



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

درسنامه دنباله ها

تهیه کننده: کاوس حوریزاد

تعریف دنباله حسابی: دنباله ی که هر جمله آن (به غیر از جمله اول) از افزودن یک مقدار ثابت در جمله ی قبلی آن بدست می آید.

نکته: به مقدار ثابت قدر نسبت می گویند و آن را با d نشان می دهند و مقدار آن از تفاضل جمله دوم از اول بدست می آید.

نکته: جمله ی اول دنباله را a_1 نشان می دهند؛ جمله ی عمومی یا جمله n ام دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n - 1)d$ می باشد.

سوال امتحانی: در دنباله حسابی مفروض، جمله ی بیست و سوم را پیدا کنید.
..... ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow a_{23} = 2 + (22 \times 3) = 68 \quad \leftarrow a = 2, d = 5 - 2 = 3$$

سوال: جمله چندم دنباله مقابل برابر ۱۹۳ می باشد. ... ۹ و ۵ و ۱ و -۳

$$a = -3 \quad a_n = 193 \quad d = 1 - (-3) = 4 \quad , n = ?$$

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow 193 = -3 + (n-1)4 \rightarrow 193 = 4n - 7 \rightarrow N = 50$$

نکته: a, b, c چه زمانی تشکیل دنباله حسابی می دهند.

$$\begin{cases} b - a = d \\ c - b = d \end{cases} \rightarrow b - a = c - b \rightarrow 2b = a + c$$

b را واسطه عددی بین دو a و c می گویند

مثال: x را طوری بیابید که $2x-1$ و $3x$ و $2x+5$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند.

پاسخ: $a=2x-1$

$$b=3x \rightarrow 2b=a+c \rightarrow 2(3x)=(2x-1)+(2x+5) \rightarrow 6x=4x+4 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2$$

$$c=2x+5 \quad \dots, 3, 6, 9, \dots \rightarrow d=3$$

تست: اعداد $5p-1$ و $3p+4$ و $2p+3$ سه جمله ی متوالی یک تصاعد عددی هستند؛ قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

$$4(1) \quad 5(2) \quad 6(3) \quad 7(4)$$

جواب: گزینه 4

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله دلخواه از دنباله حسابی باشند. ($n > m$)

قدر نسبت از فرمول زیر بدست می آید (a_m و a_n مقدار جمله m و n

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \quad (\text{شماره جمله می باشد.})$$

مثال: در یک دنباله حسابی جملات چهارم و یازدهم به ترتیب 3 و 34 می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \rightarrow d = \frac{a_{11} - a_4}{11 - 4} \rightarrow \frac{34 - 13}{7} = \frac{21}{7} = 3 \quad \text{قدر نسبت}$$

$$a_n = a + (n - 1)d \rightarrow a_4 = a + 3d \rightarrow 13 = a + 9 \rightarrow a = 4$$

دنباله مورد نظر $\rightarrow 4, 7, 10, 13$

نکته: اگر a و b دو جمله ی دلخواه باشند، برای درج m جمله بین a و b به طوری که همگی، تشکیل دنباله حسابی بدهند، قدر نسبت از رابطه زیر

$$d = \frac{b - a}{m + 1} \quad \text{بدست می آید}$$

سوال امتحانی: بین دو عدد $2 -$ و $8 +$ سه جمله چنان که پنج همگی باهم تشکیل دنباله حسابی دهند.

$$\text{پاسخ: } d = \frac{b - a}{m + 1} \rightarrow d = \frac{8 - (-2)}{3 + 1} = \frac{10}{4} = 2/5 \rightarrow -2 \text{ و } 0/5 \text{ و } 3/5 \text{ و } 5/5 \text{ و } 8$$

مجموع جملات دنباله حسابی:

نکته ۱: اگر جمله اول و آخر یک دنباله حسابی مشخص باشد مجموع جملات از رابطه زیر بدست می آید.

$$S_n = \frac{n(a+L)}{2}$$

نکته: مجموع جملات را با S_n و جمله اول را با a و جمله آخر را با L نشان می دهند.

