



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

مجموعه کتاب های  
آموزشی مبحثی ریاضیات

# دنباله هندسی

مؤلف:

مهندس مازیار احمدی ناو

۱۳۹۶

دانلود از سایت ریاضی سرا  
[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سرشناسه	:	احمدی ناو، مازیار، ۱۳۵۶-
عنوان و نام پدیدآور	:	مجموعه کتاب های آموزشی مبحثی ریاضیات، دنباله هندسی / مولف مازیار احمدی ناو
مشخصات نشر: رشت	:	انتشارات رمه، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	:	۲۷ ص.
شابک	:	
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	
موضوع	:	
موضوع	:	
موضوع	:	
رده بندی کنگره	:	
رده بندی دیویی	:	
شماره کتاب شناسی ملی	:	

- عنوان کتاب: مجموعه کتاب های آموزشی مبحثی ریاضیات، دنباله هندسی
- مولف: مازیار احمدی ناو
- ناشر: انتشارات رمه
- نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۶
- چاپ و صحافی: معراج
- شمارگان: ۱۰۰۰ عدد
- بهاء: ۳۵۰۰۰ ریال
- شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۶۸۹۲-۳۳-۷

---

کلیه حقوق برای مولف محفوظ است و هرگونه کپی برداری به موجب قانون پیگرد قانونی دارد.

تلفن دفتر فروش: ۳۳۱۲۳۳۷۸ - ۰۱۳

## مقدمه

کتابی که مطالعه می فرمایید از سری کتاب های آموزش مبحثی ریاضیات، (مبحث دنباله ی هندسی) است. این مبحث در رشته های ریاضی فیزیک، تجربی و علوم انسانی آموزش داده می شود و در اکثر سال ها در سوالات کنکور از این مبحث سوال مطرح می گردد. دنباله ی هندسی به عنوان یک مبحث پایه ای در ریاضیات از اهمیت خاصی برخوردار است. و در سال های بعد نیز در بسیاری از مباحث نظیر دنباله های سال چهارم، (بررسی کرانداری و همگرایی و واگرایی) احتمال، سری ها و ... نیز کاربرد دارد. هدف از تالیف کتاب های مبحثی آموزش ریاضیات، تعمیق و تفهیم کامل مفاهیم به دانش آموزان همراه با مثال های مختلف از سوالات کنکورهای سراسری و آزاد سنوات گذشته داخل و خارج کشور و نیز کنکورهای آزمایشی معتبر می باشد. دانش آموزان با مطالعه کامل و دقیق این کتاب ها کاملاً می توانند بر این مبحث مسلط شده و به سوالات طرح شده از آن پاسخ دهند. در آخر عنوان می دارم که قطعاً این مجموعه عاری از نقص نبوده و از عزیزانی که به مطالعه این کتاب می پردازند خواهشمندم نظرات و انتقادات و پیشنهادات خود را با شماره ۰۹۱۱۱۳۷۴۰۵۷ با بنده در میان بگذارند. همچنین از زحمات همکار گرامی و خواهر بزرگوارم خانم شروین مجرد که همواره در تالیف مجموعه کتاب های آموزش مبحثی ریاضیات بنده را همراهی کردند نهایت تشکر و امتنان را دارم.

مازیار احمدی ناو

فروردین ۱۳۹۶

تقدیم به

برادر عزیزم

سپاس

بابت تمام زحماتی که برای پدر و مادرمان کشیدی

تقدیم به

غلامرضای عزیزم

## فهرست:

- ۱ ..... دنباله ی هندسی - قدر نسبت - جمله ی عمومی - یکنوایی
- ۲ ..... واسطه ی هندسی - درج  $m$  واسطه ی هندسی بین دو عدد
- ۳ ..... ارتباط دنباله ی حسابی و هندسی
- ۴ تا ۱۵ ..... مثال های دنباله ی هندسی با پاسخ تشریحی
- ۱۵ ..... حاصل ضرب های  $n$  جمله ی اول دنباله ی هندسی
- ۱۵ تا ۲۰ ..... مثال های دنباله ی هندسی با پاسخ تشریحی
- ۲۰ ..... نکاتی از روابط بین ریشه های معادله ی درجه ی دوم
- ۲۰ تا ۲۱ ..... مثال های دنباله ی هندسی با پاسخ تشریحی

## دنباله هندسی

دنباله ای را که هر جمله ی آن (غیر از جمله اول) با ضرب یک عدد ثابت در جمله ی قبلی بدست آید را دنباله ی هندسی می گوئیم و به آن عدد ثابت قدر نسبت دنباله گفته و با  $q$  و جمله ی اول را با  $a$  نشان می دهیم.

مثلاً در دنباله ی  $2, 6, 18, 54, \dots$  داریم  $q = 3, a = 2$

## چگونه قدر نسبت را پیدا کنیم؟

اگر بخواهیم قدرنسبت یک دنباله هندسی با جملات غیرصفر را پیدا کنیم، کافی است هر جمله دلخواه را بر جمله ی

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{مثلاً} \quad q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_8}{a_7} = \dots$$
 قبلی تقسیم کنیم.

## جمله ی عمومی یک دنباله هندسی

فرض کنید در یک دنباله ی هندسی جمله ی اول  $a$  و قدر نسبت  $q$  باشد در آن صورت برای بدست آوردن مقدار هر

$$a_n = aq^{n-1} \quad \text{جمله داریم:}$$

$$a_1 = aq^0 \quad \text{یا} \quad a_7 = aq^6 \quad \text{مثلاً}$$

## تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله ی هندسی ( $a > 0$ )

اگر  $q = 1$  باشد دنباله به دنباله ی ثابت تبدیل می شود که هم صعودی است و هم نزولی

اگر  $q < 0$  باشد دنباله نه صعودی است و نه نزولی

اگر  $0 < q < 1$  باشد دنباله نزولی است

اگر  $q > 1$  باشد دنباله صعودی است.

## تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله ی هندسی ( $a < 0$ )

اگر  $q = 1$  باشد دنباله به دنباله ی ثابت تبدیل می شود که هم صعودی است و هم نزولی

اگر  $q < 0$  باشد دنباله نه صعودی است و نه نزولی

اگر  $0 < q < 1$  باشد دنباله صعودی است

اگر  $q > 1$  باشد دنباله نزولی است



## واسطه ی هندسی

فرض کنید  $a, b, c$  سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند در این صورت  $b$  را واسطه ی هندسی یا میانگین هندسی بین دو عدد  $a, c$  می نامیم.

$$b^2 = ac$$

## درج $m$ واسه ی هندسی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a, b$  به تعداد  $m$  عدد طوری قرار دهیم که با این دو عدد دنباله ی هندسی تشکیل دهند داریم:

$$a, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}_{m \text{ واسه ی هندسی}}, b \Rightarrow q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

### نکته ۱

اگر  $a, b, c, d$  چهار جمله متوالی دنباله ی هندسی باشند،  $ad = bc$

### نکته ۲

اگر  $a, b, c, d, e$  پنج جمله متوالی دنباله ی هندسی باشند،  $c^2 = ae = bd$

### نکته ۳

فرض کنید در یک سوال بدانیم ۳ جمله دنباله هندسی می سازند ولی مقدار آنها را نداشته باشیم به صورت  $\frac{a}{q}, a, aq$  نشان می دهیم.

### نکته ۴

حال اگر بدانیم ۵ جمله دنباله هندسی می سازند و مقدار آنها را نداشته باشیم در آن صورت آنها را به صورت

$$\frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2 \text{ نشان می دهیم.}$$

**مثال ۱** جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله ی حسابی می توانند ۳ جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی

باشند. قدر نسبت دنباله ی هندسی کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{۵}{۳} \quad (۲) \quad \frac{۷}{۴} \quad (۳) \quad \frac{۷}{۳} \quad (۴) \quad \frac{۹}{۴}$$

## درسنامه

اگر  $a_m, a_n, a_k$  سه جمله از یک دنباله ی حسابی، ۳ جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، قدر نسبت

$$q = \frac{k-n}{n-m} \Rightarrow a_r, a_\delta, a_{12} \Rightarrow q = \frac{۱۲-۵}{۵-۲} = \frac{۷}{۳} \quad \text{دنباله ی هندسی برابر است با:}$$

**مثال ۲** در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می توانند ۳ جمله متوالی از یک

دنباله ی حسابی باشند. بزرگ ترین این ۳ عدد چند برابر کوچکترین آنهاست؟

$$(۱) \quad ۲ + \sqrt{۳} \quad (۲) \quad ۵ + ۲\sqrt{۳} \quad (۳) \quad ۵ + ۴\sqrt{۳} \quad (۴) \quad ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

$$\frac{a_r + a_\lambda}{۲} = ۲a_\delta \Rightarrow a_r + a_\lambda = ۴a_\delta$$

$$\Rightarrow ۴aq^r = aq + aq^\lambda \Rightarrow aq(۴q^r) = aq(۱ + q^\lambda)$$

$$q^r - ۴q^\lambda + ۱ = ۰ \quad q^r \equiv A \Rightarrow A^2 - ۴A + ۱ = ۰ \quad A = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

$$q^r = ۲ + \sqrt{۳}, \quad q^r = ۲ - \sqrt{۳} \Rightarrow q = \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}}, q = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}$$

در حالت اول دنباله نزولی است

$$\frac{\text{بزرگ ترین عدد}}{\text{کوچک ترین عدد}} = \frac{a_r}{a_\lambda} = \frac{aq}{aq^\lambda} = q^{-r} \Rightarrow \left(\sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}}\right)^{-۶} = (۲ - \sqrt{۳})^{-۲}$$

$$= \frac{۱}{(۲ - \sqrt{۳})^۲} = \frac{۱}{۴ + ۳ - ۴\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۷ - ۴\sqrt{۳}}$$

در حالت دوم دنباله صعودی است

$$\frac{\text{بزرگ ترین عدد}}{\text{کوچک ترین عدد}} = \frac{a_\lambda}{a_r} = \frac{aq^\lambda}{aq} = q^r \Rightarrow \left(\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}\right)^۶ = (۲ + \sqrt{۳})^۲$$

$$۴ + ۳ + ۴\sqrt{۳} = ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

**مثال ۳** بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله ی هندسی دهند.

مجموع این پنج عدد مثبت کدام است؟

۴۸۸ (۴)
۴۸۶ (۳)
۴۸۴ (۲)
۴۸۲ (۱)

$$\begin{array}{c}
 4 \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad 324 \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 a \quad \quad \quad a_0
 \end{array}
 \Rightarrow aq^4 = 324 \Rightarrow 4q^4 = 324 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

چون سوال گفته جملات مثبت اند پس  $q = 3$

$$\Rightarrow 4, 12, 36, 108, 324 \Rightarrow \text{جمع } 5 \text{ عدد} = 484$$

**مثال ۴** در یک دنباله هندسی مجموع ۳ جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچکترین

و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟

۷ (۴)
۶ (۳)
۵ (۲)
۴ (۱)

سه جمله را  $\frac{a}{q}, a, aq$  می گیریم.

$$\frac{a}{q} \times a \times aq = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{q} + a + aq = 19 \Rightarrow \frac{a=6}{q} + 6 + 6q = 19$$

$$\xrightarrow{\times q} 6 + 6q + 6q^2 = 19q \Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0 \cdot \begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

اگر  $q = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{q}, a, aq \Rightarrow 4, 6, 9$

$$\Rightarrow \max - \min = 9 - 4 = 5$$

اگر  $q = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{q}, a, aq \Rightarrow 9, 6, 4$

