqrt{۲X}}\right)^{۹}$ ضریب شامل $X^{۳}$ کدام است؟

۱) ۲۴/۵ ۲) ۳۵ ۳) ۳۱/۵ ۴) ۱۰/۵

۵۹- تمام جایگشت های ۷ حرفی از حروف کلمه" جیرجیرک" را می نویسیم.در چه تعداد حروف" ج" همواره کنار هم و حروف "ر" نیز همواره کنار هم هستند؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۰

۶۰- با حروف کلمه STATISTICAL چند کلمه ۱۱ حرفی میتوان نوشت که حرف L بعد از C قرار گیرد؟(نه لزوما بلافاصله)

۱) $\frac{۱۱!}{۳!(۲!)^{۳}}$ ۲) $\frac{۱۱!}{۳!(۲!)^{۵}}$ ۳) $\frac{۱۱!}{(۳!)^{۲}(۲!)^{۳}}$ ۴) $\frac{۱۱!}{۳!(۲!)^{۴}}$

۶۱- نامعادله $X+Y+Z<12$ در مجموعه اعداد صحیح نا منفی دارای چند جواب است؟

۱) ۳۴۶ ۲) ۳۶۴ ۳) ۳۵۶ ۴) ۳۶۵

۶۲- با حروف کلمه METANAT چند رمز عبور ۴ حرفی میتوان ساخت؟

۱) ۲۳۶ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۵۶

۶۳- از کیسه ای که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره آبی و ۶ مهره سیاه می باشد،۴ مهره انتخاب می کنیم.تعداد حالاتی که ۲ مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشد کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

۶۴- می خواهیم ۳ کتاب ریاضی ، ۴ کتاب فیزیک و ۲ کتاب شیمی را در یک قفسه قرار دهیم. این عمل به چند طرق ممکن است هرگاه کتاب های فیزیک کنار هم و در ابتدای قفسه از سمت چپ باشند؟

۱) $5!$ ۲) $6!$ ۳) $4!\times 5!$ ۴) $4!\times 6!$

۶۵- نمایندگان ۷ کشور از جمله روسیه ، انگلیس ، فرانسه و آمریکا باید در یک ردیف قرار گیرند.چنانچه نمایندگان فرانسه و انگلیس بخواهند پهلوی هم باشند و نمایندگان روسیه و آمریکا بخواهند پهلوی هم نباشند، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۹۶۰ ۴) ۴۸۰

۶۶- به چند طریق می توان معادله $X+Y+Z+D+E=30$ را با اعداد صحیح و غیر منفی حل کرد به طوریکه همگی مضرب ۳ باشند؟

۱) $\binom{15}{5}$ ۲) $\binom{34}{4}$ ۳) $\binom{14}{5}$ ۴) $\binom{14}{4}$

۶۷- به چند طریق می توان از شرکتی که ۳ نوع تلویزیون تولید می کند، ۸ تلویزیون خرید؟

۱) $\binom{8}{3}$ ۲) $\binom{10}{3}$ ۳) $\binom{10}{2}$ ۴) $\binom{11}{3}$

۶۸- به چند طریق می توان ۳ کتاب ادبی مختلف و ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۲ کتاب فیزیک مختلف را در کنارهم قرار داد ، به طوری که کتاب های ادبی همواره کنار هم بوده و کتاب های فیزیک در طرفین کتاب های ادبی قرار داشته باشند؟

۱) !۵ ۲) $۲(۵!)$ ۳) !۶ ۴) $۲(۶!)$

۶۹- درون ظرفی ۴ مهره سفید، ۶ مهره آبی و ۳ مهره زرد وجود دارد . به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ تای آن هم رنگ باشد؟

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۱۴ ۴) ۲۲۶

۷۰- به چند طریق می توان از بین ۶ کلاس اولی ، ۵ کلاس دومی و ۷ کلاس سومی دو نفر را انتخاب کرد که هم کلاس نباشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۷ ۳) ۱۱۳ ۴) ۲۱۴

۷۱- در چند جایگشت از حروف کلمه ی logarithm عبارت log وجود دارد؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۴۰۵۰ ۳) ۴۴۴۰ ۴) ۴۵۴۰

۷۲- اگر $۳\binom{n}{۷} = ۲\binom{n}{۸}$ باشد حاصل $P(n, n-۱)$ کدام است ؟

۱) !۱۷ ۲) !۱۸ ۳) !۱۹ ۴) !۲۰

۷۳- یک ساختمان ۱۰طبقه را به چند طریق می توان با ۴ رنگ ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو طبقه مجاوری هم رنگ نباشند؟

۱) ۴×۳^{۹} ۲) ۳×۴^{۹} ۳) $۳^{۹}$ ۴) $۴^{۹}$

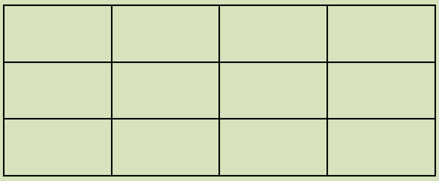
۷۴- به چند طریق می توان از بین ۵ مهره آبی و ۴ مهره سبز ، سه مهره را انتخاب کنیم به طوری که دو تا آبی و یکی سبز باشند؟

۱) ۴۰ ۲) ۱۰ ۳) ۸۴ ۴) ۱۴

۷۵- مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی شامل ۲ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۶- در شکل روبرو چند ۴ ضلعی(مستطیل) وجود دارد ؟



۱)۴۰ ۲)۶۰ ۳)۵۰ ۴) ۷۰

۷۷- چند دسته گل ۳ تایی از ۵ نوع گل مختلف می توان ساخت؟(تکرار مجاز است)(ریاضی ۸۰)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

۷۸- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنها وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو نفر مورد نظر a وb از آنان، فقط یک نفر سخنرانی کند؟(ریاضی ۸۷)

۱)۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۷۹- به چند طریق می توان ۱۲ سکه یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کرد به طوری که حداقل به هرکدام یک سکه برسد؟(ریاضی۸۷)

۱) ۵۵ ۲) ۴۸ ۳) ۴۵ ۴) ۳۶

۸۰- با ارقام ۱،۳،۵،۷،۹ چند عدد سه رقمی با شرط رقم صدگان>رقم دهگان >رقم یکان می توان نوشت ؟ (ریاضی ۹۱)

۱)۸ ۲) ۹ ۳)۱۰ ۴) ۱۲

۸۱- از هر یک از۶ منطقه کشوری ، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده اند.به چند طریق می توان ۳ دانش آموز از بین آنها که دو به دو غیر هم شهری هستند انتخاب کرد ؟ (ریاضی ۹۲)

۱)۵۷۶۰۰ ۲)۶۷۵۰۰ ۳)۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

۸۲- به چند طریق می توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه قرار داد به طوری که در هر قفسه، لااقل یکی از آنها قرار داده شوند(ریاضی ۹۲)

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۷۰

۸۳-در بسط $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$ ضریب جمله ی مستقل از x کدام است؟(تجربی ۸۱)

۱)۲۰۰۲ ۲) ۲۰۵۳ ۳) ۳۰۰۳ ۴) ۳۰۵۲

۸۴- ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند. تعداد ۵ رقمی حاصل کدام است؟(تجربی ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۸۵- تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه ی {a,b,c,d,e,f} شامل عضو a کدام است ؟(تجربی ۸۳)

۱) ۸ ۲)۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۸۶- ضریب جمله ی مستقل در بسط $\left(x^{2}+\frac{2}{x}\right)^{6}$ کدام است ؟(تجربی ۸۴)

۱)۲۳۰ ۲) ۲۳۴ ۳) ۲۳۸ ۴) ۲۴۰

۸۷- حروف کلمه ی LAGRANGE را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم . در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟(تجربی ۸۴)

۱)۳۶۰ ۲)۵۴۰ ۳)۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۸۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد ، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟(تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۸۹- از هر یک مدارس A وB وC وD و E چهارنفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند.به چند طریق می توان ۳ دانش آموز که دو به دو غیر هم شهری باشند انتخاب کرد؟.(تجربی ۹۲)

۱)۱۶۰ ۲)۳۲۰ ۳)۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۹۰- از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی ، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لا اقل دو نفر از آن ها دانش آموز تجربی باشند؟(تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۹۱- با جابجایی ارقام ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان تشکیل داد به طوری که رقم های ۲ یک در میان قرار گیرند؟(ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۹۲- می خواهیم از مبدأ مختصات نقطه A و با مختصات (۱۰۰،۱۰۰) برویم.اگر در هر حرکت مجاز به این باشیم که ۲۰ واحد به سمت راست یا ۱۰ واحد به سمت بالا برویم. این کار به چند طریق ممکن است؟

۱) $\frac{۳۰!}{۱۰!۲۰!}$ ۲) $\frac{۱۵!}{۵(!)}$ ۳) $\frac{۲۰!}{۱۰!۱۰!}$ ۴) $\frac{۲۰۰!}{۱۰۰!۱۰۰!}$

۹۳- با حروف aوbوcوdوeوf چند کلمه ی ۴ حرفی میتوان ساخت که در آن یک حرف دوبار و دو حرف یک بار تکرار شده باشند؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۱۴۴۰

۹۴- تعداد جایگشت های حروف کلمه ی system به طوری که s ها در کنار هم نباشد کدام است؟(سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۹۵- از هر ۸ مدرسه علاقه مند ، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفره انتخاب شده اند. به چند طریق می توان این بازی انجام شود، به طوری که هر دو نفرهمیار هم از یک مدرسه باشند؟(سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۶۳۰۰

۹۶- به چندطریق می توان ۹ توپ یکسان را در ۴ سبد متمایزجای داد به طوری که در هر سبد حداقل یک توپ و حداکثر ۴ توپ جای گیرد(سراسری ریاضی ۹۲خارج از کشور)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۵۶

۹۷- تعداد سه تایی های مرتب با مختص های صحیح و غیر منفی به طوریکه مجموع هر سه مختص برابر ۱۰ و هر مختص کمتر از ۶ باشد کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

نمونه سوالات بدون جواب تشریحی

۱- دانش آموزی ۱۰ کتاب دارد که می خواهد در قفسه ای بچیند.از این کتاب ها ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب شیمی، ۲ کتاب تاریخ و یکی زبان خارجی است. او می خواهد کتاب هایش را طوری مرتب کند که کتاب های مربوط به یک موضوع در قفسه کنار هم باشند.این کار به چند طریق ممکن است؟

۱) ۱۷۲۸   ۲) ۶۹۱۲   ۳) ۲۵۴۳   ۴) ۱۵۹۸

۲- شش نفر دانش آموز ریاضی را به چند طریق می توان به ۳ مسابقه اعزام کرد به طوریکه تعداد افراد اعزامی به دو مسابقه برابر نباشند؟

۱) ۶۰   ۲) ۱۸۰   ۳) ۲۴۰   ۳) ۳۶۰

✓ پاسخ تشریحی فصل اول

۱- گزینه ۳ –

حل: جواب را به سه دسته تقسیم می کنیم و تعداد هر دسته را با هم جمع می کنیم.

الف) اعداد ۳ رقمی به فرم aab(اعدادی که رقم های صدگان و دهگان مثل هم دارند)

۹×۱×۹=۸۱ : تعداد

ب) اعداد سه رقمی به فرم به فرم aba

۹×۹×۱=۸۱ : تعداد

ج) تعداد سه رقمی به فرم baa

۹×۹×۱=۸۱ : تعداد

تعداد کل=۲۴۳

۲- گزینه ۱-

حل: از ۴ آزمایش(انتخاب عدد چهار رقمی) دو تا از آنها (انتخاب عدد یکان و هزارگان دارای محدودیت است).
آزمایش اول (عدد یکان) ۵ حالت دارد(۱،۳،۵،۷،۹) ولی تعداد حالات آزمایش بعدی (انتخاب عدد هزارگان) برای این ۵ عدد ثابت نیست بنابراین مسأله به دو قسمت تقسیم می شود:

		آز ۱	آز ۴	آز ۳	آز ۲
۳×۸×۷×۲=۳۳۶	(۱.۳)	۲حالت	۷ حالت	۸ حالت	۳ حالت
		آز ۱	آز ۴	آز ۳	آز ۲
۴×۸×۷×۳=۶۷۲	(۵.۷.۹)	۳حالت	۷ حالت	۸ حالت	۴ حالت

۶۷۲+۲۳۶ = ۱۰۰۸

۳- گزینه۴-

حل: ۵ سوال وجود دارد هر سوال برای جواب دادن ۴ حالت دارد بنابراین طبق اصل ضرب $۴^{۵}$ حالت وجود دارد.

۴- گزینه ۴

حل: حالاتی که A, B کنار هم هستند.

$\boxed{AB}$ $\quad CDE \quad$ $۴! \times ۲!$

حالاتی که $A, B. C$ کنارهم هستند.

$\boxed{ABC}$ $\quad DE \quad$ $۳! \times ۳!$

جواب $= \frac{۴! \times ۲!}{۳! \times ۳!} = \frac{۴}{۳}$

۵- گزینه۴ $\qquad \frac{۷!}{۲!۳!} = ۴۲۰$

۶- گزینه ۱

$AA \quad NN \quad II \quad R$

حل:

حروف مثل هم را در یک گروه قرار می دهیم . در نتیجه ۴ گروه جدید حاصل می شود که به !۴ حالت در کنار یکدیگر جابجا می شود(توجه شود که جابجایی حروف در گروه ها حالات جدیدی را ایجاد نمی کند)

۷- گزینه ۱-

حل: برای تشکیل یک مثلث ۳ نقطه احتیاج است. بنابراین از ۵ نقطه موجود ۳ نقطه را انتخاب می کنیم.

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۲!\,۳!} = ۱۰$$

۸- گزینه ۲-

حل: باید از ۵ عضو ، ۳ عضو را انتخاب کنیم در حالی که در مسأله ذکر شده است که یکی از این ۳ عنصر ، a است بنابراین باید دو عضو باقی مانده را از ۴ عضو غیر از a انتخاب کنیم که $۶ = \binom{۴}{۲}$ حالت وجود دارد.

۹- گزینه ۴-

حل: جواب به دو دسته تقسیم می شود:

الف) ۲ مرد و یک زن انتخاب شود← $۳۰ = ۵ \times ۶ = \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} =$ تعداد

ب) ۳ مرد انتخاب و زنی انتخاب نشود← $۴ = ۱ \times ۴ = \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰} =$ تعداد

۱۰- گزینه ۴

حل:

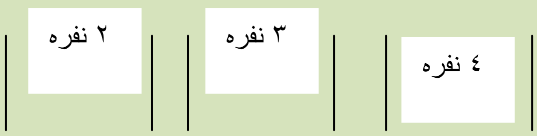
الف) برای ایجاد یک پاره خط نیاز به ۲ نقطه است. بنابراین تعداد پاره خط ها برابر است با $\binom{n}{۲}$ (در پاره خط جهت مهم نیست)

ب) در بردار بر خلاف پاره خط جهت مهم است در نتیجه تعداد بردارها برابر است با انتخاب با ترتیب ۲ نقطه از n نقطه موجود

$$P_{۲}^{n} = n(n-۱)$$

ج) برای تشکیل هر مثلث نیاز به ۳ نقطه است بنابراین تعداد مثلث ها برابر است با $\binom{n}{۳}$

۱۱- گزینه ۴



$$\binom{۹}{۲}\binom{۷}{۴}\binom{۳}{۳} = \binom{۹}{۳}\binom{۶}{۲} = \binom{۹}{۴}\binom{۵}{۳}$$

انتخاب افراد برای اتاق ۲ نفره

انتخاب افراد برای اتاق ٤نفره

انتخاب افراد برای اتاق ۳نفره

انتخاب افراد برای اتاق ۳نفره

انتخاب افراد برای اتاق ۲ نفره

انتخاب افراد برای اتاق ٤نفره

انتخاب افراد برای اتاق ۳نفره

۱۲- گزینه ۱-

حل: نفر اول ۱۲ انتخاب دارد. به ازای هر یک از حالات نفر اول برای نفر دوم ۱۱ حالت وجود دارد و به ازای ۱۱×۱۲ حالت نفرات اول و دوم ۱۰ حالت برای نفر سوم وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب ۱۰×۱۱×۱۲ حالت وجود دارد که ماه تولد سه نفر متفاوت باشد.

۱۳- گزینه ۴-

حل: در این مسأله دو عدد۲ و دو عدد ۳ وجود دارد بنابراین مسأله را بر اساس تعداد ۲ ها و ۳ های استفاده شده در رمز ۴ رقمی دسته بندی می کنیم.

مجموع	تعداد ۱و۴	تعداد ۳ ها	تعداد ۲ ها
$\rightarrow \frac{۴!}{۲!\,۲!} = ۶$	۰	۲	۲
$\rightarrow \binom{۲}{۱}\frac{۴!}{۲!} = ۲۴$	۱	۲	۱
$\rightarrow \binom{۲}{۱}\frac{۴!}{۲!} = ۲۴$	۱	۱	۲
$\rightarrow \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$	۲	۲	۰
$\rightarrow \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$	۲	۰	۲
$\rightarrow ۴! = ۲۴$	۲	۱	۱
۱۰۲	مجموع		

۱۴- گزینه ۱ –

حل: از ۵ حرف کلمه ی ۵ حرفی ۲ حرف آن مشخص شده است . بنابراین ابتدا ۳ حرف را از بقیه حروف انتخاب و در مرحله ی بعد با این ۳ حرف انتخابی و دو کلمه A کلمه ی ۵ حرفی می سازیم .

$$\binom{۵}{۳}\frac{۵!}{۲!} = ۶۰۰$$

۱۵- گزینه ۳-

حل: به دو عدد زوج و دو عدد فرد نیاز داریم . بنابراین ابتدا از بین اعداد زوج (۴،۶،۸) ۲ عدد و از بین اعداد فرد (۳،۵،۷،۹) ۲ عدد را انتخاب و در مرحله ی آخر این ۴ رقم انتخابی را کنار هم قرار می دهیم تا عدد چهار رقمی حاصل شود.

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۲} ۴! = ۱۸ \times ۴!$$

۱۶- گزینه ۱-

حل : c, o, m را یک گروه در نظر گرفته می شود که طبق فرض مسأله به یک حالت (com) در کنار یکدیگر قرار می گیرند. آزمایش اول انتخاب حرف اول در نظر گرفته می شود که باید صدا دار باشد (۲ حالت).

۱ حالت   ۲ حالت   ۳حالت   ۴حالت   ۵حالت   ۲حالت   { e,u}

تعداد کل: $۲ \times ۵!$

۱۷- گزینه ۳-

حل: روش اول: کل حالات ورود برای این ۶ نفر به کلاس !۶ است که درنیمی از حالات a قبل از b و در نیمی از حالات a بعد از b وارد کلاس می شود. بنابراین تعداد حالاتی که a بعد از b وارد می شود برابر است با

$\frac{۱}{۲} \times ۶! = ۳۶۰$

روش دوم : ۶ آزمایش وجود دارد. ابتدا از این ۶ آزمایش ۲ تای آن را انتخاب می کنیم که به $\binom{۶}{۲}$ حالت امکان پذیر است. هر دوتایی که انتخاب شود در اولی فرد b و در دومی فرد a را قرار می دهیم . ۴ نفر باقی مانده نیز به !۴ حالت در ۴ مکان باقی مانده قرار می گیرند.

تعداد=$\binom{۶}{۲} \times ۱ \times ۱ \times ۴! = ۳۶۰$

۱۸-گزینه ۴-

حل: رقم های زوج (۲.۴) را در یک گروه قرار می دهیم. $\boxed{۲\ ۰\ ٤}$ ۵

تعداد ۵ رقمی ها=$۴! \times ۲! = ۴۸$

۱۹- گزینه ۴-

حل: باید از مجموعه ی A حداقل ۴ عضو (یعنی ۴ یا ۵ یا ۶ عضو) انتخاب شود . توجه شود در مسأله باید ۸ عضو از ۱۲ عضو انتخاب شود.

$A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad , \qquad B = \{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$

تعداد=$\binom{۶}{۴}\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵}\binom{۶}{۳} + \binom{۶}{۶}\binom{۶}{۲} = ۳۶۰$

۲۰- گزینه ۳-

حل: در این مسأله سه عدد E وجود دارد بنابراین جایگشت های ۴ حرفی را مانند زیر دسته بندی می کنیم.

الف) جایگشت های ۴ حرفی فاقد E ← $\binom{۵}{۴}۴! = ۱۲۰ =$ تعداد

ب) جایگشت های ۴ حرفی دارای یک عدد E ← $\binom{۵}{۳}۴! = ۲۴۰ =$ تعداد

ج) جایگشت های ۴ حرفی دارای ۲ حرف E ← $\binom{۵}{۲}\frac{۴!}{۲!} = ۱۲۰ =$ تعداد

د) جایگشت های ۴ حرفی دارای ۳ حرف E ← $\binom{۵}{۱}\frac{۴!}{۳!} = ۲۰ =$ تعداد

۲۱- گزینه ۱-

حل: برای ایجاد هر نقطه باید حداقل ۲ خط با یکدیگر برخورد کنند. اگر n تعداد خطوط باشد ، آنگاه تعداد نقطه های ایجاد شده برابر است با $\binom{n}{۲}$

$$\binom{n}{۲} = ۶۶ \to \frac{n(n-۱)}{۲} = ۶۶ \to n = ۱۲$$

۲۲- گزینه ۴-

حل:

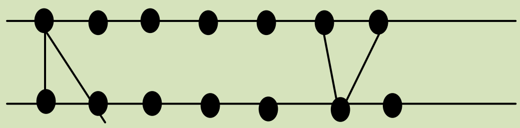
$$۳۰۰۰ = ۳ \times ۲^{۳} \times ۵^{۳}$$

مقسوم علیه های عدد ۳۰۰۰ به فرم $۵^{k} \times ۲^{j} \times ۳^{i}$ به طوری که $i = ۰,۱$ و $۰ \le j \le ۳$ و $۰ \le k \le ۳$ می باشد.

بنابراین تعداد مقسوم علیه های عدد ۳۰۰۰ برابر است با تعداد حالاتی که می توان k, j, i را انتخاب کرد که برابر است با ۲×۴×۴=۳۲

۲۳- گزینه ۳-

حل: برای تشکیل یک مثلث به ۳ نقطه احتیاج است . بنابراین می توان ۲ نقطه از خط $L_۱$ و یک نقطه از خط $L_۲$ یا یک تقطه از خط $L_۱$ و دو نقطه از خط $L_۲$ انتخاب کرد.



$$\text{تعداد مثلث ها} = \binom{۷}{۱}\binom{۷}{۲} + \binom{۷}{۲}\binom{۷}{۱} = ۲۹۴$$

۲۴- گزینه ۱-

حل: مسأله پاسخگویی ۱۰پرسش از ۱۲ پرسش است که به دو دسته ی زیر تقسیم بندی می شود.

الف) از ۵ پرسش اول ۴ پاسخ و از ۷ پرسش بعدی ۶ پاسخ داده می شود:

$$\text{تعداد} = \binom{۵}{۴}\binom{۷}{۶} = ۳۵$$

ب) از ۵ پرسش اول همه پاسخ و از ۷ پرسش بعدی ۵ پاسخ داده شود :

۲۵- گزینه ۳-

حل: ابتدا از ۵ حرف باقی مانده ۲ حرف را انتخاب ، سپس این دو حرف انتخابی با سه عدد S یک جایگشت ۵ حرفی را می سازند.

$$\binom{۵}{۲}\frac{۵!}{۳!}=۲۰۰$$

۲۶- گزینه ۱-

حل: ابتدا از ۱۰صندلی ردیف اول ۶ صندلی را انتخاب و ۶ دانش آموز سال اول را در این ۶ صندلی انتخاب شده قرار می دهیم که این به $\binom{۱۰}{۶}۶!$ طریق امکان پذیر است. سپس از ۱۰ صندلی ردیف دوم ۳ صندلی را انتخاب و ۳ دانش آموز سال دوم را در این ۳ صندلی انتخاب شده قرار می دهیم که این امر به $\binom{۱۰}{۳}۳!$ طریق امکان پذیر است . در نهایت از ۱۱ صندلی باقی مانده ۴ صندلی را برای نشستن دانش آموزان سال سوم انتخاب و این افراد در این صندلی ها قرار می دهیم که این به $\binom{۱۱}{۴}۴!$ طریق اماکن پذیر است . بنابراین کل تعداد این مسأله برابر است با :

$$\binom{۱۰}{۶}۶!\binom{۱۰}{۳}۳!\binom{۱۱}{۴}۴!=\frac{۱۱!\,(۱۰!)^۲}{۴!\,(۷!)^۲}$$

۲۷-گزینه ۲-

حل: در این مساله دو حالت زیر رخ می دهد.

الف) ۳ نفر انتخابی همه مرد باشند(زنی انتخاب نشود)← $۴=\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}=$ تعداد

ب)یک نفر زن و دو نفر مرد انتخاب شوند← $۱۸=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}=$ تعداد

۲۸-گزینه ۱-

حل: ابتدا دو عددی که باید دوبار تکرار شوند، سپس عددی که باید یک بار تکرار شود را انتخاب می کنیم و در نهایت آنها را مرتب می کنیم.

$$\binom{۹}{۲}\binom{۷}{۱}\frac{۵!}{۲!\,۲!\,۱!}=۷۵۶۰$$

۲۹- گزینه ۱-

حل: ابتدا بقیه حروف را به $\frac{5!}{2!}$ حالت مرتب می کنم و سپس ۲ تا از ۶ فضای ایجاد شده را برای S ها تعیین می کنیم.

بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{5!}{2!}\times\binom{6}{2}=60\times 15=900$$

۳۰- گزینه ۲- مانند سوال ۱۳

مجموع	تعداد G, R, V	تعداد E	تعداد A
$\rightarrow 4!=24$	۳	۱	۰
$\rightarrow 4!=24$	۳	۰	۱
$\rightarrow \binom{3}{2}\times 4!=72$	۲	۱	۱
$\rightarrow \binom{3}{2}\frac{4!}{2!}=36$	۲	۰	۲
$\rightarrow \binom{3}{2}\frac{4!}{2!}=36$	۲	۲	۰
$\rightarrow \binom{3}{1}\frac{4!}{2!}=36$	۱	۲	۱
$\rightarrow \binom{3}{1}\frac{4!}{2!}=36$	۱	۱	۲
$\rightarrow \frac{4!}{2!\,2!}=6$	۰	۲	۲
۲۷۰	مجموع		

۳۱- گزینه ۱-

حل: مسأله از مسائل نوع ۵ اشیاء ظروف می باشد که $r=3\,,\,n=10$ در نتیجه تعداد کل برابر است با :

$$\binom{10+3-1}{3-1}=66$$

۳۲- گزینه ۲- مانند سوال ۱۳ و ۳۰

۳۳- گزینه ۴

حل:

قدم ۱ : مرتب کردن بقیه اعداد $20!$

قدم ۲: انتخاب ۱۰ مکان از ۲۱ مکان ایجاد شده $\binom{21}{10}$

قدم ۳:مرتب کردن و چیدن مضارب ۳ در مکان های انتخاب شده !۱۰

$$\text{تعداد کل} = ۲۰!\binom{۲۱}{۱۰}۱۰!$$

۳۴- گزینه ۳-

$$\frac{۸!}{۲!}$$

۳۵- گزینه ۴- مانند سوال ۲۰

حل:

الف) کلمات۴ حرفی فاقد الف← $۳۶۰ = \binom{۶}{۴}۴! = \text{تعداد}$

ب) کلمات ۴ حرفی دارای یک عدد حرف الف ← $۴۸۰ = \binom{۶}{۳}۴! = \text{تعداد}$

ج) کلمات ۴ حرفی دارای دوعدد حرف الف ← $۱۸۰ = \binom{۶}{۲}\frac{۴!}{۲!} = \text{تعداد}$

کل: ۱۰۲۰

۳۶- گزینه ۴-

حل: یاد آوری : $\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i} = ۲^{n}$

$$\binom{۶}{۲}+\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۵}+\binom{۶}{۶}= ۲^{۶}-\binom{۶}{۰}-\binom{۶}{۱} = ۵۷$$

۳۷- گزینه ۳-

حل: مسأله مانند قرار دادن ۸ توپ یکسان در ۶ ظرف است

$$r = ۶ \quad ,n = ۸$$

$$\text{تعداد} = \binom{۸+۶-۱}{۶-۱} = \binom{۱۳}{۵}$$

۳۸- گزینه ۱

$$\binom{۵+۶-۱}{۶-۱}\times\binom{۳+۶-۱}{۶-۱} = \binom{۱۰}{۵}\binom{۸}{۵}$$

۳۹- گزینه ۴-

حل: ۱۰جایگاه وجود دارد ابتدا یکی از A ها را در جایگاه سوم(به یک حالت) و یکی از B ها را در جایگاه هفتم(به یک حالت) قرار می دهیم سپس مابقی حروف را مرتب می کنیم.

$$\frac{۸!}{۳!\,۲!\,۳!} = ۵۶۰$$

۴۰- گزینه ۱- مانند سوال ۳۳

حل: توجه شود که در قدم ۳ ، چهار عدد A به یک طریق می توانند در ۴ مکان انتخاب شده جابجا شوند.

$$\frac{۷!}{۳!\,۲!\,۲!}\binom{۸}{۴} \times ۱ = ۱۴۷۰۰$$

۴۱- گزینه ۴-

حل: ابتدا از ۵ نفر ، ۲نفر را انتخاب و کنار می گذاریم . سپس مسأله همانند تقسیم ۹ خودکار یکسان بین ۳ نفر به طوری که به هر نفر حداقل یک خودکار برسد که داریم :

$$\binom{۵}{۲}\binom{۹-۱}{۳-۱} = ۲۸۰$$

۴۲- گزینه ۳-

حل: فرم کلی جملات بسط داده شده به صورت $\binom{۸}{i}x^{i}(\frac{۲}{x})^{۸-i}$ است

$$\binom{۸}{i}x^{i}(۲)^{۸-i}x^{i-۸} = ۲^{۸-i}\binom{۸}{i}x^{۲i-۸}$$

$$۲i-۸ = ۰ \rightarrow i = ۴ \rightarrow \text{ضریب جمله فاقد } x = ۲^{۴} \times \binom{۸}{۴}$$

$$۲i-۸ = ۶ \rightarrow i = ۷ \rightarrow \text{ضریب جمله ی } x^{۶} = \binom{۸}{۷}۲^{۶}$$

$$\frac{۲^{۴} \times \binom{۸}{۴}}{\binom{۸}{۷}۲^{۶}} = \frac{۳۵}{۱۶}$$

۴۳- گزینه ۱-

حل: با استفاده از اصل ضرب تعداد حالات ممکن برای آقایان را در تعداد حالات ممکن برای خانم ها ضرب می کنیم.

$$\left[\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}\right]\times\left[\sum_{i=۰}^{۴}\binom{۴}{i}\right]=۶\times ۲^{۴}=۹۶$$

۴۴- گزینه ۱-

حل: طبق اصل ضرب داریم

آز ۱   آز ۳   آز ۲

۳ حالت   ۴ حالت   ۴ حالت

تعداد= ۴×۴×۳=۴۸

۴۵- گزینه ۱-

حل: ابتدا از ۵ شهر ،۳ شهر را انتخاب و از هرشهر یک نفر را انتخاب می کنیم

$$\binom{۵}{۳}\binom{۲۰}{۱}\binom{۲۰}{۱}\binom{۲۰}{۱}=۱۰\times ۲۰^{۳}=۸\times ۱۰^{۴}$$

۴۶- گزینه ۲- مانند سوال ۴۰.۳۳

$$۵!\binom{۶}{۲}۲!=۵\times ۶!$$

۴۷- گزینه ۲-

حل: ابتدا به فرد A یک سکه می دهیم(به یک حالت) سپس ۶ سکه باقی مانده را بین دو نفر C, B طوری تقسیم می کنیم که به هر نفر حداقل یک سکه برسد که داریم:

$$\binom{۶-۱}{۲-۱}=\binom{۵}{۱}=۵$$

۴۸- گزینه ۱- حل: طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۳}=۴۰$$

۴۹- گزینه ۴-

حل: طبق اصل ضرب

سکه	تاس	چهار وجهی	
۲ حالت	۶ حالت	۴ حالت	تعداد= ۴×۶×۲=۴۸

۵۰- گزینه ۳-

حل: ابتدا مسأله را با فرض متفاوت بودن صفرها حل می کنیم و در نهایت حاصل را بر $!۲ \times !۲$ تقسیم می کنیم.

۱ حالت ۲حالت ۳ حالت ۴ حالت ۳ حالت

تعداد= $\frac{۳\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲!۲!} = ۱۸$

۵۱- گزینه ۱-

حل: ابتدا به اولی دو مهره و به دومی نیز دو مهره می دهیم و مابقی مهره ها را به طور دلخواه بین دو نفر تقسیم می کنیم.

۵۲- گزینه ۴ حل: x_i : تعداد سهام خریداری شده از کارخانه ی i ام

$$۱۰۰,۰۰۰x_۱ + ۱۰۰,۰۰۰x_۲ + ۱۰۰,۰۰۰x_۳ + ۱۰۰,۰۰۰x_۴ \leq ۲ \times ۱۰^۶$$

$$\rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۲۰$$

$$\rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲۰ \quad x_i \geq ۰$$

$$\text{تعداد جواب} = \binom{۲۰ + ۴ - ۴}{۵ - ۱} = \binom{۲۳}{۴}$$

۵۳- گزینه ۲-

حل: برای آنکه حداقل ۲ مرد و ۳ زن در شورا باشند دو حالت کلی وجود دارد؛ ۳مرد و ۳ زن یا ۲ مرد ۴ زن پس کل حالات برابر است با:

$$\binom{۸}{۳}\binom{۷}{۳} + \binom{۸}{۴}\binom{۷}{۲} = ۳۴۳۰$$

۵۴- گزینه ۱

حل : x_i **: تعداد سیب مصرفی در روز** i **ام هفته**

$$x_1+\cdots+x_7<20 \rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_7 \le 19$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_7+x_8=19 \qquad x_i \ge 0$$

$$\text{تعداد}=\binom{19+8-1}{8-1}=\binom{26}{7}$$

۵۵-گزینه ۲-

حل: مانند سوال ۵۰

$$\text{تعداد}=\frac{4\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3!\,2!}=240$$

۵۶- گزینه ۲-

حل: ابتدا در ظرف i **ام تعداد** $\binom{8}{i}$ **توپ قرار می دهیم (ظرف اول** $\binom{8}{1}$**، ظرف دوم** $\binom{8}{2}$ **و ...) مابقی توپ ها را به طور دلخواه در۸ ظرف تقسیم می کنیم**

$$\text{تعداد توپ باقی مانده}=262-\left[\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\cdots+\binom{8}{8}\right]=7$$

در نهایت مسأله به مسأله تقسیم ۷ توپ یکسان در ۸ ظرف تبدیل می شود $r=8\,,n=7$ **که تعداد آن برابر است با :**

$$\binom{7+8-1}{8-1}=\binom{14}{7}$$

۵۷- گزینه ۲-

حل: عددهای ۴ رقمی حاصل را می توان به صورت های زیر دسته بندی کرد:

الف) عدد های ۴ رقمی دارای ۵ و فاقد ۱ $\leftarrow 4!=$ **تعداد**

ب) عددهای ۴ رقمی دارای ۵ و یک عدد ۱ $\leftarrow 72=\binom{3}{2}4!=$ **تعداد**

ج) عددهای ۴ رقمی دارای ۵ و دو عدد ۱ $\leftarrow 36=\binom{3}{1}\frac{4!}{2!}=$ **تعداد**

تعداد کل: ۱۳۲

۵۸- گزینه ۴-

حل: مانند سوال ۴۲

فرم کلی جملات این بسط به صورت زیر است :

$$\binom{۹}{i}x^{i}(\frac{۱}{\sqrt{۲x}})^{۹-i}=\binom{۹}{i}x^{i}(۲x)^{-\frac{۹}{۲}+\frac{i}{۲}}=\binom{۹}{i}۲^{-\frac{۹}{۲}+\frac{i}{۲}}x^{-\frac{۹}{۲}+\frac{۳}{۲}i}$$

$$-\frac{۹}{۲}+\frac{۳}{۲}i=۳\rightarrow i=۳\rightarrow x^{۳}\text{ ضریب جمله ی }=\binom{۹}{۳}۲^{-۳}=۱۰/۵$$

۵۹- گزینه ۱- ک ی ی رر ج ج

$$\text{تعداد}=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$$

۶۰- گزینه ۴-

حل: مانند سوال ۱۷- تعداد کل کلمات ۱۱ حرفی برابر با $\frac{۱۱!}{(۲!)^{۳}۳!}$ می باشد که در نصف آن حرف L بعد از C و در نصف آن حرف L قبل از C قرار می گیرد که جواب برابر $\frac{۱۱!}{(۲!)^{۴}۳!}$ می باشد.

۶۱- گزینه ۲-

حل:

$$x+y+z<۱۲\rightarrow x+y+z\leq ۱۱$$

$$\rightarrow x+y+z+k=۱۱$$

$$\text{تعداد جواب}=\binom{۱۱+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۴}{۳}=۳۶۴$$

۶۲- گزینه ۳-

حل:

مجموع	تعداد M, E, N	تعداد A	تعداد T
$\rightarrow ۴! = ۲۴$	۳	۱	۰
$\rightarrow ۴! = ۲۴$	۳	۰	۱
$\rightarrow \binom{۳}{۲}\frac{۴!}{۲!} = ۳۶$	۲	۲	۰
$\rightarrow \binom{۳}{۲}\frac{۴!}{۲!} = ۳۶$	۲	۰	۲
$\rightarrow \binom{۳}{۲} \times ۴! = ۷۲$	۲	۱	۱
$\rightarrow \binom{۳}{۱}\frac{۴!}{۲!} = ۳۶$	۱	۲	۱
$\rightarrow \binom{۳}{۱}\frac{۴!}{۲!} = ۳۶$	۱	۱	۲
$\rightarrow \frac{۴!}{۲!\,۲!} = ۶$	۰	۲	۲
۲۷۰	مجموع		

۶۳- گزینه ۴-

حل:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۰} = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$$

۶۴- گزینه ۳-

حل: توجه شود که محل کتاب های فیزیک ثابت است.

$\boxed{F_۱ F_۲ F_۳ F_٤}$

$R_۱ R_۱ R_۲ S_۱ S_۲$

$۵! \times ۴!$

جابجایی کتاب های فیزیک در گروه

جابجایی ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب شیمی

۶۵- گزینه ۳-

حل: تعداد کل حالاتی که نمایندگان فرانسه و انگلیس کنار هم باشند، منهای تعداد حالاتی از آن ، که نمایندگان روسیه و آمریکا در کنار هم قرار دارند:

$$(۶! \times ۲!) - (۵! \times ۲! \times ۲!) = ۹۶۰$$

۶۶- گزینه ۴

$X = ۳K_۱$

$Y = ۳K_۲$

$Z = ۳K_۳$

$D = ۳K_۴$

$E = ۳K_۵$

$\rightarrow K_۱ + K_۲ + K_۳ + K_۴ + K_۵ = ۱۰ \qquad K_i \geq ۰$

تعداد جواب $= \binom{۱۴}{۴}$

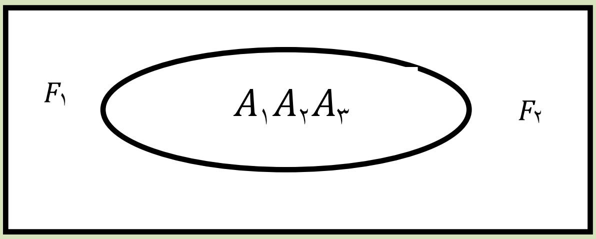
۶۷- گزینه۳-

حل: معادل مسأله قرار دادن ۸ شی یکسان در ۳ ظرف متفاوت می باشد . زیرا تنها تعداد تلویزیون های خریداری شده از هر نوع مهم است.