مثال: مجموع جملات دنباله زیر را بدست آورید.

۱۵ و ۱۲ و ۹ و ۶ و ۳ و ۰ و -۳

$$S_7 = \frac{n[a+L]}{2} \rightarrow S_7 = \frac{7[-3+15]}{2} = \frac{7 \times 12}{2} = 42$$

نکته: اگر جمله آخر یک دنباله حسابی مشخص نباشد (یعنی نامتناهی باشد) مجموع جملات از رابطه زیر بدست می آید.

$$S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$$

مثال: در تصاعد زیر مجموع سی جمله نخست را بیابید.

۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و ...

$$a=5$$

$$d=8-5=3$$

$$n=30$$

$$S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} = S_{30} = \frac{30[10 + 29]3}{2} = 1455$$

**دنباله هندسی:

تعریف: دنباله ای که هر جمله آن (به غیر از جمله اول) از حاصلضرب یک مقدار ثابت بدست می آید.

نکته: به مقدار ثابت قدرنسبت می گویند و آن را با q نشان می دهند.

نکته: جمله اول دنباله هندسی را با a و جمله عمومی یا

جمله n ام آن به صورت $a_n = aq^{n-1}$ می باشد.

نکته: مقدار قدرنسبت از تقسیم جمله دوم بر جمله اول بدست می آید.

مثال: در دنباله هندسی مفروض، جمله هشتم را پیدا کنید .. ۳ و ۶ و ۱۲

$$a=3, q=2, n=8 \quad a_8=?$$

$$a_n = aq^{n-1} \rightarrow a_8 = 3(2)^{8-1} = 3(2)^7 = 3 \times 128 = 384$$

مثال: جمله چندم دنباله مقابل برابر با $\frac{3}{512}$ می باشد. $\frac{3}{2}$ و ۳- و ۶

$$a=6 \quad q=-\frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{3}{513}, \quad n=?$$

$$a_n = aq^{n-1} \rightarrow \frac{3}{514} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1024} \rightarrow$$

جمله یازدهم $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \rightarrow n-1 = 10 \rightarrow n = 11$

نکته: a, b, c ... چه زمانی تشکیل تصاعد هندسی می دهند.

$$\dots, a, b, c, \dots \rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = q \\ \frac{c}{b} = q \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = b^2 = ac$$

b را واسطه هندسی بین دو عدد a و c گوئیم.

سوال امتحانی: x را طوری بیابید که $x+3$ و x و $x+2$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

$$\begin{cases} a = x + 3 \\ b = x \\ c = x + 2 \end{cases} \rightarrow b^2 = ac \rightarrow x^2 = (x + 3)(x + 2) \rightarrow x^2 = x^2 + 5x + 6 \rightarrow x = -\frac{6}{5}$$
$$\rightarrow \dots, \frac{9}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \dots \rightarrow q = -\frac{2}{3}$$

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله دلخواه از دنباله هندسی باشند ($n > m$)

برای یافتن قدرنسبت تصاعد هندسی زمانی که دو جمله و شماره آن معلوم باشد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم .

$$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

سوال امتحانی: در یک دنباله هندسی جملات سوم و هشتم

به ترتیب ۱۹۲ و ۶ می باشد، دنباله را مشخص کنید.

$$a_3 = 6, a_8 = 192, q = ?, \quad a = ?$$

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \rightarrow q^{8-3} = \frac{a_8}{a_3} \rightarrow q^5 = \frac{192}{6} = 32 \rightarrow$$

$$\rightarrow q = \sqrt[5]{32} = 2 \text{ قدر نسبت}$$

$$\text{دنباله مورد نظر: } \frac{3}{2}, 3, 6, 12, \dots$$

مثال: در یک دنباله هندسی جملات پنجم و نهم به ۱۸ و ۱۴۵۸ می باشد،
قدر نسبت را پیدا کنید.

$$a_5 = 18, a_9 = 1458, q = ?$$

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \rightarrow q^{9-5} = \frac{a_9}{a_5} \rightarrow q^4 = \frac{1458}{18} \rightarrow q^4 = 81 \rightarrow q = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

تست: در یک تصاعد هندسی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است.