**مثال ۵** در یک دنباله هندسی صعودی به صورت  $4, a, 9, b, \dots$  مجموع ۶ جمله ی اول کدام است؟

$83 \frac{1}{8}$  (۴)
 $82 \frac{3}{8}$  (۳)
 $81 \frac{7}{8}$  (۲)
 $81 \frac{3}{8}$  (۱)

$$4, a, 9 \Rightarrow a^2 = 4 \times 9 \Rightarrow a = \pm 6$$

$$a = 6 \Rightarrow 4, 6, 9 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

$$a = -6 \Rightarrow 4, -6, 9 \Rightarrow q = -\frac{3}{2} \text{ (دنباله صعودی است) غ ق ق}$$

هر جمله در  $\frac{3}{2}$  ضرب می شود  $4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}$

$$\Rightarrow \text{مجموع 6 جمله} = 4 + 6 + 9 + \frac{27}{2} + \frac{81}{4} + \frac{243}{8} = \frac{243}{8} = 83 \frac{1}{8}$$

**مثال ۶** در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می باشد. مجموع ۶ جمله اول کدام است؟

$$13/4 \text{ (۴)}$$

$$12/6 \text{ (۳)}$$

$$11/2 \text{ (۲)}$$

$$10/8 \text{ (۱)}$$

$$\boxed{a + aq^2 = 1} \quad I$$

$$a + aq + aq^2 + aq^3 = 3 \xrightarrow{a + q^2 = 1} aq + aq^2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow aq + aq^2 = 2 \Rightarrow \boxed{aq(1 + q^2) = 2} \quad II$$

$$\frac{II}{I} = \frac{aq(1 + q^2)}{a(1 + q^2)} = \frac{2}{1} \Rightarrow q = 2$$

حال اگر در رابطه I قرار دهیم  $a = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5} = \frac{63}{5} = 12 \frac{3}{5}$$

**مثال ۷** بین ۲ عدد ۲،  $16\sqrt{2}$  شش عدد چنان درج شده اند که ۸ عدد حاصل دنباله ی هندسی تشکیل داده اند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

$$36(\sqrt{2} + 1) \text{ (۴)}$$

$$30(\sqrt{2} + 1) \text{ (۳)}$$

$$48\sqrt{2} \text{ (۲)}$$

$$30(\sqrt{2} + 2) \text{ (۱)}$$



$$a_8 = aq^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = q^7 \Rightarrow q^7 = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$q = \sqrt[7]{8\sqrt{2}} = \sqrt[7]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[7]{2^{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

که مجموع آنها برابر  $30(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow 30 + 30\sqrt{2} \Rightarrow 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16, 16\sqrt{2}$

**مثال ۸** در یک دنباله ی هندسی  $a_1 a_3 a_5 = 8 a_2 a_4 a_6$  قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$\sqrt[2]{2} \quad (۴) \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (۳) \qquad 2 \quad (۲) \qquad \frac{1}{2} \quad (۱)$$

با حذف  $a_5$  از طرفین  $aaq^2 = 8aq^5 \times aq^6$

$$\Rightarrow q^9 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

**مثال ۹** در یک دنباله ی هندسی  $a_2 a_3 a_4 = 8$  حاصل  $a_1 \cdot a_5$  کدام است؟

$$16 \quad (۴) \qquad 2 \quad (۳) \qquad 8 \quad (۲) \qquad 4 \quad (۱)$$

$$aaq^2 aq^3 aq^4 = 8 \Rightarrow a^3 q^9 = 8 \Rightarrow (aq^3)^3 = 8 \Rightarrow aq^3 = 2$$

حاصل می خواهیم حاصل  $a_1 \cdot a_5$  را حساب کنیم:

$$a \times aq^4 = a^2 q^4 = (aq^3)^2 = (2)^2 = 4$$

**مثال ۱۰** در یک دنباله ی هندسی قدر نسبت برابر  $\frac{1}{2}$  است. حاصل  $\frac{a_5 + a_7}{a_8 + a_1}$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad 2 \quad (۳) \qquad 8 \quad (۲) \qquad \frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{aq^4 + aq^6}{aq^7 + aq^1} = \frac{aq^4(1 + q^2)}{aq^1(1 + q^2)} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

**مثال ۱۱** در یک دنباله ی هندسی مجموع جملات اول و دوم  $\frac{9}{2}$  و مجموع جملات چهارم و پنجم  $36$  می باشد. جمله

سوم این دنباله کدام است؟

$$12 \quad (۴) \qquad 9 \quad (۳) \qquad 8 \quad (۲) \qquad 6 \quad (۱)$$

$$a + a_2 = a + aq = \frac{9}{2}$$

$$a_4 + a_5 = aq^3 + aq^4 = 36 \Rightarrow q^3(a + aq) = 36$$

$$a + aq = \frac{9}{2} \text{ می دانیم}$$

$$\Rightarrow q^3 \times \frac{9}{2} = 36 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$a + aq = \frac{9}{2} \Rightarrow a + 2a + \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = aq^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ حالا هم جمله ی اول و هم قدر نسبت را داریم}$$

**مثال ۱۲** در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است. اگر جمله سیزدهم ۹ باشد،

جمله ی پانزدهم کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

$$a_8 \times a_{20} = 108 \Rightarrow aq^7 \times aq^{19} = 108 \Rightarrow a^2 q^{26} = 108$$

$$a_{13} = 9 \Rightarrow aq^{12} = 9$$

$$\frac{a^2 q^{26}}{aq^{12}} = \frac{108}{9} \Rightarrow aq^{14} = 12 \Rightarrow a_{15} = 12$$

با تقسیم ۲ رابطه بر هم:

**مثال ۱۳** بزرگ ترین جمله ی دنباله ی هندسی  $a, b, \frac{1}{3}, c, d, \frac{1}{24}$  کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{4}{3}$  (۳)

$\frac{8}{3}$  (۲)

۱ (۱)

$$a_3 = \frac{1}{4}, a_6 = \frac{1}{24}, aq^2 = \frac{1}{4}, aq^5 = \frac{1}{24}$$

$$\text{با تقسیم برهم} \frac{aq^5}{aq^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} = \frac{4}{3} \text{ بزرگ ترین جمله}$$

**مثال ۱۴** کوچک ترین جمله ی دنباله ی  $a_n = \left(-\frac{3}{7}\right)^{n+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$  (۲)  $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$  (۳)  $\left(-\frac{3}{7}\right)^4$  (۴)  $\left(-\frac{3}{7}\right)^5$

جملات دنباله  $\left(-\frac{3}{7}\right)^2, \left(-\frac{3}{7}\right)^3, \left(-\frac{3}{7}\right)^4, \left(-\frac{3}{7}\right)^5, \dots$   
 ↓ Max                      ↓ Min

**نکته**

در دنباله های  $C^n$  وقتی  $0 < C < 1$  همواره بیشترین و کمترین جمله بین جمله ی اول و دوم هستند.