۶۸- گزینه ۴-

حل: کتاب های ادبی را داخل یک گروه قرار داده که خود به !۳ جابجا می شوند. ۲ کتاب فیزیک به !۲ حالت بین بسته کتاب ادبی قرار می گیرند. این گروه با ۴ کتاب ریاضی به !۵ جابجا می شوند

$R_۴R_۱R_۲R_۳$



$$۳! \times ۲! \times ۵! = ۶! \times ۲$$

۶۹- گزینه ۳

حل:

الف) از سه مهره انتخابی دو مهره هم رنگ باشند

$$\binom{۴}{۲}\binom{۹}{۱}+\binom{۶}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۱۰}{۱}=۱۸۹$$

ب) هر سه مهره همرنگ باشند

$$\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}+\binom{۳}{۳}=۲۵$$

۲۱۴=مجموع

۷۰- گزینه ۲-

حل: برای اینکه دو نفر انتخابی هم کلاس نباشند ، این گونه دو نفر را انتخاب می کنیم:

(یک دومی و یک سومی)یا(یک اولی و یک سومی)یا (یکی اولی و یک دومی)=تعداد حالات

$$\text{تعداد حالات}=\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}+\binom{۷}{۱}\binom{۶}{۱}+\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۱}=۱۰۷$$

۷۱- گزینه ۱-

حل: Log **را یک گروه جدید در نظر میگیریم .**

$\boxed{\text{Log}}$ Arithm

$$۱!\times ۷!=۷!=۵۰۴۰$$

۷۲- گزینه ۳-

$$۲\left(\frac{n!}{۸!\,(n-۸)!}\right)=۳\left(\frac{n!}{۷!\,(n-۷)!}\right)$$

$$\rightarrow \frac{۲}{۸\times ۷!\,(n-۸)!}=\frac{۳}{۷!\,(n-۷)(n-۸)!}\rightarrow \frac{۲}{۸}=\frac{۳}{n-۷}$$

$$\rightarrow n=۱۹$$

$$P(n,n-۱)=P(۱۹,۱۸)=\frac{۱۹!}{۱!}=۱۹!$$

۷۳- گزینه ۱-

حل: طبقه اول برای رنگ آمیزی ۴ حالت دارد . برای طبقه دوم ۳ حالت(جز رنگی که طبقه اول با آن رنگ شده است) طبقه سوم تا دهم نیز ۳ حالت وجود دارد بنابراین طبق اصل ضرب $۳^۹ \times ۴$ حالت وجود دارد.

۷۴- گزینه ۱-

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$$

۷۵- گزینه ۳-

حل: باید از مجموعه {۱،۳،۴ } دو عضو را انتخاب کنیم .

$$\binom{۳}{۲} = ۳$$

۷۶- گزینه ۲-

حل: هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و عمودی ایجاد می شود بنابراین در این شکل تعداد مستطیل ها برابر است با تعداد حالاتی که می توان از ۴ خط افقی و ۵خط عمودی هر کدام دو خط را انتخاب کرد که معادل است با:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲} = ۶ \times ۱۰ = ۶۰$$

۷۷- گزینه ۳-

حل: مسأله معادل قرار دادن ۳ شی یکسان در ۵ ظرف است (یا حل معادله ی $x_۱ + \cdots + x_۵ = ۳$ و $x_i \geq ۰$) که برابر است با :

$$\binom{۳+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۷}{۴} = ۳۵$$

۷۸- گزینه ۳-

حل: ابتدا b, a را قرار می دهیم که $۳ \times ۲!$ حالت وجود دارد(توجه داشته باشید که b, a می توانند در مکان های (۳،۱)و (۴،۲) و(۵،۳) باشند و با توجه به جایگشت هایشان $۳ \times ۲!$ حالت دارند) .سپس بقیه افراد به $۳!$ حالت می توانند قرار بگیرند.

۷۹- گزینه ۱-

حل:

$$\binom{۱۲-۱}{۳-۱}=\binom{۱۱}{۲}=۵۵$$

۸۰- گزینه ۳-

حل: از ۵ رقم موجود ۳ رقم را انتخاب کرده که این سه رقم انتخابی تنها به یک حالت می توانند کنار هم قرار بگیرند به طوری که صدگان>دهگان>یکان باشد در نتیجه مقدار حالات برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}۱\times ۱\times ۱=۱۰$$

۸۱- گزینه ۲-

حل:

$$\binom{۶}{۳}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}=۲۰\times ۱۵^{۳}=۶۷۵۰۰$$

۸۲- گزینه ۴-

حل:

$$\binom{۹-۱}{۵-۱}=\binom{۸}{۴}=۷۰$$

۸۳- گزینه ۳-

حل: مانند سوالات ۵۸و۴۲

۸۴- گزینه ۳-

حل: مانند سوال ۱۸

$$\boxed{۱\ ۳\ ۵}$$

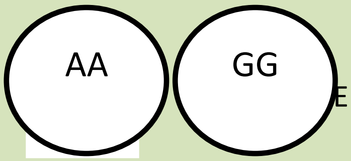
$$\text{تعداد}=۳!\times ۳!=۳۶$$

۸۵- گزینه ۲-

۸۶- گزینه ۴-

۸۷- گزینه ۳-

حل: مانند سوال ۶



$\text{تعداد} = ۶! = ۷۲۰$

۸۸- گزینه ۳-

حل:

آ ز ۴   آ ز۳   آ ز۲   آ ز ۱

۲ حالت   ۳حالت   ۴ حالت   ۴حالت (۳.۵.۷.۹)

$\text{طبق اصل ضرب} = ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$

۸۹- گزینه ۴-

حل: مانند سوال ۸۱

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱} = ۶۴۰$$

۹۰- گزینه ۴-

حل: مانند سوال ۹

$$\text{تعداد} = \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱} + \binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰} = ۳۰ + ۱۰ = ۴۰$$

۹۱-گزینه ۲- حل: ابتدا سه عدد ۲ را به یک طریق قرار می دهیم.

بین دوها باید عدد قرار گیرد که در جایگاه های مشخص شده هر کدام ۳و۲حالت امکان دارد یک عـدد بـاقی مانـده می تواند در ابتدا یا انتهای عدد قرار گیرد که طبق اصل ضرب داریم :

$۲ \; \square \; ۲ \; \square \; ۲$

$۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$

۹۲- گزینه ۲-

حل: اگر هر حرکت به سمت بالا را با حرف U و هر حرکت به سمت راست را با حرف R نشان دهیم،تعداد مسیرهای ممکن برابر است با تعداد حالات مرتب کردن ۵ حرفR و ۱۰ حرف U که برابر است با:

$$\frac{۱۵!}{۱۰!\,۱۵!}$$

۹۳- گزینه ۲-

حل: ابتدا حرفی که دوبار تکرار می شود و سپس دو حرفی که یک بار تکرار می شوند را انتخاب و سپس کنار هم مرتب می کنیم.

$$\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}\frac{۴!}{۲!} = ۷۲۰$$

یا ابتدا ۳ حرف انتخاب و سپس یکی از آنها را به عنوان حرفی که دو بار تکرار می شود تعیین می کنیم در نهایت هم این حروف را کنارهم مرتب می کنیم.

$$\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۱}\frac{۴!}{۲!} = ۷۲۰$$

۹۴-گزینه ۳-

حل: ابتدا بقیه ی حروف به جز S را به !۴ مرتب می کنیم سپس از ۵ مکان ایجاد شده ۲مکان را انتخاب وحروف S را به یک طریق در این دو مکان قرار می دهیم.

$$۴!\binom{۵}{۴} \times ۱ = ۲۴۰$$

یا ابتدا تعداد حالاتی را که S ها کنار هم باشند را پیدا کرده و از تعداد کل جایگشت ها کم می کنیم.

کل جایگشت ها $= \frac{۶!}{۲!} = ۳۶۰$

جایگشت هایی که S ها کنار هم باسند : $۵! = ۱۲۰$

۹۵- گزینه ۴-

حل: ابتدا ۲ مدرسه را انتخاب می کنیم که $\binom{۸}{۲} = ۵۶$ حالت وجود دارد. حال از هر مدرسه انتخابی ۲ نفر را انتخاب می کنیم($\binom{۶}{۲} \times \binom{۶}{۲} = ۲۲۵$). که چون ترتیب مسابقه دادن تیم های انتخابی مهم نیست بر !۲ تقسیم می کنیم:

$\frac{۲۲۵\times۵۶}{۲} = ۶۳۰۰$

۹۶- گزینه ۳-

حل:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹ \qquad ۱ \leq x_i \leq ۴ \rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۵$$

$$۰ \leq y_i \leq ۳$$

$$\binom{۵+۴-۱}{۴-۱} - ۴\binom{۱+۴-۱}{۴-۱} = ۵۶ - ۱۶ = ۴۰$$

۹۷- گزینه ۴-

حل:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \qquad ۰ \leq x_i \leq ۵ \rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۵$$

$$۰ \leq y_i$$

$$\binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = ۲۱$$

فصل دوم

مجموعه ها- اصول احتمال

۲-۱- مقدمه

در این فصل مفهوم احتمال معرفی شده و با استفاده از مطالب ارائه شده در فصل گذشته بـه بیـان مطالـب بیشـتری از علم احتمالات پرداخته می شود.در ابتدای این فصل لازم است تا علاوه بر معرفی مفاهیم مجوعه ها،آزمایش تصـادفی ، فضای نمونه و پیشامد، مقدمه ای از مجموعه ها و قوانین حاکم از جبر مجموعه ها ارائه گردد.

۲-۲- تعاریف اولیه

۲-۲-۱- مجموعه:

یک مفهوم اولیه است و به عنوان دسته ای از اشیاء کاملاً معین در نظر گرفته می شود، که با نام بردن اعضای آن یـا خاصیت اعضای آن، مشخص می شود. مثلاً مجموعه ی اعداد اول یک رقمی به صورت $A = \{۲,۳,۵,۷\}$ و یا مجموعـه ی اعداد مضرب ۳ به صورت $B = \{x = ۳k|\ k \in z\}$ نمایش داده می شود.

۲-۲-۲- تعلق:

اگر x در مجموعه ی A باشد و مـی نویسـیم $X \in A$ و در غیـر ایـن صـورت $X \notin A$. در مثـال بـالا داریـم: $۲ \in A$ و $۶ \in B$.

۲-۲-۳- مجموعه جهانی :

مجموعه ای است که تمام مجموعه های مورد بحث در آن هستند و معمولاً با حرف U (گاهی با حرف M و گاهی نیـز با حرف S) نشان داده می شوند.

۲-۲-۴- تغییـر ترتیـب عضـوهای یـک مجموعـه، آن مجموعـه را تغییـر نمـی دهد.بـه طـور مثـال دو مجموعـه ی $C = \{۱,۳,۶\}$, $D = \{۳,۱,۶\}$ با یکدیگر برابراند.

۲-۲-۵- تکـرار عضـوها در یـک مجموعـه، آن مجموعـه را تغییـر نمـی دهد.بـه طـور مثـال مجموعـه هـای $D = \{۳,۱,۳,۶\}$, $B = \{۱,۳,۶\}$ $A = \{۱,۳,۱,۶\}$ با یکدیگر برابرند و هر کدام دارای ۳ عضو می باشند.

۲-۲-۶- B یک زیر مجموعه از A است اگر هر عضو B ، عضوی از A نیز باشد و می نویسیم $B \subseteq A$(توجه : هر مجموعه ، زیر مجموعه ای از خودش است)

به طور مثال اگر $A = \{۱,۲,۵,۷,۱۰\}, B = \{۱,۵,۲\}$, آنگاه $B \subseteq A$ است.

۲-۲-۷- مجموعه تهی :

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه ی تهی گویند و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش داده می شود.(تهی زیر مجموعه تمام مجموعه ها است)

۲-۲-۸- مجموعه متناهی :

مجموعه ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه متناهی می نامیم و مجموعه ای که متناهی نباشد را نامتناهی می نامیم.

۲-۲-۹- عدد اصلی یک مجموعه:

تعداد عضوهای یک مجموعه متناهی را عدد اصلی آن نامیده ، عدد اصلی مجموعه A رابا $|A|$ ویا $n(A)$ نمایش می دهیم.

۲-۲-۱۰- برابری دو مجموعه :

دو مجموعهA وB را برابر گویند اگر و تنها اگر اعضایشان یکی باشد و می نویسیم $A = B$

اگر $A \subseteq B, B \subseteq A \leftrightarrow A = B$

۲-۲-۱۱- تعدا زیر مجموعه ها:

فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد؛

۱- تعداد زیر مجموعه های r عضوی A برابر است با : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

۲- تعداد کل زیر مجموعه های A برابر است با : ۲^{n}

۳- تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی و فرد عضوی A با یکدیگر برابر و هرکدام برابر $۲^{n-۱}$ است.

۲-۲-۱۲- مجموعه توانی:

مجموعه ای شامل تمام زیر مجموعه های مجموعه x را مجموعه توانی x نامیده می شود و با $P(X)$ نشان داده می شود. بنابراین اگر X دارای n عضو باشد آنگاه $P(X)$ دارای ۲^n عضو است.

۲-۲-۱۳- زیر مجموعه سره :

اگر $B \subseteq A$ ولی $B \neq A$ ، آنگاه B زیر مجموعه سره ی A نامیده می شود.(توجه: اگر A دارای n عضوباشد تعداد زیر مجموعه های سره A برابر است با $(۲^n - ۱)$. به طور مثال $A = \{a, b\}$ زیر مجموعه ی سره ی $B = \{a, b, c, d\}$ است.

۲-۲-۱۴- متمم یک مجموعه:

متمم مجموعه ی A را که با $\acute{A}$ نشان می دهیم ، مجموعه ای است شامل تمام عضوهایی از مجموعه ی جهانی که به A تعلق ندارد . بنابر تعریف داریم:

الف) $\acute{M} = \emptyset$ ب) $\acute{\emptyset} = M$ ج) $A \subseteq B \leftrightarrow \acute{B} \subseteq \acute{A}$

مثال ۲-۱- اگر $M = \{r, s, t\}$ ، کدام یک از احکام زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $r \in M$ ب) $r \subseteq M$ ج) $\{r\} \in M$ د) $\{r\} \subseteq M$

حل:

الف درست

ب) نادرست، علامت $\subseteq$ بایستی دو مجموعه را به هم مربوط کند ولی در اینجا r زیر مجموعه ی M نیست بلکه عضو M است.

ج)نادرست، علامت $\in$ بایستی یک شی را به یک مجموعه مربوط کند ، ولی $\{r\}$ زیر مجموعه ی M است نه عضو M.

د) درست

مثال ۲-۲- اگر $A = \{X \in R | ۲X = ۶\}$ آیا $A = ۳$ ؟

حل: A یک مجموعه ای است که دارای تنها یک عنصر ۳ است، یعنی $A = \{۳\}$ پس عدد ۳ متعلق به A است نه مساوی A.

مثال ۳-۳- مجموعه توانی $B=\{a,b\}$ را بنویسید؟

حل: کلیه زیر مجموعه های B عبارتند از :

$B_۱=\{a\}$ $\quad$ $B=\{a,b\}$

$B_۲=\{b\}$ $\quad$ $\emptyset$

بنابراین :

$$P(B)=\{\{a,b\},\emptyset,\{a\},\{b\}\}$$

مثال ۳-۴- مجموعه ی A دارای n عضو است . اگر دو عضو متمایز به A اضافه کنیم، تعداد ۹۶ زیر مجموعه به تعداد زیرمجموعه های A اضافه می شود، n را بیابید؟

حل:

تعداد زیر مجموعه های مجموعه ی n عضوی ۲^n و تعداد زیر مجموعه های مجموعه ی $n+۲$ عضوی $۲^{n+۲}$ است و بنا بر فرض مسأله داریم :

$$۲^{n+۲}=۲^n+۹۶$$

در نتیجه:

$$۲^۲\times ۲^n=۲^n+۹۶\rightarrow ۲^n(۲^۲-۱)=۹۶\rightarrow ۲^n=\frac{۹۶}{۳}=۳۲\rightarrow n=۵$$

۲-۲-۱۵- آزمایش تصادفی:

آزمایشی است که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد ولی همه نتایج ممکن آن معلوم باشد، مانند آزمایش پرتاب یک تاس یا آزمایش اندازه گیری طول عمر یک لامپ.

۲-۲-۱۶- فضای نمونه آزمایش:

به مجموعه ی نتایج ممکن آزمایش تصادفی، فضای نمونه آزمایش گفته می شود که با حرف S نشان داده می شود. برای مثال به آزمایش های زیر توجه کنید:

- آزمایش پرتاب یک سکه: $S = \{$پشت ، رو$\}$
- آزمایش پرتاب دو سکه : $S = \{$(رر) (پ پ) (پ ر) (ر پ)$\}$
- آزمایش پرتاب یک تاس: $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$
- آزمایش پرتاب دو تاس : $S = \{(i,j); i,j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$
- آزمایش اندازه گیری طول عمر یک لامپ : $S = \{X: x \geq ۰\}$

۲-۲-۱۷- پیشامد:

به هر زیر مجموعه از فضای نمونه آزمایش ، پیشامد یا واقعه گویند.

به طور مثال در آزمایش پرتاب دو تاس پیشامد "مجموع دو تاس ۵" به صورت زیر بیان می شود:

$$\text{مجموع دو تاس ۵} = \{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)\}$$

یا آزمایش اندازه گیری طول عمر یک لامپ: پیشامد "طول عمر بیشتر از ۱۰ ساعت" به صورت زیر بیان می شود:

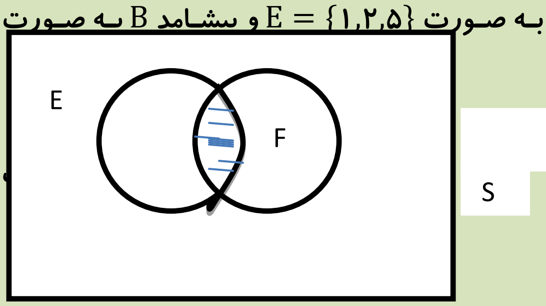
$$\text{طول عمر لامپ بیشتر از ۱۰ ساعت} = \{x: x > ۱۰\}$$

۲-۳-اعمال جبری مجموعه ها:

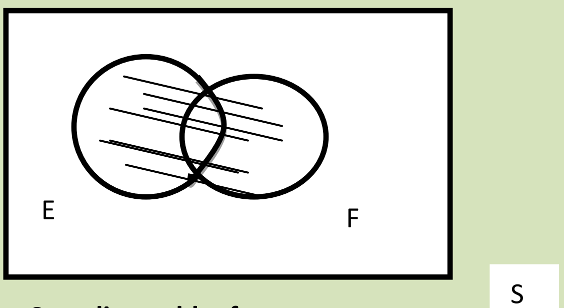
اگر E و F دو پیشامد از فضای نمونه باشند آنگاه :

$(F \cap E)$ یا اشتراک دو پیشامد E و F ، شامل همه نتایجی می باشد که هم در E هست و هم در F .

به طور مثال در آزمایش پرتاب یک تاس اگرپیشامد A به صورت $E = \{۱,۲,۵\}$ و پیشامد B به صورت $F = \{۵,۴,۶\}$ تعریف شود آنگاه $E \cap F = \{۵\}$.

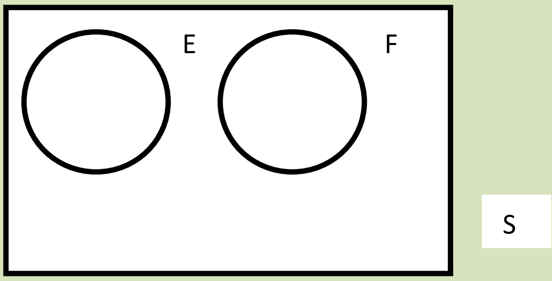


اجتماع دو پیشامد E و F یا $(E \cup F)$ شامل همه نتایجی می باشد که یا در E هست و یا در F. (واژه ی $(E \cup F)$ با واژه حداقل یکی از E یا F معادل می باشد).



در مثال قبل داریم: $E \cup F = \{۱,۲,۵,۴,۶\}$

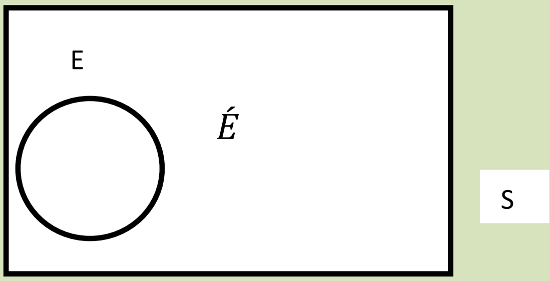
دو پیشامد E و F را ناسازگار گوییم هرگاه اشتراک آنها تهی باشد و امکان وقوع تـوأم آنهـا وجـود نداشـته باشـد . در نتیجه برای دو پیشامد ناسازگار E و F داریم : $E \cap F = \emptyset$



پیشامد $\acute{E}$ را متمم E می گویند، هرگاه $\acute{E}$ شامل همه نتایجی از فضای نمونه باشد که در E نیست. یعنی $\acute{E}$ فقط و فقـط زمانی اتفاق می افتد که E اتفاق نیفتد.

نکته : برای دو پیشامد متمم همواره دو شرط زیر برقرار است:

الف) $E \cap \acute{E} = \emptyset$ ب) $E \cup \acute{E} = S$

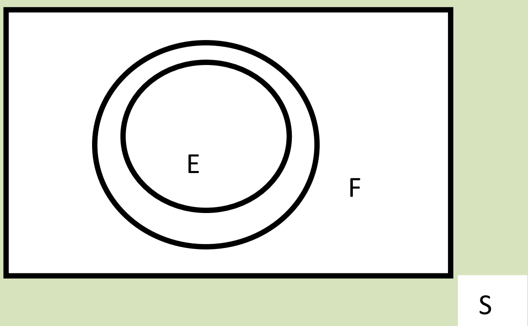


به طور مثال اگر در پرتاب یک تاس $E = \{۱,۲\}$ تعریف شود، آنگاه $\acute{E} = \{۳,۴,۵,۶\}$

برای دو پیشامد E و F اگر همه ی اعضای E در F باشد ، گوییم E زیر مجموعه ی F است. و این عبارت را به صورت $E \subseteq F$ نمایش می دهیم.

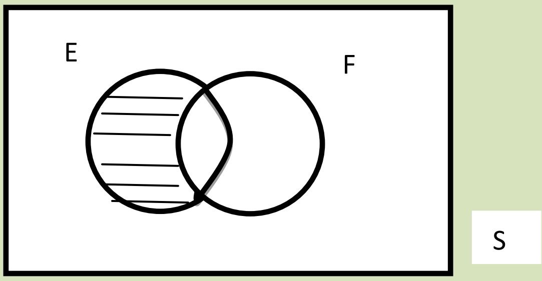
نکته: اگر $E \subseteq F$ باشد آنگاه :

$E \cup F = F$ و $E \cap F = E$



اگر E و F دو پیشامد از فضای نمونه باشد ، آنگاه پیشامد $(E-F)$ شامل همه نتایجی از فضای نمونـه اسـت کـه در E وجود دارند ولی در F وجود ندارند.

$$E-F=E-(E\cap F)=E\cap \acute{F}$$



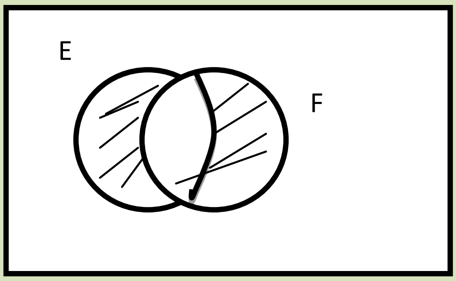
به طور مشابه پیشامد $(F-E)$شامل همه نتایجی از فضای نمونه است که در F وجود دارند ولی در E وجود ندارد.

$$F-E=F-(E\cap F)=F\cap \acute{E}$$

پیشامد $(E\vartriangle F)$ یا تفاضل متقارن E و F ، شامل همه نتایجی از فضای نمونـه اسـت کـه فقـط و فقـط در یکـی از E و F وجود دارند:

$$E\vartriangle F=(E-F)\cup(F-E)$$

$$=\left(E\cap \acute{F}\right)\cup\left(F\cap \acute{E}\right)=(E\cup F)-(E\cap F)$$



نکته: $(E\Delta F)$ یعنی از بین E و F دقیقاً یکی رخ دهد. در نتیجه روشن است که اگر از بـینE و F دقیقـاً یکـی رخ دهـد پس از بین E و F نیز دقیقاً یکی رخ نمی دهد و داریم : $(E\Delta F)=\left(\acute{E}\Delta\acute{F}\right)$

عبارت	معادل فارسی
$E\cap F$	E و F $\left(\text{هم } E\text{ , هم } F\right)$ $\left(E\text{ و }F\text{ هر دو با هم رخ دهند}\right)$
$E\cup F$	E یا F $\left(\text{از بین } E \text{ یا } F \text{ حداقل یکی رخ دهد}\right)$
$E-F$	E رخ دهد ولی F رخ ندهد $\left(\text{از بین } E \text{ و } F \text{ فقط } E \text{ رخ دهد}\right)$
$E\Delta F$	(از بین E و F دقیقاً یکی رخ دهد) (E رخ دهد ولی F رخ ندهد یا F رخ دهد ولی E رخ ندهد)

۲-۴- قوانین جبر مجموعه ها :

جبر مجموعه ها شامل قوانینی است که عبارتند از :

- قانون جابجایی

$$E \cup F = F \cup E \quad , \qquad E \Delta F = F \Delta E$$

- قانون شرکت پذیری

$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G \ , \quad (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

- قانون توزیع پذیری یا پخشی

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$
$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

- قانون دمورگان

$$(E \cap F)' = \left(E' \cup F'\right)$$

$$(E \cap F)' = (E' \cup F')$$

که تعمیم آن به صورت زیر است:

$$(E_۱ \cap E_۲ \cap \ldots \cap E_{\mathrm{n}})' = E'_۱ \cup E'_۲ \cup \ldots \cup E'_n$$

$$(E_۱ \cup E_۲ \cup \ldots \cup E_n)' = E'_۱ \cap E'_۲ \cap \ldots \cap E'_n$$

نکاتی در مورد قوانین دمورگان:

۱- از این قوانین زمانی استفاده می کنیم که درک یا محاسبه ی متمم یک پیشامد از خود آن پیشامد آسانتر است.

۲- $(E \cup F)' = E' \cap F'$ یعنی متمم اینکه حداقل یکی از E یا F رخ دهد این است که هیچ کدام از آنها رخ ندهد (نه E رخ دهد نه F)

۳- $(E \cap F)' = E' \cup F'$ یعنی متمم اینکه هم E رخ دهد وهم F این است که حداقل یکی از آنها رخ ندهد .

در ادامه مثال های از کاربرد قوانین دمورگان بیان می شود.

۲-۵- محاسبه ی احتمال در فضای هم شانس

به عنوان مثال آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونه آن، مجموعه ی محدود و هم شانس به $n(s)$ عضو باشد. آنگاه احتمال رخداد پیشامد دلخواه A با $n(A)$ عضو به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد A} = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای}A}{\text{تعداد اعضای}S} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

مثال ۲-۵-۱- می خواهیم از بین ۶ مرد و ۴ زن، یک شورای ۵ نفره انتخاب کنیم. اگر انتخاب افراد تصادفی باشد احتمال آنکه این شورا شامل ۳ مرد و ۲ زن باشد را بیابید؟

حل: شیوه حل این مسأله به صورت کامل شرح داده می شود.

برای حل تمام مسائل احتمال ابتدای امر، نوع مسئله را مشخص کنید . در اینجا قرار است از بین ۱۰ نفر یک شورای ۵ نفره به صورت تصادفی انتخاب شود(آزمایش تصادفی) که تعداد حالات برابر است $\binom{۱۰}{۵}$ (تعداد فضای نمونه S) . حالت مطلوب ما در این مسأله انتخاب ۳ مرد از۶ مرد موجود و ۲زن از۴ زن موجود(پیشامدی که تعداد آن برابر $\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۲}$ می باشد) که در نتیجه احتمال پیشامد دلخواه برابر است با :

$A =$ از ۵ نفر انتخابی ، ۳ مرد و ۲ زن انتخاب شود.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۵}} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

مثال ۲-۵-۲ – سه سکه سالم را همزمان پرتاب می کنیم ، مطلوبست محاسبه ی احتمال پیشامد های زیر

الف) هر سه پرتاب رو بیاید.

ب)دقیقاً یکی از پرتاب ها رو بیاید .

ج)دقیقاً دو پرتاب رو بیاید.

حل:

فضای نمونه این مسأله $۸ = ۲^۳$عضو دارد.

الف) $A =$ هر ۳ پرتاب رو بیاید.

$A = \{(ررر)\} \rightarrow P(A) = \frac{۱}{۸}$

ب) $B =$ یکی از پرتاب ها رو بیاید

$B = \{(ر پ پ)(پ ر پ)(پ پ ر)\} \rightarrow P(B) = \frac{\binom{۳}{۱}}{۸} = \frac{۳}{۸}$

ج) $C =$ دقیقاً دو پرتاب رو بیاید.

$C = \{(ر ر پ)(ر پ ر)(پ ر ر)\} \rightarrow P(C) = \frac{\binom{۳}{۲}}{۸} = \frac{۳}{۸}$

مثال ۵-۲-۳- در یک ظرف ۵ توپ قرمز، ۶ توپ سبز وجود دارد. اگر دو توپ از این ظرف خارج کنیم، احتمال این رابیابید که از هر رنگ یک توپ انتخاب شود؟

حل:

این مسأله را تحت دو حالت حل می کنیم.

الف) ترتیب انتخاب توپ ها مهم نباشد؟

ب) ترتیب انتخاب توپ ها مهم باشد؟

الف) اگر ترتیب انتخاب توپ ها مهم نباشد ، فضای نمونه شامل $\binom{۱۱}{۲}$ حالت هم شانس خواهد بود . لذا احتمال آنکه ۱توپ سبز و ۱ توپ قرمز انتخاب شود برابر است با :

$$\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۲}} = \frac{۶}{۱۱}$$

ب) اگر ترتیب انتخاب توپ ها مهم باشد، فضای نمونه شامل $P_۲^{۱۱} = ۱۱ \times ۱۰$ حالت خواهد بود که در این حالت این موضوع که اول توپ سبز اتخاب شود یا قرمز مهم است. لذا احتمال انتخاب ۱ توپ سبز و ۱ توپ قرمز برابر است با :

$$\frac{۶ \times ۵ + ۵ \times ۶}{۱۱ \times ۱۰} = \frac{۶}{۱۱}$$

ملاحضه می شود که اگر ترتیب انتخاب توپ ها مهم باشد ، تعداد حالات صورت و مخرج حالت "ب" !۲ برابر تعداد حالات صورت و مخرج حالت "الف" خواهد بود ، ولی احتمال مورد نظر تغییری نخواهد کرد.

نکته۵-۱: درمسائلی که آزمایش آنها انتخاب بدون جایگذاری r شی از n شی است و در مسأله ذکر نشده باشد که ترتیب انتخاب ها مهم است یا خیر، چه ترتیب انتخاب را اهمیت دهیم چه ندهیم ، احتمال پیشامد مورد نظر تغییر نمی کند . فقط باید دقت نمود که اگر در صورت کسر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ ترتیب را اهمیت ندادیم در مخرج نیز اهمیت ندهیم و برعکس.

۲-۶- اصول احتمال(اصول کولمو گوروف)

آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونه ی آن S است. برای هر پیشامد E از فضای نمونه S، فرض می کنیم $P(E)$ تعریف شده و سه اصل زیر همواره بر قرار است:

اصل ۱

$$۰\leq P(E)\leq ۱$$

اصل ۲

$$P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$$

اصل ۳

اگر $E_۱, E_۲, \dots, E_n$ پیشامد های دو به دو ناسازگار از فضای نمونه ای S باشند،آنگاه:

$$P(\cup_{i=۱}^{n} E_i)=P(E_۱\cup E_۲\cup \dots \cup E_n)=P(E_۱)+P(E_۲)+\cdots+P(E_n)$$

۲-۷-گزاره های احتمالی حاصل از اصول احتمال

$$۱- \quad P(\acute{E})=۱-P(E)$$

اثبات $= E\cup \acute{E}=S$

$$\to P(E\cup \acute{E})=P(S)\to P(E)+P(\acute{E})=۱$$

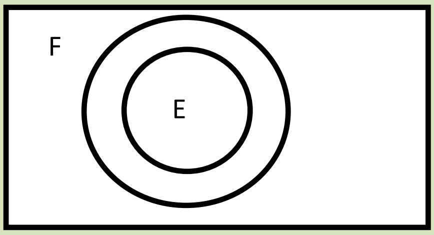
$$\to P(\acute{E})=۱-P(E)$$

یعنی $P\left(\text{متمم یک پیشامد}\right)=۱-P(\text{خود پیشامد})$

$$\to (E\cup F)\acute{}=\acute{E}\cap \acute{F}\to P(E\cup F)=۱-P(E\cup F)\acute{}=۱-P\left(\acute{E}\cap \acute{F}\right)$$

$\rightarrow (E\cap F)' = E' \cup F' \rightarrow P(E\cap F) = ۱ - P(E\cap F)' = ۱ - P\left(E' \cup F''\right)$

$۲ - \quad E \subseteq F \rightarrow P(E) \leq P(F)$



مقداری صفر یا مثبت

اثبات : $F = E + (F - E) \rightarrow P(F) = P(E) + P(F - E) \rightarrow P(E) \leq P(F)$

۳- اگر $E \subseteq F$ **باشد آنگاه** $F' \subseteq E'$

اثبات : $E \subseteq F \rightarrow P(E) \leq P(F)$

$\rightarrow ۱ - P(E) \geq ۱ - P(F)$

$\rightarrow P(E') \geq P(F') \rightarrow F' \subseteq E'$

$۴ - \quad \mathrm{E \cup F = E + F - E \cap F}$

$\rightarrow \mathrm{n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)}$

$, P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$۵ - \quad E\Delta F = (E - F) \cup (F - E) = (E \cup F) - (E \cap F)$

$\rightarrow \mathrm{n(E\Delta F) = n(E \cup F) - n(E \cap F) = n(E) + n(F) - ۲n(E \cap F)}$

$, P(E\Delta F) = P(E \cup F) - P(E \cap F) = P(E) + P(F) - ۲P(E \cap F)$

۶ − $P(E \cup F \cup C) = P(E) + P(F) + P(C) - P(E \cap F) - P(E \cap C)$

$-P(F \cap C) + P(E \cap F \cap C)$

۷ − $E - F = E - (E \cap F) = E \cap \acute{F}$

$\rightarrow \mathrm{n}(\mathrm{E} - \mathrm{F}) = \mathrm{n}(\mathrm{E}) - \mathrm{n}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = \mathrm{n}(\mathrm{E} \cap \acute{F})$

$\rightarrow P(E - F) = P(E) - P(E \cap F) = P(\mathrm{E} \cap \acute{F})$

مثال ۷-۱- آزمایش پرتاب یک تاس سالم را در نظر بگیرید پیشامد های C, B, A به صورت های زیر تعریف شده اند با نوشتن پیشامدهای خواسته شده ، احتمال هر پیشامد را بدست آورید.

A : پیشامد مشاهده عدد زوج $A = \{۲,۴,۶\}$

B : پیشامد مشاهده عدد اول $B = \{۲,۳,۵\}$

C : پیشامد مشاهده مضرب۳ $C = \{۳,۶\}$

الف) $A \cap B$ ب) $B \cup C$

ج) $A - B$ د) $C - B$

ه) $A \Delta B$ ز) $\acute{A} \cap \acute{B}$

و) $\acute{A} \cup \acute{B}$

حل:

الف) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{۲\} \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S})} = \frac{۱}{۶}$

ب) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \mathrm{B} + \mathrm{C} - \mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{۲,۳,۵,۶\} \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C})}{\mathrm{n}(\mathrm{S})} = \frac{۴}{۶}$

$\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{۳\}$

روش دوم : $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۶} - \frac{۱}{۶} = \frac{۴}{۶}$

ج) روش اول: $A - B = A - (A \cap B) = \{۴,۶\} \to P(A - B) = \frac{۲}{۶}$

روش دوم : $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶}$

د) $P(C - B) = P(C) - P(C \cap B) = \frac{۲}{۶} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۶}$

ه) روش اول : $A \Delta B = A \cup B - (A \cap B) = \{۴,۶,۳,۵\} \to P(A \Delta B) = \frac{۴}{۶}$

روش دوم : $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = \frac{۳}{۶} + \frac{۳}{۶} - ۲\left(\frac{۱}{۶}\right) = \frac{۴}{۶}$

ز) روش اول : $\acute{A} = \{۱,۳,۵\}, \acute{B} = \{۱,۴,۶\}$

$\to \acute{A} \cap \acute{B} = \{۱\} \to P(\acute{A} \cap \acute{B}) = \frac{۱}{۶}$

روش دوم: طبق دمورگان $\acute{A} \cap \acute{B} = (A \cup B)'$

$\to P(\acute{A} \cap \acute{B}) = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$

و) روش اول : $\acute{A} \cup \acute{B} = \{۱,۳,۵,۴,۶\} \to P(\acute{A} \cup \acute{B}) = \frac{۵}{۶}$

روش دوم : طبق دمورگان : $\acute{A} \cup \acute{B} = (A \cap B)'$

$\to P(\acute{A} \cup \acute{B}) = P(A \cap B)' = ۱ - P(A \cap B) = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$

نکته ۷-۱- برای هردو پیشامد دلخواه A وBهمواره رابطه ی $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - ۱$ برقرار است . به عبارت دیگر حد وکران پایین برای $P(A \cap B)$ برابر است با: $P(A) + P(B) - ۱$

اثبات :

همواره $P(A \cup B) \leq ۱ \to P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq ۱$

$\to P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - ۱$

نکته ۷-۲- برای هر دو پیشامد دلخواه A و B همواره رابطه ی $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ برقرار است. به عبارت دیگر حد و کران بالا برای $P(A \cup B)$ برابر است با $P(A) + P(B)$

اثبات :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

برای A و B دو حالت وجود دارد : یا ناسازگار هستند که در نتیجه $P(A \cap B) = ۰$

و $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ یا B, A سازگار هستند که $P(A \cap B) \neq ۰$ که طرف چپ همواره کوچکتر از $P(A) + P(B)$ است در نتیجه همواره $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

مثال ۷-۲ - اگر امروز با احتمال ۰/۸ باران ببارد و فردا با احتمال ۰/۷ باران ببارد ، حداقل احتمال اینکه هم امروز و هم فردا باران ببارد چقدر است؟

حل:

A : امروز باران ببارد $\qquad P(A) = /۸$

B : فردا باران ببارد $\qquad P(B) = /۷$

در این مسأله حد و کران پایین برای $P(A \cap B)$ خواسته شده است که طبق نکته ی ۷-۱ برابر است با :

$$P(A) + P(B) - ۱ = /۸ + /۷ - ۱ = /۵$$

نکته ۷-۳- تعداد همه ی اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی m که مضرب k باشند از فرمول $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\right]$ بدست می آید .