**مثال ۱۵** در دنباله ی هندسی با جمله ی عمومی  $a_n = 7 \times 3^{2n+1}$  قدر نسبت چند است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۴۹

**نکته**

در فرمول جمله ی عمومی دنباله ی هندسی به صورت  $a_n = a \times b^{cn+d}$  قدر نسبت برابر  $b^c$  است.

$$\Rightarrow 3^2 = 9$$

**مثال ۱۶** واسطه ی هندسی بین عدد  $1 + \sqrt{2}$  و  $1 - \sqrt{2}$  کدام است؟

- (۱) وجود ندارد (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

واسطه ی هندسی بین دو عدد  $a, b$  برابر  $\sqrt{ab}$  است.

$$\Rightarrow \sqrt{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \sqrt{-1} \quad \text{وجود ندارد}$$

**مثال ۱۷** اعداد  $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$  سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی اند. واسطه ی عددی بین  $a, b$  کدام

است؟

- (۱)  $2/5$  (۲) ۲ (۳)  $1/5$  (۴) ۵

چون  $2^b, 4\sqrt{2}, 2^a$  دنباله ی هندسی می سازند پس

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} = 2/5 \quad \text{واسطه ی حسابی بین } a, b \text{ برابر } \frac{a+b}{2} \text{ است.}$$

**مثال ۱۸** سه عدد  $3, a, 27$  جملات متوالی دنباله ی عددی است. از عدد  $a$  چند واحد کم شود تا دنباله ی

هندسی بدست آید؟

$$7 \text{ (۴)} \qquad 6 \text{ (۳)} \qquad 4 \text{ (۲)} \qquad 3 \text{ (۱)}$$

$$3, a, 27 \xrightarrow{\text{دنباله ی حسابی}} \frac{3 + 27}{2} = a \Rightarrow 2a = 30 \Rightarrow a = 15$$

در دنباله ی هندسی  $3, a, 27$  داریم

$$a^2 = 3 \times 27 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$

پس از  $a$ ، ۶ واحد کم شده است.

### قاعده ی اندیس ها در دنباله ی هندسی

$$\text{اگر } m + n = r + s \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s$$

$$\Rightarrow \text{اگر } \frac{m+n}{2} = s \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_s^2$$

**مثال ۱۹** در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جملات سوم تا ششم برابر ۳ است. حاصل ضرب ۸ جمله ی اول

آن کدام است؟

$$a_3 a_4 a_5 a_6 = 2 \xrightarrow{a_3 a_6 = a_4 a_5} (a_4 a_5)^2 = 3 \Rightarrow a_4 a_5 = \sqrt{3}$$

$$a_1 a_2 \dots a_8 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = \underbrace{a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6}_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} =$$

$$3 a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 \cdot a_8 = 3(a_1 a_8)(a_2 a_7)$$

$$a_4 a_5 = a_7 a_8 = a_1 a_8 \quad \text{طبق قاعده اندیس ها} \Rightarrow 3(\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 9$$



**مثال ۲۰** در یک دنباله ی هندسی، جمله چهارم میانگین جملات دوم و سوم می باشد. مجموع مقادیر بدست آمده برای قدر نسبت کدام است؟

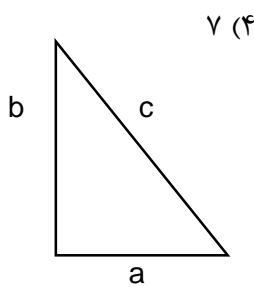
$$a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} \Rightarrow aq^3 = \frac{aq + aq^2}{2}$$

$$\Rightarrow aq + aq^2 = 2aq^3 \Rightarrow \cancel{aq}(1 + q) = 2\cancel{aq}.q^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q = 1, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow q \text{ جمع مقادیر } = \frac{1}{2}$$

**مثال ۲۱** در یک مثلث قائم الزاویه اضلاع تشکیل دنباله ی هندسی می دهند. اگر سینوس کوچکترین زاویه را به

صورت  $\frac{\sqrt{x-y}}{z}$  نشان دهیم حاصل  $x + y + z$  کدام است؟



۷ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$a, b, c \Rightarrow$  دنباله هندسی می سازند

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ b^2 = ac \end{cases} \Rightarrow a^2 + ac = c^2$$

معادله درجه ی دوم را بر حسب  $a$  حل کنید.

$$a = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(-c^2)}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{5}c}{2} = \frac{c(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$a = \frac{(-1 - \sqrt{5})c}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{نسبت طول ها منفی می شود}) \quad \text{غ ق ق}$$

$$a = \frac{(-1 + \sqrt{5})c}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x + y + z = 5 + 1 + 2 = 8$$

**مثال ۲۲** در دنباله ی هندسی ...  $8^{3m}, 6^{2m-1}, 4^{m+1}$  مقدار  $m$  در کدام نامساوی می تواند قرار بگیرد؟

$m < 1/5$  (۴)

$m > 1/5$  (۳)

$m < 1$  (۲)

$m > 4$  (۱)

$$((16)^{2m-1})^2 = 4^{m+1} \times 8^{3m} \Rightarrow 2^{16m-8} = 2^{2m+2+9m}$$

$$\Rightarrow 16m - 8 = 11m + 2 \Rightarrow m = 2$$

گزینه ۳ صحیح است

**مثال ۲۳** اعداد  $3 + \sqrt{5}, x, 3 - \sqrt{5}$  جملات متوالی از دنباله هندسی نزولی اند. قدر نسبت کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}(3 - \sqrt{5})$  (۲) نشدنی (۳)  $\frac{1}{3}(3 + \sqrt{5})$  (۴)  $3 - \sqrt{5}$

نشدنی است  $\Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = 5 - 9 \Rightarrow x^2 = (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3)$

**مثال ۲۴** در یک دنباله هندسی مجموعه جملات اول و سوم،  $\frac{1}{3}$  برابر مجموع جمله های دوم و چهارم است و

مجموع ۴ جمله ی اول برابر ۱۶۰ است. مجموع جملات اول و دوم و سوم چقدر است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۲ (۴) ۳۸

(۱)  $a(1 + q + q^2 + q^3) = 160$

(۲)  $aq(1 + q^2) = 3a(1 + q^2) \Rightarrow q = 3$

با جاگذاری (۲) یعنی  $q = 3$  در رابطه ی (۱) داریم:

$a(1 + 3 + 9 + 27) = 160 \Rightarrow a = 4$

۵۲ = مجموع ۳ جمله  $\Rightarrow 4, 12, 36$

**مثال ۲۵** در یک دنباله ی هندسی  $a_2 + a_4 = -5$  و  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = -32$  مجموع مقادیر

بدست آمده برای  $q$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲)  $1/5$  (۳)  $2/5$  (۴) ۳

$\frac{1 + 5}{2} = 3 \Rightarrow a_1 \cdot a_5 = a_3^2 \Rightarrow \frac{2 + 4}{2} = 3 \Rightarrow a_2 + a_4 = a_3^2$

$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_3^2 \cdot a_3^2 \cdot a_3 = a_3^5 = -32 \Rightarrow a_3 = -2$

$a_2 + a_4 = -5 \Rightarrow \frac{a_3}{q} + a_3 q = -5 \Rightarrow \frac{-2}{q} - 2q = -5$

$\times q \Rightarrow -2q^2 + 5q - 2 = 0 \Rightarrow q = 2, \frac{1}{2} \Rightarrow q$  جمع مقادیر  $= 2 + \frac{1}{2} = 2/5$

**مثال ۲۶** اگر  $\alpha, \beta$  جواب های معادله ی  $(k + 2)x^2 - 2tx + 9k - 3t = 0$  باشند به ازای چه

مقدار  $t$  اعداد  $\alpha, 3, \beta$  دنباله ی هندسی می سازند؟

$\alpha, 3, \beta \xrightarrow{\text{دنباله ی هندسی}} \alpha\beta = 3^2 \Rightarrow \alpha\beta = 9$

می دانیم در معادله ی درجه ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  حاصل ضرب ریشه ها برابر  $\frac{c}{a}$  است.

$$\alpha \beta = \frac{9k - 3t}{k + 2} = 9 \Rightarrow 9k + 18 = 9k - 3t \Rightarrow t = -6$$

**مثال ۲۷** اگر  $a_1, a_2, a_3, \dots$  یک دنباله ی هندسی باشد و  $a_1 a_3 = 4$  و  $a_3 a_5 = 16$  چند دسته جواب برای دنباله موجود است؟

۱ (۴)	۲ (۳)	۳ (۲)	۴ (۱)
$a_1 a_3 = 4 \Rightarrow a^2 q^2 = 4 \Rightarrow aq = \pm 2$			
$a_3 a_5 = 16 \Rightarrow a^2 q^6 = 16 \Rightarrow aq^3 = \pm 4$			
$\begin{cases} aq = 2 \\ aq^3 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} aq = 2 \\ aq^3 = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} aq = -2 \\ aq^3 = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} aq = -2 \\ aq^3 = 4 \end{cases}$
$q^2 = 2$	$q^2 = -2$	$q^2 = 2$	$q^2 = -2$
$\Rightarrow q = \pm \sqrt{2}$	غ ق ق	$q = \pm \sqrt{2}$	غ ق ق

با تقسیم بر هم

پس ۴ دسته جواب وجود دارد.

**مثال ۲۸** جملات سوم و هفتم و نهم یک دنباله ی حسابی می توانند ۳ جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی باشند. چندمین جمله ی دنباله ی حسابی صفر است؟

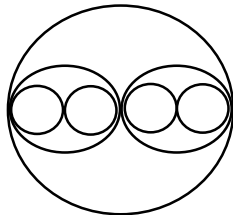
۱۰ (۴)	۹ (۳)	۸ (۲)	۱۱ (۱)
--------	-------	-------	--------

$$q^7 = a_3 a_9 \Rightarrow (a + 6d)^2 = (a + 2d)(a + 8d)$$

$$\Rightarrow a^2 + 12ad + 36d^2 = a^2 + 10d^2 + 16d^2 \Rightarrow 2ad + 20d^2 = 0$$

$$2d(a + 10d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2d = 0 \\ a + 10d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ a_{11} = 0 \end{cases}$$

**مثال ۲۹** محیط دایره بزرگ تر در شکل زیر برابر  $P_1$  و داخل آن دو دایره رسم کرده ایم و مجموع محیط های آن ها را  $P_2$  و همچنین مجموع محیط های ۴ دایره رسم شده درون این دو دایره را  $P_3$  می نامیم. با تکرار این عملیات دنباله ی  $P_1, P_2, \dots, P_n$  بدست می آید. جمله ی عمومی این دنباله کدام است؟



۲ $P_1$ (۱)	$P_1$ (۲)	$\frac{P_1}{2^{2n}}$ (۳)	$\frac{P_1}{2^{n+1}}$ (۴)
-------------	-----------	--------------------------	---------------------------