مثال ۷-۳- از مجموعه ی $\{۱,۲, \ldots, ۱۰۰\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال های زیر :

الف) عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد

ب)عدد انتخاب شده بر ۵ بخش پذیر باشد.

ج)عدد انتخاب شده بر ۳و۵ بخش پذیر باشد.

د)عدد انتخاب شده بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد.

ه)عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد.

حل: از نکته ی ۷-۳ استفاده می کنیم .

A : عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد.

B : عدد انتخابی بر ۵ بخش پذیر باشد.

الف) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]}{۱۰۰۰} = /۳۳۳$

ب) $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right]}{۱۰۰۰} = /۲۰۰$

ج) $P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]}{۱۰۰۰} = /۰۶۶$

د) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = /۳۳۳ + /۲۰۰ - /۰۶۶ = /۴۶۷$

ه) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = /۳۳۳ - /۰۶۶ = /۲۶۷$

۸-۲- محاسبه ی احتمال در فضای غیر هم شانس و گسسته

اگر فضای نمونه ای شامل n برآمد هم شانس باشد،احتمال وقوع هر برآمد $\frac{1}{n}$ است.(مثلاً در پرتاب سکه سالم ۲ برآمد هم شانس داریم).حال اگر احتمال پیشامدهای ساده یک فضا با هم برابر نباشند، فضا را غیر هم شانس می گویند(مانند پرتاب سکه یا تاس نا سالم).در هر صورت مجموع کل احتمالات یک فضا(هم شانس و غیر هم شانس) برابر یک است.($P(S) = ۱$)

با در نظر گرفتن این نکته و فرضیات مسأله یک دستگاه تشکیل می دهیم و احتمالات خواسته شده در این فضا را بدست می آوریم .

مثال ۸-۱- سکه ای که احتمال مشاهده پشت آن ۳ برابر احتمال مشاهده رو آن است را پرتاب می کنیم. احتمال مشاهده پشت و رو را حساب کنید.

حل:

$P\left(\text{پشت}\right) = ۳P\left(\text{رو}\right)$

$P\left(\text{پشت}\right) + P\left(\text{رو}\right) = ۱ \rightarrow ۳P\left(\text{رو}\right) + P\left(\text{رو}\right) = ۱$

$\rightarrow ۴P\left(\text{رو}\right) = ۱ \rightarrow P\left(\text{رو}\right) = \frac{۱}{۴}$ و $P\left(\text{پشت}\right) = \frac{۳}{۴}$

مثال ۸-۲- تاسی را که احتمال مشاهده هر زوج ۳ برابر مشاهده هر فرد است را پرتاب می کنیم به چه احتمالی در این تاس عدد اول مشاهده می شود؟

$P(۱) = a$

$P(۲) = ۳a$

$P(۳) = a$

$P(۴) = ۳a$

$P(۵) = a$

$P(۶) = ۳a$

$P(۱) + P(۲) + \cdots + P(۶) = ۱$

$\rightarrow ۱۲a = ۱ \rightarrow a = \frac{۱}{۱۲}$

A : مشاهده عدد اول $A = \{۲,۳,۵\}$

$P(A) = P(۲) + P(۳) + P(۵) = ۳a + a + a = ۵a = \frac{۵}{۱۲}$

مثال۸-۳- سه اسب سوار C, B, A در یک مسابقه شرکت می کنند که فقط یک نفر برنده خواهد شد. اگر احتمال برد A دوبرابر احتمال برد B و نصف احتمال برد C باشد، احتمال برد B را حساب کنید.

حل:

$P(A) = ۲P(B)$, $\quad P(A) = \frac{۱}{۲}P(C) \rightarrow P(C) = ۲P(A) = ۴P(۴)$

$P(A) + P(B) + P(C) = ۱ \rightarrow ۲P(B) + P(B) + ۴P(B) = ۱$

$\rightarrow ۷P(B) = ۱ \rightarrow P(B) = \frac{۱}{۷}$

۲-۹- احتمال در فضاهای پیوسته

در این بخش به محاسبه ی احتمال در فضاهای پیوسته می پردازیم. فضاهای پیوسته بر خلاف فضاهای گسسته(مثل پرتاب سکه یا تاس) که از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده اند، مجموعه هایی نامتناهی می باشند. نظیر بازه هایی در محور اعداد حقیقی یا سطوح در صفحه و غیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه می تواند مورد استفاده قرار گیرد،« اندازه» طول بازه ها، مساحت سطوح حجم و شکل های فضایی است.

در این حالت نسبت «اندازه » فضای پیشامد به «اندازه» فضای نمونه ای احتمال وقوع پیشامد را مشخص می کند. به عبارت دیگر اگر پیشامد مطلوب را با A نمایش دهیم داریم :

اگر $A,S \subseteq R$ داریم : $$P(A)=\frac{A \text{ طول}}{S \text{ طول}}=\frac{L_A}{L_S}$$

اگر $A,S \subseteq R^۲$ داریم : $$P(A)=\frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}}=\frac{a_A}{a_S}$$

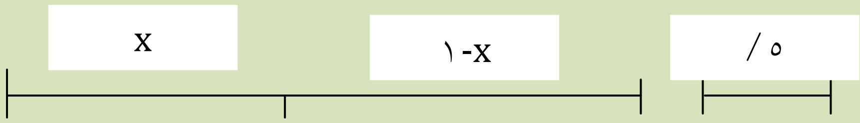
اگر $A,S \subseteq R^۳$ داریم : $$P(A)=\frac{A \text{ حجم}}{S \text{ حجم}}=\frac{V_A}{V_S}$$

تذکر ۱: در مسائل فضای پیوسته ، اگر یک مجهول وجود داشته باشد، مسأله یک بعدی است و مربوط به محاسبه طول است. اگر دو مجهول وجود داشته باشد ، دو بعدی است و مربوط به محاسبه ی مساحت است و اگر سه مجهول داشته باشد ، سه بعدی است و مربوط به محاسبه ی حجم است.

تذکر ۲: نقطه فاقد طول ، مساحت و حجم و خط فاقد مساحت و حجم است بنابراین اگر در مسائل فضای پیوسته ، فضای نمونه ای طول یک پاره خط باشد ولی فضای پشامد فقط چند نقطه باشد احتمال بسیار ناچیز است و آن را صفر در نظر می گیریم. یا اگر فضای نمونه ، مساحت یک ناحیه باشد و فضای پیشامد یک خط باشد ، احتمال آن نیز صفر است .

مثال ۹-۱- دو قطعه چوب به طول های یک و ۰/۵ متر داریم . قطعه ی بزرگتر را به تصادف دوتکه می کنیم. احتمالی را حساب کنید که این دو تکه و قطعه ی ۰/۵ متری تشکیل مثلث بدهند؟

در این مسأله یک مجهول وجود دارد و آن نقطه است به طول x در فاصله ی (۰،۱). در واقع چوب به طول یک متر را مانند فاصله ی (۰،۱) در نظر میگیریم ، داریم :



سه قطعه ی $x, x-۱$ و /۵ متری داریم که باید تشکیل مثلث دهند.شرط تشکیل مثلث برای سه عدد آن است که هر یک از مجموع دو تای دیگر کوچک تر باشد.

$$x < \frac{۱}{۲} + ۱ - x \rightarrow x < \frac{۳}{۴}$$

$$۱ - x < \frac{۱}{۲} + x \rightarrow x > \frac{۱}{۴}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{٤} < x < \frac{۳}{٤}$$

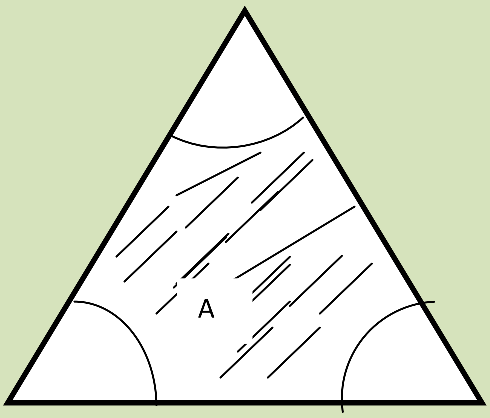
$$\frac{۱}{۲} < ۱ - x + x \rightarrow \frac{۱}{۲} < ۱ \rightarrow$$ همواره برقرار است

بنابراین فضای نمونه ای طول فاصله ی (۱،۰) و فضای پیشامد طول فاصله ی $(\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴})$ است بنابراین داریم :

$$P = \frac{\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴}}{۱ - ۰} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۹-۲- مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۲ مفروض است. نقطه ای به تصادف از این مثلث انتخاب می کنیم. احتمال اینکه فاصله ی این نقطه از هر رأس بیشتر از یک سانتی متر باشد را بیابید؟

حل: فضای نمونه ای مسأله مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ است(فضای دو بعدی) برای آنکه فاصله ی نقطه انتخاب شده از هر رأس بیشتر از یک سانتی متر باشد می بایست نقطه از قسمت هاشور خورده انتخاب شود که برای محاسبه ی مساحت آن مساحت کل را از قسمت هاشور نزده کم می کنیم.



$$P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S}=\frac{\frac{(۲)^۲\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\pi(۱)^۲}{۲}}{\frac{(۲)^۲\sqrt{۳}}{۴}}=۱-\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}=۱-\frac{\sqrt{۳}\pi}{۶}$$

مثال ۹-۳- نقطه ای به تصادف درون مکعب به ضع a انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این نقطه درون کره ی محاطی مکعب خواهد بود؟

حل:

با توجه به این که ، نقطه از درون مکعب انتخاب شده است، بنابراین نقطه سه بعدی است و مسأله مربوط به حجم خواهد بود. وقتی کره ای درون یک مکعب قرار می گیرد، قطر کره برابر ضلع مکعب خواهد بود. بنابراین داریم :

$$P=\frac{V \text{ کره}}{V \text{ مکعب}}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^۳}{a^۳}=\frac{\pi}{۶}$$

✓ تست های چهار گزینه ای فصل ۲

۱- از بین ۵ دانش آموز ریاضی و ۳ دانش آموز تجربی، ۳ دانش آموز برای شرکت در مسابقه ای به تصادف انتخاب می کنیم.احتمال اینکه حداقل یک دانش آموز تجربی انتخاب شود کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵۶}$　　۲) $\frac{۵}{۵۶}$　　۳) $\frac{۵۴}{۵۶}$　　۴) $\frac{۴۶}{۵۶}$

۲- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم.با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، عددی اول است.(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$　　۲) $\frac{۴}{۹}$　　۳) $\frac{۵}{۹}$　　۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۳- ظرفی شامل ۴ مهره سفید و n مهره سیاه است. (n>۱) دو مهره پی در پی بدون جایگذاری انتخاب می کنیم.n چقدر باشد تا احتمال اینکه مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد برابر $\frac{۱}{۵}$ شود؟

۱) ۱　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۱۲

۴- از ۱۰ پست در یک اداره می خواهند ۳ پست را به علت کمی مراجعه کننده حذف کنند.احتمال اینکه پست به خصوصی حذف نشود کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$　　۲) $\frac{۷}{۱۰}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۵- فرض کنید ۶ کارت وجود دارد که شماره های ۱ تا ۶ بر روی آنها نوشته شده است.با قرار دادن این کارت ها به ترتیب های مختلف شماره های ۶ رقمی ساخته می شود.شماره ای به کمک آنها ساخته شده است.مطلوب است محاسبه احتمال اینکه شماره ساخته شده زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۵}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۹}$

۶- در سوال قبل مطلوبست احتمال اینکه شماره ساخته شده بزرگتر از ۳۰۰ هزار باشد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۵}$　　۴) $\frac{۴}{۵}$

۷- در سوال ۵ مطلوبست احتمال اینکه رقم یکان شماره ساخته شده ، مضرب ۳ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۸- در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع کم تر از ۵ باشد و یکی از تاس ها کم تر از ۲ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۶}$

۹- ارقام ۳،۲،۲،۱،۱ را تصادفی کنار هم قرار می دهیم.با کدام احتمال سه رقم متوالی به ترتیب صعودی در عدد ۵ رقمی حاصل دیده می شود؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۱۰- با حروف کلمه ABADAN یک کلمه رمز عبور ۴ حرفی می سازیم.با کدام احتمال هر ۳ حرف A به کار رفته است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۱۱- از بین ارقام ۱تا ۹ عددی را به تصادف انتخاب کرده و یادداشت می کنیم. سپس رقم دیگری غیر یکسان با آن رقم اولیه به تصادف از بین همان ارقام انتخاب کرده و در سمت راست رقم اولیه می نویسیم.احتمال اینکه عدد دو رقمی حاصل بزرگتر از ۵۰ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۱۲- از بین سه کارت سفید و پنج کارت سبز به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می آوریم سپس کارت دوم را خارج می کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۱۳- در ظرفی m مهره سفید و m+1 مهره سیاه وجود دارد.اگر دو مهره به تصادف انتخاب کنیم، m چند باشد تا احتمال اینکه از هر رنگ یکی انتخاب شود $\frac{۴}{۷}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴- در کیسه ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره قرمز ریخته ایم.سه مهره به تصادف و بدون جایگذاری ازآن خارج می کنیم.چقدر احتمال داردکه دقیقا ۲ مهره از یک رنگ و سومی از رنگ دیگر باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۵- ارقام ۱و۲و۳و۴و۵و۶ را از مقوا بریده، به تصادف کنار هم قرار می دهیم تا عدد شش رقمی حاصل شود.به کدام احتمال مجموع رقم های اول و آخر آنها ۷ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۱۶- یک جمع سه نفره را در نظر بگیرید. احتمال اینکه دقیقا دو نفر از آنها دارای ماه تولد یکسان باشند، چقدر است(ماه های سال را هم شانس فرض کنید)؟

۱) $\frac{۶۶}{۱۴۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴۴}$ ۳) $\frac{۳۳}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۴۴}$

۱۷- سه نفر در اتاق نشسته اند.احتمال اینکه حداقل دو تای آنها در یک ماه به دنیا آمده باشند کدام است؟(ماه های سال را هم شناس فرض کنید)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۷۲}$ ۳) $\frac{۱۹}{۷۱}$ ۴) $\frac{۲۳}{۷۲}$

۱۸- جعبه ای محتوی ۱۰ کارت با شماره های ۱ تا ۱۰ می باشد.اگر ۵ کارت را به تصادف از این جعبه بدون جایگذاری انتخاب کنیم، مطلوبست احتمال اینکه شماره های این ۵ کارت متوالی باشند؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۱۹- خانواده ای دارای ۵ فرزند است.احتمال اینکه حداقل یکی از فرزندان پسر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶}{۳۲}$ ۳) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۲۰- در جعبه ای ۵ مهره سالم و ۳ مهره خراب وجود دارد.اگر مهره ها را یکی یکی خارج کنیم، احتمال اینکه آخرین مهره خراب در انتخاب چهارم بدست آید، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵۶}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۲۱- دو تاس را با هم پرتاب میکنیم.با کدام احتمال عدد تاس اول از عدد تاس دوم بزرگتر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۹}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۲۲- در ظرفی ۵ مهره با شماره های ۱و۲و۳و۴و۵ قرار دارد. دو مهره با هم بیرون می آوریم.با کدام احتمال مجموع شماره های این دو مهره عدد فرد است؟

۱) ۴/ ۲) ۵/ ۳) ۶/ ۴) ۷/

۲۳- از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می شوند.با کدام احتمال دو نفر معرفی شدگان از گروه ریاضی هستند؟

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۲۴- در ظرفی ۳ گوی قرمز و ۴ گوی سفید است. دوگوی از ظرف به تصادف بیرون می آوریم.با کدام احتمال هر دو گوی همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

۲۵- هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی کارت یکسان نوشته و به تصادف دو کارت خارج می کنیم.با کدام احتمال شماره این دو کارت عدد اول یا بر ۷ بخش پذیر است؟

۱) $\frac{۱۷}{۱۴۵}$ ۲) $\frac{۲۲}{۱۴۵}$ ۳) $\frac{۲۶}{۱۴۵}$ ۴) $\frac{۱۸۲}{۴۳۵}$

۲۶- از ۱۰۰ دانش آموز سال دوم دبیرستان یک مدرسه ۴۳ نفر در المپیاد ریاضی و ۵۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده اند. اگر ۲۰ نفر از دانش آموزان در هیچ یک از دو آزمون شرکت نکرده باشند، چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده اند یا در المپیاد فیزیک شرکت نکرده اند؟

۱) ۷۳ ۲) ۷۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۳

۲۷- یک سکه سالم را سه بار پرتاب می کنیم.احتمال مشاهده حداقل دو رو چند است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۸- در پرتاب ۶ سکه باهم، با کدام احتمال تعداد " رو" بیشتر از "پشت" است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۲۹- تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد هفت برابر احتمال وقوع هر عدد زوج باشد.اگر A پیشامد وقوع عدد زوج کوچکتر از ۴ باشد P(A) کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۳۰- احتمال اینکه شخصی ناراحتی قلبی داشته باشد ۶/ و احتمال اینکه ناراحتی کلیوی داشته باشد ۴/ و احتمال داشتن هر دو بیماری ۲/ می باشد. مطلوبست احتمال اینکه فقط ناراحتی قلبی و یا فقط ناراحتی کلیه داشته باشد چقدر است؟

۱) ۵/ ۲) ۴/ ۳) ۶/ ۴) ۷/

۳۱- A,B,C به همراه ۵ نفر دیگر در یک صف ایستاده اند.به چه احتمالی B جلوتر ازA و A جلوتر از C قرار دارد؟(نه لزوما بلافاصله)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۲- اگر ۴ نفر در اتاقی نشسته باشند احتمال این را بیابید که هیچ یک در یک ماه به دنیا نیامده باشند(ماه های سال را هم شانس در نظر بگیرید)

۱) $\frac{۵۵}{۲۸۸}$ ۲) $\frac{۵۵}{۱۴۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۹۶}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۳۳- تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد با مربع آن عدد متناسب است.این تاس را پرتاب می کنیم.احتمال اینکه عدد فرد بیاید چند است؟

۱) $\frac{۵}{۱۳}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۳۷}{۹۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۴- در پرتاب همزمان دو تاس باهم، احتمال اینکه اعداد رو شده هر دو مضرب ۳ باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۳۵- یک جعبه شامل ۱۸ مهره است که از ۱ تا ۱۸ شماره گذاری شده است.چهار مهره به تصادف و به ترتیب از این جعبه انتخاب می کنیم.احتمال اینکه بزرگترین شماره مهره در نمونه عدد ۱۱ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵۱}$ ۲) $\frac{۴}{۵۱}$ ۳) $\frac{۵}{۵۱}$ ۴) $\frac{۷}{۵۱}$

۳۶- در یک جامعه ۶۰٪ خانواده ها دارای ماشین شخصی، ۳۰٪ دارای منزل شخصی و ۲۰٪ دارای هم ماشین شخصی و هم منزل شخصی هستند.اگر خانواده ای به تصادف از این جامعه انتخاب شود، احتمال اینکه خانواده دارای ماشین شخصی یا منزل شخصی اما هر دو نباشند کدام است؟

۱) ۲/ ۲) ۳/ ۳) ۵/ ۴) ۸/

۳۷- اعداد ۱و۲و۳و۴و۵و۶ بر روی ۶ مهره یکسان نوشته شده اند. اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم.با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۳۸- افراد B,A در امتحانی شرکت کرده اند.احتمال قبول نشدن B,A به ترتیب ۴/ و ۲/ می باشد.احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در امتحان قبول شوند برابر ۹/ می باشد.در این صورت احتمال اینکه A در امتحان قبول شود و B در امتحان قبول نشود چقدر است؟

۱) ۱/ ۲) ۲/ ۳) ۳/ ۴) ۴/

۳۹- در یک کیسه ۴ مهره قرمز ، ۳ مهره سیاه و ۵ مهره سفید وجود دارد.۴ مهره به تصادف از این کیسه انتخاب می کنیم.احتمال اینکه در میان آنها از هر سه رنگ موجود باشد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۱}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

۴۰- یک خانواده n فرزندی حداقل چند فرزند داشته باشد تا احتمال اینکه جنسیت همه فرزندان یکسان باشد کمتر از ۰۱/ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۱- در پرتاب دو تاس با هم، احتمال کدام پیشامد کم تر است؟

۱) هر دو تاس عددی یکسان نمایش دهند

۲) جمع دو تاس عدد ۷ را نشان دهد

۳) ضرب دو تاس عدد اول را نشان دهد

۴) هر سه پیشامد احتمال یکسان دارند

۴۲- اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه عبارت $(A\cup B)\Delta(A-B)$ همواره برابر کدام گزینه است؟

۱) B ۲) B-A ۳) $A\cap B$ ۴) $A\Delta B$

۴۳- در ظرفی ۱۰ مهره به شماره های ۱ تا ۱۰ قرار دارد.مهره ها را یکی یکی به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف خارج می کنیم.به چه احتمالی مهره های شماره فرد یک در میان بیرون می آیند؟

۱) $\frac{۱}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۳) $\frac{۳}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲۶}$

۴۴- تمام اعداد دو رقمی را که می توان با ارقام ۱و۲و۴و۵ ساخت را روی کارت های متمایز نوشته و در یک کیسه قرار می دهیم و سپس یکی از این کارت ها را به تصادف خارج می کنیم.احتمال آنکه عدد روی کارت کوچکتر از ۴۰ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۵- در سوال قبل احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۴ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۶- از جعبه ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است ۳ سیب به تصادف بر می داریم.احتمال اینکه تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۵۵}{۶۸}$ ۲) $\frac{۲۲}{۶۸}$ ۳) $\frac{۳۳}{۶۸}$ ۴) $\frac{۲۸}{۶۸}$

۴۷- ۶ نفر که دو نفر آنها برادر یکدیگر اند به تصادف در یک ردیف می ایستند.چقدر احتمال دارد دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۸- در سوال قبل احتمال آنکه دو برادر در اول و آخر صف ایستاده باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

۴۹- دو تاس سالم را با هم می اندازیم.احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس زوج باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۶}$

۵۰- در سوال قبل احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۱۰ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۵۱- جعبه ای محتوی ۱۰ مهره با شماره های ۱ تا ۱۰ می باشد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه انتخاب کنیم , مطلوبست احتمال اینکه شماره های این ۳ مهره پشت سر هم باشند؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۹۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۷۲}$

۵۲- در تست قبل مطلوبست احتمال اینکه حاصل ضرب سه عدد بیرون آمده زوج باشد؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۸}{۱۲}$ ۴) $\frac{۹}{۱۲}$

۵۳- هر یک از ارقام۱,۲,۳,۴,۵را در یکی از ۶ خانه هم ردیف به تصادف قرار می دهیم، با کدام احتمال این ارقام درخانه های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۵۴-کدام قضیه زیر بازگشت پذیر نیست؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $A \subseteq B \to B' \subseteq A'$ ۲) $A \subseteq B \to A - B = \emptyset$

۳) $A = B \to A \cap C = B \cap C$ ۴) $A \subseteq B \to A \cap B = A$

۵۵- از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱,۲,۳,۳ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنها معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده اند ؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۵۶- چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از ارقام۶ ,۳ حداقل یک بار ظاهر شده است؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱)۵۴ ۲)۵۲ ۳)۴۸ ۴) ۵۶

۵۷- اعداد ۱ تا۶ را بر روی کارت های یکسان نوشته اند ، اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۵۸- اگر $A = \{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B = \{a,b\}$ مجموعه ی $A - \{B\}$ چند زیر مجموعه ی سره ی غیر تهی دارد؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱)۲ ۲)۷ ۳)۶ ۴) ۱۴

۵۹- اگر A وB دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه ی $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$

برابر کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $A' - B'$ ۲) $(A - B)'$ ۳) A' ۴) $\emptyset$

۶۰- از مجموعه ی{۱۰۱,۱۰۲,....,۶۰۰ } یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم . با کدام احتمال این عدد مضرب ۵ باشد ولی به ۶ بخش پذیر نیست ، یا مضرب ۵ نیست ولی به ۶ بخش پذیر است؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱)۰/۳ ۲)۰/۳۲ ۳)۰/۳۶ ۴) ۰/۴

۶۱- اگر A و B و C سه مجموعه غیرتهی باشند به طوری که $A \subseteq B$ آنگاه مجموعه ی $\left(A \cap (B - C)\right) - (A \cap B \cap C)$ کدام است ؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) B ۲) $A \cap C$ ۳) A ۴) $A \cap \acute{C}$

۶۲- چند زیر مجوعه ی $\{a, b, \{b, a\}, \{a, b\}\}$ عضو $\{a, b\}$ را ندارد؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱)۴ ۲)۶ ۳)۸ ۴) ۱۲

۶۳- از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ، ۶نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده اند. احتمال آنکه دو نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم اتخاب شوند کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۱۴}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۶۴- اعداد ۹,....,۱,۲ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف ۲ کارت از بین آنها بیرون می آوریم . با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ می باشد؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

- اگر $i \in \{۱,۲,...,۹\}$ و $A_i = \left[-i, \frac{۹-i}{۲}\right]$ آنگاه مجموعه ی $(A_۲ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷)$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $[-۲, -۱) \cup (۱,۲]$ ۲) $[-۲, -۱] \cup [۱,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\emptyset$

۶۶- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد به طوری که $P(A) = /۶$ و $P(B) = /۷$ و $P(A \cap \acute{B}) = /۲$ باشند آنگاه $P(B \cap \acute{A})$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۶۷- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می شوند .اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟(سراسری تجربی ۸۱)

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۶۸- احتمال اینکه ۴ فرزند یک خانواده دوفرزند پسر و دو فرزند دختر باشند کدام است؟(سراسری تجربی ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۶۹- در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است.اگر ۲ موش از بین آنها تصادفی انتخاب شود با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۷۰- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آنها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۷۱- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید ودومین موش سیاه است؟(سراسری تجربی ۸۸)

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

۷۲- حروف کلمه ی ataxia را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می گیرند؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۷۳- در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ پسر یا ۳ فرزند دختر وجود دارد؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۷۴- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می آوریم، سپس کارت دوم را خارج می کنیم. با کدام احتمال هردو کارت همرنگ هستند؟(سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷۵- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ می باشد؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۷۶- در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی پی درپی بدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره ی فرد متوالیاً خارج نمی شوند؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۷۷- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی و $A \cap \acute{B} = B \cap \acute{A}$ آنگاه مجموعه ی $(A\Delta B) - A$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰خارج از کشور)

۱) $\emptyset$ ۲) A ۳) B ۴) $\acute{B}$

۷۸- اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ مجموعه ی $A - \{A\}$ چند زیر مجموعه ی سره ی غیر تهی دارد؟(سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۷۹- متمم مجموعه ی $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه جهانی با کدام مجموعه برابر نیست؟(سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$ ۲) $(A - C) \cup (B - C$

۳) $A \cap (B - C)$ ۴) $(A \cap B) - C$

۸۰- از مجموعه ی $\{۲۰۱،۲۰۲،...،۵۰۰\}$ یک عدد را به طور تصادفی انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵ می باشد؟ (سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵۴ ۳) ۰/۶۰ ۴) ۰/۶۴

۸۱- چهار رقم ۰،۱،۲،۳ را به تصادف در کنار هم قرار می دهیم . با کدام احتمال یک عدد چهار ررقمی مضرب ۶ ، حاصل می شود؟(سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۸۲- اگر $\acute{B} \subseteq \acute{A}$ باشد ، مجموعه ی $(A\Delta B) \cup (A \cap B)$ برابر کدام مجموعه است؟(سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

A (۲   B (۲ A'(۳ B'(۴

۸۳- از ساکنین شهری ، ۳۰ درصد روزنامه الف ،۲۵ درصد روزنامه ی ب و ۹ درصد روزنامه های الف و ب را می خوانند. اگر فردی از بین آنها به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال هیچ یک از این دو روزنامه را نمی خواند(سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

/۴۵(۱   ۰/۴۸(۲   ۰/۵۴(۳   ۰/۵۶ (۴

۸۴- از مجموعه ی {۵۰۰،...،۱،۲،۳} عددی به طور تصادفی انتخاب می شود. با کدام احتمال این عدد انتخابی ، مضرب ۴ می باشد و بر ۶ بخش پذیر نیست؟(سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

۰/۱۶۲(۱   ۰/۱۶۸(۲   ۰/۱۷۲(۳   ۰/۱۷۸ (۴

۸۵- اگر A={۲ } و B={۲،{۲}} و C={{۲}،{۲،{۲}}} کدام رابطه نادرست است؟(سراسری ریاضی ۸۶ خارج از کشور)

$B \subseteq C$ (۱ $A \subseteq B$ (۲ $A \in B$ (۳ $B \in C$ (۴

۸۶- اگر $A_n = (-\frac{2}{n},\frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد مجموعه ی $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر کدام بازه است؟(سراسری ریاضی ۸۶ خارج از کشور)

$(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$(۱ $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$(۲ $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$(۳ $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (۴

۸۷- از مجموعه اعداد {۳۰۰،...،۱،۲} یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۷ بخش پذیر است و بر ۱۱ بخش پذیر نیست؟(سراسری ریاضی ۸۶ خارج از کشور)

۰/۱۲(۱   ۰/۱۳(۲   ۰/۱۴(۳   ۰/۱۵ (۴

۸۸- از بین اعداد طبیعی سه رقمی ، به تصادف یک عدد برداشته ایم ، با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهرشده است؟(سراسری ریاضی ۸۶ خارج از کشور)

۰/۲۴ (۱   ۰/۲۵(۲   ۰/۲۶(۳   ۰/۲۸ (۴

۸۹-اگر $A_i = \{m \in Z| - i < m < ۸ - i\}$ مجموعه ی $\bigcup_{i=۱}^{۸} A_i - \bigcap_{i=۱}^{۸} A_i$ چند عضو دارد؟(سراسری ریاضی ۸۷ خارج از کشور)

۱۳(۱ ۱۴(۲ ۱۵(۳ ۱۶ (۴

۹۰- تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفراند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. ۸ نفر از این تاجران برای اولین بار سفر کرده اند . اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟(سراسری ریاضی ۸۷ خارج از کشور)

$\frac{۴}{۹}$ (۱ $\frac{۵}{۹}$ (۲ $\frac{۵}{۸}$ (۳ $\frac{۳}{۴}$ (۴

۹۱- در ظرفی ۵ مهره با شماره های ۱،۲،۳،۴،۵ قرار دارند .دو مهره باهم بیرون می آوریم . با کدام احتمال مجموع شماره های این دو مهره عدد فرداست ؟(سراسری ریاضی ۸۷ خارج از کشور)

۰/۴(۱ ۰/۵(۲ ۰/۶(۳ ۰/۷ (۴

۹۲-اگر $A_n = \{m \in Z|m \geq -n, ۲^m \leq n\}, n \in N$ آنگاه مجموعه $A_۴ \cap A_۳$ چند زیر مجموعه دارد؟ (سراری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

۸(۱ ۱۶(۲ ۳۲(۳ ۳۶ (۴

۹۳- متمم مجموعه ی $A - ´(B - A)$ نسبت به مجموعه ی جهانی کدام است؟

$A \cup B$ (۱ $A \cap B$ (۲ A (۳ B (۴

۹۴- اعداد ۱،۲،۳،۴،۵،۶ بر روی ۶ مهره یکسان نوشته اند . اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم ، با کدام احتمال مجموع این دو مهره مضرب ۳ می باشد؟(سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

$\frac{۱}{۴}$ (۱ $\frac{۱}{۳}$ (۲ $\frac{۲}{۵}$ (۳ $\frac{۳}{۵}$ (۴

۹۵- در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روزمتولد شده اند، با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر هستند؟(سراسری تجربی ۸۸ خارج از کشور)

$\frac{۵}{۱۶}$ (۱ $\frac{۳}{۸}$ (۲ $\frac{۷}{۱۶}$ (۳ $\frac{۱۳}{۱۶}$ (۴

۹۶- اگرAوB دو مجموعه ی غیر تهی باشند ، $\left(A \cap B'\right) - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟(سراسری ریاضی ۹۱ خارج از کشور)

۱) B' ۲) $\emptyset$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A - B$

۹۷- از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن ها را در مورد ادبیات و ۷ عدد آنها در مورد تاریخ است که به طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده ایم ، احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشند ،کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

۹۸- اگر AوB دو پیشامد از یک فضای نمونه ای باشند در کدام حالت $P(B - A) = P(B) - P(A)$ درست است؟(سراسری ریاضی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $A \subseteq B$ ۲) همواره ۳) $A \cap B = \emptyset$ ۴) $P(A) < P(B)$

۹۹- در پرتاب دو سکه و یک تاس باهم ، احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد کدام است؟(سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰۰- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است . به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می کنیم.با کدام احتمال لااقل یکی ازموش ها سفید است ؟(سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

۱۰۱- چهار دانش آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دونفرآنهایکسان است؟(سراسری تجربی۹۲ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۳۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۱۰۲- در ظرفی۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است، به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال مهره های خارج شده همرنگ هستند؟(سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۱۰۳- اگر $A=\{۱,\{۱\},\{۱,۲\},\{۲\},۲\}$ و $B=\{X\in R; X^۲+۲=۳X\}$ آنگاه مقدار زیر مجموعه های سره و غیر تهی مجموعه $A-B$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۴

۱۰۴- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A)=۲P(B)=۰/۸$ و $P(A\Delta B)=۰/۶$ آنگاه $P(B'\cap A)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۱۰۵- پنج مهره سفید و پنج مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف ۲مهره از ظرف خارج می کنیم .با کدام احتمال هر دو مهره همرنگ اند؟(سراسری ریاضی ۹۲خارج از کشور)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۰۶- زمان تصادفی که یک حیوان نسبت به داروی خاص عکس العمل نشان می دهد بین ۱/۲ و۳/۷ دقیقه است. با کدام احتمال عکس العمل این حیوان نسبت به این دارو کمتر از ۲/۱ دقیقه است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور۸۹)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۴۲

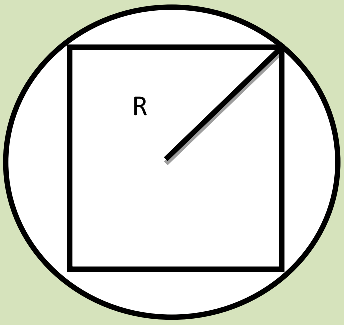
۱۰۷- زمان تصادفی که حیوان خاص به داروی خاص عکس العمل نشان می دهد بین ۱/۸ دقیقه تا ۲/۴۵ دقیقه است .با کدام احتمال عکس العمل این حیوان به این دارو کمتر از ۲/۱۹ دقیقه است؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۵۴ ۴) ۰/۶

۱۰۸- در یک تابلو نمایشگر ، تصویر مورد نظر از ساعت ۷ هر ۱۰ دقیقه یک بار ، متناوباً لحظه ای نمایان می شود. اگر فردی بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ مقابل این تابلو قرار گیرد، با کدام احتمال برای رؤیت این تصویر کمتر از ۴ دقیقه معطل می شود؟(سراسری ریاضی ۸۷ خارج ازکشور)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰۹- نقطه ای به تصادف در درون دایره ی شکل مقابل انتخاب می کنیم. احتمال آنکه این نقطه در داخل مربع باشد، چقدر است؟(سراسری زیاضی ۷۶)



۱) $\frac{۲}{\pi}$ ۲) $\frac{۳}{\pi}$ ۳) $۱-\frac{۲}{\pi}$ ۴) $۱-\frac{۳}{\pi}$

۱۱۰- دایره ای را در نظر می گیریم. نقطه ای به طور تصادفی بر روی سطح آن انتخاب می کنیم. احتمال آنکه این نقطه به مرکز آن نزدیک تر باشد تا محیط دایره باشد کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴\pi}$

۱۱۱- روی یک محور اعداد حقیقی نقطه ی a روی بازه ی $[۰,۴]$ و نقطه ی b روی بازه ی $[-۱,۰]$ تصادفی انتخاب شده اند . با کدام احتمال ، فاصله ی این دو نقطه کمتر از ۲ واحد است؟(سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۱۲- بر روی محور اعداد حقیقی، دو نقطه تصادفی به طول های a و b به طوری که $۰ \le a \le ۲$ و $-۱ \le b \le ۰$ انتخاب می شوند. با کدام احتمال فاصله ی بین دونقطه بزرگتر از ۲ می باشد؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱۳- دو نفر قرار گذاشته اندکه بین ساعت ۷و۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند، هرکدم زودتر رسید فقط ۶ دقیقه منتظر دیگری باشد وگرنه کار خود را شروع کند . با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار ، یکدیگر را ملاقات می کند؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۱۹ ۳) ۰/۲۱ ۴) ۰/۲۴

۱۱۴- شخصی به طور معمول بین ساعت ۷:۳۰ تا ۹ در محلی حاضر می شود و شخص دیگری بین ساعت ۸ تا ۸:۳۰ برای دیدن وی می آید . با کدام احتمال فاصله ی زمانی رسیدن آنها در محل کمتر از ۱۰ دقیقه است؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۱۵- دو عدد به طور تصادفی بین ۰ و۲ انتخاب می شوند.با کدام احتمال نسبت این دو عددکمتر از $\frac{۱}{۳}$است؟(سراسری ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۱۶- در معامله ی $ax+b=۰$ ضریب a به طور تصادفی از بازه ی $[۱,۲]$ و ضریب b به تصادف از بازه ی $[-۱,۱]$ انتخاب می شوند. احتمال اینکه جواب معادله کمتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد ، کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۱۱۷- در پرتاب یک سکه به شعاع ۲ سانتی متر به روی یک ضلع مربع ۶ سانتی متر، مرکز سکه همواره درون مربع قرار می گیردو احتمال آن که این سکه به تمامی درون مربع قرار گیرد ، کدام است؟(سراسری ریاضی۸۶)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱۸- بر روی بازه ی $[۰,۳]$ دو نقطه به تصادف انتخاب می کنیم که بازه را به ۳ پاره خط تقسیم کند. با کدام احتمال با۳ پاره خط حامل می توان یک مثلث ساخت؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱۹- صفحه ی هدف مثلث متسائی الاضلاع به ارتفاع ۱۵ واحد است. تیر رها شده، به این صفحه هدف برخورد کرده است. با کدام احتمال فاصله محل اصابت تیر از نزدیک ترین ضلع این مثلث بیش تر از یک واحد است؟(سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۰/۵۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۸۱

۱۲۰- نقطه ی $M(x,y)$ درون مثلثی با سه رأس (۰،۰) و (۴،۰) و(۳،۳) به تصادف انتخاب می شود با کدام احتمال این نقطه روی یکی از میانه های مثلث قرار می گیرد؟(سراسری ریاضی ۸۳)

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۱۴۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

نمونه سوالات بدون جواب تشریحی

۱- هر یک از ارقام ۱و۲و۳و۴و۵و۶ را بر روی شش کارت باریک نوشته و به طور تصادف در کنار هم قرار می دهیم تا عدد شش رقمی حاصل شود.با کدام احتمال عدد حاصل مضرب ۵ یا مضرب ۶ می باشد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲- چهار زوج زن و شوهر میخواهند در یک ردیف در کنار هم قرار گیرند.به چه احتمالی زن و شوهر هر زوج پهلوی هم نشسته اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۹}$

۳- اگر تعداد عضو های مجموعه توانی یک مجموعه K عضوی,۲۴۰ عضو بیشتر از تعداد عضو های مجموعه توانی یک مجموعه K-۴ عضوی باشدK کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۴- چند مورد از گزاره های زیر درست است؟

الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$ ب) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ ج) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ د) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$

ه) $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۴

۵- اگر $A=\{۱,۲,\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\}$ باشد، P(A)-A چند عضو دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

۶- سه اسب a,b,c با هم مسابقه می دهند.احتمال برد a دو برابر احتمال برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال برد c است.احتمال آنکه a یا b ببرند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۷- فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامه الف، ۲۵٪روزنامه ب، ۱۳٪ روزنامه پ ، ۱۰٪روزنامه الف و ب ، ۸٪ روزنامه الف و پ و ۵٪ روزنامه ب و پ و ۴٪ هر سه روزنامه را می خوانند. احتمال آنکه شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچ یکی از روزنامه ها را نخواند چقدر است؟

۱) ۳۹/ ۲) ۶۱/ ۳) ۲۳/ ۴) ۵۴/

۸- علی و حسن به همراه ۵ نفر دیگر در یک محلی جمع شده اند.به تصادف ۳ نفر از بین این جمع انتخاب می کنیم.احتمال آنکه علی و حسن هردو انتخاب شوند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۹- در سوال قبل مطلوبست احتمال آنکه از بین علی و حسن حداقل یک نفر انتخاب شود؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۱۰- در سوال ۸ مطلوبست احتمال آنکه علی انتخاب شود ولی حسن انتخاب نشود؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۱۱- در سوال ۸ مطلوبست احتمال آنکه از بین علی و حسن دقیقا یک نفر انتخاب شود؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۲- اگر $n\in N$ و $A_n = \left(-\frac{۱}{n}, \frac{۲n-۱}{n}\right)$ آنگاه حاصل $\bigcup_{n=۱}^{۳} A_n$ کدام است؟

۱) $\left(-۱, \frac{۵}{۳}\right)$ ۲) $\left(-\frac{۱}{۳}, ۱\right)$ ۳) $\left(۱, \frac{۵}{۳}\right)$ ۴) $\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$

۱۳- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم . با چه احتمالی کی از دو عدد ظاهر شده نصف دیگری است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴- خانواده دارای ۳ فرزند است.به چه احتمالی بزرگترین وکوچکترین فرزند ، از دو جنس مخالف هستند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۵- اگر $P(A) = ۲P(B) = ۳P(A \cap B)$ حاصل $\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{P(A-B)}$ کدام است؟ A و B سازگار هستند

۱)۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۲۵

۱۶-با حروف کلمه ی «جمهوری» کلمه ای ۴ حرفی با حروف متمایز می سازیم.با چه احتمالی با حرف نقطه دار شروع می شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۷- از مجموعه ی{۹,....,۲ ,۱}=N دو عضو امنختب کنیم . با چه احتمالی حداقل یکی از این دو عدد فرد است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۸-در پرتاب دو تاس احتمال اینکه عدد تاس اول برعدد تاس دوم بخش پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۱۹- با ارقام ۱و۲و۳و۴و۵ یک عدد سه رقمی با ارقام متمایز می سازیم.احتمال اینکه این عدد فرد و بزرگتر از ۳۰۰باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۲۰}$

۲۰- از بین ۳ معلم و ۲ دانش آموز یک گروه ۳ نفری تشکیل می دهیم ، احتمال اینکه حداقل ۲ نفر در گروه معلم باشند کدام است؟

۱)۰/۵ ۲) ۰/۶ ۳)۰/۷ ۴) ۰/۱

۲۱- در پرتاب ۴ تاس احتمال آنکه چهار عدد متفاوت ظاهر شود کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۲۲- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آنکه حاصل ضرب دو عدد ظاهر شده مضرب ۴ باشد کدام است ؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۲۳- دو تاس متمایز را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هریک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیست؟(سراسر ریاضی ۷۹)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۲۴- از بین ۶ داوطلب گروه ریاضی و ۴داوطلب تجربی به طور تصادفی ۴ داوطلب انتخاب می شوند.با کدام احتمال دو نفر آنان از گروه ریاضی است؟(سراسری ریاضی ۷۹)

۱) $\frac{۵}{۲۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۲۵-اگر $A_n = [n-۱, n+۱]$ آنگاه مجموعه ی $\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n - \bigcap_{n=۱}^{۳} A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟(سراسری ریاضی ۸۰)

۱) $\{x: ۱ < x \leq ۵\}$ ۲) $\{x: ۰ \leq x \leq ۵\}$

۳) $\{x: ۰ \leq x \leq ۵, x \neq ۲\}$ ۴) $\{x: ۱ \leq x \leq ۵, x \neq ۲\}$

۲۶- سه تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم .با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند ؟ (سراسری ریاضی۸۰)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۷- یک تاس سفید و یک تاس آبی را با هم پرتاب می کنیم.با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۵ است؟(سراسری ریاضی۸۰)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۸- ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر ۳ لامپ به تصادف از بین آنها اختیار کنیم. احتمال اینکه هر سه لامپ سالم باشند کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۹- اگر A مجموعه ی اعداد دو رقمی و $B = \{۷K; K \in A\}$ آنگاه مجموعه توانی $(A \cap B)$ چند عضو دارد؟(سراسری ریاضی ۸۱)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۳۰- مجموعه ی A دارای ۱۴ و مجموعه ی B دارای ۱۷ و مجموعه ی $A \cap B$ دارای ۵ عضو است. تفاضل متقارن A وB چند عضو دارد؟(سراسری ریاضی ۸۱)

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۳۱- احتمال آنکه دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود۵۵٪ و در درس شیمی قبول شود ۶٪ ، اگراحتمال آنکه حداقل یکی از دو درس قبول شود۷۵٪ باشد .با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟(سراسری ریاضی ۸۱)

۱) ۳۵٪ ۲) ۴۰٪ ۳) ۴۵٪ ۴) ۵۰٪

۳۲- مجموعه ی $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارایچند زیر مجموعه شامل عضو a دارد ؟(سراسری ریاضی ۸۲)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۳- در پرتابی ۴ سکه با هم احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیایند کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۴- رئیس و منشی و ۴ کارمند دور یک میز گرد نشسته اند. با کدام احتمال منشی مقابل رئیس قرار می گیرد؟(سراسری ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۵- از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر کلاس شرکت کرده اند. چند نفر در هیچ یک از کلاس شرکت ننموده اند؟(سراسری ریاضی ۸۲)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۶ – اگر n عدد طبیعی و A_n بازه ی $(-۱^n n, ۲n)$ باشد چند عدد صحیح به $\cup_{n=۱}^{۴} A_n$ تعلق دارد ؟(سراسری ریاضی ۸۴)

۱)۸ ۲)۹ ۳)۱۰ ۴) ۱۱

۳۷- دریک کیسه ۵ مهره سفید و ۷ مهره ی سیاه موجود است . ۲ مهره از کیسه خارج می کنیم . احتمال اینکه دو مهره هم رنگ نباشند کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۱}$ ۲) $\frac{۸}{۳۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۶۶}$ ۴) $\frac{۳۷}{۶۶}$

۳۸- اگر AوB دو مجموعه ی غیر تهی با مجموعه جهانی u مجموعه ی $\acute{A}\Delta\acute{B}$ برابر کدام است؟

۱)$A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) $A\Delta B$ ۴) u

۳۹- از مجموعه ی اعداد $\{۱۰۰, ۱۰۱,...,۶۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب شده است. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۶}$

۴۰- بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت های ترکیبات مجموعه اعداد $\{۲,۴,۵,۶,۷\}$ را نوشته ، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می اوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت ها فرد می باشند؟(سراسری ریاضی ۸۳)

۱)۰/۲ ۲)۰/۲۵. ۳)۰/۳ ۴) ۰/۴

۴۱- اگر یک عدد سه رقمی ا کنارهم قراز گرفتن ازقام متمایز ,۰,۱,۲,۳,۴ به وجود آید احتمال اینکه عدد زوج باشد کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۲- برای انجام مسابقه ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده اند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنها انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این گروه متفاوت اند؟(سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۴۳- در ظرفی که شش مهره با شماره های۱,۲,۳,۴,۵,۶ ریخته شده اند، دو مهره با هم بیرون می آوریم، با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟(سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۴- مجموعه ی A ۵ عضو بیشتر از مجموعه ی A' دارد ، خارج قسمت یا تفاضل تعداد زیر مجموعه های این دو مجموعه کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۶)

۱)خارج قسمت۲۵ ۲)خارج قسمت ۳۲ ۳)تفاضل ۲۵ ۴) تفاضل ۳۲

۴۵- اگر $A \cup (B - A) = B$ انگاه : (سراسری ریاضی ۸۶)

۱) $A \subseteq B$ ۲) $B \subseteq A$ ۳) $A = \emptyset$ ۴) $B = \emptyset$

۴۶- ۶ گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند ، به تصادف دو گوی از آنها بر می داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم تر از ۶ می باشد؟(سراسری ریاضی ۸)

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۴۷- یک تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب ، احتمال وقوع عدد بزرگتر از ۳ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۴۸- با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می باشد؟(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی رود)(سراسری ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۴۹- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است.به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم.با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده همرنگ هستند؟(سراسری ریاضی۹۳)

۱) /۱۲ ۲) /۱۵ ۳) /۱۸ ۴) /۲۴

✓ پاسخ تشریحی فصل دوم

۱- گزینه۴-

حل: مسأله انتخاب ۳ نفر از ۸ نفر می باشد

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۴۶}{۵۶}$$

۲- گزینه ۱-

حل: مجموع اعداد رو شده دو تاس باید ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ گردد

(۱،۱):مجموع ۲ $\to P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

(۱و۲) (۲ و۱) : مجموع ۳

(۱و۴)(۲و۳)(۳ و۲)(۴و۱) : مجموع ۵

(۱و۶)(۲ و۵)(۳ و۴)(۴ و۳)(۵ و۲)(۶ و۱) : مجموع ۷

(۵ و۶)(۶ و۵) : مجموع ۱۱

۳-گزینه ۴-

: مهره اول سفید و مهره دوم سیاهA حل:

$$P(A)=\frac{۴}{۴+n}\times\frac{n}{۳+n}=\frac{۱}{۵}$$

$$\to\ n=۱۲$$

۴- گزینه ۲- حل: مسأله انتخاب ۳ پست از ۱۰ پست موجود

پیشامد مطلوب آن است که پست به خصوصی حذف نشود بنابراین سه پست باید از ۹ پست (به جز پست خاص) انتخاب شود.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱}{۰}\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۷}{۱۰}$$

۵- گزینه ۳-

حالت ممکن است !۶حل : مسأله ساختن عدد ۶ رقمی با ارقام ۱ تا۶ می باشد که به

پیشامد ساختن عدد ۶ رقمی زوج می باشد که طبق اصل ضرب داریم:

۳ حالت	۱ حالت	۲حالت	۳ حالت	۴ حالت	۵ حالت

$$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳\times ۵!}{۶!}=\frac{۱}{۲}$$

۶- گزینه ۱-

حل:

۱ حالت	۲ حالت	۳ حالت	۴ حالت	۵ حالت	۴ حالت
					۳
					۴
					۵
					۶

$$\rightarrow\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴\times ۵!}{۶!}=\frac{۲}{۳}$$

۷ – گزینه ۱-

حل :

۲ حالت	۱ حالت	۲ حالت	۳ حالت	۴ حالت	۵ حالت
۳					
۶					

$$P(A)=\frac{۵!\times ۲}{۶!}=\frac{۱}{۳}$$

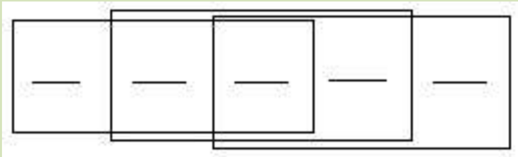
۸- گزینه ۴- (۱و۳)(۳و ۱)(۱و ۲)(۲و ۱) : حالات مطلوب

$$\rightarrow\ P(A)=\frac{۴}{۳۶}$$

۹- گزینه ۳-

حل: کل اعداد ۵ رقمی برابر است با $\frac{۵!}{۲!۲!}$

حالت مطلوب این است که در این عدد ۵ رقمی ، سه رقم متوالی آن به ترتیب صعودی (اول ۱ بعد ۲ بعد ۳) باشد در نتیجه ما سه حالت داریم که سه رقم آن صعودی است ابتدا یکی از این سه حالت را انتخاب و سپس اعداد ۱ و۲ و۳ را به یک حالت (اول ۱ بعد ۲ بعد ۳) مرتب می کنیم. عدد ۱ و ۲ باقی مانده نیز می توانند به ۲ حالت در ۲ جای باقی مانده مرتب شوند.



$$\rightarrow\ P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}۱\times۱\times۱\times۲\times۱}{\frac{۵!}{۲!\,۲!}}=\frac{۱}{۵}$$

۱۰-گزینه ۳-

حل : کل کلمات ۴ حرفی شامل دسته های زیر هستند.

۴!= تعداد ← الف – کلمات ۴ حرفی شامل یک حرف A=۲۴

$۳۶=\binom{۳}{۲}\frac{۴!}{۲!}=$ تعداد ← ب – کلمات چهار حرفی شامل دو حرف A

$۱۲=\binom{۳}{۱}\frac{۴!}{۳!}=$ تعداد ← ج – کلمات چهار حرفی شامل۳ حرف A

$\rightarrow$ احتمال مورد نظر $=\frac{۱۲}{۷۲}=\frac{۱}{۶}$

۱۱- گزینه ۴-

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵\times۸}{۹\times۸}=\frac{۵}{۹}$$

۱۲- گزینه ۳-

حل : باید دو کارت سفید یا دو کارت سبز انتخاب شوند

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳+۱۰}{۲۸}=\frac{۱۳}{۲۸}$$

۱۳- گزینه ۲-

حل:

$$P(A)=\frac{\binom{m}{1}\binom{m+1}{1}}{\binom{2m+1}{2}}=\frac{4}{7}$$

$$\rightarrow \frac{m(m+1)}{\frac{(2m+1)(2m)}{2}}=\frac{4}{7}\rightarrow \frac{m+1}{2m+1}=\frac{4}{7}\rightarrow m=3$$

۱۴ - گزینه ۳-

حل: می بایست حالت های زیر رخ دهد

دو مهره سفید و یک مهره قرمز یا دو مهره قرمز و یک مهره سفید

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{96}{120}=\frac{4}{5}$$

۱۵- گزینه ۳-

حل: تعداد کل اعداد ۶ رقمی برابر !۶ می باشد (۴ و۳)(۵ و۲)(۶ و ۱) = مجموع ۷

برای آنکه مجموع رقم های آخر و اول ۷ شود می بایست یکی از ۳ گروه بالا به !۲حالت در رقم های اول و آخر قرار گیرند و۴ عدد باقی مانده نیز !۴در۴ جایگاه دیگر قرار گیرند.

$$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{3}{1}2!\times 4!}{6!}=\frac{1}{5}$$

۱۶-گزینه ۳-

حل : ماه های سال هم شانس است در نتیجه هر فرد ۱۲ حالت هم شانس برای دنیا آمدن دارد.

$n(S)=12\times 12\times 12=12^3$ در حالت مطلوب ابتدا از۳ نفر ۲ نفری که باید در یک ماه به دنیا آیند را انتخاب و داریم :

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}12\times 1\times 11}{12\times 12\times 12}=\frac{33}{144}$$

فرد سوم	فرد دوم	فرد اول
۱۱ حالت	۱ حالت	۱۲ حالت
آبان	دی	دی

۱۷- گزینه ۲-

حل : از ۳ نفر یا ۲ نفر و یا هر سه در یک ماه به دنیا آمده باشند.

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}۱۲\times ۱\times ۱۱+\binom{۳}{۳}۱۲\times ۱\times ۱}{۱۲^{۳}}=\frac{۳۴}{۱۴۴}=\frac{۱۷}{۷۲}$$

۱۸-گزینه ۲-

حل : کل حالات انتخاب ۵ کارت از ۱۰ کارت موجود که $\binom{۱۰}{۵}$حالت دارد

(۹و۸و۷و۶و۵)(۸و۷و۶و۵و۴)(۷و۶و۵و۴و۳)(۶و۵و۴و۳و۲)(۵و۴و۳و۲و۱):حالات مطلوب

(۱۰و۹و۸و۷و۶)

$$\rightarrow P(A)=\frac{۶}{\binom{۱۰}{۵}}=\frac{۱}{۴۲}$$

۱۹- گزینه ۳-

حل : کل حالات برای تولد ۵ فرزند $۲^{۵}=۳۲$ حالت است.

$$P\left(\text{حداقل یک پسر}\right)=۱-P\left(\text{تعداد پسران صفر باشد}\right)=۱-\frac{\binom{۵}{۰}}{۲^{۵}}$$

$$=۱-\frac{۱}{۳۲}=\frac{۳۱}{۳۲}$$

۲۰- گزینه ۱-

حل : از آنجایی که مهره چهارم خراب است ، پس در ۳ انتخاب اول یک مهره سالم و دو مهره خراب داریم :

$$\frac{\binom{۳}{۱}\times ۵\times ۳\times ۲\times ۱}{۸\times ۷\times ۶\times ۵}=\frac{۳}{۵۶}$$

۲۱- گزینه ۳-

حل : کل حالات ۳۶ عدد است که ۶ حالت (۶و۶)...(۲و۲)(۱و۱) عدد تاس ها برابر است از ۳۰ حالت باقی مانده ۱۵ حالت تاس اول از تاس دوم بزرگتر و۱۵ حالت دیگر تاس دوم از تاس اول بزرگتر است.

$$P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۲۲- گزینه ۳-

حل : کل حالات برابر انتخاب ۲ مهره از ۵ مهره که برابر است با $\binom{۵}{۲}$ (فرض شده است ترتیب انتخاب ها مهم نیست در حالی که ترتیب انتخاب ها مهم باشد جواب احتمال تغییر نمی کند)

(۲و۱)→ مجموع ۳

(۳و۲)(۴و۱)→ مجموع ۵

(۴و۳)(۵و۲)→ مجموع ۷

(۵و۴)→ مجموع ۹

$$\rightarrow\ P(A)=\frac{۶}{\binom{۵}{۲}}=۰/۶$$

۲۳- گزینه ۳-

حل:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۱۰\times ۳}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۲۴- گزینه ۱-

حل: مانند سؤال ۱۲

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۳+۶}{۲۱}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

۲۵- گزینه ۱-

حل : $\binom{۳۰}{۲}$ کل حالات انتخاب ۲ کارت از ۳۰ کارت موجود

A: شماره دو کارت عدد اول

B: شماره دو کارت بر ۷ بخش پذیر باشد

اعداد اول = {۲و۳و۵و۷و۱۱و۱۳و۱۷و۱۹و۲۳و۲۹} $\rightarrow P(A) = \frac{\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۳۰}{۲}} = \frac{۴۵}{۴۳۵}$

اعداد بخش پذیر بر ۷ = {۷و۱۴و۲۱و۲۸} $\rightarrow P(B) = \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۳۰}{۲}} = \frac{۶}{۴۳۵}$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۴۵}{۴۳۵} + \frac{۶}{۴۳۵} = \frac{۵۱}{۴۳۵} = \frac{۱۷}{۱۴۵}$$

۲۶- گزینه ۴-

حل: A : المپیاد ریاضی و B : المپیاد فیزیک

$n(S) = ۱۰۰$

$n(A) = ۴۳$

$n(B) = ۵۵$

$n(A' \cap B') = ۲۰$

$n(A \cup B') = ?$

$n(A' \cap B') = ۲۰ \rightarrow n(A \cup B)' = ۲۰ \rightarrow n(A \cup B) = ۱۰۰ - ۲۰ = ۸۰$

$\rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۸۰$

$\rightarrow ۴۳ + ۵۵ - n(A \cap B) = ۸۰ \rightarrow n(A \cap B) = ۱۸$

$n(A \cup B') = n(A) + n(B') - n(A \cap B') = ۴۳ + ۴۵ - [۴۳ - ۱۸] = ۶۳$

یاد آوری: $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

۲۷- گزینه ۴-

حل: Aرو۲ مشاهده حداقل :

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۳}}{۲^۳} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸- گزینه ۳-

حل : فضای نمونه آزمایش $۲^۶$ حالت دارد برای آنکه تعداد "رو" از "پشت" بیشتر باشد باید حالت های زیر اتفاق افتد.

۲۹- گزینه ۳-

حل:

$$P(۱) = ۷a$$
$$P(۲) = a \qquad P(۱) + P(۲) + \cdots + P(۶) = ۱$$
$$P(۳) = ۷a$$
$$P(۴) = a \qquad \rightarrow ۷a + a + ۷a + a + ۷a + a = ۱$$
$$P(۵) = ۷a$$
$$p(۶) = a \qquad \rightarrow a = \frac{۱}{۲۴}$$

A **: پیشامد وقوع عدد زوج کوچکتر از ۴**

$$A = \{۲\}$$
$$P(A) = P(۲) = a = \frac{۱}{۲۴}$$

۳۰- گزینه ۳ -

حل:

A **: ناراحتی قلبی** B **: ناراحتی کلیوی**

$$P(A) = /۶$$
$$P(B) = /۴$$
$$P(A \cap B) = /۲$$
$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = /۶ + /۴ - ۲ \times /۲ = /۶$$

۳۱-گزینه ۱-

حل:

مسئله قرار گرفتن و جایگشت ۸ نفر در یک ردیف است که !۸ حالت وجود دارد.

راه اول: می توان این !۸ حالت را بنا بر حالات قرار گرفتن Aو B و C دسته بندی کرد که از این ۶ دسته یکی از دسته ها(دسته ی شماره ی ۵ مطلوب است)

کل حالات مسئله مطلوب ما است .$\frac{۱}{۶}$در نتیجه

۱. A B C

۲. A C B

۳. C B A

۴. C A B

۵. B A C ✓

۶. B C A

$$P(A)=\frac{\frac{۱}{۶}\times ۸!}{۸!}=\frac{۱}{۶}$$

راه دوم : برای آنکهB جلوتر ازA وA جلوتر ازC باشد از ۸ جایگاه موجود ۳ تای آن را انتخاب و درهر ۳ مکان انتخابی اول، به یک حالت فردC بعد فردB و بعد فردA قرار داده می شود. بقیه ی ۵ نفر نیز در ۵ مکان به !۵حالت قرار می گیرند

$$P=\frac{\binom{۸}{۳}\times ۵!}{۸!}=\frac{۱}{۶}$$

۳۲- گزینه ۴-

حل : کل حالات $۱۲^{۴}$ می باشد . برای حالات مطلوب ، فرد اول ۱۲ حالت دارد به ازای هر یک از این ۱۲ حالت برای آنکه نفر دوم در ماه تولد نفر اول نباشد ۱۱ حالت دارد. به همین ترتیب فرد سوم ۱۰ و فرد چهارم ۹ حالت دارد در نتیجه داریم :

$$P(A)=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹}{۱۲^{۴}}=\frac{۵۵}{۹۶}$$

۳۳- گزینه ۱-

$P(۱)=a$

$P(۲)=۴a$

$P(۳)=۹a$

$P(۴)=۱۶a \qquad \rightarrow a+۴a+۹a+۱۶a+۲۵a+۳۶a=۱$

$P(۵)=۲۵a$

$P(۶)=۳۶a \qquad \rightarrow a=\frac{۱}{۹۱}$

$$p\left(\text{مشاهده عدد فرد}\right)=p(۱)+p(۳)+p(۵)=a+۹a+۲۵a=۳۵a=\frac{۳۵}{۹۱}=\frac{۵}{۱۳}$$

۳۴- گزینه ۲-

حل: فضای نمونه آزمایش ۶×۶ حالت دارد.

برای آنکه هر دو تاس مضرب ۳ بیایند، تاس اول ۲ حالت دارد (۳,۶) به ازای هر یک از این ۲ حالت برای تاس دوم نیز ۲ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب ۲×۲ حالت وجود دارد که هر دو تاس مضرب ۳ هستند . این ۴ حالت عبارتند است:

$$A = \{(۳,۳)(۳,۶)(۶,۳)(۶,۶)\}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{۲ \times ۲}{۶ \times ۶} = \frac{۱}{۹}$$

۳۵-گزینه ۱-

حل: فضای نمونه آزمایش انتخاب ۴ مهره از ۱۸ مهره است که $\binom{۱۸}{۴}$ عضو دارد. برای اینکه بزرگترین شماره در نمونه ۴ تایی ۱۱ باشد باید اولاً مهره ی شماره ی ۱۱حتماً انتخاب شود و شماره ی بقیه مهره ها از ۱۱ بیشتر نشود (۳ مهره دیگر از مهره های ۱۰-۱ انتخاب شود) بنابراین داریم :

$$P(A) = \frac{\binom{۱}{۱}\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۸}{۴}} = \frac{۲}{۵۱}$$

۳۶- گزینه ۳ -

حل: A : دارای ماشین شخصی   B : دارای منزل شخصی

$$P(A) =/۶$$

$$P(B) =/۳$$

$$P(A \cap B) =/۲$$

$$P(A\Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) =/۶ +/۳ - ۲ \times/۲ =/۵$$

۳۷- گزینه ۱-

حل: فضای نمونه آزمایش انتخاب دو مهره از ۶ مهره موجود است.

$(۱,۲) \rightarrow$ مجموع دو عدد ۳

$(۱,۵)(۲,۴) \rightarrow$ مجموع دو عدد ۶ $\qquad \rightarrow P(A) = \frac{۵}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۱}{۳}$

$(۳,۶)(۴,۵) \rightarrow$ مجموع ۹

توجه شود در این مسأله فرض بر این است که ترتیب انتخاب شدن مهم نباشد که اگر ترتیب انتخاب شدن مهم باشد جواب احتمال فرق نمی کند.

$$P(A) = \frac{۱۰}{P_۲^۶} = \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$$

۳۸- گزینه ۱-

حل:

$$P(A') = /۴ \rightarrow P(A) = /۶$$
$$P(B') = /۲ \rightarrow P(B) = /۸$$
$$P(A \cup B) = /۹ \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = /۹$$
$$\rightarrow /۶ + /۸ - P(A \cap B) = /۹ \rightarrow P(A \cap B) = /۵$$
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = /۶ - /۵ = /۱$$

۳۹- گزینه ۴ -

حل: مسأله انتخاب ۴ مهره از ۱۲ مهره می باشد. برای آنکه در ۴ مهره انتخابی هر سه رنگ وجود داشته باشد باید حالات زیر رخ دهد :

(دوسفید یک قرمز یک سیاه)+ (دو سیاه یک قرمز یک سفید)+(دوقرمز یک سیاه یک سفید)

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۲}{۴}} = \frac{۶}{۱۱}$$

۴۰- گزینه ۳-

حل:فضای نمونه ی یک خانواده ی n فرزندی ۲^n عضو دارد که از این تعداد دو حالت آن (همه پسر یا همه دختر) است که جنسیت همه فرزندان یکسان است.

$$\rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۲^{n}} < /۰۱$$

$$\rightarrow ۲^{n} > ۲۰۰ \ \rightarrow n \text{کم ترین مقدار} = ۸$$

۴۱- گزینه ۴-

حل: فضای نمونه آزمایش ۳۶ عضو دارد .

A: **هر دو تاس عددی یکسان باشد**

$$A = \{(۱,۱)(۲,۲) \ldots (۶,۶)\} \rightarrow \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

B: **جمع دو تاس عدد ۷ باشد**

$$B = \{(۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱)\} \rightarrow P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

C: **ضرب دو تاس عدد اول باشد**

$$C = \{(۱,۲)(۲,۱)(۱,۳)(۳,۱)(۱,۵)(۵,۱)\} \rightarrow P(C) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

۴۲- گزینه ۱-

حل:

یادآوری : $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$\rightarrow (A \cup B)\Delta(A - B) = [(A \cup B) \cup (A - B)] - [(A \cup B) \cap (A - B)] = (A \cup B) - (A - B)$$
$$= B$$

۴۳- گزینه ۴-

حل : مانند قسمت ج مثال ۳-۳ فصل ۱

$$P(A) = \frac{۵! \times ۵! \times ۲}{۱۰!} = \frac{۱}{۱۲۶}$$

۴۴- گزینه ۱-

حل:

۱۲=۳×۴= کل اعدا دو رقمی

۶=۳×۲= کل اعدا دو رقمی کوچکتر از ۴۰ $\rightarrow P(A)=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$

۴۵- گزینه ۴-

حل:

مضارب ۴ =$\{۱۲,۲۴,۵۲\} \rightarrow P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

۴۶- گزینه ۱-

حل: مسأله انتخاب ۳ سیب از ۱۷ سیب است . برای آنکه تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد باید حالات زیر رخ دهد .

$$P(A)=\frac{\binom{۱۲}{۳}\binom{۵}{۰}+\binom{۱۲}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}}=\frac{۵۵}{۶۸}$$

تعداد خراب	تعداد سالم
۰	۳
۱	۲

۴۷- گزینه ۱-

حل: مسأله، قرار گرفتن ۶ نفر در یک ردیف است که!۶ حالت وجود دارد. دو برادر در یک گروه قرار داده که این دو نفر می تواند در داخل گروه به !۲ و با بقیه ی ۴ نفر به !۵ حالت جابجا شوند در نتیجه داریم :

$$P(A)=\frac{۲!\times ۵!}{۶!}=\frac{۱}{۳}$$

۴۸- گزینه ۳-

حل:دو برادر می توانند به !۲ طریق در اول و آخر صف قرار گیرند. ۴ نفر باقی مانده نیز به !۴طریق در بقیه ی جاها قرار می گیرند:

$$P(A)=\frac{۲!\times ۴!}{۶!}=\frac{۱}{۱۵}$$

۴۹- گزینه ۱-

حل:

A :مجموع اعداد رو شده در تاس ۸ شود B :اعداد رو شده هر دو تاس زوج

$$A=\{(۲,۶)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲)\}$$
$$B=\{(۲,۲)(۲,۴)(۲,۶)(۴,۲)(۴,۶)(۴,۴)(۶,۲)(۶,۴)(۶,۶)\}$$
$$A\cap B=\{(۲,۶)(۴,۴)(۶,۲)\}$$
$$\rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

۵۰- گزینه ۳-

حل: مجموع دو تاس می تواند از ۲ تا ۱۲ باشد

A : مجموع دو تاس کمتر از ۱۰

$$P\left(\text{مجموع دو تاس کمتر از ۱۰}\right)=۱-P\left(\text{مجموع دو تاس بزرگتر مساوی ۱۰}\right)=۱-\frac{۶}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$$

$$\text{مجموع تاس بزرگتر مساوی ۱۰}=\{(۴,۶)(۶,۴)(۵,۵)(۵,۶)(۶,۵)(۶,۶)\}$$

۵۱- گزینه ۱-

حل: مانند سؤال ۱۸

A : شماره ۳ مهره پشت سرهم

$$A=\{(۱,۲,۳)(۲,۳,۴)(۳,۴,۵)(۴,۵,۶)(۵,۶,۷)(۶,۷,۸)(۷,۸,۹)(۸,۹,۱۰)\}$$
$$P(A)=\frac{۸}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱}{۱۵}$$

۵۲- گزینه ۲-

حل:در بیرون آمدن سه مهره حالات زیر رخ می دهد .

حاصل ضرب زوج → هر سه زوج

حاصل ضرب فرد → هر سه فرد

حاصل ضرب زوج → دو عدد زوج و یک عدد فرد

حاصل ضرب زوج → دو عدد فرد و یک عدد زوج

$$\rightarrow \mathrm{P}\left(\text{حاصل ضرب زوج}\right) = ۱ - \mathrm{P}\left(\text{حاصل ضرب فرد}\right) = ۱ - \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

۵۳- گزینه ۴-

حل: مسأله قرار دادن ۵ رقم در ۶ خانه می باشد که تعداد حالات کل برابر است با $\binom{۶}{۵}۵!$

حالت مطلوب:باید رقم های زوج همواره کنار هم باشند پس اعداد ۲ و۴ را در یک گروه قرار داده که این اعداد می حالت در گروه جابجا شوند. همچنین باید این ۵ رقم در خانه های متوالی قرار گیرند. یعنی در خانه های !۲تواند به در نتیجه داریم: (۲,۳,۴,۵,۶) یا (۱,۲,۳,۴,۵)شماره ی

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\binom{۲}{۱}۲! \times ۴!}{\binom{۶}{۵}۵!} = \frac{۲}{۱۵}$$

۵۴- گزینه ۳-

حل: مثال نقص برای گزینه ۳

$\mathrm{A} = \{۲,۳\}$

$\mathrm{B} = \{۴,۳\}$ $\quad\quad \rightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \mathrm{B} \cap \mathrm{C} =$

$\{۳\}$ ولی $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$

$\mathrm{C} = \{۵,۳\}$

۵۵- گزینه ۲-

حل:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۱}{۷}$$

۵۶- گزینه ۲-

حل:

A : حداقل یک بار ۳ ظاهر شود　　B : حداقل یک بار ۶ ظاهر شود

$$n(A\cap B)=n(S)-n(A\cap B)'=$$

$$\rightarrow n(S)-n(A'\cup B')=n(s)-[n(A')+n(B')-n(A'\cap B')]=$$

$$۹\times ۱۰\times ۱۰-[۸\times ۹\times ۹+۸\times ۹\times ۹-۷\times ۸\times ۹]=۹۰۰-۸۴۸=۵۲$$

۵۷- گزینه ۳-

حل: مجموع دو کارت وقتی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشد.

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۳+۳}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۵۸- گزینه ۳-

حل:

$$A-\{B\}=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}-\{\{a,b\}\}=\{a,b,\{a\}\}$$

تعداد زیر مجموعه ها $=۲^۳=۸\rightarrow$ تعداد زیر مجموعه های سره غیر تهی $=۲^۳-۲=۶$

۵۹- گزینه ۱-

حل:

یادآوری : $A\cap B'=A-B \quad , \quad B\cap A'=B-A=A'-B'$

$$A\cup(A\cap B)=A \qquad \rightarrow B\cap A'=B-A=A'-B''$$

$$(B\cap A)\cup(B-A)=B$$

۶۰-گزینه ۱-

حل:

A : مضرب ۵　　B : مضرب ۶

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$\left(\left[\frac{۶۰۰}{۵}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۵}\right]\right)+\left(\left[\frac{۶۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]-۲\left(\left[\frac{۶۰۰}{۳۰}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]\right)\right)$$

تعداد کل اعداد ۵۰۰

$$= \frac{۱۰۰ + ۸۴ - ۲ \times ۱۷}{۵۰۰} = /۳$$

۶۱- گزینه ۴-

حل:

$$\left(A \cap (B - C)\right) - (A \cap B \cap C) = \left(A \cap B \cap \acute{C}\right) - (A \cap B \cap C)$$
$$= \left(A \cap \acute{C}\right) - (A \cap C) = A \cap \acute{C}$$

یادآوری: اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه : $A \cap B = A$

۶۲- گزینه ۱-

حل: این مجموعه ۳ عضو دارد در نتیجه مجموعاً $۸ = ۲^{۳}$ زیر مجموعه دارد (رد گزینه های ۳ و۴)

زیر مجموعه های صفر عضوی $= \emptyset$

مجموعه های یک عضوی $= \{a\}, \{b\}, \{\{a,b\}\}$

زیر مجوعه های دو عضوی $= \{a,b\}, \{a,\{a,b\}\}, \{b,\{a,b\}\}$

زیر مجموعه های سه عضوی $= \{a,b,\{a,b\}\}$

در نتیجه ۴ مجموعه زیر وجود دارد که عضو $\{a,b\}$ را ندارد:

$$\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$$

۶۳- گزینه ۳-

حل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۴}}{\binom{۹}{۶}} = \frac{۵}{۱۴}$$

۶۴- گزینه ۲-

حل:

A **: مجموع دو کارت ۱۱**

$A = \{(۲,۹)(۳,۸)(۴,۷)(۶,۵)\}$

$$\rightarrow P(A) = \frac{۴}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

توجه شود که در حل این مسئاله ترتیب انتخاب شدن اهمیت ندارد. در صورتی که ترتیب انتخاب شدن مهم باشد جواب تغییری نخواهد کرد.

$$P(A) = \frac{۸}{۹ \times ۸} = \frac{۱}{۹}$$

۶۵- گزینه ۱-

$$A_۱ = [-۱,۴]$$
$$A_۲ = \left[-۲, \frac{۷}{۲}\right] \qquad \rightarrow A_۲ \cap A_۵ = [-۲,۲]$$
$$A_۵ = [-۵,۲] \qquad A_۱ \cap A_۷ = [-۱,۱]$$
$$A_۷ = [-۷,۱] \qquad (A_۲ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷) = [-۲,-۱) \cup (۱,۲]$$

۶۶- گزینه ۲-

حل:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = /۲$$
$$\rightarrow /۶ - P(A \cap B) = /۲ \rightarrow P(A \cap B) = /۴$$
$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = /۷ - /۴ = /۳$$

۶۷- گزینه ۴-

حل:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{۳ \times ۵}{۲۸} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

۶۸- گزینه ۳-

حل: فضای نمونه مسأله $۲^۴ = ۱۶$ حالت دارد

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

۶۹- گزینه ۳-

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۰}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۱۲+۳}{۲۱}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

۷۰- گزینه ۳-

حل:

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۳}{۷}$$

۷۱- گزینه ۴-

حل:

$$P\left(\text{اولی سفید و دومی سیاه}\right)$$
$$=\left(\text{اولی سفید و دومی سیاه وسومی سیاه}\right)+P\left(\text{اولین وسفید دومی سفید و سومی سیاه}\right)=P$$
$$\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۶۰+۳۰}{۷\times۸\times۶}=\frac{۹۰}{۸\times۷\times۶}=\frac{۱۵}{۵۶}$$

۷۲- گزینه۲-

حل: تعداد کل کلمه های ساخته شده برابر است با $\frac{۶!}{۳!}$

هرسه A را دریک گروه قرار داده و این گروه با سه حرف دیگر به !۴جابجا می شوند

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!}{\frac{۶!}{۳!}}=\frac{۱}{۵}$$

۷۳- گزینه ۳-

حل:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}}{۲^{۴}}=\frac{۶+۴}{۱۶}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

۷۴- گزینه ۳-

حل: باید هر دو کارت سفید یا هر دو کارت سبز باشد.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

یا

$$P(A)=\frac{۴\times۳+۳\times۲}{۷\times۶}=\frac{۱۸}{۴۲}=\frac{۳}{۷}$$

۷۵- گزینه ۳-

حل: مجموع دو عدد رو شده باید ۴ یا ۸ یا ۱۲ باشد.