در اولین مرحله شعاع بزرگترین دایره را  $R$  می گیریم. در مرحله ی دوم شعاع هر دایره  $\frac{R}{2}$  و در مرحله سوم  $\frac{R}{4}$  است.

$$P_1 = 2\pi R \quad P_2 = 2\pi \frac{R}{2} + 2\pi \frac{R}{2} = 2\pi R$$

$$P_3 = 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} = 2\pi R$$

$\Rightarrow$  دنباله  $P_1, P_1, P_1, \dots$  ثابت

**مثال ۳۰** واسطه ی هندسی بین جمله نهم و پانزدهم از دنباله  $0, 4, 8, \dots$  کدام است؟

$$32\sqrt{7} \text{ (۴)} \quad 16\sqrt{7} \text{ (۳)} \quad 16\sqrt{3} \text{ (۲)} \quad 14\sqrt{6} \text{ (۱)}$$

این دنباله یک دنباله ی حسابی است  $d = 4, a = 0$  است.

$$a_9 = a + 8d \Rightarrow a_9 = 32 \quad a_{15} = a + 14d \Rightarrow a_{15} = 56$$

$$\Rightarrow \text{واسطه ی هندسی} = \sqrt{32 \times 56} = 16\sqrt{7}$$

**مثال ۳۱** در یک دنباله ی هندسی قدر نسبت جواب معادله ی  $5^{2x+1} = 1$  و جمله پنجم برابر  $-\frac{1}{16}$  است.

مجموع ۵ جمله ی اول کدام است؟

$$\frac{11}{16} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad -\frac{11}{16} \text{ (۱)}$$

$$5^{2x+1} = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

$$aq^4 = -\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{16}a = -\frac{1}{16} \Rightarrow a = -1$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16} \text{ مجموع} = -\frac{11}{16}$$

**مثال ۳۲** اعداد  $3^a, 3\sqrt{3}, 9, b$  جملات متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. واسطه ی هندسی بین دو عدد

$b, a\sqrt{3}$  کدام است؟

$$9 \text{ (۴)} \quad \sqrt{3} \text{ (۳)} \quad 3 \text{ (۲)} \quad 3\sqrt{3} \text{ (۱)}$$

$$(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3^a \Rightarrow 27 = 9 \times 3^a \Rightarrow a = 1$$

$$(9)^2 = 3\sqrt{3} \times b \Rightarrow b = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Leftarrow b \text{ و } a \text{ هندسی بین}$$

**مثال ۳۳** در یک دنباله ی عددی جملات اول و نهم و چهل و نهم سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی

هستند. جمله ی پانزدهم این دنباله چند برابر جمله ی سوم آن است؟

$$4 \text{ (۴)} \qquad 3/5 \text{ (۳)} \qquad 3 \text{ (۲)} \qquad 2/5 \text{ (۱)}$$

$$a, (a + 8d), (a + 48d) \Rightarrow a(a + 48d) = (a + 8d)^2$$

$$\Rightarrow 32ad = 64d^2 \Rightarrow a = 2d$$

$$\frac{a_{15}}{a_3} = \frac{a + 14d}{a + 2d} = \frac{16d}{4d} = 4$$

**مثال ۳۴** دنباله ی اعداد  $4, x, 2, y, \dots$  جملات متوالی دنباله ی هندسی غیر یکنوا هستند. جمله ششم کدام

است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (۳)} \qquad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (۱)}$$

$$a_3 = aq^2 \Rightarrow 2 = 4q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

چون گفته دنباله غیر نزولی است  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  قبول نیست

$$a_6 = aq^5 = 4 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = 4 \times -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**مثال ۳۵** در یک دنباله ی هندسی یکنوا با قدر نسبت  $q$  جملات اول و سوم و چهارم تشکیل یک دنباله ی عددی

می دهند. مقدار  $q$  کدام می تواند باشد؟ (آزمون های گزینه ۲)

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (۴)} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (۳)} \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ (۲)} \qquad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

$$a, aq^2, aq^3 \xrightarrow[\text{دنباله ی حسابی}]{\text{شرط تشکیل}} aq^2 = \frac{a + aq^3}{2} \Rightarrow 2q^2 = 1 + q^3$$

$$\Rightarrow q^3 - 2q^2 + 1 = 0$$

اگر در یک معادله درجه ی سوم مجموع ضرایب صفر باشد حتما یک ریشه ۱ است. یعنی عبارت بر  $q - 1$  بخش پذیر است که با تقسیم  $q^3 - 2q^2 + 1$  بر  $q - 1$  به صورت روبرو می آید.

$$q^3 - 2q^2 + 1 = (q - 1)(q^2 - q - 1) = 0$$

$$\Rightarrow q = 1 \quad q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{چون گفته یکنوا پس } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ قابل قبول نیست.}$$

**مثال ۳۶** سه عدد  $a, 2, 3 - a$  جملات متوالی از دنباله ی هندسی غیر صعودی اند. جمله چهارم چند برابر

جمله ی دهم است؟

$$128 \quad (4) \qquad 48 \quad (3) \qquad 64 \quad (2) \qquad 32 \quad (1)$$

$$(a - 3) \times a = 2^2 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = -1, 4$$

$$a = 4 \Rightarrow 1, 2, 4 \quad \text{دنباله صعودی است (غ ق ق)}$$

$$a = -1 \Rightarrow -4, +2, -1 \quad \text{غیر صعودی است}$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{aq^3}{aq^0} = \frac{1}{q^6} \Rightarrow \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^6} = 64$$

**مثال ۳۷** در یک دنباله ی هندسی یک جمله  $(\sqrt{3}\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  و جمله ی بعدی آن

$$\text{است. جمله ی بعدی چه عددی است؟ (آزمون های گزینه ۲)}$$

$$\sqrt{3} \quad (4) \qquad \frac{1}{3} \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad 3 \quad (1)$$

$$\left(\sqrt{3}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{3}^{\sqrt{4}} = \sqrt{3}^2 = 3$$