A : مجموع مضرب۴

$$A=\{(۱,۳)(۲,۲)(۳,۱)(۲,۶)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲)(۶,۶)\}$$

$$\rightarrow P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

۷۶- گزینه ۱-

حل: مسأله مشابه مرتب کردن اعداد ۱تا ۵ در یک ردیف به طوری که اعداد زوج کنار هم نباشند.(کل حالات مسأله !۵ است)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲!\binom{۳}{۳}۳!}{۵!}=/۱$$

۷۷- گزینه ۱-

حل:

$$A\cap \acute{B}=B\cap \acute{A}\quad\rightarrow A-B=B-A$$

$$\rightarrow A-(A\cap B)=B-(A\cap B)\rightarrow A=B$$

$$A\Delta B-A=A\Delta B-[(A\Delta B)\cap A]=(A\Delta B)-(A-B)=B-A=\emptyset$$

۷۸- گزینه ۴-

حل: A و $\{A\}$ با هم اشتراکی ندارند

$A-\{A\}=A\rightarrow$ مقدار زیر مجموعه های سره غیر تهی $=۲^{۴}-۲=۱۴$

۷۹- گزینه ۲-

حل: بااستفادهاز قوانین جبر مجموعه ها ساده کنیم :

$C \cup A' \cup B' = C \cup (A \cap B)'$

$\big(C \cup (A \cap B)\big)' = C' \cap (A \cap B) = (A \cap B) - C$ گزینه ۴

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ سوال است.

۸۰- گزینه ۳-

حل: برای پیدا کردن تعداد اعدادی که نه مضرب ۴باشند نه مضرب ۵ ابتدا عددهایی که مضرب ۴ یا ۵ است را بدست می آوریم و از کل عددها کم می کنیم داریم :

کل عدد ها $= ۵۰۰ - ۲۰۱ + ۱ = ۳۰۰$

$A =$ مضارب۴ $: \left[\frac{۵۰۰}{۴}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] = ۱۲۵ - ۵۰ = ۷۵$

$B =$ مضارب ۵ $: \left[\frac{۵۰۰}{۵}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۵}\right] = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$

$A \cap B :$ مضارب ۲۰ $: \left[\frac{۵۰۰}{۲۰}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right] = ۲۵ - ۱۰ = ۱۵$

$\rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = ۷۵ + ۶۰ - ۱۵ = ۱۲۰ \rightarrow A' \cap B' = ۳۰۰ - ۱۲$

$= ۱۸۰$

حال احتمال خواسته شده را بدست می آوریم : $۰/۶ = \frac{۱۸۰}{۳۰۰}$

۸۱- گزینه ۴-

حل: می دانیم عددی مضرب ۶ است که مضرب ۲باشد و هم مضرب ۳. اگر چهار رقم ۰,۱,۲,۳ کنار هم قرار داده شوند عدد حاصل حتماً مضرب۳ خواهد (زیرا عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر۳ بخش پذیر باشد.)پس کافی است تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۲(زوج) را حساب کنیم در نتیجه داریم :

الف) اگر رقم یکان صفر باشد $۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$

$\rightarrow n(A) = ۶ + ۴ = ۱۰$ اگر رقم یکان ۲ باشد $۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴$

از طرفی تعداد اعداد ۴ رقمی که با کنار هم قرار دادن ارقام ۰,۱,۲,۳ حاصل می شود برابر است با: ۱۸

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸ \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$$

۸۲- گزینه ۲-

حل:

$$B' \subseteq A' \rightarrow A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A \quad , \qquad A \cup B = B$$

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B = B$$

۸۳- گزینه۳-

حل:

A : **روزنامه ی الف** $\quad B$: **روزنامه ی ب**

$$P(A) = /۳$$

$$P(B) = /۲۵$$

$$P(A \cap B) = /۰۹$$

$$P\left(A' \cap B'\right) = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - [(P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= ۱ - [/۳ + /۲۵ - /۰۹] = ۱ - /۴۶ = /۵۴$$

۸۴- گزینه ۲-

حل:

A : **مضرب ۴** $\quad B$: **مضرب ۶**

$$n(S) = ۵۰۰$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{۵۰۰}{۴}\right] - \left[\frac{۵۰۰}{۱۲}\right]}{۵۰۰} = \frac{۱۲۵ - ۴۱}{۵۰۰} = \frac{۸۴}{۵۰۰} = /۱۶۸$$

۸۵- گزینه ۱-

حل: B زیر مجموعه ی C نیست زیرا $۲ \notin C$

۸۶- گزینه ۴-

$A_{۳} = \left(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right)$ $\quad$ $A_{۳} \cup A_{۶} = (-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$

$A_{۶} = (-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

$(A_{۳} \cup A_{۶}) - A_{۳} = (-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}) - (-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}) = [\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

۸۷- گزینه ۲-

حل:

A : عدد بر ۷ بخش پذیر باشد $\quad$ B : عدد بر ۱۱ بخش پذیر باشد

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]}{۳۰۰} - \frac{\left[\frac{۳۰۰}{۷۷}\right]}{۳۰۰} = \frac{۴۲}{۳۰۰} - \frac{۳}{۳۰۰} = \frac{۳۹}{۳۰۰} = /۱۳$$

۸۸-گزینه ۴-

حل:تعداد کل اعداد سه رقمی برابر است با ۹۰۰ = ۱۰ × ۱۰ × ۹

برای بدست آوردن تعداد اعددا سه رقمی که درآنها حداقل یک بار عدد ۲ وجود دارد کل اعداد را منهای اعـداد سه رقمی فاقد ۲ می کنیم یا به عبارتی داریم :

$$P(A) = ۱ - P\left(A'\right) = ۱ - \frac{۸\times ۹\times ۹}{۹\times ۱۰\times ۱۰} = ۱ - /۷۲ = /۲۸$$

۸۹- گزینه ۲-

حل:

$A_{۱} = \{m \in Z| -۱ \leq m \leq ۷\}$

$A_{۲} = \{m \in Z|-۲ \leq m \leq ۶\}$

$\downarrow$

$A_{۸} = \{m \in Z|-۸ \leq m \leq ۰\}$

$$\bigcup_{i=۱}^{۸} A_I - \bigcap_{i=۱}^{۸} A_i = \{-۸,-۷,-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸\}$$

۹۰- گزینه۳-

حل:

A : تاجر   B : اولین بار سفر

$$n(S) = ۷۲$$
$$n(A) = ۲۳$$
$$n(B) = ۱۲$$
$$n(A \cap B) = ۸$$
$$P\left(A' \cap B'\right) = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= ۱ - \left[\frac{۲۳}{۷۲} + \frac{۱۲}{۷۲} - \frac{۸}{۷۲}\right] = ۱ - \frac{۲۷}{۷۲} = \frac{۴۵}{۷۲} = \frac{۵}{۸}$$

۹۱- گزینه ۳-

حل: برای آنکه مجموع شماره های دو مهره فرد باشد می بایست یک عدد زوج و یک فرد انتخاب شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}} = /۶$$

۹۲- گزینه ۳-

حل:

$$A_۳ = \{m \in Z | m \geq -۳, ۲^m \leq ۳\} \qquad A_۳ = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱\}$$
$$A_۴ = \{m \in Z | m \geq -۴, ۲^m \leq ۴\} \qquad A_۴ = \{-۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$$
$$A_۳ \cap A_۴ = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱\}$$

$A_۳ \cap A_۴$ دارای ۵ عضو و ۳۲ زیر مجموعه است

۹۳- گزینه ۱-

حل:

$$\left(B - A'\right) - A = \left(B \cap A''\right)' - A = \left(B' \cup A'\right) - A$$
$$= \left(B' \cup A'\right) \cap A' = \left(B' \cap A'\right) \cup \left(A' \cap A'\right)$$

$= (B \cup A)'$

در نتیجه متمم $(A \cup B)'$ برابر $(A \cup B)$ خواهد بود .

۹۴- گزینه ۲-

حل: فرض می کنیم ترتیب انتخاب شدن مهم نباشد.

A : مجموع دو مهره مضرب ۳

$$A = \{(۱,۲)(۱,۵)(۲,۴)(۳,۶)(۵,۴)\}$$
$$\to P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{\binom{۶}{۵}} = \frac{۱}{۳}$$

۹۵- گزینه ۴-

حل: فضای نمونه آزمایش $۳۲ = ۲^۵$ عضو دارد

A : لااقل ۲ دختر وجود داشته باشد

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{\binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۱}}{۳۲} = ۱ - \frac{۶}{۳۲} = \frac{۲۶}{۳۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$$

۹۶- گزینه ۴-

حل:

$$A \cap B' = A - B$$
$$(A - B) - (B - A) = (A - B) - [(A - B) \cap (B - A)] = A - B$$

$A - B$ و $B - A$ اشتراکی با هم ندارند

۹۷- گزینه ۳-

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۳}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۵}} = \frac{۳۵}{۱۳۲}$$

۹۸- گزینه ۱-

حل: اگر $B \subseteq A$ باشد آنگاه $P(A \cap B) = P(A)$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$$

۹۹- گزینه ۳-

حل:فضا نمونه مسأله $۲۴ = ۶ \times ۲ \times ۲$ عضو دارد.

$\{(۶.ر.پ)(۳.ر.پ)(۶.پ.ر)(۳.پ.ر)(۶.ر.ر)(۳.ر.ر)\}$: حالات مطلوب

برای بدست آوردن تعداد حالات مطلوب می توان گفت که تاس در ۲ حالت مضرب ۳ ظاهر می شود.پرتاب دو سکه

۴ حالت دارد که از این ۴ حالت آن حداقل یک بار رو ظاهر می شود که حالات برابر است با $۶ = ۲ \times ۳$

$$\rightarrow P(A) = \frac{۶}{۲۴} = \frac{۱}{۴}$$

۱۰۰- گزینه ۴-

حل: لا اقل یکی از موش های انختابی سفید است.

$$P(A) = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = ۱ - \frac{۴}{۲۳} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

۱۰۱- گزینه ۲

حل: فضای نمونه مسأله $۱۲^۴$ عضو دارد . از قاعده متمم استفاده می کنیم . متمم این که حداقل ۲ نفر از ۴ نفر ماه تولد یکسانی داشته باشند این است که هیچ کدام در یک ماه بدنیا نیامده باشند.

A : ماه تولد حداقل ۲ نفر آنها یکسان باشد

$$P(A) = ۱ - P\left(A'\right) = ۱ - \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲} = ۱ - \frac{۵۵}{۹۶} = \frac{۴۱}{۹۶}$$

۱۰۲- گزینه ۱-

حل:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۱}{۶}$$

۱۰۳- گزینه ۳-

حل:

$$B = \{X \in R;\ X^۲ - ۳X + ۲ = ۰\} \rightarrow B = \{۱,۲\}$$

$\rightarrow A - B = \{\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\} \rightarrow$ تعداد زیر مجموعه سره غیر تهی $= ۲^۳ - ۲ = ۶$

۱۰۴- گزینه ۴-

$$P(A) = ۲P(B) = /۸$$
$$P(A) = /۸ \quad , P(B) = /۴$$
$$P(A \Delta B) = /۶ \rightarrow P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = /۶ \rightarrow /۸ + /۴ - ۲P(A \cap B) = /۶$$
$$\rightarrow P(A \cap B) = /۳$$
$$P\left(B' \cap A\right) = P\left(A \cap B'\right) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = /۸ - /۳ = /۵$$

۱۰۵- گزینه ۲-

حل:

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۲۰}{۴۵} = \frac{۴}{۹}$$

۱۰۶- گزینه ۳-

حل :

پیشامد مطلوب : $A = (۱/۲\ , ۲/۱)$ فضای نمونه ای : $S = (۱/۲\ , ۳/۷)$ و $P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{۲/۱ - ۱/۲}{۳/۷ - ۱/۲}$

$$= \frac{/۹}{۲/۵} = \frac{۹}{۲۵} = \frac{۳۶}{۱۰۰} = /۳۶$$

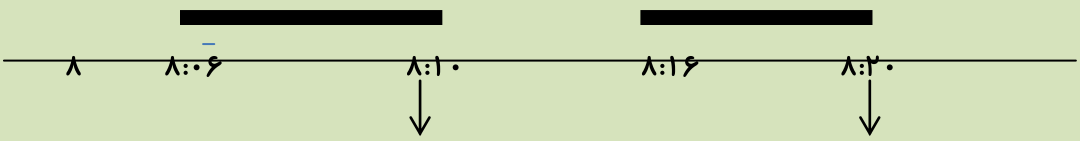
۱۰۷- گزینه ۴-

حل:

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(S)} = \frac{۲.۱۹ - ۱.۸}{۲.۴۵ - ۱.۸} = \frac{۳۹}{۶۵} = /۶$$

۱۰۸- گزینه ۲-

حل: فرد مورد نظر باید در یکی از بازه های زمانی که هاشور خورده است مقابل تابلو قرار گیرد تا کمتر از ۴ دقیقه برای رؤیت تابلو معطل شود.



لحظه رویت تابلو   لحظه رویت تابلو

$$P(A) = \frac{۲ \times ۴}{۲۰} = \frac{۲}{۵}$$

۱۰۹- گزینه ۱-

حل:

شعاع دایره $= R \rightarrow$ **مساحت فضای نمونه** $= \pi R^{۲}$

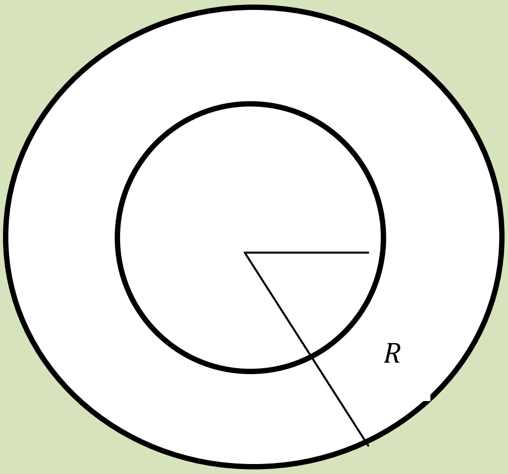
قطر مربع $= ۲R \rightarrow$ **ضلع مربع** $= \sqrt{۲}\,R \rightarrow$ **مساحت فضای پیشامد** $= ۲R^{۲}$

$$\rightarrow P = \frac{\text{مساحت پیشامد}}{\text{مساحت فضای نمونه ای}} = \frac{۲R^{۲}}{\pi R^{۲}} = \frac{۲}{\pi}$$

۱۱۰-گزینه ۳

حل: برای اینکه نقطه به مرکز نزدیکتر باشد تا محیط، باید درون دایره ای با همان مرکز و شعاع $\frac{R}{۲}$ قرار گیرد.

$$P = \frac{\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}}{\pi R^{۲}} = \frac{۱}{۴}$$



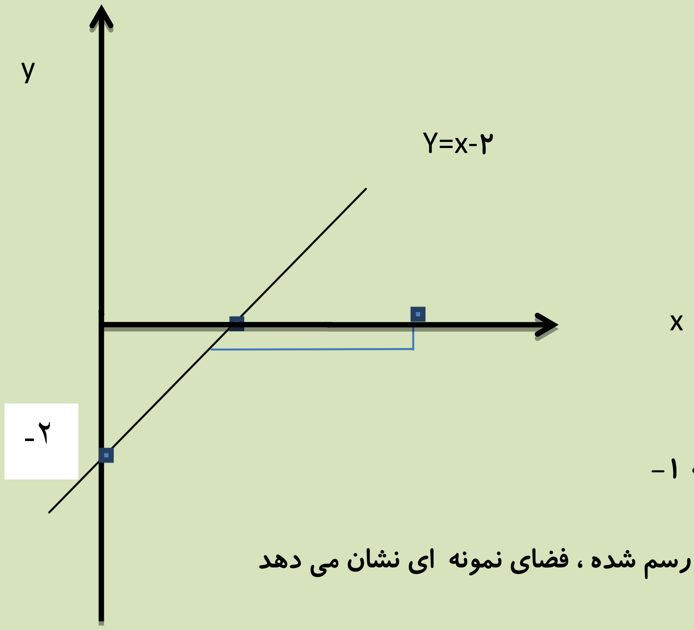
۱۱۱-گزینه ۲-

حل: بازه ی [۰,۴] را روی محور x ها و بازه ی [-۱,۰] را روی محور y ها در دستگاه مختصات دکارتی و هم چنین طول نقطه ی a را x و طول نقطه ی b را y در نظر میگیریم.

فاصله ی دو نقطه ی a و b برابر $x - y$ است ، بنابراین داریم :

$$x - y \leq ۲ \rightarrow y \geq x - ۲$$

$$P(x-y\leq ۲) =\rightarrow \frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲+۱)\times ۱}{۴\times ۱} = \frac{۳}{۸}$$



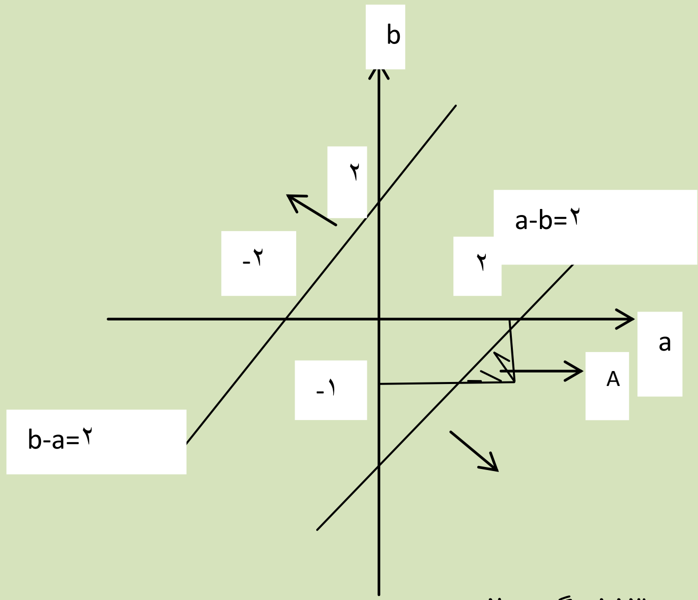
۱۱۲- گزینه ۱-

حل:مستطیل رسم شده ، فضای نمونه ای نشان می دهد

$$|a-b| > ۲ \quad \rightarrow \quad a-b > ۲ \ \text{یا}\ b-a > ۲$$

حال به رسم این روابط می پردازیم :

$$P(A) = \frac{\text{مساحت هاشور خورده ی A}}{\text{مساحت فضای نمونه ای}} = \frac{\frac{۱\times۱}{۲}}{۲\times۱} = \frac{۱}{۴}$$



۱۱۳- گزینه ۲-

حل: یک ساعت ۶۰ دقیقه است . زمان رسیدن نفر اول را x و نفر دوم را y در نظر میگیریم:

$۰ < x < ۶۰$

$۰ < y < ۶۰$

$|x - y| < ۶ \rightarrow -۶ < x - y < ۶$: فضای پیشامد

$$P = \frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{۶۰ \times ۶۰ - ۲\frac{۵۴ \times ۵۴}{۲}}{۶۰ \times ۶۰} = ۱ - \frac{۵۴ \times ۵۴}{۶۰ \times ۶۰} = /۱۹$$

۱۱۴- گزینه ۲-

حل: شخص اول در زمان x و شخص دوم در زمان y در محل حاضر می شوند

باید $|x - y| < ۱۰$ **باشد پس** $x - ۱۰ < y < x + ۱۰$

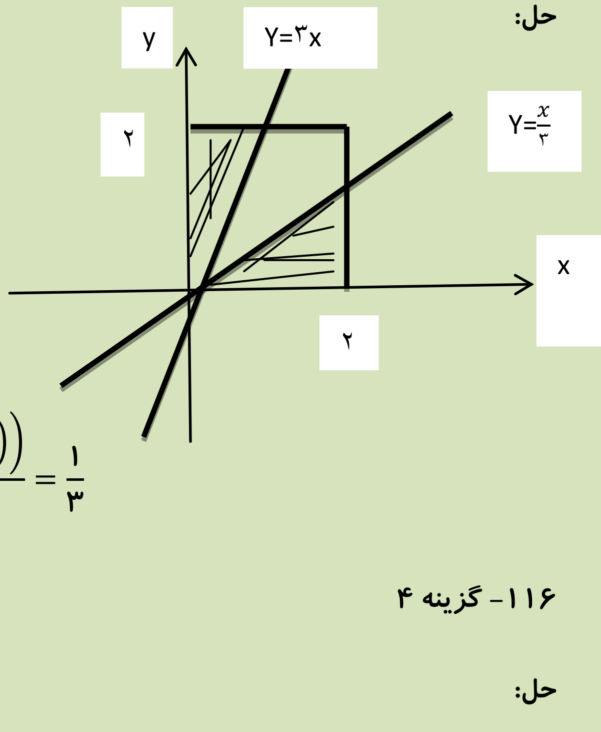
$۷:۳۰ < x < ۹ \quad , \quad ۸ < y < ۸:۳۰$

احتمال مورد نظر $= \frac{۲۰ \times ۳۰}{۹۰ \times ۳۰} = \frac{۲}{۹}$

۱۱۵-گزینه ۴-

حل:

$\frac{y}{x} < \frac{۱}{۳}$ **یا** $\frac{x}{y} < \frac{۱}{۳} \rightarrow \{y < \frac{x}{۳} \ , y > ۳x\}$



$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{۲\left(\frac{۱}{۲}\left(۲ \times \frac{۲}{۳}\right)\right)}{۴} = \frac{۱}{۳}$$

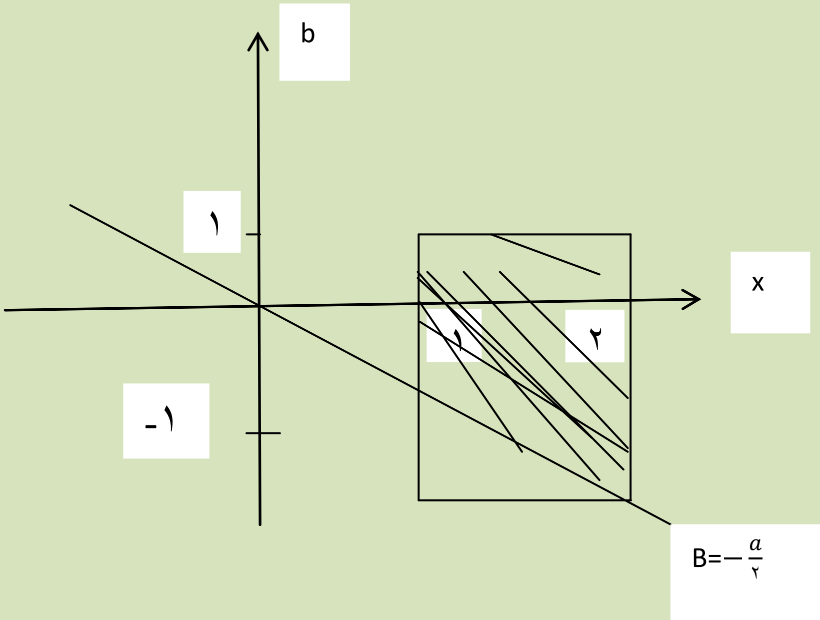
۱۱۶- گزینه ۴

حل:

$ax + b = ۰ \rightarrow x = -\frac{b}{a} < \frac{۱}{۲}$

$\rightarrow -b < \frac{a}{۲} \rightarrow b > -\frac{a}{۲}$

$$P(A)=\frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت مستطیل}}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(۲+\frac{۲}{۳}\right)\times ۱}{۲\times ۱}=\frac{۷}{۸}$$



۱۱۷- گزینه ۱ -

حل: می بایست مرکز سکه درون مربع به ضلع ۲ قرار گیرد.

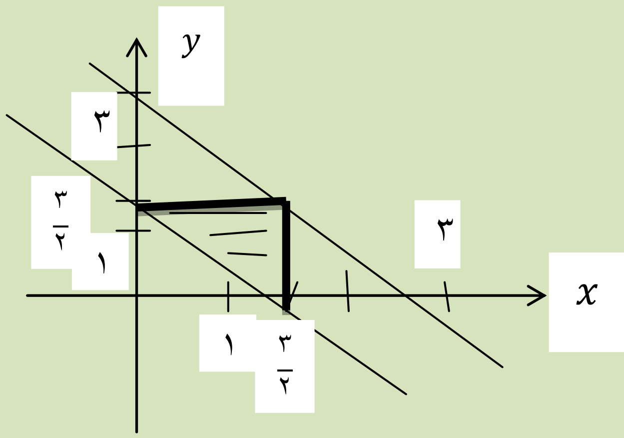
$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{۲^۲}{۶^۲}=\frac{۱}{۹}$$

۱۱۸- گزینه ۴ -

حل: فرض می کنیم که طول یک ضلع x و ضلع دوم y باشد پس ضلع دوم $۳-x-y$ است. در این مثلث طول اضلاع مثبت بوده و طبق نامساوی مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

$$x>۰\,,y>۰\,,\quad ۳-x-y>۰\rightarrow x+y<۳$$

$$\begin{cases} x+y>۳-x-y \\ x+y-x-x>y \\ y+۳-x-y>x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+y>\frac{۳}{۲} \\ y<\frac{۳}{۲} \\ x<\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

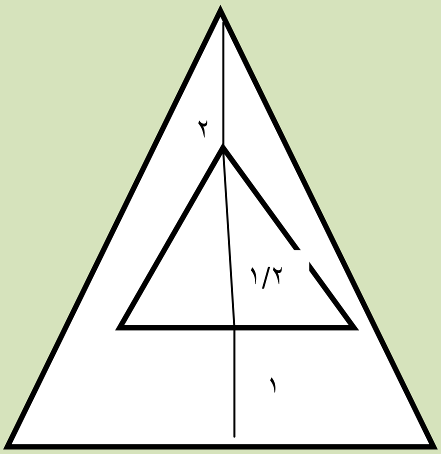


$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}}{\frac{۱}{۲}\,(۳)^{۲}} = \frac{۱}{۴}$$

۱۱۹- گزینه ۲

حل: مطابق شکل ، پیشامد مطلوب مثلثی متساوی الاضلاع به ارتفاع ۱۲ واحد است.دو مثلث مذکور با هم متشابه اند و نسبت مساحت آنها برابر مربع نسبت تشابه آن دو است پس :

$$P(A) = \frac{a_n}{a_s} = \left(\frac{۱۲}{۱۵}\right)^{۲} = \left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲} = \frac{۱۶}{۲۵} = /۶۴$$



۱۲۰-گزینه ۱-

حل: فضای نمونه ای مساحت مثلث است . در صورتی که پیشامد مورد نظریک خط است که فاقد مساحت می باشد بنابراین احتمال بسیار ناچیز است و آن را صفر در نظر میگیریم.

فصل سوم

احتمال شرطی و استقلال

۳-۱- مقدمه

احتمال شرطی یکی از مهم ترین مفاهیم نظریه ی احتمال می باشد که کاربرد بسیار زیادی در مسائل و تحلیل های احتمالی دارد.معمولاً کاربرد احتمال شرطی در نظریه ی احتمال را به دو دسته ی اصلی تقسیم می کنند :

الف) محاسبه ی احتمال پیشامدهایی که قسمتی از اطلاعات آن در دسترس می باشد و یا در طول زمان اطلاعات جدید و تاثیر گذاری در مورد احتمال وقوع پیشامد بدست می آید .

ب) محاسبه ی احتمال یک پیشامد در مواقعی که احتمال پیشامد مذکور به حالات مختلف بستگی دارد (احتمال پیشامد مذکور در حالات مختلف متفاوت است) (قانون اول بیز یا قاعده احتمال کل)

۳-۲- مفهوم احتمال شرطی

فرض کنید دو تاس را پرتاب می کنیم که شانس هر یک از ۳۶ نتیجه ممکن برای انجام این آزمایش یکسان می باشد. بنابراین احتمال هر یک از۳۶ نتیجه ممکن برابر $\frac{۱}{۳۶}$ می باشد. حال با توجه به این اطلاعات احتمال این که مجموع اعدادحاصل از پرتاب دو تاس برابر ۹ شود چقدر است ؟

همانطور که در فصل ۲ نشان داده شد محاسبه ی احتمال خواسته شده بسیار ساده است. در واقع از آنجایی که تعداد نتایج ممکن پیشامد مورد نظر ، ۴ نتیجه از فضای هم شانس ۳۶ حالته در آزمایش فوق می باشد،این احتمال برابر با $\frac{۴}{۳۶}$ می باشد.

$$\{(۳,۶)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۳)\}$$

حال فرض کنید اطلاعاتی از این مسأله معلوم شود و گفته شده است که تاس اول را پرتاب کرده ایم ونتیجه ی آن ۴ شده است . اکنون با داشتن این اطلاعات جدید ، احتمال این که مجموع اعداد حاصل از پرتاب دو تاس برابر ۹ شود، چقدر است ؟

برای پاسخ به این سئوال چنین اظهار می کنیم که اگر تاس اول منجر به نتیجه ی ۴ شود ، کل حالات ممکن برای انجام دو آزمایش، ۳۶ حالت ندارد ، بلکه ۶ حالت زیر خواهد داشت :

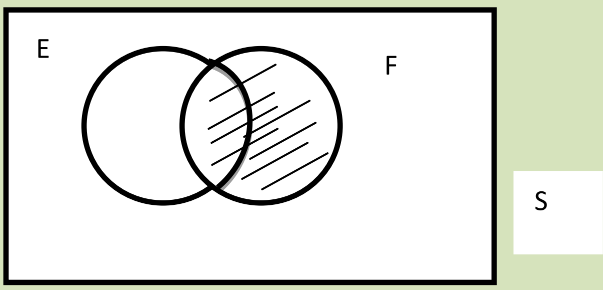
$$\{(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶)\}$$

هر یک از این نتایج دارای احتمال وقوع برابر می باشند واین بدان معنی است که اگر بدانیم که عدد تاس اول ۴ بوده است احتمال هر یک از نتایج بالا برابر با $\frac{۱}{۶}$ خواهد شد و در نتیجه احتمال اینکه مجموع پرتاب دو تاس ۹ باشد، برابر با احتمال این است که نتیجه (۴.۵) ظاهر شود که برابر با $\frac{۱}{۶}$ است .

همانطور که مشاهده می شود در صورتیکه در حین محاسبه ی احتمال، اطلاعاتی راجع به مسأله در اختیار ما قرار دهند ممکن است فضای نمونه آزمایش تغییر کرده و در نتیجه در برخی مواقع احتمال مود نظر نیز تغییر می کند . محاسبه ی احتمال در چنین شرایطی را احتمال شرطی می نامند و به صورت زیر بیان می شود . اگر E و F دو پیشامد از فضای نمونه باشند ، احتمال وقوع E در صورت وقوع F را احتمال شرطی E به شرط F می نامند و با نماد زیر نشان داده می شود .

$$P(E|F)$$

به شکل ۳-۱ توجه کنید



شکل ۳-۱ : تفسیر احتمال شرطی

اگر F اتفاق افتاده باشد ، در واقع فضای نمونه مسأله ما به مجموعه ی F کاهش یافته است .

بدیهی است که در چنین شرایطی E تنها زمانی می تواند اتفاق بیفتد که $E \cap F$ اتفاق بیفتد. (آن قسمت از E که در F هم هست). بنابراین اگر بدانیم F اتفاق افتاده است ، احتمال وقوع E برابر است با احتمال وقوع $(E \cap F)$ نسبت به احتمال وقوع F ، که در نتیجه تعریف زیر حاصل می شود .

$$\mathrm{P(E|F)} = \frac{\mathrm{n(E \cap F)}}{\mathrm{n(F)}} = \frac{\frac{\mathrm{n(E \cap F)}}{\mathrm{n(S)}}}{\frac{\mathrm{n(F)}}{\mathrm{n(S)}}} = \frac{\mathrm{P(E \cap F)}}{\mathrm{P(F)}} \quad \text{و} \quad \mathrm{P(F)} > ۰ \qquad (۱-۲)$$

به مثال ارائه شده در بخش ۳-۲ دوباره توجه کنید . فضای نمونه کاهش یافته ۶ عضو هم شانس دارد که از این ۶ عضو اگر بخواهد مجموع دو عدد ۹ شود باید حتماً عضو (۴.۵) رخ دهد که احتمال آن برابر $\frac{۱}{۶} = \frac{\mathrm{n(E \cap F)}}{\mathrm{n(F)}}$است.

مثال ۲-۱- دو تاس را پرتاب می کنیم . اگر بدانیم مجموع دو تاس ۶ شده است به چه احتمالی هر دو عدد ظاهر شده زوج می باشد.

حل: می خواهیم احتمال اینکه هر دو عدد ظاهر شده زوج شود به شرط آنکه می دانیم مجموع دو عدد تاس ۶ شده است را حساب کنیم . پیشامدهای E وF را به صورت زیر تعریف می کنیم .

E : هر دو عدد ظاهر شده زوج باشد

F (اطلاعات جدید) : مجموع دو تاس ۶ شده است .

فضای نمونه کاهش یافته ی F به صورت روبرو است :

$$F = \{(۱,۵)(۲,۴)(۳,۳)(۴,۲)(۵\,,۱)\}$$

در این فضا ۵ عضو هم شانس وجود دارد که اگر بخواهد هر دو عدد زوج باشد باید عضوهای(۲.۴) و (۴.۲) رخ دهد که احتمال آن برابر است با :

$$P(E|F) = \frac{۲}{۵}$$

نکته ۲-۱-اگر E زیر مجموعه ی F باشد آنگاه :

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = ۱$$

نکته ۲-۲- اگر E و F پیشامدهای ناسازگار باشند ، آنگاه :

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\cdot$$

نکته ۲-۳- احتمال شرطی در واقع همان احتمال معمولی است که در آن فضای نمونه مسأله تغییر کرده است . بنابراین تمامی قوانین و گزاره های حاصل از اصول احتمال (قوانین جابجایی ، پخشی ، دمورگان و...) در احتمال شرطی نیز برقراراند . به طور مثال داریم :

۱) $P(E|F)+P\left(\acute{E}\middle|F\right)=۱$

۲)$P(E_۱\cup E_۲|F)=P(E_۱|F)+P(E_۲|F)-P(E_۱\cap E_۲|F)$

در بسیاری از مسائل دانش آموزان در نوشتن $P(E|F)$ دچار اشتباه می شوند که این ناشی از عدم درک صحیح از مفاهیم احتمال شرطی می باشد. برای جلوگیری از این اشتباهات مثال هایی ارائه می شود.

مثال ۲-۲- عبارت معادل هر یک از جملات زیر را تعیین کنید .

الف) ۳۰درصد از مردان ، سیگاری هستند .

حل: عبارت فوق بیان کننده ی آن است که در جامعه ی کاهش یافته ی مردان (تمام مردان جامعه در یک محل جمع شده اند) ۳۰ درصد آنها سیگاری و ۷۰ درصد غیر سیگاری هستند. در واقع این احتمال ۳۰٪ ، در جامعه ی کاهش یافته ی مردان است یعنی :

$$P\left(\text{سیگاری}\middle|\text{مرد}\right)=/۳$$

ب) ۱۰درصد از سیگاری ها به بیماری A مبتلا می شوند .

حل: عبارت فوق بیان کننده ی آن است که در جامعه ی کاهش یافته ی سیگاری ها (همه ی سیگاری ها در یک محل جمع شده اند) ۱۰ درصد آنها به بیماری A مبتلا می شوند و ۹۰ ٪ آنها سالم هستند یعنی:

$$P\left(A\ \text{بیماری}\middle|\text{سیگاری}\right)=/۱$$

ج) ۱۵ درصد از افراد جامعه ، مردان سیگاری هستند.

حل: عبارت فوق بیان کننده ی آن است که در کل جامعه (نه جامعه کاهش یافته) ۱۵ درصد هستند که مرد هستند و هم سیگاری یعنی :

$$P\left(\text{مرد} \cap \text{سیگاری}\right) = /۱۵$$

د) ۸ درصد غیر سیگاری ها به بیماری A مبتلا می شوند .

حل: طبق توضیحات مثال های قبل داریم :

$$P\left(A \text{ بیماری} \,\middle|\, \text{غیر سیگاری}\right) = /۰۸$$

ه) ۶۰ درصد از پسران در یک کلاس و ۳۰ درصد از دختران در یک کلاس در آزمونی قبول شده اند.

حل:

$$P\left(\text{قبول} \,\middle|\, \text{پسر}\right) = /۶ \quad , \quad P\left(\text{قبول} \,\middle|\, \text{دختر}\right) = /۳$$

و) دو تاس را پرتاب کرده ایم اگر مجموع دو عدد کمتر از ۷ باشد ،احتمال آن را بیابید که هر دو عدد اول باشند ؟

حل: هدف این قسمت حل این مسأله نیست. بلکه هدف، نوشتن صحیح عبارات شرطی است که داریم :

$$P\left(\text{هر دو عدد اول} \,\middle|\, \text{مجموع دو تاس کم تر از ۷}\right)$$

ز) ۶۰ درصد قبولی های یک کلاس پسر هستند

حل: این عبارت بیان کننده ی این است که تمام قبولی های کلاس در یک محل جمع شده اند (جامعه کاهش یافته ی قبولی ها) از این قبولی ها ۶۰٪ پسر و بقیه (۴۰٪) دختر هستند. یعنی :

$$P\left(\text{پسر} \,\middle|\, \text{قبولی}\right) = /۶ \quad , P\left(\text{دختر} \,\middle|\, \text{قبولی}\right) = /۴$$

۳-۳ – قضیه احتمال کل یا قانون اول بیز

فرض کنید که F_i ها دنبال ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار می باشند که اجتماع آنها برابر با فضای نمونه می شود . در این حالت F_i ها را پیشامدهای افرازشده می نامیم.

$$\bigcup_{i=۱}^{n} F_i = S \qquad , \forall\, i \neq j \rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$$

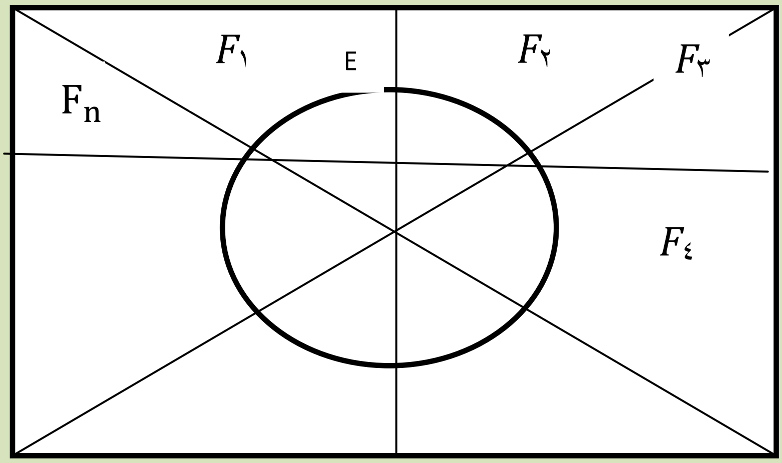
حال E را پیشامدی در نظر بگیرید که احتمال وقوع آن در هر یک از حالات F_i ها متفاوت است. در چنین حالتی برای محاسبه ی احتمال وقوع E می توان از رابطه ی زیر استفاده نمود ؛

$$P(E) = P(E \cap F_۱) + P(E \cap F_۲) + \cdots + P(E \cap F_n)$$

$$P(E) = P(E|F_۱)P(F_۱) + P(E|F_۲)P(F_۲) + \cdots + P(E|F_n)P(F_n)$$

$$P(E) = \sum_{i=۱}^{n} P(E|F_i)P(F_i) \qquad (۱-۳)$$

به این رابطه قضیه ی احتمال کل یا قانون اول بیز گویند .



اکثر دانش آموزان با این فرمول آشنا هستند ولی در حل مسائلی که از این فرمول استفاده می شود عاجز اند.

این قضیه زمانی کاربرد دارد که احتمال وقوع پیشامد E در هر یک از حالات افراز شده F_i متفاوت است. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۳-۱- دو کیسه را در نظر بگیرید که در اولی ۳ مهره قرمز و یک مهره سفید و در دومی ۲ مهره قرمز و یک مهره سفید وجود دارد. یک مهره به تصادف از کیسه ی اول برداشته و داخل کیسه ی دوم می گذاریم . سپس یک مهره به تصادف از داخل کیسه دوم بر می داریم. احتمال اینکه مهره انتخاب شده از کیسه ی دوم سفید باشد چقدر است؟

حل: پیشامد E را برابر این که مهره از کیسه دوم سفید باشد تعریف کرده که در این مسأله می خواهیم احتمال آن را حساب کنیم . $P(E)$ به این بستگی دارد که در مرحله ی اول چه مهره ای از کیسه اول به کیسه دوم منتقل شود .

حال آن که $P(E)$ به این بستگی دارد که در مرحله اول چه مهره ای به کیسه ی دوم منتقل شود بنابراین طبق قانون اول بیز روی حالات مختلف افراز کرده و حاصل را با هم جمع می کنیم .

E : مهره انتخابی از کیسه ی دوم سفید باشد .

F_1 : *مهره انتقالی از کیسه ی اول به دوم قرمز باشد .*

F_2 : *مهره انتقالی از کیسه ی اول به دوم سفید باشد .*

$$P(E) = P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$P(E|F_1)$ یعنی اگر بدانیم از کیسه ی اول مهره قرمز منتقل شده است احتمال آن را بیابید که مهره ی انتخابی از کیسه ی دوم سفید است. اگر بدانیم از کیسه اول مهره قرمز منتقل شده است، حال در ظرف دوم ۳ مهره قرمز و یک مهره سفید وجود دارد که به احتمال $\frac{1}{4}$ مهره سفید انتخاب می شود.

مثال ۳-۲ – شخصی می تواند با اتوبوس یا تاکسی به محل کار خود برود . او در ۳۰ درصد مواقع اتوبوس را انتخاب می کند که اگر با اتوبوس به محل کار خود برود در ۴۰ درصد مواقع دیر به محل کار خود می رسد و اگر با تاکسی به محل کار خود برود در ۲۰ درصد مواقع دیر به محل کار خود می رسد. احتمال دیر رسیدن این فرد را به محل کار خود حساب کنید.

حل: ابتدا اعداد داده شده در مسأله را به صورت های معادله های شرطی می نویسیم.

$P\left(\text{اتوبوس}\right) = /3 \quad \rightarrow P\left(\text{تاکسی}\right) = /7$

$P\left(\text{دیر}\middle|\text{اتوبوس}\right) = /4 \;,\; P\left(\text{دیر}\middle|\text{تاکسی}\right) = /2$

$P\left(\text{دیر}\right) = ?$

در این مسأله خواهان محاسبه ی احتمال دیر کردن شخص هستیم که این احتمال به این بستگی دارد که فرد اتوبوس را انتخاب کند یا تاکسی . بنابراین طبق قانون اول بیز روی حالات ممکن افراز کرده و نتایج را با هم جمع می کنیم.

E : دیر کردن

F_1 : فرد اتوبوس را انتخاب کند

F_2 : فرد تاکسی را انتخاب کند.

$$P(E) = P(E|F_۱)P(F_۱) + P(E|F_۲)P(F_۲) = /۴ \times /۳ + /۲ \times /۷ = /۲۶$$

مثال ۳-۳- فرض کنید کیسه ای شامل ۵ سکه طلا و ۱۵ سکه آهنی می باشد و قرار است ۲۰ نفر به تصادف و به نوبت هر کدام یک سکه (بدون جایگذاری) انتخاب کنند. احتمال بیرون آوردن سکه طلا برای هر یک از ۲۰ نفر را تعیین کنید؟

حل:

ابتدا برای حل این مسأله باید توجه داشت که انتخاب تصادفی می باشد یعنی به طور مثال نفر دوم از نوع سکه ای که نفر اول انتخاب نموده است اطلاعی ندارد.

G_i **: پیشامد اینکه نفر** i **ام طلا انتخاب کند**

نفر اول به احتمال $\frac{۵}{۲۰}$ **طلا انتخاب می کند در نتیجه** $P(G_۱) = \frac{۵}{۲۰}$

احتمال اینکه نفر دوم سکه طلا انتخاب کند به این بستگی دارد که نفر اول چه سکه ای را انتخاب کرده است پس طبق قانون اول بیز روی حالات مختلف نفر اول افراز کرده و نتایج را با هم جمع می کنیم.

$$P(G_۲) = P(G_۲|G_۱)P(G_۱) + P\left(G_۲\middle|G_۱'\right)P\left(G_۱'\right)$$
$$= \frac{۴}{۱۹} \times \frac{۵}{۲۰} + \frac{۵}{۱۹} \times \frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۵}{۲۰}$$

بنابراین مشاهده می شود که شانس نفر دوم برای برداشتن سکه طلا با شانس نفر اول برابر است و می توان نشان داد که شانس همه ی افراد برای برداشتن سکه طلا اگر انتخاب ها تصادفی باشد $\frac{۵}{۲۰}$ **است.(برای نمونه می توان** $P(G_۳)$ **را با افراز کردن دو سکه ی اول و دوم، به این نتیجه پی برد.)**

اگر در مثال قبلی ، شما به عنوان نفر اول ۲ سکه بردارید ، چقدر احتمال دارد هر دو طلا باشند؟

حل: این یک مسأله ی عادی احتمالات است که احتمال خواسته شده برابر است با :

$$\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۲۰}{۲}} = \frac{۱}{۱۹}$$

اگر در مثال قبل ، ابتدا یک نفر یک سکه شانسی بردارد یا به تصادف یک سکه گم شده باشد و سپس شما به عنوان نفر بعدی۲ سکه بردارید ، چقدر احتمال دارد هر دو طلا باشد؟

حل: احتمال اینکه هر دو سکه شما طلا باشد به این بستگی دارد که نفر اول چه سکه ای برداشته است(یا چه سکه ای گم شده است) بنابراین طبق قانون اول بیز روی حالات سکه اول افراز کرده و نتایج را با هم جمع می کنیم.

E : هر دو سکه طلا

$$P(E) = P(E|G_1)P(G_1) + P(E|\acute{G}_1)P(\acute{G}_1)$$

$$= \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۹}{۲}} \times \frac{۵}{۲۰} + \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۹}{۲}} \times \frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۱}{۱۹}$$

اگر در مثال قبل، ابتدا یک نفر دو سکه شانسی بردارد و سپس شما به عنوان نفر بعدی ۲ سکه بردارید چقدر احتمال دارد هر دو طلا باشد ؟

جواب: $\frac{۱}{۱۹}$

به هر نحوی که سهم شما ۲ سکه شانسی از این ظرف باشد (چه سکه های اول و دوم و چه سکه های هفتم و دهم ، چه ۲ سکه به تصادف از ظرف گم شده باشد و...)شانس شما برای انتخاب دو سکه طلا $\frac{۱}{۱۹}$ می باشد.

اگر در مثال قبل، شما سکه های اول و سوم و پنجم را بردارید ، چقدر احتمال دارد هر سکه سکه طلا باشد ؟

حل: می توان طبق قانون اول بیز روی نوع سکه های دوم و چهارم افراز کرد. در حالی که این راه وقت گیر بوده و گاهاً موجب اشتباهاتی می شود. به هر نحوی که سهم شما سه سکه تصادفی از این ظرف باشد . احتمال آنکه هر ۳ طلا باشد برابر است با:

$$P(G_۱ \cap G_۳ \cap G_۵) = P(G_۱ \cap G_۲ \cap G_۳) = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۲۰}{۳}} = \frac{۱}{۱۱۴}$$

مثال ۳-۴- در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری و به تصادف از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال دومین مهره خارج شده سفید است؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

حل: طبق نکات گفته شده در مثال قبل احتمال اینکه دومین مهره سفید باشد با احتمال اینکه اولین مهره سفید باشد برابر است و دیگر نیازی به افراز روی رنگ مهره اول نیست.

W_1 : *مهره اول سفید*

W_2 : *مهره دوم سفید*

$$P(W_2)=P(W_1)=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۳-۴- قانون دوم بیز

$$۱-P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$$

$$۲-P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$$

بنابراین معادلات ۱و۲ با هم برابر هستند.

$$\rightarrow P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$$

$$\rightarrow P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}\qquad (۱-۴)$$

نکته ۴-۱- رابطه ی فوق (قانون دوم بیز) زمانی کاربرد دارد که هدف محاسبه ی $P(B|A)$ می باشد ولی $P(A|B)$ جزء داده های مسئله بوده یا محاسبه ی آن آسان است.

مثال۴-۱- سه کارگر C,B,A به ترتیب ۴۰ درصد ، ۳۶ درصد و ۲۴ درصد ظروف سرامیکی فروشگاهی را تولید می کنند . درصد صنایع دستی معیوب این کارگران به ترتیب ۱.۲.۳ درصد است.اگر یک ظرف تولیدی معیوب باشد با کدام احتمال این ظرف معیوب را کارگر C تولید کرده است؟

حل: ابتدا فرضیات مسئله را به صورت فرمول های شرطی بیان می کنیم

$P(A)=/۴\quad,\quad P(B)=/۳۶\quad,\qquad P(C)=/۲۴$

$P\left(\text{معیوب}\middle|A\right)=/۰۳\quad,\quad P\left(\text{معیوب}\middle|B\right)=/۰۲\qquad,P\left(\text{معیوب}\middle|C\right)=/۰۱$

$P\left(C\middle|\text{معیوب}\right)=?$

همانطور که مشاهده می شود هدف یافتن $P\left(C\middle|\text{معیوب}\right)$است ولی بر عکس آن یعنی $P(\text{معیوب}|C)$ جزء داده های مسئله می باشد. بنابراین طبق قانون دوم بیز داریم :

$$P\left(C\middle|\text{معیوب}\right)=\frac{P\left(\text{معیوب}\middle|C\right)P(C)}{P(\text{معیوب})}=\frac{/۰۱\times/۲۴}{/۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$$

$P(\text{معیوب})$ خود به این بستگی دارد که کدام کارگر ، محصول را تولید کرده باشد بنابراین طبق قانون اول بیز داریم:

$$P\left(\text{معیوب}\right)=P\left(\text{معیوب}\middle|A\right)P(A)+P\left(\text{معیوب}\middle|B\right)P(B)+P\left(\text{معیوب}\middle|C\right)P(C)$$

$$/۰۳\times/۴+/۰۲\times/۳۶+/۰۱\times/۲۴=/۲۱۶$$

همانطور که در مثال قبل مشاهده شد در مخرج کسر قانون دوم بیز از قانون اول بیز استفاده شد و یکی از اجزای مخرج نیز در صورت وجود داشت.

نکته ۴-۲- مخرج قانون دوم بیز همواره قانون اول بیز است و همواره یکی از اجزای مخرج نیز در صورت حضور دارد.

در مثال ۳-۲ اگر بدانیم فرد دیر کرده است به چه احتمالی تاکسی را انتخاب کرده است ؟

حل: هدف یافتن $P(\text{دیر}|\text{تاکسی})$ است در حالی که بر عکس آن یعنی$P(\text{تاکسی}|\text{دیر})$ جزء داده های مسأله است. در نتیجه داریم:

$$P\left(\text{تاکسی}\middle|\text{دیر}\right)=\frac{P(\text{دیر}|\text{تاکسی})P(\text{تاکسی})}{P(\text{دیر})}=\frac{/۲\times/۷}{/۲۶}=\frac{۷}{۱۳}$$

۳-۵- استقلال پیشامدها

دو پیشامد E و F را مستقل گوییم، هرگاه رخ دادن یکی از آنها تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد.

$$P(E|F)=P(E)\qquad(۱-۵)$$

رابطه ی (۵-۱) بیان می کند که اگر بدانیم F رخ داده است شانس E همان باشد که از قبل بوده است.

همچنین اگر دو پیشامد مستقل باشند ، علاوه بر رابطه ی فوق روابط زیر نیز برقرار است:

$$P(E|F) = P(E) \leftrightarrow \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = P(E) \leftrightarrow$$

$$P(E\cap F) = P(E)\times P(F) \qquad (۲-۵)$$

$$\leftrightarrow \frac{P(E\cap F)}{P(E)} = P(F) \leftrightarrow P(F|E) = P(F) \qquad (۳-۵)$$

برای بررسی استقلال دو پیشامد هر یک از روابط ۵-۱ ، ۵-۲ یا ۵-۳ را می توان بررسی نمود و اگر دو پیشامد مستقل نباشند آنها را وابسته گوییم.

در ضمن باید توجه داشت که روابط ۵-۱ و ۵-۳ در واقع بیان می کنند که اگر رخ دادن F تأثیری در احتمال وقوع E نداشته باشد ، آنگاه رخ دادن E نیز تأثیری در احتمال وقوع F ندارد.

مثال ۵-۱ - آزمایش پرتاب یک تاس سالم را در نظر بگیرید . اگر پیشامد های E وF به صورت زیر تعریف شوند ، استقلال آنها را بررسی کنید.

$E = \{۱،۲،۳\} \qquad F = \{۳،۴\}$

حل: برای بررسی استقلال این دو پیشامد، هر یک از روابط ۵-۱ یا ۵-۲ یا ۵-۳ را می توان بررسی نمود. مثلاً برای بررسی رابطه ۵-۱ داریم:

$$P(E) = \frac{۳}{۶} \quad , \quad P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow P(E|F) = P(E)$$

یا برای بررسی رابطه ی ۵-۲ داریم :

$$P(E) = \frac{۳}{۶} \quad , \quad P(F) = \frac{۲}{۶} \quad , \quad P(E\cap F) = \frac{۱}{۶}$$

$$\rightarrow P(E\cap F) = P(E)\times P(F)$$

یا برای بررسی رابطه ی ۵-۳ داریم:

$$P(F)=\frac{۲}{۶} \quad , \quad P(F|E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۳}{۶}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\rightarrow P(F|E)=P(F)$$

مثال ۵-۲- فرض کنید دو تاس سالم را پرتاب می کنیم . در هر یک از قسمت های زیر بررسی کنید که آیا پیشامدهای ارائه شده مستقلند یا خیر؟

الف) $E_۱$ پیشامد این باشد که تاس اول ۲ بیاید و $E_۲$ پیشامد این باشد که تاس دوم ۴ بیاید.

$$E_۱=\{(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶)\}\rightarrow P(E_۱)=\frac{۶}{۳۶}$$

$$E_۲=\{(۱,۴)(۲,۴)(۳,۴)(۴,۴)(۵,۴)(۶,۴)\}\rightarrow P(E_۲)=\frac{۶}{۳۶}$$

$$E_۱\cap E_۲=\{(۲,۴)\}\rightarrow P(E_۱\cap E_۲)=\frac{۱}{۳۶}$$

$$P(E_۱)P(E_۲)=\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۶}{۳۶}=P(E_۱\cap E_۲)=\frac{۱}{۳۶}$$

دو پیشامد مستقل هستند .

ب) $F_۱$ پیشامد این باشد که مجموع دو تاس ۶ بیاید و $F_۲$ پیشامد این باشد که تاس اول ۴ بیاید.

$$F_۱=\{(۱,۵)(۲,۴)(۳,۳)(۴,۲)(۵,۱)\}\rightarrow P(F_۱)=\frac{۵}{۳۶}$$

$$F_۲=\{(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶)\}\rightarrow P(F_۲)=\frac{۶}{۳۶}$$

$$F_۱\cap F_۲=\{(۴,۲)\}\rightarrow P(F_۱\cap F_۲)=\frac{۱}{۳۶}$$

$$P(F_۱)P(F_۲)=\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۵}{۳۶}\neq P(F_۱\cap F_۲)=\frac{۱}{۳۶}$$

نکته ۵-۱-اگر E و F دو پیشامد نا تهی و ناسازگار باشند ، آنگاه این دو پیشامد وابسته هستند .

$$P(E)\neq ۰ \quad , P(F)\neq ۰$$

E و F ناسازگار هستند $\rightarrow P(E\cap F)=۰\neq P(E)\times P(F)$

بنابراین مشاهده می شود که ناسازگار بودن هیچ رابطه ای به مستقل بودن ندارد و این دو مسئله از هم جدا بوده و اتفاقاً دو پیشامد ناسازگار وابسته هستند.

نکته ۵-۲-اگر E و F دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه :

۱. $\acute{F}, E$ هم مستقل هستند ← $P(E|\acute{F}) = P(E)$ یا $P(\acute{F}|E) = P(\acute{F})$

۲. $F, \acute{E}$ هم مستقل هستند ← $P(\acute{E}|F) = P(\acute{E})$ یا $P(F|\acute{E}) = P(F)$

۳. $\acute{F}, \acute{E}$ هم مستقل هستند ← $P(\acute{E}|\acute{F}) = P(\acute{E})$ یا $P(\acute{F}|\acute{E}) = P(\acute{F})$

به عبارتی اگر F, E مستقل باشند ، هر پیشامدی از E از هر پیشامدی از F مستقل است.

مثال ۵-۳-اگر A و B دو پیشامد مستقل بوده و $P(A) = ۳P(\acute{A})$ باشد حاصل $P(\acute{A}|\acute{B})$ را بیابید .

حل: اگر A و B مستقل باشند طبق نکته ی قبل $\acute{B}, \acute{A}$ نیز از هم مستقل اند در نتیجه داریم :

$$P(A) + P(\acute{A}) = ۱ \rightarrow ۳P(\acute{A}) + P(\acute{A}) = ۱ \rightarrow P(\acute{A}) = \frac{۱}{۴}$$

$$P(\acute{A}|\acute{B}) = P(\acute{A}) = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۵-۴ - افراد C, B, A برای شرکت در امتحانی ثبت نام کرده اند . اگر احتمال قبولی هر یک مستقل از بقیه به ترتیب برابر ۰/۷ و ۰/۶ و ۰/۹ باشد مطلوبست محاسبه ی احتمال های زیر:

الف) هر سه قبول شوند

ب) هیچ کدام قبول نشوند.

ج) حداقل یک نفر قبول شود.

د) دقیقاً یک نفر قبول شود .

حل:

الف)

$$P(A \cap B \cap C) \rightarrow P(A) \times P(B) \times P(C) = /۷ \times /۶ \times /۹ = /۳۷۸$$

ب)

$$P(\acute{A} \cap \acute{B} \cap \acute{C}) \rightarrow P(\acute{A}) \times P(\acute{B}) \times P(\acute{C}) = /۳ \times /۴ \times /۱ = /۰۱۲$$

ج)

$$P(A \cup B \cup C) = ۱ - P(\acute{A} \cap \acute{B} \cap \acute{C}) = ۱ - /۰۱۲ = /۹۸۸$$

د)

$$P\left(\text{دقیقاً یک نفر قبول شود}\right) = P(A \cap \acute{B} \cap \acute{C}) + P(\acute{A} \cap B \cap \acute{C}) + P(\acute{A} \cap \acute{B} \cap C)$$

$$= /۷ \times /۴ \times /۱ + /۳ \times /۶ \times /۱ + /۳ \times /۴ \times /۹ = /۱۵۴$$

✓ تست های چهار گزینه ای فصل ۳

۱- در اتاق A دو دانش آموز ریاضی و سه دانش آموز تجربی و در اتاق B تنها چهار دانش آموز ریاضی در انتظار مصاحبه علمی می باشند.یک اتاق به تصادف انتخاب می کنیم و از آن یک دانش آموز برای مصاحبه صدا می کنیم.احتمال اینکه دانش آموز ریاضی باشد کدام است؟

۱) ۳/   ۲) ۵/   ۳) ۷/   ۴) ۹/

۲- اگر A و B دو پیشامد مستقل و غیر تهی باشند حاصل $۱ - \frac{۱}{P(B)} + \frac{۱}{P(A)}$ کدام است؟

۱) $\frac{P(A\cup B)}{P(A)}$ ۲) $\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}$ ۳) $\frac{P(A\Delta B)}{P(A\cap B)}$ ۴) $\frac{P(A\Delta B)}{P(A)}$

۳- سه کارگر C,B,A به ترتیب ۴۰درصد , ۳۶ درصد و ۲۴ درصد ظروف سرامیکی فروشگاهی را تولید می کنند.درصد صنایع دستی معیوب این کارگران به ترتیب ۳ ,۲ و ۱ درصد است. اگر یک ظرف تولیدی معیوب باشد با کدام احتمال این ظرف معیوب را کارگر C تولید کرده است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۴- در کیسه اول ۴ مهره قرمز , ۲ مهره سفید و ۴ مهره آبی وجود دارد و در کیسه دوم ۳ مهره قرمز ,۶ مهره سفید و ۱ مهره آبی وجود دارد. از یکی از کیسه ها به تصادف مهره ای انتخاب می کنیم.احتمال اینکه مهره انتخاب شده سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۰}$ ۲) $\frac{۴}{۱۰}$ ۳) $\frac{۶}{۱۰}$ ۴) $\frac{۸}{۱۰}$

۵- در ظرفی ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۶ مهره آبی وجود دارد. مهره ای به تصادف از این ظرف انتخاب می شود و مشاهده می شود که آبی نیست.چقدر احتمال دارد مهره مشاهده شده سفید باشد؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۶- با اعداد $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ میخواهیم عددی چهار رقمی و بدون تکرار بسازیم.اگر عدد حاصل زوج باشداحتمال اینکه رقم یکان آن صفر بوده باشد چقدر است.

۱) $\frac{۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۷- تاس سالمی را پرتاب می کنیم. خال مشاهده شده مضرب ۲ نیست.چقدر احتمال دارد عددی اول مشاهده شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸- هر یک از ۳ نفر C,B,A به ترتیب با احتمال های ۲/ , ۳/ ,۴/ تیر های خود را به هدف می زنند.احتمال اینکه دقیقا یک نفر به هدف بزنند برابر است با؟

۱) ۵۴۸/ ۲) ۱۲۳/ ۳) ۴۵۲/ ۴) ۲۳۴/

۹- اگر A وB دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوریکه P(A)=/۲ و P(B)=/۲۲ و $P(B|A)$=/۷، آنگاه $P(\acute{B}|\acute{A})$ کدام است؟

۱) ۷۲/ ۲) ۶۴/ ۳) ۸۴/ ۴) ۹۰/

۱۰- پیشامد های $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ از فضای نمونه ای S دو به دو ناسازگار هستند. اگر $P(B_i) = \frac{۱}{۳}$ و i=۱,۲ ,۳ و $P(A|B_i) = \frac{۱}{۴}$ باشد، آنگاه احتمال وقوع پیشامد A از این فضای نمونه ای کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱- در جعبه ای ۳ مهره قرمز، ۶ مهره آبی و یک مهره سفید می باشد. اگر ۳ مهره از این جعبه به صورت تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه یک مهره از هر رنگ برداشته شود به شرطی که دقیقا یکی از ۳ مهره قرمز باشدکدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۲۰}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۲۰}{۲۱}$

۱۲- سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد.اگر به تصادف یک ظرف را انتخاب و یک مهره بیرون آوریم با کدام احتمال این مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴۰}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴۰}$ ۴) $\frac{۹}{۲۰}$

۱۳- در پرتاب دو تاس مجموع دو عدد رو شده بزرگتر از ۷ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد است؟

۱) ۴/ ۲) ۳/ ۳) ۲۵/ ۴) ۲/

۱۴- احتمال قبولی علی در امتحانی۶/ و احتمال قبولی رضا در همان امتحان ۵/ می باشد. احتمال اینکه دقیقا یکی از آنها در کنکور قبول شود چقدر است؟

۱) ۵/ ۲) ۶/ ۳) ۷/ ۴) ۸/

۱۵- فرزندی از یک خانواده با دو فرزند به تصادف انتخاب می شود می بینیم که دختر است.احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده دختر باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۶- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۵ یا ۷ باشد . با چه احتمالی یکی از آنها فرد است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۱۷- اگر احتمال قبولی فردی در امتحان B,A به ترتیب ۴/ و ۸/ باشد، به چه احتمالی حداقل در یکی قبول می شود؟

۱) ۵۶/ ۲) ۸۲/ ۳) ۸۸/ ۴) ۳۲/

۱۸- دو ظرف موجود است. در ظرف اول ۵ مهره سفید و ۴ مهره سبز و در ظرف دوم ۲ مهره سفید و ۳ مهره سبز قرار دارد.اگر یک مهره به تصادف از یکی از ظرف ها خارج کنیم ، به چه احتمالی سفید است؟

۱) $\frac{۲۳}{۹۰}$ ۲) $\frac{۴۳}{۹۰}$ ۳) $\frac{۵۳}{۹۰}$ ۴) $\frac{۷۳}{۹۰}$

۱۹- از کیسه ای که دارای ۶ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. مهره ای به تصادف انتخاب کرده و آن را کنار می گذاریم و به جای آن دو مهره ناهمرنگ با مهره خارج شده را داخل کیسه می اندازیم و سپس از این کیسه مهره ای دیگر انتخاب می کنیم.با چه احتمالی مهره انتخاب شده سیاه است؟

۱) $\frac{۳۱}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱۹}{۶۶}$ ۳) $\frac{۶۷}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۶۶}$

۲۰- فرض کنید B,A دو تیر انداز باشند که با احتمال های ۴/ و ۷/ هدف خود را مورد اصابت قرار می دهند.اگر هر کدام مستقلا تیری به هدف شلیک کنند، احتمال آنکه A هدف را زده باشد به شرط آنکه بدانیم فقط یک تیر به هدف اصابت کرده ، چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۲۰}{۲۷}$

۲۱- اگر A وB دو پیشامد مستقل با احتمال های به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ باشند ، $P\left(\acute{A}\Delta\acute{B}\right)$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۲- اگر A وB دو پیشامد مستقل با احتمال های به ترتیب $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ باشند، $P(\acute{A}-\acute{B})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۳- تاسی را در نظر بگیرید که احتمال پیشامد های ساده در آن متناسب با خال مشاهده شده باشد.اگر $A=\left\{۱,۲\right\}$ ، $B=\left\{۴,۲\right\}$ مقدار $P(A\Delta B|A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۲۴- از ظرفی که شامل ۱۰ توپ سفید و ۱۶ توپ سیاه است، ۲ توپ به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم.احتمال اینکه سومین توپی که به تصادف خارج می شود، سیاه باشد کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۱۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

۲۵- ظرفی شامل ۵ مهره است که X تای آن سفید و بقیه سیاه هستند. می دانیم $P(x=3)=\frac{2}{3}$ و $P(x=2)=\frac{1}{3}$. از این ظرف یک مهره بیرون می آید و رنگ آن سفید است.احتمال اینکه در ظرف ۳ مهره سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۶- B و A دو پیشامد مستقل می باشند. اگر احتمال اینکه هیچکدام اتفاق نیفتد برابر a و احتمال اینکه B اتفاق افتد برابر b باشد، احتمال اینکه A اتفاق افتد کدام است؟

۱) $\frac{1-a-b}{1-b}$ ۲) $\frac{1-a+b}{1-a}$ ۳) $\frac{a+b}{1-b}$ ۴) $\frac{b}{1-a}$

۲۷- ظرف شامل ۸ مهره سیاه و ۴ مهره سفید است. ۵ مهره به تصادف و بدون جایگذاری از آن انتخاب و بدون نگاه کردن کنار می گذاریم. اگر یک مهره مجددا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{23}{99}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{37}{99}$

۲۸- فردی سه دستگاه آشکار کننده دود خریداری می کند.اگر او تخمین بزند که هر یک از این دستگاه ها با احتمال ۹۰ درصد کار کند، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها دود را آشکار کند چند درصد است؟

۱) ۹۹ ۲) ۹۱ ۳) ۹۰/۹ ۳) ۹۹/۹

۲۹- سه دانش آموز روی یک مسئله ریاضی کار می کنند.احتمال موفقیت دانش آموز اول ۵/ و احتمال موفقیت دانش آموز دوم ۴/ و احتمال موفقیت دانش آموز سوم ۳/ است.اگر آنها مستقل از هم کار کنند، احتمال اینکه هیچ کدام موفق به حل مسئله نشوند چقدر است؟

۱) ۲۵/ ۲) ۲۱/ ۳) ۱۲/ ۴) ۳۲/

۳۰- در یک آزمایش مهارت احتمال موفقیت دو نفر به ترتیب $\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{2}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آن دو موفق می شوند؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۳۱- دو تاس را پرتاب می کنیم.اگر حاصلضرب اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشد، احتمال اینکه اعداد رو شده تاس ها اعداد متوالی باشند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۳۲- فرض کنید در یک آزمون ۴ گزینه ای دانش آموزی جواب درست را با احتمال $\frac{۱}{۳}$ بداند یا به تصادف یکی از چهار گزینه را انتخاب نماید.احتمال اینکه به یک سوال پاسخ درست دهد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۳۳- سکه ی سالمی را پرتاب می کنیم.اگر " رو" بیاید دو سکه دیگر و اگر "پشت" بیاید سه سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم.در این آزمایش، احتمال اینکه دقیقا یک سکه "رو" ظاهر شود کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۴}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۳۴- سه دستگاه C,B,A به ترتیب ۵۰،۳۰،۲۰ درصد از کل محصولات یک کارگاه را تولید می کنند.درصد محصولات معیوب این دستگاه ها به ترتیب ۳، ۴ ،۵ درصد است.اگر یک قلم محصول به طور تصادفی انتخاب شود و معیوب در آید، احتمال تولید آن توسط دستگاه A چقدر است؟

۱) $\frac{۱۵}{۳۷}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴۳}$ ۳) $\frac{۲۰}{۴۳}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۷}$

۳۵- در یک شهر ۱۰ درصد افراد فارغ التحصیل دانشگاه هستند که ۲ درصد آنها بیکارند. درصد بیکاری افراد جامعه برابر ۲۰ است.یک نفر به تصادف انتخاب می کنیم.اگر این فرد بیکار باشد احتمال اینکه فارغ التحصیل دانشگاه باشد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۲}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰۰}$

۳۶- فرض کنید A و B پیشامد های مستقل با شرط $P(A) = \frac{۱}{۴}$, $P(A \cup B) = ۲\,P(B) - P(A)$ باشند ، حاصل $P(\acute{B}|A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۷- در ظرف A دو مهره سفید و سه مهره سیاه و در ظرف B چهار مهره سفید وجود دارد.یک ظرف را به تصادف انتخاب می کنیم و یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم.احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۱۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

۳۸- در ظرف اول ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و در ظرف دوم ۴ مهره سفید و ۸ مهره سیاه موجود است.یک تاس سالم را پرتاب می کنیم.اگر ۵ یا ۶ بیاید مجاز هستیم که از ظرف اول سه مهره به تصادف بیرون آوریم در غیر این صورت از ظرف دوم سه مهره بیرون می آوریم.اگر از مهره های خارج شده ۲ مهره سفید باشد،با کدام احتمال از ظرف دوم خارج شده است؟

۱) $\frac{۳۲}{۶۷}$ ۲) $\frac{۳۵}{۶۷}$ ۳) $\frac{۳۹}{۷۱}$ ۴) $\frac{۴۲}{۷۱}$

۳۹- جعبه ای شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. متوالیا دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم.احتمال اینکه مهره دوم همرنگ مهره اول باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۴۰- در سوال قبل مطلوبست احتمال آنکه اگر اولین مهره سفید باشد دومین مهره نیز سفید باشد؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۴۱- در سوال ۳۹ احتمال آنکه مهره دوم خارج شده سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۲- در ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره آبی است، سه مهره به تصادف پی در پی بیرون می آوریم.احتمال آنکه مهره اول و دوم سفید و مهره سوم آبی باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵۶}$ ۲) $\frac{۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۵}{۵۶}$ ۴) $\frac{۵}{۲۸}$

۴۳- اگر B, A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A \subseteq B$، $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۳}{۴}$ آنگاه $P\left(B \middle| A'\right)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰ خارج از کشور)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۴- دو تاس همگن را پرتاب کرده ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد. احتمال آنکه شماره ی یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۴۵- یک تاس همگن را انداخته ایم برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره ی ظاهر شده ۲ باشدکدام است؟(سراسری ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۶- در پرتاب دو تاس با هم می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد است؟(سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۷- دو ظرف همانند ، اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره ای از آن بیرون می آوریم . احتمال اینکه مهره سفید باشد کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۰ و ۸۱)

۱) $\frac{۱۷}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۷}{۷۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۷۰}$

۴۸- دو ظرف داریم ، در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می دهیم.آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم . با کدام احتمال این مهره سفید است؟(سراسری ریاضی ۸۴)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۴۹- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عددلامپ یکسان موجود است. در جعبه ی اول ۴عدد و در جعبه ی دوم ۳ عدد لامپ معیوب اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه ی جدید قرار می دهیم.با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه ی جدید معیوب است؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $\frac{۱۷}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$

۵۰- احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال ، فرزندی که به دنیا می آید، این نوع بیماری را ندارند؟(سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۰/۹۱ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۰/۹۴

۵۱- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است . $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده اند. اگر فرد بیمار حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند. با کدام احتمال ، این بیماری منتقل می شود؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۵۲- ۵۵ درصد از دانشجویان سال اول ، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران ، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده اند. چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی خود را گذرانده اند؟(سراسری تجربی ۸۸ خارج از کشور)

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

۵۳- شش مهره با شماره های ۱،۲،۳،۴،۵،۶ در ظرفی قرار دارند . دو مهره با هم بیرون می آوریم و بدون جایگذاری دو مهره دیگر خارج می کنیم با کدام احتمال مهره ی شماره ی ۲ خارج شده است؟(سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۴- دریک برگ آزمون از دو کلاس A ,B ۴۰درصد دانش آموزان کلاس A و ۶۰درصد دانش آموزان کلاس B قبول شده اند. اگر داوطلبین در کلاس A دو برابر کلاسB باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود، تقریباً با کدام احتمال، این فرد از کلاس A است؟(سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

۱) ۰/۴۳ ۲) ۰/۵۷ ۳) ۰/۶۱ ۴) ۰/۶۳

۵۵- پنج مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و همچنین ۵ مهره سیاه با شماره ۱تا۵ یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می آوریم. اگر مجموع شماره های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره همرنگ هستند؟(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۶-در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم . با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره ، دومین مهره خارج شده سفید است؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۷-تاس همگن رابا چشم بسته انداخته ایم و فقط می دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال اینکه شماره ی ۴یا ۶ ظاهر شده باشد کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۸-اگر $P(A) = /۲$ و $P(B) = /۱$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۵۰}$ باشد حاصل کدام گزینه از بقیه بزرگتر است؟

۱) $P(A|B)$ ۲) $P(B|A)$ ۳) $P(A'|B)$ ۴) $P(B'|A)$

۵۹-از بین اعداد طبیعی یک رقمی عددی به تصادف انتخاب می کنیم. اگر A پیشامد زوج بودن این عدد و B پیشامد مضرب ۳ بودن این عدد باشد، در این صورت دو پیشامد B, A.........؟

۱) مستقل و سازگارند ۲) مستقل و ناسازگارند ۳) وابسته سازگارند ۴) وابسته ناسازگارند

۶۰-اگر B, A دو پیشامد مستقل بوده و $P(A) = ۳P(\acute{A})$ باشد حاصل $P(\acute{A}|B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۱- دو تاس را پرتاب کرده ایم. اگر اعداد ظاهر شده متفاوت باشند، احتمال اینکه مجموع اعداد بدست آمده ۶ باشد ، چند است؟

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۶۲- اگر $P(A) = ۳P(B)$ و دو پیشامد B, A' مستقل باشند و $P(A\cup B)=\frac{۷}{۱۲}$ ، مقدار $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۶۳- اگر $P(A|B) = /۶$ و $P(A) = /۴$ و $P(B) = /۵$ ، $P(B|A)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷۵

نمونه سوالات بدون جواب تشریحی

۱- سه جعبه داریم که در جعبه اول ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه، در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در جعبه سوم ۶ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است.جعبه ای را به تصادف انتخاب و سه مهره از این جعبه بیرون می آوریم.اگر مهره های انتخابی یک سفید و دو سیاه باشند،احتمال این که جعبه دوم انتخاب شده باشد،کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲- فرض کنید در یک جامعه نسبت سیگاری ها در آقایان دو برابر نسبت سیگاری ها در خانم ها است.اگر ۷۵/ درصد سیگاری ها، آقا باشند،چند درصد این جامعه آقایان هستند؟

۱) ۷/ ۲) ۸/ ۳) ۶/ ۴) ۵/

۴- ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است.به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم.با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟(سراسری تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

✓جواب های تشریحی فصل سوم

۱- گزینه ۳-

حل: احتمال اینکه دانش آموز ریاضی انتخاب شود به این بستگی دارد که کدام از اتاق انتخاب شود بنابراین طبق قانون اول بیز داریم :

E:شود انتخاب ریاضی آموز دانش F_1 : اتاق A F_2 :اتاق B

$$P\left(\text{دانش آموز ریاضی}\right)$$
$$= P\left(\text{ریاضی آموز دانش}\middle|\text{اتاق A}\right)P\left(\text{اتاق A}\right)+P\left(\text{ریاضی آموز دانش}\middle|\text{اتاق B}\right)P\left(\text{اتاق B}\right)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۲}+۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۱۰}$$

۲- گزینه ۲-

حل:

$$\text{مستقل } A, B \rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$\frac{۱}{P(A)}+\frac{۱}{P(B)}-۱=\frac{P(B)+P(A)-P(A)\times P(B)}{P(A)\times P(B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}$$

۳- گزینه ۳-

حل:

$$P(A)=/۴ \quad \text{و} \quad P\left(\text{معیوب}\middle|A\right)=/۰۳$$

$$P(B)=/۳۶ \quad \text{و} \quad P\left(\text{معیوب}\middle|B\right)=/۰۲$$

$$P(C)=/۲۴ \quad \text{و} \quad P\left(\text{معیوب}\middle|C\right)=/۰۱$$

$$P\left(C\middle|\text{معیوب}\right)=P\frac{\left(\text{معیوب}\middle|C\right)P(C)}{P(\text{معیوب})}=\frac{/۰۱\times/۲۴}{/۰۳\times/۴+/۰۲\times/۳۶+/۰۱\times/۲۴}=\frac{۱}{۹}$$

۴- گزینه ۲-

حل:

E:سفید انتخابی مهره F_1:اول ی کیسه F_2:دوم ی کیسه

$$P(E)=P(E|F_1)P(F_1)+P(E|F_2)P(F_2)$$

$$=\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}=/۴$$

۵- گزینه ۲-

حل:

$$P\left(\text{مهره سفید}\,\middle|\,\text{مهره آبی نباشد}\right)=\frac{P\left(\text{مهره آبی نباشد}\cap\text{مهره سفید}\right)}{P\left(\text{مهره آبی نباشد}\right)}$$

$$=\frac{P\left(\text{مهره سفید}\right)}{P\left(\text{سفید}\right)+P\left(\text{سیاه}\right)}=\frac{\frac{۷}{۱۸}}{\frac{۷}{۱۸}+\frac{۵}{۲۸}}=\frac{۷}{۱۲}$$

۶- گزینه ۲-

حل : اعدا چهار رقمی را به دو دسته تقسیم می کنیم.