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}+1} = \left(\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right)^{\sqrt{2}+1} = 1^{\sqrt{2}+1} = 1$$

$$\text{می دانیم } \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow 3, 1, \frac{1}{3} \quad \text{پس جمله ی اول برابر ۳ و جمله ی بعدی ۱ است.}$$

**مثال ۳۸** در یک دنباله ی هندسی که هیچکدام از جملات آن صفر نیستند، جمله ی چهارم، ربع مربع جمله نهم است. جمله ی چهاردهم کدام است؟

- ۴ (۱)                      ۶ (۲)                      ۹ (۳)                      ۵ (۴)

$$a_4 = \frac{(a_9)^2}{4} \Rightarrow (a_9)^2 = 4a_4 \Rightarrow (aq^4)^2 = 4aq^3$$

$$\Rightarrow a^2q^8 = 4aq^3 \quad a, q \neq 0 \Rightarrow aq^{13} = 4 \Rightarrow a_{14} = 4$$

**مثال ۳۹** در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب ۹ جمله ی اول  $8\sqrt{8}$  است. جمله ی پنجم کدام است؟

- ۲ (۱)                      ۳ $\sqrt{2}$  (۲)                       $\sqrt{2}$  (۳)                      ۴ $\sqrt{2}$  (۴)

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = a \times aq \times aq^2 \times \dots \times aq^8 = a^9 q^{36} = 8\sqrt{4 \times 2} = 16\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^9 q^{36} = 16\sqrt{2} \Rightarrow (aq^4)^9 = 16\sqrt{2} \Rightarrow (a_5)^9 = (2)^9$$

$$\Rightarrow (a_5)^9 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^9 \Rightarrow a_5 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

### نکته تستی

حاصل ضرب n جمله ی اول یک دنباله ی هندسی برابر است با:

$$\sqrt{(aa_n)^n}$$

**مثال ۴۰** در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و نهم ۱۶ برابر حاصل ضرب جملات دهم و پنجم

است. جمله ی هفتم چند برابر جمله ی سوم است؟ (آزمون های گزینه ۲)

- ۱۶ (۱)                      ۶۴ (۲)                      ۲۵۶ (۳)                      ۴ (۴)

$$a_8 \cdot a_9 = 16a_{10} \cdot a_5 \Rightarrow aq^7 \cdot aq^8 = 16aq^9 \cdot aq^4 \Rightarrow q^{15} = 16q^{13} \Rightarrow q^2 = 16$$

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{aq^6}{aq^2} = q^4 \Rightarrow (q^2)^2 = (16)^2 = 256$$

**مثال ۴۱** اعداد  $\sqrt{8z}, \sqrt{2y}, 4x$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی هستند، کدام رابطه صحیح است؟

- ۲z = 2x + y (۴)                      y = 2x^2z (۳)                      y = 2x + z (۲)                      y^2 = 4x + z (۱)

$$(\sqrt{2^y})^2 = 4^x \times \sqrt[3]{8^z} \Rightarrow 2^y = 2^{2x} \times 2^z \Rightarrow y = 2x + z$$

**مثال ۴۲** در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است. اگر جمله ی سیزدهم

برابر ۹ باشد جمله ی پانزدهم کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

$$\begin{cases} a_8 a_{20} = 108 \\ a_{13} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq^7 aq^{19} = 108 \\ aq^{12} = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم کنید}} aq^{14} = 12 \Rightarrow a_{15} = 12$$

**مثال ۴۳** جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه ی  $\frac{1}{10}$  جمعیت سال قبل

کاهش یابد پس از ۴ سال چند نفر این روستا را ترک کرده اند؟ (آزمون های گزینه ۲)

- (۱) ۷۲۹ (۲) ۴۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۲۷۱

$$a = 1000 \quad a_4 = 1000 - 100 = 900 \Rightarrow q = \frac{9}{10}$$

$$a_4 = aq^3 = 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 729 \quad \text{تعداد ساکنین روستا}$$

$$\Rightarrow 1000 - 729 = 271$$

**مثال ۴۴** قدر نسبت یک دنباله ی هندسی برابر ۸ است. قدر نسبت دنباله ی حاصل از لگاریتم اعضا این دنباله

در مبنای  $\sqrt{2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

وقتی اعضا دنباله هندسی می سازند، لگاریتم ها دنباله ی حسابی می سازند

$$\Rightarrow \text{قدر نسبت} = \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2^3 = 6$$

**مثال ۴۵** جمله ی دوم یک دنباله ی هندسی ۱ بوده، جملات اول و سوم نسبت به هم چه نوع اعدادی هستند؟

- (۱) اول (۲) متوالی (۳) معکوس (۴) متناوب

$$a_1, a_2, a_3 \Rightarrow a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow 1 = a_1 a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{a_1}$$

پس معکوس هستند.



**مثال ۴۶** اعداد  $c, b, 3$  دنباله ی حسابی و اعداد  $c - 1, b - 1, 3$  دنباله ی هندسی ساخته اند. قدر نسبت دنباله ی حسابی چند برابر دنباله ی هندسی است؟

(۱) ۳      (۲)  $2/5$       (۳) ۲      (۴)  $1/5$

$$c, b, 3 \Rightarrow \frac{c+3}{2} = b \Rightarrow c = 2b - 3 \quad (1)$$

$$c + 1, b - 1, 3 \Rightarrow (b - 1)^2 = 3(c + 1) \quad (2)$$

$$(b - 1)^2 = 3(2b - 3 + 1) \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 6b - 6$$

در دنباله ی هندسی جمله ی دوم صفر می شود  $\times$   $b=1$   $\checkmark$   
 $(1) \text{ و } (2) \Rightarrow b^2 - 8b + 7 = 0 \Rightarrow b=7 \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} \text{قدر نسبت حسابی} &= b - 3 \Rightarrow 7 - 3 = 4 \\ \text{قدر نسبت هندسی} &= \frac{b-1}{3} = \frac{7-1}{3} = 2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\text{قدر نسبت حسابی}}{\text{قدر نسبت هندسی}} = 2$$