الف) اعداد چهار رقمی زوج که رقم یکان آنها صفر است   ۵×۴×۳×۱=۶۰

ب) اعداد چهار رقمی زوج که یکان آنها ۲ یا ۴ است.   ۴×۴×۳×۲= ۹۶

۱۵۶=۹۶+۶۰=تعداد کل اعداد چهار رقمی زوج

$$P\left(\text{رقم یکان صفر}\,\middle|\,\text{عدد زوج}\right)=\frac{P\left(\text{رقم یکان صفر}\cap\text{عدد زوج}\right)}{P\left(\text{عدد زوج}\right)}=\frac{۶۰}{۱۵۶}=\frac{۵}{۱۳}$$

۷- گزینه ۲-

حل:

E : عدد اول مشاهده شود F : عدد مشاهده شده مضرب ۲ نیست

ابتدا حالات F را می نویسیم سپس از بین این حالات، حالاتی که عدد اول است (E) را مشخص می کنیم.

$$F=\{۱,۳,۵\}\rightarrow P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{۲}{۳}$$

۸- گزینه ۳-

حل:

$$P\left(\text{دقیقاً یک تیر به هدف بزنند}\right)=/۲\times/۷\times/۶+/۸\times/۳\times/۶+/۸\times/۷\times/۴=/۴۵۲$$

۹- گزینه ۴-

حل:

$$P(A)=/۲$$

$$P(B)=/۲۲$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=/۷\rightarrow P(A\cap B)=/۷\times/۲=/۱۴$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A\cup B)'}{۱-P(A)}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(A)}=\frac{۱-[/۲+/۲۲-/۱۴]}{/۸}=\frac{/۷۲}{/۸}=/۹$$

۱۰- گزینه ۴-

حل:

$$P[(A)=P(A|B_۱)P(B_۱)+P(A|B_۲)P(B_۲)+P(A|B_۳)P(B_۳)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

۱۱- گزینه ۱-

حل:

E : یک مهره از هر رنگ F : یکی از ۳ مهره قرمز باشد

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}}{\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}}=\frac{۱۸}{۳\times۲۱}=\frac{۲}{۷}$$

۱۲- گزینه ۴-

حل: مانند سوال ۱

E: سیاه مهره $F_۱$:اول ظرف $F_۲$ دوم ظرف: $F_۳$: ظرف سوم

$$P(E)=P(E|F_۱)P(F_۱)+P(E|F_۲)P(F_۲)+P(E|F_۳)P(F_۳)$$

$$\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۹}{۲۰}$$

۱۳- گزینه ۴-

حل مانند سوال ۷

E : هر دو عدد رو شده فرد F : مجموع دو تاس بزرگتر از 7

$$F=\{(۲.۶)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲)(۳,۶)(۴,۵)\ (۵,۴)(۶,۳)(۴,۶)(۵,۵)(۶,۴)(۶,۵)(۵,۶)(۶,۶)\}$$

$$P(E|F)=\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}=/۲$$

۱۴- گزینه ۱-

حل:

A : علی قبول شود B : رضا قبول شود AوB مستقل هستند

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=/۶+/۵-۲(/۶\times/۵)=/۵$$

۱۵- گزینه ۱-

حل: جنسیت فرزندان یک خانواده از هم مستقل است و هر فرزند با احتمال $\frac{۱}{۲}$ پسر و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ دختر است.

۱۶- گزینه ۴-

حل: فضای کاهش یافته ی مجموع اعداد ۵ یا ۷ را می نویسیم و در این فضای کاهش یافته احتمال اینکه یکی از دو تاس فرد باشد را حساب می کنیم.

F : مجموع تاس دو ۵یا ۷ E : یکی از تاس ها فرد

$F = \{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)(۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱)\}$

$P(E|F) = \frac{۱۰}{۱۰} = ۱$

۱۷- گزینه ۳-

حل: احتمال قبولی فرد در امتحان AوB از هم مستقل می باشد.در نتیجه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = /۴ + /۸ - (/۴ \times /۸) = /۸۸$

۱۸- گزینه ۲-

حل:

E : مهره انتخابی سفید $F_۱$:اول ظرف $F_۲$:دوم ظرف

$P(E) = P(E|F_۱)P(F_۱) + P(E|F_۲)P(F_۲)$

$= \frac{۵}{۹} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۴۳}{۹۰}$

۱۹- گزینه ۴

حل: احتمال اینکه مهره خارج شده سفید باشد به این بستگی دارد که در مرحله ی اول چه مهره ای کنار گذاشته شده است.

$F_۱$: اگر مهره کنار گذاشته شده سفید باشد

$F_۲$: اگر مهره کنار گذاشته سیاه باشد

E : مهره انتخاب شده سفید

$P(E) = P(E|F_۱)P(F_۱) + P(E|F_۲)P(F_۲) = \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۶}{۱۱} + \frac{۴}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۱} = \frac{۳۱}{۶۶}$

۲۰- گزینه ۱-

حل:

$$P\left(A\middle|\text{فقط یک تیر}\right)=\frac{P(A\cap \text{فقط یک تیر})}{P(\text{فقط یک تیر})}=\frac{/۴\times/۳}{/۴\times/۳+/۶\times/۷}=\frac{۲}{۹}$$

۲۱- گزینه ۳-

حل:

$\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مستقل هستند $\rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$P(\acute{A}\Delta\acute{B})=P(A\Delta B)=P(A)+P(B)\text{-}۲P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\text{-}۲\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱}{۲}$$

۲۲- گزینه ۳-

$$P(\acute{A}-\acute{B})=P(B-A)=P(B)\text{-}P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\text{-}\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۳}$$

۲۳- گزینه ۳-

حل:

P(۱)=a

P(۲)=۲a

P(۳)=۳a　　　P(۱)+...+P(۶)=۱

P(۴)=۴a　　　→۲۱a=۱

P(۵)=۵a　　　$\rightarrow a=\frac{۱}{۲۱}$

P(۶)=۶a

$A=\{۱,۲\}\rightarrow P(A)=P(۱)+P(۲)=\frac{۳}{۲۱}$

$B=\{۴,۲\}\rightarrow P(B)=P(۲)+P(۴)=\frac{۶}{۲۱}$

$$A\cap B=\{۲\}\rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۲۱}$$

$$P(A\Delta B|A\cup B)=\frac{P(A\Delta B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\Delta B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\frac{\frac{۳}{۲۱}+\frac{۶}{۲۱}-\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۳}{۲۱}+\frac{۶}{۲۱}-\frac{۲}{۲۱}}=\frac{\frac{۵}{۲۱}}{\frac{۷}{۲۱}}=\frac{۵}{۷}$$

۲۴- گزینه ۱-

حل: بدون توجه به رنگ دو مهره انتخابی مسأله را حل می کنیم(فرض می کنیم در مرحله ی اول می خواهیم یک مهره انتخاب کنیم)

$$P\left(\text{سیاه توپ سومین}\right)=P\left(\text{سیاه توپ اولین}\right)=\frac{۱۶}{۲۶}=\frac{۸}{۱۳}$$

۲۵- گزینه ۴-

حل:

$$P\left(x=۳|\text{سفید مهره}\right)=\frac{P(\text{سفید مهره}|\,x=۳)P(x=۳)}{P(\text{سفید مهره})}=\frac{\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۳}}{\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

$$P\left(\text{سفید مهره}\right)=P\left(\text{سفید مهره}|x=۳\right)P(x=۳)+P\left(\text{سفید مهره}|x=۲\right)P(x=۲)$$

۲۶- گزینه ۱-

حل:

مستقل A و $B \rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$P(\acute{A}\cap\acute{B})=a\rightarrow P(A\cup B)'=a\rightarrow P(A\cup B)=۱-a$$

$$P(B)=b$$

$$\rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۱-a$$

$$\rightarrow P(A)+b-bP(A)=۱-a$$

$$\rightarrow P(A)=\frac{۱-a-b}{۱-b}$$

۲۷- گزینه ۲-

حل: مانند سوال ۲۴

$$P\left(\text{سفید مهره}\right)=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۲۸- گزینه ۴-

حل:

$$P\left(\text{حداقل یکی از دستگاه ها کار کند}\right)=۱-P\left(\text{هیچ یک از دستگاه ها کار نکند}\right)$$

$$=۱-\left(\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}\right)=/۹۹۹=۹۹/۹\%$$

۲۹- گزینه ۲-

حل:

$$P\left(\text{هیچ یک موفق نشوند}\right)=/۵\times/۶\times/۷=/۲۱$$

۳۰- گزینه ۳-

حل: احتمال موفقیت در دو آزمایش از هم مستقل در نظر گرفته می شود.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۲}-\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}\right)=\frac{۴}{۵}$$

۳۱- گزینه ۲-

حل:

E : اعداد رو شده متوالی باشند F : حاصل ضرب دو تاس مضرب ۳ باشد

F={(۱,۳)(۳,۱)(۱,۶)(۶,۱)(۲,۳)(۳,۲)(۳,۳)(۶,۲)(۲,۶)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۳)(۳,۵)(۳,۶)(۶,۳)
(۶,۴)(۴,۶)(۶,۵)(۵,۶)(۶,۶)}

$$\rightarrow P(E|F)=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

۳۲- گزینه ۲-

حل: احتمال اینکه به یک سوال پاسخ درست بدهد به این بستگی دارد که جواب را بداند یا نداند.

$$P\left(\text{پاسخ}\right) = P\left(\text{پاسخ}\middle|\text{جواب را بداند}\right)P\left(\text{جواب را بداند}\right) + P\left(\text{پاسخ}\middle|\text{جواب را نداند}\right)P\left(\text{نداند}\right)$$

$$=۱\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

۳۳- گزینه ۱-

حل:

E:رو سکه یک دقیقاً $\qquad$ **F_1: رو اول پرتاب** $\qquad$ **F_2:پشت اول پرتاب**

$$P(E)=P(E|F_1)P(F_1)+P(E|F_2)P(F_2)=\frac{\binom{۲}{۰}}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{\binom{۳}{۱}}{۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۶}$$

اگر پرتاب او رو آمده باشد برای آنکه دقیقاً یک سکه رو بیاید باید در دو سکه ی بعدی رو ظاهر نشود(همه پشت ظاهر شود)واگر پرتاب اول پشت آمده باشد باید در سه سکه بعدی یک بار رو ظاهر شود.

۳۴- گزینه ۱-

حل: مانند سوال ۳

$P(A)=/۵$

$P(B)=/۳$

$P(C)=/۲$

$P\left(\text{معیوب}\middle|A\right)=/۰۳ \quad , P\left(\text{معیوب}\middle|B\right)=/۰۴ \quad , \quad P\left(\text{معیوب}\middle|C\right)=/۰۵$

$$\rightarrow P\left(\text{معیوب}\right)=P\left(\text{معیوب}\middle|A\right)P(A)+P\left(\text{معیوب}\middle|B\right)P(B)+P\left(\text{معیوب}\middle|C\right)P(C)=/۰۳\times/۵+/۰۴\times/۳+/۰۵\times/۲=/۰۳۷$$

$$P\left(A\middle|\text{معیوب}\right)=\frac{P\left(\text{معیوب}\middle|A\right)P(A)}{P(\text{معیوب})}=\frac{/۰۳\times/۵}{/۰۳۷}=\frac{۱۵}{۳۷}$$

۳۵- گزینه ۴-

حل:

$$P\left(\text{فارغ التحصیل}\right)=/۱$$

$$P\left(\text{بیکار}\middle|\text{فارغ التحصیل}\right)=/۰۲$$

$$P\left(\text{بیکاری}\right)=/۲$$

$$P\left(\text{فارغ الحصیل}\middle|\text{بیکار}\right)=\frac{P\left(\text{بیکار}\middle|\text{فارغ التحصیل}\right)P\left(\text{فارغ التحصیل}\right)}{P\left(\text{بیکار}\right)}=\frac{/۰۲\times /۱}{/۲}=/۰۱$$

۳۶- گزینه ۳-

حل:

$$\text{مستقل}\,A,B\rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B),\ P(\acute{B}|A)=P(\acute{B})=۱-P(B)$$

$$P(A\cup B)=۲P(B)-P(A)\rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۲P(B)-P(A)$$

$$\rightarrow\frac{۱}{۴}+P(B)-\frac{۱}{۴}P(B)=۲P(B)-\frac{۱}{۴}\rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

$$P(\acute{B}|A)=P(\acute{B})=\frac{۳}{۵}$$

۳۷- گزینه ۴-

حل:

E:سفید مهره $F_۱$:ظرف A شود انتخاب $F_۲$: ظرف B انتخاب شود

$$P(E)=P(E|F_۱)P(F_۱)+P(E|F_۲)P(F_۲)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۲}+۱\times\frac{۱}{۲}=/۷$$

۳۸- گزینه ۱-

حل: اگر تاس ۵ یا ۶ بیاید (به احتمال $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$) از ظرف اول و در غیر این صورت (به احتمال $\frac{۲}{۳}$) از ظرف دوم مهره انتخاب می کنیم در نتیجه :

$$P(\text{ظرف اول})=\frac{۱}{۳} \qquad P(\text{ظرف دوم})=\frac{۲}{۳}$$

E : از 3 مهره شده خارج دو مهره سفید باشد

$F_۱$ از ظرف اول انتخاب شود $\qquad$ $F_۲$: از ظرف دوم انتخاب شود

$$P(F_۲|E)=\frac{P(E|F_۲)P(F_۲)}{P(E)}=\frac{P(E|F_۲)P(F_۲)}{P(E|F_۱)P(F_۱)+P(E|F_۲)P(F_۲)}=$$

$$=\frac{\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}\times\frac{۲}{۳}}{\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}\times\frac{۱}{۳}+\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}\times\frac{۲}{۳}}=\frac{۳۲}{۶۷}$$

۳۹- گزینه ۲-

حل: برای آنکه مهره دوم همرنگ مهره ی اول باشد باید دو مهره سفید یا دو مهره سیاه انتخاب شود که احتمال آن برابر است با :

$$\frac{\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۱+۳}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۴۰- گزینه ۳-

حل:

$W_۱$:سفید اول مهره $\qquad$ $W_۲$:سفید دوم مهره

$$P(W_۲|W_۱)=\frac{P(W_۱\cap W_۲)}{P(W_۱)}=\frac{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۱}{۲}$$

۴۱- گزینه ۳-

حل: بدون توجه به رنگ مهره اول داریم :

$$P(W_۲)=P(W_۱)=\frac{۳}{۵}$$

۴۲- گزینه ۴-

حل:

$$P\left(\text{آبی سومی و سفید دومی و اولی}\right)=\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۲۸}$$

۴۳- گزینه ۴-

حل:

$$A\subseteq B\rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B|\acute{A})=\frac{P(B\cap\acute{A})}{P(\acute{A})}=\frac{P(B\text{-}A)}{۱\text{-}P(A)}=\frac{P(B)\text{-}P(A\cap B)}{۱\text{-}P(A)}=\frac{\frac{۳}{۴}\text{-}\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۵}{۸}$$

۴۴- گزینه ۲-

F : حاصل جمع شماره های رو شده دو تاس کمتر از ۶ E : شماره یکی از تاس ها ۲ باشد

ابتدای فضای نمونه ی F را نوشته و سپس از بین این اعضا احتمال وقوعE را حساب می کنیم

$$F=\{(۱,۱)(۱,۲)(۲,۱)(۱,۳)(۲,۲)(۳,۱)(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)\}$$

$$\rightarrow P(E|F)=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۴۵- گزینه ۳-

حل: مانند سوال قبلی

F : برآمد حاصل مضرب ۳ نیست E : شماره ظاهر شده ۲ است

$$F=\{۱,۲,۴,۵\}$$

$$\rightarrow P(E|F)=\frac{۱}{۴}$$

۴۶- گزینه ۱-

حل:

F : جمع اعداد رو شده کمتر از 10   E : هر دو عدد فرد است

F={(۱,۱)(۱,۲)(۲,۱)(۱,۳)(۲,۲)(۳,۱)(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)(۱,۵)(۲,۴)(۳,۳)(۴,۲)

(۵,۱)(۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱)(۲,۶)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲)(۳,۶)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۳)}

$\rightarrow P(E|F)=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$

۴۷- گزینه ۲-

حل: مانند سوال ۱

E:باشد سفید مهره $F_۱$:شود انتخاب اول ظرف $F_۲$:شود انتخاب دوم ظرف

$P(E)=P(E|F_۱)P(F_۱)+P(E|F_۲)P(F_۲)$

$P(E)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۸}{۳۵}$

۴۸- گزینه ۳-

حل:

E : مهره در مرحله ی دوم سفید باشد

$F_۱$: مهره ی انتقالی مرحله ی اول به ظرف دوم سفید باشد

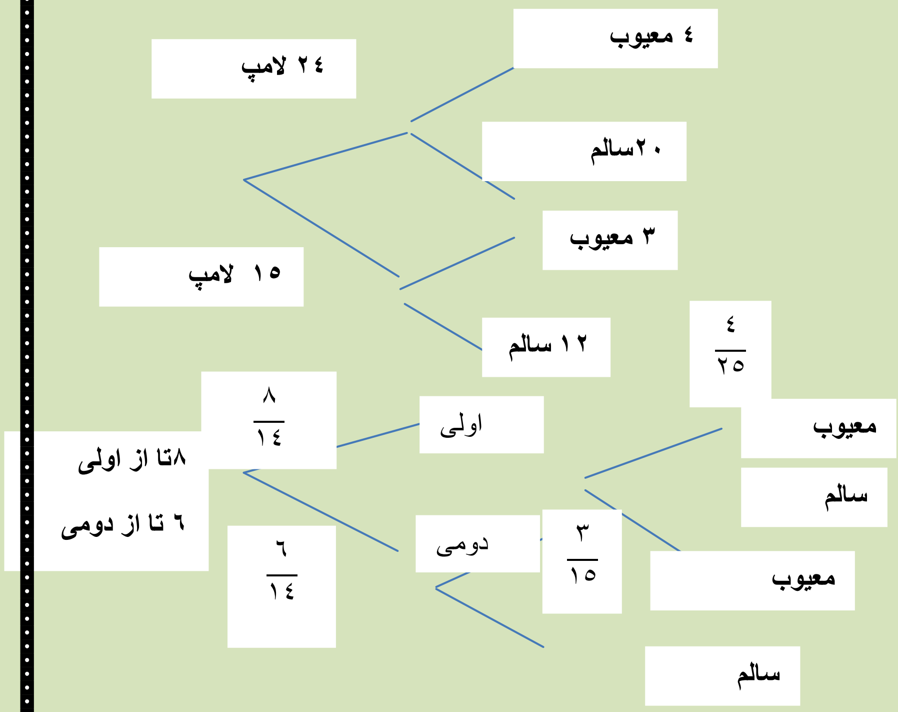
$F_۲$: مهره ی انتقالی مرحله ی اول به ظرف دوم سیاه باشد

اگر $F_۱$ رخ دهد ظرف دوم دارای ۸ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است و اگر $F_۲$ رخ دهد ظرف دوم دارای ۷ مهره ی سفید و ۱۱ مهره سیاه است.

$P(E)=P(E|F_۱)P(F_۱)+P(E|F_۲)P(F_۲)=\frac{۸}{۱۸}\times\frac{۵}{۹}+\frac{۷}{۱۸}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۳۴}{۸۱}$

۴۹- گزینه ۲-

حل:



$$P\left(\text{معیوب}\right)=\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}+\frac{۶}{۱۶}\times\frac{۳}{۱۵}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۳۵}=\frac{۱۰+۹}{۱۰۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$$

۵۰- گزینه ۲-

حل:

$$P\left(\text{انتقال}\middle|\text{پسر}\right)=/۱\to P\left(\text{انتقال عدم}\middle|\text{پسر}\right)=/۹$$

$$P\left(\text{انتقال}\middle|\text{دختر}\right)=/۰۶\to P\left(\text{انتقال عدم}\middle|\text{دختر}\right)=/۹۴$$

$$P\left(\text{انتقال عدم}\right)=P\left(\text{انتقال عدم}\middle|\text{پسر}\right)P\left(\text{پسر}\right)+P\left(\text{انتقال عدم}\middle|\text{دختر}\right)P\left(\text{دختر}\right)=$$

$$/۹\times\frac{۱}{۲}+/۹۴\times\frac{۱}{۲}=/۹۲$$

۵۱- گزینه ۱-

حل:

$$P\left(\text{انتقال}\middle|\text{واکسن}\right)=/۰۲۵$$

$$P\left(\text{انتقال}\middle|\text{دیگر افراد}\right)=/۲$$

$$P\left(\text{واکسن}\right)=\frac{۲}{۵}$$

$$P\left(\text{انتقال}\right)=P\left(\text{انتقال}\middle|\text{واکسن}\right)P\left(\text{واکسن}\right)+P\left(\text{انتقال}\middle|\text{دیگر افراد}\right)P\left(\text{دیگر افراد}\right)=$$

$$=\frac{۲۵}{۱۰۰۰}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۳}{۵}=/۱۳$$

۵۲- گزینه ۲-

حل:

$$P\left(\text{پسر}\right)=/۴۵\rightarrow P\left(\text{دختر}\right)=/۵۵$$

$$P\left(\text{قبولی}\middle|\text{پسر}\right)=/۶۴\rightarrow P\left(\text{قبولی}\middle|\text{دختر}\right)=/۶$$

$$P\left(\text{قبولی}\right)=P\left(\text{قبولی}\middle|\text{پسر}\right)P\left(\text{پسر}\right)+P\left(\text{قبولی}\middle|\text{دختر}\right)P\left(\text{دختر}\right)=$$

$$=/۶۴\times/۴۵\times/۶\times/۵۵=۶۱/۸\%$$

۵۳- گزینه ۴-

حل: پیشامد مطلوب آن است که مهره ی شماره ی ۲ در بین ۴ مهره ی انتخاب شده باشد که در آن صورت احتمال این پیشامد برابر است با:

$$P=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

راه حل دوم : کل حالات مسأله $\binom{۶}{۴}$ است که قرار است مهره ی شماره ی۲ انتخاب شود پس باید از ۵ مهره غیر از شماره ی ۲، ۳ مهره انتخاب شود که احتمال این پیشامد برابر است با:

$$\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۶}{۴}}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$

۵۴- گزینه ۲-

حل:

$$P\left(\text{قبولی}\middle|A\right)=/۴\ ,\ P\left(\text{قبولی}\middle|B\right)=/۶$$

$$n(A)=۲n(B)\rightarrow P(A)=۲P(B)$$

$$\rightarrow P\left(\text{قبول}\right)=P\left(\text{قبول}\middle|A\right)P(A)+P\left(\text{قبول}\middle|B\right)P(B)=/۴\times ۲P(B)+/۶\times P(B)$$

$$P\left(A\middle|\text{قبول}\right)=\frac{P\left(\text{قبول}\middle|A\right)P(A)}{P\left(\text{قبول}\right)}=\frac{/۴\times ۲P(B)}{/۴\times ۲P(B)+/۶\times P(B)}=\frac{/۸}{/۸+/۶}=\frac{۸}{۱۴}=\frac{۴}{۷}\cong /۵۷$$

۵۵- گزینه ۲-

حل: مهره سفید را با w و سیاه را با b شماره گذاری می کنیم.پیشامد رخ داده آن است که مجموع ۶ است یعنی:

$$A=\{(w_۱,w_۵)(b_۱,b_۵)\ (w_۱,b_۵)(w_۵,b_۱)(w_۲,b_۴)$$

$$(w_۴,b_۲)(w_۲,w_۴)(b_۲,b_۴)(w_۳,b_۳)\}$$

اگر B پیشامد آن باشد دو مهره همرنگ باشد آنگاه :

$$A\cap B=\{(w_۱,w_۵)(b_۱,b_۵)(w_۲,w_۴)(b_۲,b_۴)\}$$

پس احتمال مورد نظر طبق رابطه ی احتمال شرطی برابر است با :

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{۴}{۹}$$

توجه شود که در حل این مسأله فرض شده است ترتیب انتخاب شدن مهم نیست . در حالی که اگر ترتیب انتخاب شدن نیز مهم باشد جواب تغییری نمی کند.

۵۶- گزینه ۳-

حل: احتمال آنکه مهره ی دوم انتخاب شده سفید باشد همانند احتمال مهره ی اول سفید باشد است:

W ← سفید بودن

$$P(W_۲)=P(W_۱)=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۵۷- گزینه ۳-

حل:

F : برآمد تاس عددی زوج است   E : شماره ی تاس ۴یا ۶ است

$F = \{۲,۴,۶\}$

$P(E|F)=\frac{۲}{۳}$

۵۸- گزینه ۴ -

حل:

$P(A)=/۲$, $P(B)=/۱$, $P(A\cap B)=\frac{۱}{۵۰}=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}$

→ A, B مستقل هستند

$P(A|B)=P(A)=/۲$, $P(\acute{A}|B)=P(\acute{A})=/۸$

$P(B|A)=P(B)=/۱$, $P(\acute{B}|A)=P(\acute{B})=/۹$

در نتیجه ی $P(\acute{B}|A)$ از بقیه بزرگتر است.

۵۹- گزینه ۳

حل:

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$A=\{۲,۴,۶,۸\}\rightarrow P(A)=\frac{۴}{۹}$

$B=\{۳,۶,۹\}\rightarrow P(B)=\frac{۳}{۹}$

$\rightarrow A\cap B=\{۳\}\rightarrow$ B,Aهستند سازگار

$P(A\cap B)=\frac{۱}{۹}\neq P(A)\times P(B)\rightarrow$ A, B وابسته اند

۶۰- گزینه ۱-

حل:

$$P(A)+P(\acute{A})=۱\rightarrow ۳P(\acute{A})+P(\acute{A})=۱\rightarrow P(\acute{A})=\frac{۱}{۴}\ ,\ P(A)=\frac{۳}{۴}$$

مستقل هستند $A,B\rightarrow P(\acute{A}|B)=P(\acute{A})=\frac{۱}{۴}$

۶۱-گزینه ۱- حل:فضای نمونه پرتاب دو تاس ۳۶ عضو داردکه از این تعداد در ۳۰ عضو آن اعداد رو شده متفاوت می باشد حال از این ۳۰ عضو اعضایی که مجموع اعداد رو شده ۶ باشد برابر است با:

E : مجموع اعداد رو شده ۶ باشد F : اعداد ظاهر شده ی تاس متفاوت باشد

$$E\cap F=\{(۱,۵)(۲,۴)(۴,۲)(۵,۱)\}$$

$$\rightarrow P(E|F)=\frac{۴}{۳۰}=\frac{۲}{۱۵}$$

۶۲- گزینه ۱- حل: اگر $\acute{A}$ و B مستقل باشند AوB نیز مستقل هستند در نتیجه :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۷}{۱۲}$$

$$\rightarrow ۳P(B)+P(B)-۳(P(B))^{۲}=\frac{۷}{۱۲}\rightarrow$$

$$P(B)=x\rightarrow -۳x^{۲}+۴x-\frac{۷}{۱۲}=۰$$

$$\Delta=(۴)^{۲}-۴(-۳)\left(-\frac{۷}{۱۲}\right)=۹$$

$$\rightarrow x_{۱}=\frac{-۴+۳}{+۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$x_{۲}=\frac{-۴-۳}{-۶}=\frac{۷}{۶}$$

$P(B)=\frac{۱}{۶}$, $P(B)=\frac{۷}{۶}>۱$ غیر قابل قبول

۶۳- گزینه ۴ - $P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{/۶\times/۵}{/۴}=/۷۵$

فصل ۴

متغیرهای تصادفی

۴-۱ - مقدمه

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن یک سکه سالم را ۵ بار پرتاب می کنیم، فضای نمونه این آزمایش شامل ۳۲ عضو می باشد که می توان آن را به صورت زیر نشان داد.

$S = \{(TTTTT)(HTTTT)(THTTT) \ldots.(HHHHH)\}$ (H شیر و Tخط است)

حال فرض کنید می خواهیم روی تعداد شیر های ظاهر شده این آزمایش تحلیل انجام دهیم(مثلاً ذکر شده به ازای هر شیر ظاهر شده ۱۰ دلار جایزه می گیرید). در این صورت تابعی روی فضای نمونه آزمایش تعریف می کنیم که عملیات آن شمارش تعداد شیرهای ظاهر شده در ۵ بار پرتاب سکه می باشد. این تابع به هر یک از اعضای فضای نمونه عدد صحیحی بین ۰تا ۵ اختصاص می دهد. به عنوان مثال به اولین عضو نمایش داده شده در فضای نمونه ی فوق عدد صفر ، به دومین عضو عدد ۱ و.... و به آخرین عضو عدد ۵ اختصاص می دهد. اگر این تابع را با X نشان دهیم ، مقادیر ممکن برای آن به صورت زیر نمایش داده می شود :

$$\mathrm{X} = \{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$$

می توان چنین بیان نمود که مجموعه ی بالا نیز به نوعی نشان دهنده ی فضای نمونه می باشد ، ولی مزیت آن نسبت به فضای نمونه اصلی این است که با توجه به هدف مسأله(تجزیه و تحلیل روی تعداد شیرهای ظاهر شده) ، فضای نمونه در آن بسیار ساده تر نشان داده شده است همچنین اگر فضای نمونه را به این صورت نمایش دهیم ، همه نتایج آن به صورت یک عدد ظاهر می شوند و واضح است که انجام تجزیه و تحلیل های ریاضی روی فضای نمونه ای که به صورت عددی نمایش داده می شود بسیار ساده تر و کاراتر می باشد.

تعریف متغیر تصادفی:

متغیر تصادفی تابع حقیقی است که بر روی فضای نمونه آزمایش تعریف می شود و به هر عضو آن یک عدد اختصاص می دهد.

تعریف تابع احتمال:

به تابعی که احتمال و شانس هر یک از مقادیر ممکن متغیر تصادفی را نشان می دهد تابع احتمال یا تابع جرم احتمال گویند.

به عنوان مثال در آزمایش ۵ بار پرتاب یک سکه ، هر یک از ۳۲ عضو ممکن هم شانس هستند که در یکی از این ۳۲ عضو هیچ شیری ظاهر نشده است$(X = ۰)$ ، در نتیجه احتمال اینکه متغیر تصادفی X (تعداد شیرهای ظاهر شده) مقدار صفر را اختیار کند برابر $\frac{۱}{۳۲}$است . در ۵ عضو از اعضای فضای نمونه یک شیر ظاهر شده است$(X = ۱)$ و در نتیجه احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقدار یک را اختیار کند برابر $\frac{۵}{۳۲}$است. به همین ترتیب داریم :

$$P(X = ۰) = \frac{\binom{۵}{۰}}{۳۲} = \frac{۱}{۳۲} \quad , \quad P(X = ۱) = \frac{\binom{۵}{۱}}{۳۲} = \frac{۵}{۳۲}$$

$$P(X = ۲) = \frac{\binom{۵}{۲}}{۳۲} = \frac{۱۰}{۳۲} \quad , \quad P(X = ۳) = \frac{\binom{۵}{۳}}{۳۲} = \frac{۱۰}{۳۲}$$

$$P(X = ۴) = \frac{\binom{۵}{۴}}{۳۲} \quad , \quad P(X = ۵) = \frac{\binom{۵}{۵}}{۳۲} = \frac{۱}{۳۲}$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{۵}{x}}{۳۲} \quad , \quad x = ۰,۱, \ldots ,۵$$

همانطور که در مثال بالا مشاهده می شود مجموع احتمالات برای متغیر تصادفی X به ازای تمام مقادیر ممکن $(X = ۰,۱, \ldots ,۵)$ برابر یک است . این موضوع در تمامی متغیرهای تصادفی برقرار است. به عبارتی داریم :

نکته ۱ :در یک متغیر تصادفی مجموع احتمالات به ازای تمامی مقادیر ممکن آن متغیر برابر یک می باشد.

مثال ۱-۱- خانواده ای با ۳ فرزند را در نظر بگیرید متغیرهای تصادفی X برابر" تعداد فرزندان پسر در این خانواده" تعریف می کنیم. تابع احتمال و مقادیر ممکن متغیر X را تعیین کنید .

حل: فضای نمونه یک خانواده ی ۳ فرزندی $۸ = ۲^۳$ عضو دارد.

تعداد فرزندان پسر در یک خانواده سه فرزندی (X) مقادیر ۰و۱و۲و۳ اختیار می کند.

$$P(X = ۰) = \frac{\binom{۳}{۰}}{۸} = \frac{۱}{۸}$$

$$P(X = ۱) = \frac{\binom{۳}{۱}}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

$$P(X = ۲) = \frac{\binom{۳}{۲}}{۸}$$

$$P(X = ۳) = \frac{\binom{۳}{۳}}{۸} = \frac{۱}{۸}$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{۳}{x}}{۸} \quad , \quad x = ۰,۱,۲,۳$$

مثال ۱-۲- ظرفی شامل ۳ توپ سفید، ۳ توپ قرمز، ۵ توپ سیاه است. فرض کنید شما ۳ توپ از این ظرف انتخاب می کنید و به ازای هر توپ سیاه انتخاب شده یک دلار جایزه می گیرید. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده ی میزان جایزه شما باشد ، مقادیر مختلف آن و احتمال هر یک را بدست آورید.

حل: فضای نمونه ی اصلی این مسأله شامل $\binom{۱۱}{۳}$ عضو هم شانس می باشد که با توجه به هدف مسأله یک متغیر تصادفی روی آن تعریف و به هر یک از اعضای آن یکی از اعداد ۰و ۱و۲و۳ اختصاص داده می شود.

$$P(X = x) = ? \quad x = ۰,۱,۲,۳$$

$$P(X = ۰) = \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

$$P(X = ۱) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

$$P(X = ۲) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

$$P(X = ۳) = \frac{\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

و یا

$$P(X = x) = \frac{\binom{۵}{x}\binom{۶}{۳-x}}{\binom{۱۱}{۳}} \quad , x = ۰,۱,۲,۳$$

مثال ۱-۳- تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است، مقدار عدد ثابت C را بیابید؟

$$P(X = x) = C\left(\frac{۱}{۶}\right)^x \quad , \quad x = ۱,۲, ...$$

حل: برای یک متغیر تصادفی مجموع احتمالات به ازای تمام مقادیر ممکن آن برابر یک است در نتیجه داریم:

$$\sum_{x=۱}^{\infty} P(X = x) = ۱ \rightarrow \sum_{x=۱}^{\infty} C(\frac{۱}{۶})^x = ۱ \rightarrow C\sum_{x=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۶})^x = ۱$$

$$C\left(\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۳}+\cdots\right)=۱ \rightarrow C\left(\frac{\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۱}{۶}}\right)=۱ \rightarrow C=۵$$

حد مجموع تصاعد

$a=\frac{۱}{۶}$ و قدر نسبت $\frac{۱}{۶}$

نکته۲: برای حل مسائل مربوط به متغیرهای تصادفی باید گام های زیر را طی نمود :

۱. **تعیین آزمایش تصادفی**

۲. **تعیین فضای نمونه**

۳. **تعریف متغیر تصادفی**

۴. **تعیین مقادیر مربوط به متغیر تصادفی**

۵. **محاسبه احتمال هر یک از مقادیر**

۶. **بررسی اینکه مجموع احتمالات برابر ۱ می شود یا خیر**

۴-۲- متغیرهای تصادفی معروف

۴-۲-۱- متغیر تصادفی برنولی

متغیر تصادفی برنولی متغیر تصادفی است که مقادیر ۱(موفقیت) و صفر (شکست) را به ترتیب با احتمال های P و $۱-P$ اختیار می کند و تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$P(X=x)=P^{x}(۱-p)^{۱-x} \qquad x=۰,۱$$

(توجه داشته باشید که منظور از موفقیت نتیجه ای از آزمایش می باشد که می خواهیم روی آن تحلیل انجام دهیم و همیشه موفقیت معنی مثبت بودن نمی دهد)

۴-۲-۲- متغیر تصادفی دو جمله ای

تعداد موفقیت ها در n آزمایش مستقل که هر آزمایش با احتمال P موفقیت است را شمارش می کند. تابع احتمال متغیر تصادفی دو جمله ای به صورت زیر می باشد:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^{k}(۱-P)^{n-k} \quad , \quad k=۰,۱,\dots,n$$

مثال ۲-۱- از کارخانه ای که لامپ تولید می کند ۱۰ لامپ را خریداری کرده ایم. کارخانه دار مدعی شده است که هر لامپ او به احتمال ۰/۳ معیوب است. به چه احتمالی از این ۱۰ لامپ ، ۴ لامپ معیوب است ؟

حل: در این مسأله ۱۰ آزمایش وجود دارد که موفقیت را برابر معیوب بودن تعریف می کنیم که احتمال موفقیت در این مسأله $P=/۳$ است. در اینجا $k=۴ , p=/۳ , n=۱۰$ در نتیجه احتمال آنکه در ۱۰ لامپ ، ۴ لامپ معیوب وجود داشته باشد برابر است با :

$$\binom{۱۰}{۴}(/۳)^{۴}(/۷)^{۶}$$

ب) به چه احتمالی حداکثر ۲ لامپ معیوب وجود دارد؟

حل:

$$P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)=\binom{۱۰}{۰}(/۳)^{۰}(/۷)^{۱۰}+\binom{۳}{۱}(/۳)(/۷)^{۹}+\binom{۳}{۲}(/۳)^{۲}(/۷)^{۸}$$

مثال ۲-۲- تاس سالمی را ۱۰ مرتبه پرتاب می کنیم.

الف) به چه احتمالی ۳ بار عدد اول ظاهر می شود؟

ب)به چه احتمالی ۷ بار مضرب۳ ظاهر می شود؟

حل:

الف) در این قسمت موفقیت برای هر تاس زمانی حاصل می شود که تاس عدد اول بیاید که فضای نمونه هر تاس ۶ حالت دارد که حالات $\{۲،۳،۵\}$ عدد اول است در نتیجه هر تاس به احتمال $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ موفقیت است در نتیجه متغیر X رابرابر تعداد اعداد اول ظاهر شده در ۱۰ بار پرتاب تاس تعریف می کنیم و داریم :

$$P(X=۳)=\binom{۱۰}{۳}(\frac{۱}{۲})^{۳}(\frac{۱}{۲})^{۷}=\frac{\binom{۱۰}{۳}}{۲^{۱۰}}$$

ب) در این قسمت موفقیت برای هر تاس وقتی حاصل می شود که تاس مضرب ۳ بیاید که از ۶ حالت ممکن برای هر تاس دو حالت $\{۳،۶\}$ مضارب ۳ هستند در نتیجه هر تاس به احتمال $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$ موفقیت است در نتیجه X را برابر تعداد مضارب ۳ ظاهر شده در ۱۰ پرتاب تاس تعریف می کنیم و داریم:

$$P(X = ۷) = \binom{۱۰}{۷} (\frac{۱}{۳})^{۷} (\frac{۲}{۳})^{۳}$$

نکته ۲-۱- در تابع احتمال متغیر تصادفی دو جمله ای اگر $P = \frac{۱}{۲}$ باشد تابع احتمال به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\mathrm{P(X = k)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \mathrm{P^{k}(n - P)^{n-k}} \rightarrow \frac{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}}{۲^{\mathrm{n}}}$$

$$\mathrm{k} = ۰,۱,۲, \ldots, \mathrm{n}$$

مثال ۲-۳- به ازای کدام مقدار a تابع روبرو یک تابع احتمال است؟

$$\mathrm{P(X = x)} = \frac{\binom{۱۰}{\mathrm{x}}}{۲^{۳\mathrm{a}-۵}} \quad , \quad \mathrm{x} = ۰,۱, \ldots,۱۰$$

حل: همانطور که مشاهده می شود تابع احتمال داده شده تابع احتمال دو جمله ای با $\mathrm{n} = ۱۰$, $\mathrm{P} = \frac{۱}{۲}$ می باشد در نتیجه داریم :

$$۳\mathrm{a} - ۵ = ۱۰ \rightarrow ۳\mathrm{a} = ۱۵ \rightarrow \mathrm{a} = ۵$$

البته باید توجه داشت که این مسأله بدون استفاده از تابع احتمال دو جمله ای نیز قابل حل است از این که مجموع احتمالات برابر ۱ است داریم :

$$\sum_{\mathrm{x}=۰}^{۱۰} \mathrm{P(X = x)} = ۱ \rightarrow \sum_{\mathrm{x}=۰}^{۱۰} \frac{\binom{۱۰}{\mathrm{x}}}{۲^{۳\mathrm{a}-۵}} = ۱ \rightarrow \frac{۱}{۲^{۳\mathrm{a}-۵}} \sum_{\mathrm{x}=۰}^{۱۰} \binom{۱۰}{\mathrm{x}} = ۱$$

$$\rightarrow \frac{۲^{۱۰}}{۲^{۳\mathrm{a}-۵}} = ۱ \rightarrow ۲^{۳\mathrm{a}-۵} = ۲^{۱۰} \rightarrow ۳\mathrm{a} - ۵ = ۱۰ \rightarrow \mathrm{a} = ۵$$

۴-۲-۳- متغیر تصادفی هندسی

برای تعریف این متغیر ابتدا با یک مثال شروع می کنیم :

مثال ۳-۱- تاس سالمی را مرتباً پرتاب می کنیم تا مضرب ۳ ظاهر شود. به چه احتمالی ۵ بار تاس را پرتاب کرده ایم ؟

حل:

در این مسأله موفقیت برای هر تاس وقتی حاصل می شود که تاس مضرب ۳ ظاهر شود که هر تاس به احتمال $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ موفقیت و $\frac{۲}{۳}$ شکست است . بنابرایت طبق خواسته مسأله ، تابعی تعریف می کنیم که تعداد پرتاب های تاس تا رسیدن به اولین مضرب ۳ را شمارش کند.

X : تعداد پرتاب ها تا رسیدن به مضرب ۳

این متغیر X می تواند مقادیر ۱و۲و۳و.... را اختیار کند.

$P(X=۱)$ یعنی تعداد پرتاب ها تا رسیدن به اولین مضرب ۳ ، ۱ باشد یعنی پرتاب اول مضرب ۳ ظاهر شود که احتمال آن $\frac{۱}{۳}$است.$P(X=۲)$ یعنی دو پرتاب تا رسیدن به اولین مضرب ۳ طول بکشد پس باید در پرتاب اول مضرب ۳ ظاهر نشود(شکست رخ دهد) و در پرتاب دوم مضرب ۳ (موفقیت) حاصل شود که احتمال آن برابر $\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}$ می باشد. $P(X=۵)$ یعنی اولین مضرب ۳ در پرتاب پنجم حاصل شود پس باید ۴ پرتاب قبل شکست و پرتاب پنجم موفقیت حاصل شود در نتیجه داریم :

$$P(X=۵)=(\frac{۲}{۳})^{۴}\frac{۱}{۳}$$

تعریف متغیر تصادفی هندسی

متغیر تصادفی هندسی را برابر تعداد آزمایش های مستقل که هر آزمایش به احتمال P موفقیت است، تا رسیدن به اولین موفقیت تعریف می کنند و تابع احتمال آن به صورت زیر است :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=(۱-\mathrm{P})^{\mathrm{x}-۱}\mathrm{P} \quad , \qquad \mathrm{x}=۱,۲,\ldots \qquad (۱-۳)$$

درک رابطه (۳-۱) ساده است. زیرا برای آنکه اولین موفقیت در آزمایش x ام رخ دهد(X برابر x شود) باید نتیجه $\mathrm{x}-۱$ آزمایش اول شکست و نتیجه ی آزمایش x ام موفقیت باشد.

مثال۳-۲- شخصی آنقدر یک تاس سالم را پرتاب می کند تا به اولین نتیجه ی ۶ برسد . اگر X نشان دهنده ی تعداد آزمایش ها تا رسیدن به اولین نتیجه ی ۶ باشد ،مطلوبست:

الف)$P(X=۴)$ **ب)**$P(X<۵)$ **ج)**$P(X\geq ۶)$

حل:

الف) در تاس به احتمال $\frac{۱}{۶}$ موفقیت (ظاهر شدن عدد ۶) و به احتمال $\frac{۵}{۶}$ شکست حاصل می شود.

$$P(X=۴)=(\frac{۵}{۶})^{۳}(\frac{۱}{۶})$$

ب)

$$P(X<۵)=P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)$$

$$=\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۵}{۶}\right)\times\left(\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}\times\left(\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}\times\left(\frac{۱}{۶}\right)=\rightarrow\frac{۱}{۶}\frac{(۱-(\frac{۵}{۶})^{۴})}{۱-\frac{۵}{۶}}=۱-(\frac{۵}{۶})^{۴}$$

تصاعد هندسی

ج)

$$P(X\geq ۶)=P(X=۶)+P(X=۷)+P(X=۸)+\cdots$$

$$=\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵}\left(\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۶}\left(\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۷}\left(\frac{۱}{۶}\right)\ldots=\rightarrow=\frac{\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵}\left(\frac{۱}{۶}\right)}{۱-\frac{۵}{۶}}=(\frac{۵}{۶})^{۵}$$

توجه: قسمت ج را می توان به طریق دیگر هم حل کرد.

$P(X\geq ۶)$ یعنی اولین موفقیت در آزمایش ۶ ام به بعد رخ دهد پس باید ۵ آزمایش اول همه شکست باشد که احتمال آن برابر $(۱-P)^{۵}$ یا $(\frac{۵}{۶})^{۵}$ است.

۴-۲-۴- متغیر تصادفی دو جمله ای منفی (پاسکال)

تعداد آزمایش های مستقل که هر آزمایش به احتمال P موفقیت است را تا رسیدن به r امین موفقیت متغیر تصادفی دو جمله ای منفی می نامند و تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$P(X=x)=\binom{x-۱}{r-۱}P^{r}(۱-P)^{x-r} \quad , \quad x=r,r+۱,\ldots.. \qquad (۱-۴)$$

رابطه ی (۴-۱) را به این صورت می توان تشریح کرد که برای اینکه r امین موفقیت در x امین آزمایش رخ دهد ، باید از بین $x-۱$ آزمایش اول، $r-۱$ موفقیت داشته باشیم و همچنین آزمایش x ام حتماً باید به نتیجه موفقیت منجرشود. در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:

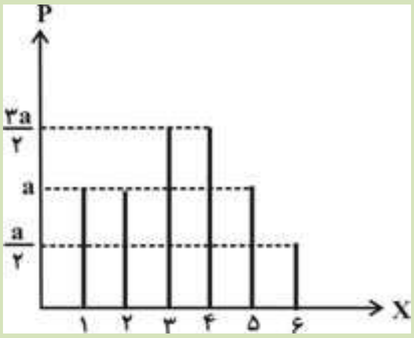
$$P(X=x)=\binom{x-۱}{r-۱}P^{r-۱}(۱-P)^{x-۱-(r-۱)}\times P=\binom{x-۱}{r-۱}P^{r}(۱-P)^{x-r}$$

مثال ۴-۱ - اگر یک تاس سالم را به طور مرتب پرتاب کنیم ، احتمال آنکه دومین نتیجه ی ۶ در پنجمین پرتاب حاصل شود چقدر است؟

حل: X : تعداد آزمایش های لازم برای رسیدن به دومین نتیجه ی ۶

$P(X=۵)\binom{۴}{۱}(\frac{۱}{۶})^{۲}(\frac{۵}{۶})^{۳}$

✓ تست های چهار گزینه ای فصل ۴



۱- نمودار میله ای مربوط به تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X به صورت مقابل است.مقدار $P(۱< X \leq ۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۸}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۳}$

۲- هفتاد و پنج درصد از تیر های یک تیر انداز به هدف اصابت می کند.احتمال آنکه پنجمین تیر وی سومین تیری باشد که به هدف اصابت می کندکدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۵۱۲}$ ۲) $\frac{۲۷}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۸۱}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۸۱}{۵۱۲}$

۳- در ظرفی ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سبز وجود دارد. به تصادف ۲ مهره بدون جایگذاری از ظرف انتخاب می کنیم.متغیر تصادفی X را " تعداد مهره های قرمز خارج شده" تعریف می کنیم. محتمل ترین مقدار (مد) X کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶/

۴- سکه ای را که احتمال شیر آمدنش ۳ برابر خط آمدنش است را ۵ مرتبه پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X را " تعداد شیر های ظاهر شده در این ۵ پرتاب" تعریف می کنیم. احتمال اینکه X مقداری فرد را اختیار کند کدام است؟

۱) $\frac{۲۱۳}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۵۲۸}{۱۰۲۴}$ ۳) $\frac{۵۱۳}{۱۰۲۴}$ ۴) $\frac{۱۲۶}{۱۰۲۴}$

۵- به ازای کدام مقدار a تابع روبرو یک تابع جرم احتمال است؟ $i=۰,۱,....,۲۰$ و $P(X=i)=\frac{\binom{۲۰}{i}}{۲^{۵a-۵}}$

۱) ۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۶-در آزمایش پرتاب دو تاس، متغیر تصادفی X را برابر " قدر مطلق تفاضل دو عدد ظاهر شده" فرض می کنیم.

مقدار P(X=۳) کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۷- فرض کنید قیمت سهام در هر روز به طور مستقل از روز های قبل با احتمال $\frac{۱}{۳}$ دو برابر و با احتمال $\frac{۲}{۳}$ نصف می شود.چقدر احتمال دارد بعد از ۵ روز قیمت سهام حداقل ۸ برابر شده باشد؟

۱) $\frac{۱۰}{۳^۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳^۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳^۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳^۵}$

۸- تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است.مقدار ثابتC کدام است؟

$P(X=x)= C\left(\frac{۱}{۶}\right)^{X+۱}$ X=۰,۱,۲,۳,..........

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) ۳۰ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۵

۹- فرض کنید تاس سالمی را دو مرتبه پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده بیشترین عددی باشد که در دو پرتاب حاصل می شود، P(X=۴) برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۱۰- فرض کنید X دارای تابع احتمال x=۱,۲ ...۵ , $P(X)=Cx^۲$ باشد. مقدار P(X≤۲) کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) ۵C ۴) ۱۱C

۱۱- تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است. P(X≤۴) کدام است؟

$P(X=i)= \frac{i(i+۱)}{a}$, i= ۱و۲و۳و۴و۵

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۱۰}{۱۷}$ ۳) $\frac{۷}{۱۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۱۲- در پرتاب دو تاس با هم متغیر تصادفی X را برابر مجموع اعداد رو شده در نظر می گیریم. اگر $P(X=a)=$ $P(X=b)$ ، آنگاه a,b کدام دو عدد می توانند باشند؟

۱) ۸و۵ ۲) ۸و۴ ۳) ۹و۴ ۴) ۹و۵

۱۳- ظرفی شامل ۳ توپ سفید، ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سیاه است.فرض کنید شما ۳ توپ از این ظرف انتخاب می کنید و به ازای هر توپ سیاه انتخاب شده یک دلار جایزه می گیرید.اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده میزان جایزه شما باشد، $P(X=۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۱}$ ۲) $\frac{۴}{۱۱}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

۱۴- در سوال قبل اگر برای هر توپ سفید یک دلار جایزه و برای هر توپ قرمز یک دلار جریمه شوید و Y نشان دهنده میزان برد شما باشد، $P(Y=۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۵- هر یک از محصولات تولیدی یک کارخانه به طور مستقل از هم با احتمال یکسان ۲/ معیوب است.یک بازرس هر یک از محصولات تولید شده را کنترل می کند تا به اولین محصول معیوب دست یابد اگر متغیر تصادفی X را برابر

" تعداد محصولات کنترل شده تا رسیدن به اولین معیوب" تعریف شود آنگاه تابع احتمال X کدام گزینه است؟

(i= ۱,۲,۳,.........)

۱) $P(X= i)= /۲\,(/۸)^{i}$ ۲) $P(X= i)= /۸\,(/۲)^{i}$

۳) $P(X= i)= /۲\,(/۸)^{i-1}$ ۴) $P(X= i)= /۲\,(/۸)^{i+1}$

۱۶- در سوال قبل مطلوبست احتمال آنکه $P(X \leq ۳)$ ؟(یعنی محصول معیوب حداکثر تا انتخاب سوم بدست آید)

۱) ۴۸۸/ ۲) ۲۳۴/ ۳) ۳۶۷/ ۴) ۵۱۲/

۱۷- به ازای کدام مقدار a تابع $P(X=x)=\frac{۱}{n^{۲}}(۲x+a), x=۱,۲,\dots,n$ یک تابع احتمال است؟(سراسری ریاضی ۷۶)

۱) ۱-   ۲)صفر   ۳)۲   ۴) ۱

۱۸- تابع احتمال متغیر تصادفی x به صورت $P(x=i)=\frac{\binom{۵}{i}}{a}, i=۱,۲,۳,۴,۵$ مقدار $P(X\geq ۴)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۳۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶}{۳۱}$

۱۹-فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی سه برآمد دارد . اگر احتمال متناظر این سه برآمد α ،$\frac{۱}{۳}$ ،$\frac{۱}{۲}$ باشد ،با تعریف متغیر تصادفی مناسب، تابع احتمال آن چگونه مورد قبول است؟(سراسری ریاضی ۸۶ خارج ازکشور)

۱) $P(x=i)=\frac{۱}{۳!}$ ۲) $P(x=i)=\frac{i}{۶}$

۳) $P(x=i)=\frac{i+۱}{۱۲}$ ۴) $P(x=i)=\frac{۲i-۱}{۶}$

۲۰- با کدام a و با کدام حوزه ی مقادیر x تابع $P(x=i)=a(\frac{۱}{۳})^{i}$ یک تابع احتمال اولین موفقیت در امتحان i ام است؟(سراسری ریاضی ۸۴)

۱) $a=۱$ ، ناشمار امتناهی   ۲) $a=۱$ ، ناشمار امتناهی

۳) $a=۲$ ، شمارا نامتناهی   ۴) $a=۲$ ، شمارا نامتناهی

۲۱-توزیع احتمال متغیر تصادفی x متناظر با ۷ برآمد ، به صورت زیر است، a کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۱)

$$\begin{cases} P(x=i)=\dfrac{۱}{i^{۲}+i}, & ۱\leq i\leq ۵ \\ P(x=j)=\dfrac{j-۴}{a}, & j=۶,۷ \end{cases}$$

۱) ۳۰   ۲)۲۴   ۳)۲۰   ۴) ۱۸

۲۲- تابع احتمال متغیر تصادفی x با حوزه ی اعداد طبیعی به صورت $P(x=i)=\frac{۱}{i^۲+i}$ مقدار $P(۱۰ \leq x < ۱۰۰)$ کدام است ؟(سراسری ریاضی۸۵)

۱) ۰/۰۹   ۲) ۰/۰۹۲   ۳) ۰/۰۹۹   ۴) ۰/۱۱

۲۳-توزیع احتمال متغیر تصادفی x به صورت $P(x=i)=\frac{۱}{i^۲+i}, i=۱,۲,۳,...$ تعریف شده است. $P(X \geq ۵)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۴- توزیع احتمال تصادفی X با ۶ برآمد به صورت :

$$P(x=i)=\begin{cases} \frac{۱}{i(I+۱)} & i=۱,۲,۳,۴ \\ a & i=۵,۶ \end{cases}$$

است. $P(۳ \leq X \leq ۵)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۸خارج از کشور)

۱) $\frac{۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱۷}{۶۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۲۵-در یک آزمایش دوحالته احتمال موفقیت P است.اگر متغیرتصادفی X آزمایش هایی باشد که برای اولین بار موفقیت حاصل می شود، تابع احتمال آن کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $P(۱-P)^{X-۱}$ ۲) $(۱-P)P^X$ ۳) $P(۱-P)^X$ ۴) $\binom{X}{n}P(۱-p)^{x-۱}$

۲۶- دانش آموزشی به ۶ پرشش تستی سه گزینه ای،به تصادف پاسخ می دهد. احتمال اینکه فقط به ۴ پرسش پاسخ درست بدهد، کدام است؟(سراسری تجربی ۸۸)

۱) $\frac{۴}{۸۱}$ ۲) $\frac{۵}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۲۴۳}$

۲۷- می دانیم ۳۰ درصد از افراد جامعه ای دارای گروه خونی A هستند.اگر به طور تصادفی ۳ نفر از این جامعه را انتخاب کنیم. با کدام احتمال فقط گروه خونی ۲ نفر ازآنها از نوع A است؟(سراسری تجربی ۸۱)

۱) ۰/۱۸۹   ۲) ۰/۱۴۷   ۳) ۰/۰۴۲   ۴) ۰/۰۶۳

۲۸- از نوعی بذر، ۸۰ درصد آنها جوانه می زند . اگر سه بذر از این نوع کاشته شود، با کدام احتمال لااقل ۲ بذر، جوانه می زند؟(سراسری تجربی ۸۲)

۱)۰/۵۱۲ ۲)۰/۷۸۴ ۳)۰/۸۶۴ ۴) ۰/۸۹۶

۲۹- تاس سالمی را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه ۶ بار برآمد تاس، عدد بزرگتر از۳ باشد، کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۴)

۱) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۷۵}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۷۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۱۰۵}{۵۱۲}$

۳۰- هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه ای مرغوبند. با کدام احتمال از ۴ کالای خریداری شده این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟(سراسری تجربی ۸۷ خارج از کشور)

۱) $\frac{۲۵۱}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۶۳}{۶۴}$

۳۱- از نوعی بذر که ۸۰ درصد آنها جوانه می زنند؛ ۵ عدد کاشته شده است. با کدام احتمال حداقل ۲ عدد از آنها جوانه می زنند.؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱)۰/۹۹۳۲۸ ۲)۰/۹۹۳۶۰ ۳)۰/۹۴۲۰۸ ۴) ۰/۹۵۱۲۰

۳۲- تابع احتمال x به صورت $P(X=x)=\frac{\binom{۵}{x}}{A}, X=۰,۱,۲,۳,۴,۵$ تعریف شده است. با محاسبه ی A مقدار $P(X=۲$ یا $۳)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۳-در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آنها خارج می کنیم. X تعداد موش های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟(سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۴- دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند.با کدام احتمال حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل می شود؟(سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

۳۵- دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه ای به تصادف پاسخ می دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱)۰/۰۲۵۶ ۲)۰/۰۵۱۲ ۳)۰/۰۶۲۵ ۴) ۰/۰۷۶۸

۳۶- در جعبه ای ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید یکسان وجود دارند. به تصادف یک مهره از جعبه خارج و رنگ ان را یادداشت کرده و به جعبه بر می گردانیم. اگر X تعداد آزمایش هایی باشد که برای اولین بار مهره سفید خارج شود، $P(X \leq ۳)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰ خارج از کشور)

۱) $\frac{۲۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۱۱۹}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۳۷- به طور متوسط از هر ۱۰ مشتری مرجعه کننده به فروشگاهی ۶ نفر خرید می کنند. در فاصله ی زمانی معین ۴ مشتری به این فروشگاه مراجعه می کنند؛ با کدام احتمال فقط ۳ نفر از آنها خرید می کنند.(سراسری تجربی ۹۰ خارج از کشور)

۱)۰/۳۱۷۲ ۲)۰/۳۲۸۲ ۳)۰/۳۴۵۶ ۴) ۰/۳۶۵۴

۳۸- احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۲ است. اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند، با کدام احتمال ۴ نفر از آنان به این بیماری مبتلا می شوند.؟(سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱)۰/۰۱۴۲۸ ۲)۰/۰۱۵۳۶ ۳)۰/۰۱۵۴۸ ۴) ۰/۰۱۵۹۶

۳۹- تابع احتمال به صورت $P(X = x) = \frac{۲^x}{A}, X = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$ تعریف شده است. با محاسبه ی A احتمال فرد بودن متغیر تصادفی X کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۰- دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه ای به تصادف پاسخ می دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده است؟(سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

۱)۰/۲۰۴۸ ۲)۰/۴۰۹۶ ۳)۰/۵۱۲ ۴) ۰/۷۱۴۴

۴۱- آزمایشی فقط دو نتیجه ی شکست و پیروزی دارد . احتمال پیروزی $\frac{۳}{۴}$ است و X تعداد پیروزی ها در ۱۶ بار تکرار این آزمایش هاست. $P(۰ \leq X \leq ۱۶)$ کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۴})^{۱۶}$ ۲) $۱ - (\frac{۱}{۴})^{۱۶}$ ۳) $۲(\frac{۱۶}{۸})(\frac{۳}{۴})$ ۴) ۱

✓ پاسخ های تشریحی فصل ۴

۱- گزینه ۲-

حل: جمع احتمالات باید برابر یک شود در نتیجه داریم :

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\rightarrow a+a+\frac{۳a}{۲}+\frac{۳a}{۲}+a+\frac{a}{۲}=۱\rightarrow \frac{۱۳a}{۲}=۱\rightarrow a=\frac{۲}{۱۳}$$

$$P(۱<X\leq ۴)=P(۲)+P(۳)+P(۴)=a+\frac{۳a}{۲}+\frac{۳a}{۲}=\frac{۸}{۱۳}$$

۲- گزینه ۴-

حل: برای آنکه پنجمین تیر وی ، سومین تیری می باشد که برخورد می کند اولاً باید تیر پنجم حتماً برخورد کند.(به احتمال $\frac{۳}{۴}$) و از ۴ تیر قبلی ۲ تیر به هدف برخورد کندکه احتمال آن برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲\times\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\times\frac{۳}{۴}=\binom{۴}{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲=\frac{۱۶۲}{۱۰۲۴}=\frac{۸۱}{۵۱۲}$$

۳- گزینه ۲-

حل: محتمل ترین مقدارX ، آن مقداری از X است که دارای بیشترین احتمال است.

X : تعداد مهره های قرمز خارج شده در نمونه ۲ تایی $(X=۰,۱,۲)$

$$P(X=۰)=\frac{\binom{۳}{۰}\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۶}{۱۰}$$

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۰}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳}{۱۰}$$

در نتیجه مقدار $X=۱$ دارای بیشترین احتمال است .

۴- گزینه ۲-

حل:

$$P\left(\text{شیر}\right) = ۳P\left(\text{خط}\right)$$

$$P\left(\text{شیر}\right) + P\left(\text{خط}\right) = ۱ \to ۳P\left(\text{خط}\right) + P\left(\text{خط}\right) = ۱ \to P\left(\text{خط}\right) = \frac{۱}{۴}$$

$$P\left(\text{شیر}\right) = \frac{۳}{۴}$$

X : تعداد شیر ها در ۵ بار پرتاب

$$P\left(X = \text{فرد}\right) = P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۵)$$

$$= \binom{۵}{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۵} + \binom{۵}{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۴} + \binom{۵}{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۵}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۰} = \frac{۵۲۸}{۱۰۲۴}$$

۵- گزینه ۴-

حل: تابع روبرو یک تابع احتمال متغیر تصادفی دو جمله ای با $n = ۲۰$ و $P = \frac{۱}{۲}$ است در نتیجه :

$$۵a - ۵ = ۲۰$$

$$\to a = ۵$$

۶- گزینه ۳-

حل: فضای نمونه پرتاب دو تاس ، ۳۶ عضو دارد برای آنکه قدر مطلق تفاضل دو عدد رو شده برابر ۳ شود باید حالات زیر رخ دهد :

$$A = \{(۱,۴)(۴,۱)(۲,۵)(۵,۲)(۳,۶)(۶,۳)\}$$

$$\to P(X = ۳) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

۷- گزینه ۳- حل: برای آنکه بعد از ۵ روز قیمت سهام حداقل ۸ برابر شود باید دو حالت زیر رخ دهد.

الف) همه ی ۵ روز قیمت ها دو برابر شود

ب) از ۵ روز ، ۴ روز قیمت ها دو برابر و یک روز قیمت نصف شود. $\binom{۵}{۵}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۵}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۰} + \binom{۵}{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱} = \frac{۱۱}{۳۵}$

۸- گزینه ۴-

حل: باید جمع احتمالات به ازای تمام مقادیر X برابر یک شود.

$$\sum_{X=۰}^{\infty} P(X=x)=۱ \rightarrow \sum_{X=۰}^{\infty} C\left(\frac{۱}{۶}\right)^{X+۱}=۱ \rightarrow \frac{C}{۶}\sum_{X=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{X}=۱$$

$$\rightarrow \frac{C}{۶}\left[۱+\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۲}+\cdots\right]=۱ \rightarrow \frac{C}{۶}\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۶}}=۱ \rightarrow C=۵$$

۹- گزینه ۲-

حل: فضای نمونه این آزمایش ۳۶ حالت دارد برای آنکه ماکزیمم یا بیشترین عدد در پرتاب دو تاس برابر ۴ شود باید حالات زیر رخ دهد :

$$A=\{(۱,۴)(۲,۴)(۳,۴)(۴,۴)(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)\}$$

$$\rightarrow P(X=۴)=\frac{۷}{۳۶}$$

۱۰- گزینه ۱-

حل: ابتدا مقدار C را محاسبه می کنیم.

$$\sum_{X=۱}^{۵} P(X=x)=۱ \rightarrow C(۱+۴+۹+۱۶+۲۵)=۱ \rightarrow C=\frac{۱}{۵۵}$$

$$P(X\leq ۲)P(X=۱)+P(X=۲)=C+۴C=۵C=\frac{۵}{۵۵}=\frac{۱}{۱۱}$$

۱۱- گزینه ۱-

حل: مانند سئوال قبل ابتدا a را حساب می کنیم

$$\sum_{i=۱}^{۵} P(X=i)=۱ \rightarrow \frac{۲}{a}+\frac{۶}{a}+\frac{۱۲}{a}+\frac{۲۰}{a}+\frac{۳۰}{a}=۱$$

$$\rightarrow a=۷۰$$

$$P(X\leq ۴)=۱-P(X=۵)=۱-\frac{۳۰}{۷۰}=\frac{۴}{۷}$$

۱۲- گزینه ۴-

حل: X را برابر مجموع دو عدد ظاهر شده تعریف می کنیم.

$$\text{مجموع برابر ۴} = \{(۱,۳)(۲,۲)(۳,۱)\} \rightarrow P(X=۴) = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\text{مجموع برابر ۵} = \{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)\} \rightarrow P(X=۵) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

$$\text{مجموع برابر ۸} = \{(۲,۶)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲)\} \rightarrow P(X=۸) = \frac{۵}{۳۶}$$

$$\text{مجموع برابر ۹} = \{(۳,۶)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۳)\} \rightarrow P(X=۹) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

$$\rightarrow P(X=۵) = P(X=۹)$$

۱۳- گزینه ۱-

حل: برای آنکه ۲ دلار جایزه دریافت کنیم باید در نمونه ۳ تایی ، ۲ توپ سیاه بیرون آورده شود.

$$P(X=۲) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۱۰ \times ۶}{۱!} = \frac{۶}{۱۱}$$

۱۴- گزینه ۳-

حل: برای آنکه میزان برد صفر باشد باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

الف) هر سه توپ انتخابی سیاه باشد.

ب) از سه توپ انتخابی یکی سیاه،یکی قرمز و یکی سفید باشد

$$P(Y=۰) = \frac{\binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۵۵}{۱۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

۱۵- گزینه ۳-

حل: متغیر تعریف شده در این سوال از نوع هندسی می باشد و طبق تعریف گزینه ۳ درست است.(برای آنکه اولین معیوب در بازرسی i ام پیدا شود باید $i-۱$ قطعه قبلی سالم و قطعه ی i امی معیوب باشد.

۱۶-گزینه ۱

حل:

$$P(X \le ۳) = P(X = ۱) + P(X = ۲) + P(X = ۳)$$

$$= /۲ + /۸ \times /۲ + (/۸)^۲ /۲ = /۴۸۸$$

۱۷- گزینه ۱-

حل: مانند سئوالات ۸ و ۱۰و ۱۱ باید جمع احتمالات برابر یک شود.

$$\sum_{X=۱}^{n} \frac{۱}{n^۲}(۲x + a) = ۱ \rightarrow \frac{۱}{n^۲}\left[۲\sum_{X=۱}^{n} X + \sum_{X=۱}^{n} a\right] = ۱$$

$$\rightarrow \frac{۱}{n^۲}\left[۲\frac{n(n+۱)}{۲} + na\right] = ۱ \rightarrow \frac{۱}{n^۲}[n^۲ + (۱ + a)n] = ۱$$

$$\rightarrow n^۲(۱ + a)n = n^۲ \rightarrow (۱ + a)n = ۰ \rightarrow a = -۱$$

۱۸- گزینه ۴-

حل: توجه شود مقادیر x از ۱ تا ۵ است.(صفر جزء مقادیر نیست)

$$\sum_{i=۱}^{۵} P(X = i) = ۱ \rightarrow \sum_{i=۱}^{۵} \frac{\binom{۵}{i}}{a} = ۱$$

$$\rightarrow \frac{۳۲ - ۱}{a} = a \rightarrow a = ۳۱$$

$$P(X \ge ۴) = P(X = ۴) + P(X = ۵) = \frac{\binom{۵}{۴}}{۳۱} + \frac{\binom{۵}{۵}}{۳۱} = \frac{۶}{۳۱}$$

یاد آوری : $\sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} = ۲^n$

۱۹- گزینه ۲-

حل:

$$\alpha + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۱ \rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲}$$

در بین گزینه ها تنها $P(X = i) = \frac{i}{۶}$ تابع احتمال مناسب برای این متغیر تصادفی است.$(i = ۱,۲,۳)$

۲۰- گزینه ۳-

حل: متغیر تصادفی هندسی که برابر تعداد آزمایش ها تا رسیدن به اولین موفقیت تعریف می شود مقادیر اعداد طبیعی ($i = ۱,۲, \dots$) اختیار می کند. طبق مطالب گفته شده در فصل ۴ تابع احتمال متغیر تصادفی هندسی به صورت روبرو تعریف شده است.

$$P(X = i) = P(۱ - P)^{i-۱} = \frac{P}{۱ - P}(۱ - P)^i = a(\frac{۱}{۳})^i$$

$$\rightarrow ۱ - P = \frac{۱}{۳}, \frac{P}{۱ - P} = a \rightarrow a = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۲$$

همچنین می توان a را از رابطه ی روبرو بدست آورد

$$\sum_{i=۱}^{\infty} a(\frac{۱}{۳})^i = ۱ \rightarrow a\sum_{i=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۳}\right)^i = ۱ \rightarrow a\left[\frac{۱}{۳} + \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ + \cdots\right] = ۱$$

$$\rightarrow a = ۲$$

۲۱- گزینه ۱-

حل: باید مجموع احتمالات برابر یک شود

$$\sum_{i=۱}^{۵} P(X = i) + P(X = ۶) + P(X = ۷) = ۱$$

$$\rightarrow \sum_{i=۱}^{۵}\frac{۱}{i} - \frac{۱}{i + ۱} + \frac{۵}{a} = ۱ \rightarrow ۱ - \frac{۱}{۶} + \frac{۵}{a} = ۱ \rightarrow a = ۳۰$$

۲۲- گزینه ۱-

حل:

$$P(۱۰ \leq X < ۱۰۰) = \sum_{i=۱۰}^{۹۹}\frac{۱}{i^۲ + i} = \sum_{i=۱۰}^{۹۹}\frac{i + ۱ - ۱}{i(i + ۱)} = \sum_{i=۱۰}^{۹۹}\frac{۱}{i} - \frac{۱}{i + ۱} = \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰۰} = /۰۹$$

۲۳- گزینه ۲-

حل:

$$P(X \geq ۵) = \sum_{x=۵}^{\infty} \frac{۱}{i^۲ + i} = \sum_{i=۵}^{\infty} \frac{۱}{i} - \frac{۱}{i+۱} = \frac{۱}{۵} - ۰ = \frac{۱}{۵}$$

۲۴- گزینه ۱-

حل:

توجه : $\frac{۱}{i^۲ + i} = \frac{(i+۱) - i}{i(i+۱)} = \frac{۱}{i} - \frac{۱}{i+۱}$

$$\sum_{i=۱}^{۶} P(X = i) = ۱ \rightarrow \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}\right) + a + a = ۱$$

$$\rightarrow a = \frac{۱}{۱۰}$$

$$P(۳ \leq X \leq ۵) = P(X = ۳) + P(X = ۴) + P(X = ۵)$$

$$= \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}\right) + a = \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵}\right) + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۷}{۳۰}$$

۲۵- گزینه ۱-

حل: اگر در آزمایش x ام، اولین موفقیت حاصل شود ، آنگاه در $x - ۱$ آزمایش قبل ناموفق (شکست)بوده ایم که در این صورت تابع احتمال این متغیر تصادفی به صورت مقابل خواهد بود.

$$P(X = x) = P(۱ - P)^{X-۱}$$

۲۶- گزینه ۴-

حل: احتمال درست بودن پاسخ دادن به یک تست سه گزینه ای $\frac{۱}{۳}$است. طبق فرمول توزیع دو جمله ای داریم :

$$\binom{۶}{۴} \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴ \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = ۱۵ \times \frac{۱}{۸۱} \times \frac{۴}{۹} = \frac{۲۰}{۲۴۳}$$

۲۷- گزینه ۱-

حل: طبق فرمول توزیع دو جمله ای داریم :

$$\binom{۳}{۲}(/۳)^{۲}(/۷)^{۱}=/۱۸۹$$

۲۸- گزینه ۴-

حل: لااقل۲ بذر جوانه می زند. یعنی ۲ یا ۳ بذر جوانه می زند. طبق فرمول توزیع دو جمله ای داریم :

$$\binom{۳}{۲}(/۸)^{۲}(/۲)^{۱}+\binom{۳}{۳}(/۸)^{۳}(/۲)^{۰}=/۸۹۶$$

۲۹- گزینه ۴-

حل: احتمال بزرگتر از ۳ بودن برآمد تاس ، $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ است. مطابق فرمول توزیع دو جمله ای داریم :

$$\binom{۱۰}{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}=\frac{\binom{۱۰}{۶}}{۲^{۱۰}}=\frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}=\frac{۱۰۵}{۵۱۲}$$

۳۰- گزینه۲-

حل: حداقل یک کالا مرغوب است. یعنی یک یا دو یا سه یا چهار کالا مرغوب است. از پیشامد متمم استفاده می کنیم:

$$P\left(\text{حداقل یک مرغوب}\right)=۱-P\left(\text{هیچ مرغوب}\right)=۱-\left[\binom{۴}{۰}(/۷۵)^{۰}(/۲۵)^{۴}\right]=۱-\frac{۱}{۲۵۶}=\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$$

۳۱- گزینه ۱-

حل: احتمال جوانه زدن یک بذر ۰/۸ است. حداقل دو عدد یعنی یا دو عدد یا سه عدد یا چهار عدد یا پنج عدد جوانه بزنند از پیشامد متمم استفاده می کنیم:

$$P\left(\text{حداقل ۲ عدد}\right)=۱-P\left(\text{یک عدد یا هیچی}\right)$$

$$=۱-\left[\binom{۵}{۱}(/۸)^{۱}(/۲)^{۴}+\binom{۵}{۰}(/۸)^{۰}(/۲)^{۵}\right]=۱-(/۰۰۶۴۰+/۰۰۰۳۲)=۱-/۰۰۶۷۲$$
$$=/۹۹۳۲۸$$

۳۲- گزینه ۴-

حل:

$$\sum_{x=0}^{5} P(X=x) = 1 \rightarrow \frac{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots+\binom{5}{5}}{A} = 1$$

$$\rightarrow A = 32$$

$$P\left(X = 2 \text{ یا } 3\right) = \frac{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

یا می توان گفت که تابع احتمال داده شده یک تابع احتمال متغیر تصادفی دو جمله ای با $n = 5$, $P = \frac{1}{2}$ می باشد.

۳۳- گزینه ۳-

حل: x یا تعداد موش های سفید خارج شده در نمونه ۲ تایی برابر ۰،۱،۲ است.

$$P(X=0) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

که بیشترین مقدار احتمال در تابع احتمال برابر $\frac{8}{15}$ است.

۳۴- گزینه ۲-

حل: x تعداد پرتاب های دو تاس تا هر دو عدد رو شده زوج باشد.

در این مسأله موفقیت را برابر ظاهر شدن هر دو زوج برای دو تاس که احتمال آن برابر $\frac{1}{4} = \frac{3\times3}{6\times6}$ است.

$$P(X \le 3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4} = \frac{37}{64}$$

۳۵- گزینه ۲-

حل: احتمال پاسخ درست به هر تست(موفقیت) $\frac{۱}{۵}$است. طبق توزیع دو جمله ای داریم :

$$\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲} =/۰۵۱۲$$

۳۶- گزینه ۲-

حل: در این مسأله موفقیت زمانی حاصل می شود که مهره سفید خارج شود که احتمال آن برابر است با $\frac{۳}{۵}$ طبق توزیع هندسی داریم :

$$P(X \leq ۳) = P(X = ۱) + P(X = ۲) + P(X = ۳) = \frac{۳}{۵} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۵} + (\frac{۲}{۵})^{۲} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱۱۷}{۱۲۵}$$

۳۷- گزینه ۳-

حل: احتمال خرید برای هر نفر (۰/۶) می باشد. طبق توزیع دو جمله ای داریم:

$$\binom{۴}{۳}(/۶)^{۳}(/۴)^{۱} = ۰/۳۴۵۶$$

۳۸- گزینه ۲-

حل: طبق توزیع دو جمله ای داریم:

$$\binom{۶}{۴}(/۲)^{۴}(/۸)^{۲} =/۰۱۵۳۶$$

۳۹- گزینه ۲-

حل:

$$\sum_{X=۱}^{۶} P(X = x) = ۱ \rightarrow \frac{۲}{A} + \frac{۴}{A} + \frac{۸}{A} + \frac{۱۶}{A} + \frac{۳۲}{A} + \frac{۶۴}{A} = ۱$$

$$\rightarrow A = ۱۲۶$$

$$P\left(X = \text{فرد}\right) = P(X = ۱) + P(X = ۳) + P(X = ۵)$$

$$= \frac{۲}{۱۲۶} + \frac{۸}{۱۲۶} + \frac{۳۲}{۱۲۶} = \frac{۴۲}{۱۲۶} = \frac{۱}{۳}$$

۴۰- گزینه ۲

حل: احتمال جواب دادن (موفقیت) برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

$$\binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۱}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۴} = /۴۰۹۶$$

۴۱- گزینه ۴

حل: متغیر x تعریف شده در این سوال از نوع دو جمله ای می باشد؛ $P = \frac{۳}{۴}, n = ۱۶$ و متغیر دوجمله ای مقادیر n, ...,۰,۱ را اختیار می کند در نتیجه $P(۰ \le X \le ۱۶)$ برابر ۱ می باشد.