**مثال ۴۷** در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب ۹ جمله ی اول برابر ۸ است. حاصل ضرب  $a_1 a_3 a_5 a_7 a_9$  چقدر است؟

(۱)  $2\sqrt[3]{2}$       (۲)  $2\sqrt{2}$       (۳)  $2\sqrt[4]{2}$       (۴) ۴

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 8 \Rightarrow a \cdot aq \cdot aq^2 \dots aq^8 = 8$$

$$\Rightarrow a^9 q^{1+2+\dots+8} = 8 \Rightarrow a^9 q^{36} = 8 \Rightarrow (aq^4)^9 = 8$$

$$\Rightarrow aq^4 = \sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

$$a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 = aq aq^3 aq^5 aq^7 aq^9 = a^5 q^{16} = (aq^4)^4$$

$$(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

**مثال ۴۸** اگر  $a_1, a_2, a_3$  سه جمله ی اول یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۲ باشند کدام گزینه ۳ جمله ی اول یک دنباله ی هندسی هستند؟

(۱)  $a_1 + 1, a_2 + a_1, a_2 + a_3$

(۲)  $a_1 + 1, a_2 + 4, a_3 + 16$

(۳)  $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3$

(۴)  $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4$

دنباله ی هندسی با  
 $a_1, a_2, a_3 \xrightarrow{q=2} a_1, 2a_1, 4a_1$

$$\{a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4\} \Rightarrow \{a_1 + 1, 2(a_1 + 1), 4(a_1 + 1)\}$$

گزینه ۴ با جمله ی اول  $a_1 + 1$  و قدر نسبت ۲ یک دنباله ی هندسی جدید است.

**مثال ۴۹** واسطه ی هندسی بین ۲ عدد  $49 \times 40$  و  $121 \times 250$  کدام است؟

- (۱) ۷۷۰۰ (۲) ۷۸۰۰ (۳) ۸۴۰۰ (۴) ۷۸۰۰

واسطه ی هندسی بین دو عدد  $a, b$  برابر است با:  $\sqrt{ab}$

$$\sqrt{250 \times 121 \times 40 \times 49} = \sqrt{49 \times 121 \times 10000} = 7 \times 11 \times 100 = 7800$$

**مثال ۵۰** پنج عدد  $\frac{5}{3}, c, b, a, \frac{5}{12}$  به ترتیب جمله های متوالی یک دنباله ی هندسی هستند.  $b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{5}{3} \\ a_5 &= \frac{5}{12} \Rightarrow aq^4 = \frac{5}{12} \end{aligned} \right\} \frac{5}{12} = \frac{5}{3} \times q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$b = a_3 = aq^2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

**مثال ۵۱** در دنباله ی هندسی غیر صعودی  $y, 4, x, 2$  مقدار  $y$  کدام است؟

- (۱)  $-4\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{2}$

$$x^2 = 2 \times 4 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{قبول نیست زیرا دنباله صعودی می شود} \leftarrow x = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -4\sqrt{2}$$

**مثال ۵۲** بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ چنان ۳ عدد درج کرده ایم که ۵ عدد حاصل دنباله ی هندسی می سازند. جمع

این ۳ عدد کدام است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۸ (۴) ۷۲



$$a = 2, a_{\Delta} = 162 \Rightarrow aq^4 = 162 \Rightarrow 2q^4 \Rightarrow q = 3$$

$$2, 6, 18, 54, 162 \Rightarrow 6 + 18 + 54 = 78$$

**مثال ۵۳** مجموع دو عدد ۱۵۰ و واسطه ی هندسی آن ها ۲۱ است. عدد کوچکتر کدام است؟

۳ (۴)                                  ۳۳ (۳)                                  ۵۴ (۲)                                  ۱۰۸ (۱)

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 150 \\ x_1 x_2 &= (21)^2 = 441 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 150x + 441 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 147) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 147$$

**نکته**

معادله ی درجه دومی که جمع ریشه های آن  $S$  و حاصل ضرب ریشه هایش  $P$  باشد

به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است.

**مثال ۵۴**  $x_1$  و  $x_2$  جواب های معادله ی  $x^2 + (3m + 1)x + 3(2m - 3) = 0$  باشد تا  $x_1, m, x_2$  تشکیل دنباله ی هندسی بدهند؟

۳ (۲)                                   $\frac{3}{2}$  (۱)                                   $-\frac{1}{3}$  (۳)                                  -۱ (۴)

جملات دنباله ی هندسی  $x_1, m, x_2 \Rightarrow x_1 x_2 = m^2$

$$x^2 + (3m + 1)x + 3(2m - 3) = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3(2m - 3)}{1}$$

$$m^2 = 3(2m - 3) \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow (m - 3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

**نکته**

در معادله ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  که دارای ۲ ریشه ی  $\alpha$  و  $\beta$  باشند:

$$\alpha + \beta = -\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

**مثال ۵۵** اگر در معادله ی  $x^2 - (b - a)(b + c)x + (a + b)(c - b) = 0$  حاصل ضرب ریشه

های معادله مساوی با مجموع ریشه های آن باشد، آنگاه:

$$(۱) \quad b \text{ واسطه ی عددی است بین } a \text{ و } b \quad (۳) \quad c \text{ واسطه ی عددی است بین } a \text{ و } b$$

$$(۲) \quad b \text{ واسطه ی هندسی است بین } a \text{ و } b \quad (۴) \quad b \text{ واسطه ی هندسی است بین } a \text{ و } c$$

$$\text{جمع ریشه ها} = -\left(\frac{b}{a}\right) = (b - a)(b + c)$$

$$\text{ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = (a + b)(c - b)$$

$$\Rightarrow (b - a)(b + c) = (a + b)(c - b)$$

$$b^2 + bc - ab - ac = ac - ab + bc - b^2$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 2ac \Rightarrow b^2 = ac$$

پس  $b$  واسطه ی هندسی بین  $a$  و  $c$  است.