جمله اول کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

$$\frac{5}{4} (4)$$

$$5 (3)$$

$$25 (2)$$

$$\sqrt{5} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است.

نکته: اگر a و b دو جمله دلخواه باشند. برای درج m جمله بین a و b

به طوری که همگی جملات تشکیل دنباله هندسی بدهند

$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \text{ قدر نسبت (q) از رابطه ی زیر بدست می آید}$$

مثال: بین دو عدد $\frac{8}{3}$ و $\frac{128}{243}$ سه جمله چنان درج کنید که پنج جمله همگی با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند.

$$q^{5-1} = \frac{b}{a} = \frac{a_5}{a_1} \rightarrow q^4 = \frac{\frac{128}{243}}{\frac{8}{3}} \rightarrow q^4 = \frac{16}{81} \rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$$
$$q = \pm \frac{2}{3}$$

مجموع جملات دنباله هندسی:

در یک تصاعد هندسی با جمله ی a و قدر نسبت q مجموع n جمله ی نخست از رابطه زیر بدست می آید.

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

مثال: مجموع ۱۰ جمله ی نخست دنباله زیر را بیابید.

۵.....و ۲۰ و ۱۰ و ۵

$$S_{10} = \frac{5(2^{10}-1)}{2-1} = 5(1023) = 5115$$

حد مجموع:

اگر در یک تصاعد هندسی $|q| < 1$ باشد و تعداد جملات بی نهایت زیاد باشد. برای محاسبه ی مجموع جملات از رابطه ی زیر استفاده می کنیم و به آن حد مجموع می گوییم.

$$S_n = \frac{a}{1-q}$$

مثال: حد مجموع دنباله ی هندسی زیر را بیابید.

$$\frac{5}{6} \text{ و } \frac{25}{36} \text{ و } \frac{125}{216} \text{ و } \dots \dots$$

$$S_n = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5 \quad \text{می باشد و داریم: } a = \frac{5}{6} \text{ و } q = \frac{5}{6}$$

مثال: در تصاعد هندسی مجموع شش جمله نخست، ۹ برابر مجموع سه جمله اول است قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

$$s_6 = 9s_3 \rightarrow \frac{a(1-q^6)}{1-q} = \frac{9a(1-q^3)}{1-q} \rightarrow 1 - q^6 = 9(1 - q^3)$$

$$1 + q^3 = 9 \rightarrow q^3 = 8 \rightarrow q = 2$$

مثال: در دنباله هندسی $a_2 a_4 = 2a_5$ است. جمله اول کدام است؟

$$a_2 a_4 = 2a_5 \rightarrow (aq)(aq^3) = 2(aq^4) \rightarrow a^2 q^4 = 2aq^4 \rightarrow a^2 = 2a$$

$$a = 2$$

مثال: در دنباله هندسی جمله سوم برابر است با جمله دوم به اضافه دو برابر جمله اول، قدر نسبت کدام است؟

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \rightarrow aq^2 = aq + 2a \rightarrow aq^2 - aq - 2a = 0$$

$$a(q^2 - q - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ q^2 - q - 2 = 0 \rightarrow (q - 2)(q + 1) = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -1 \end{cases} \end{cases}$$

تست: به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله ی اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟ (۹۳ تجربی)

$$b^2 = ac \rightarrow (2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \quad \text{غ غ ق} \end{cases}$$

با قرار دادن هر از مقادیر $x = -2$ و $x = 2$ به جای x ، سه جمله ی اول این دنباله به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} x = -2 \rightarrow 8, -4, 2 \\ x = 2 \rightarrow 8, 4, 2 \end{cases}$$

چون این دنباله نزولی است. پس تنها جواب $x=2$ قابل قبول است. بنا براین مجموع هفت

جمله آن برابر است با: $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $a=8$ → $8, 4, 2, \dots$

$$S_7 = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{127}{8}$$

تهیه کننده: کاوس حوریزاد

دبیر دبیرستانهای منطقه خورش رستم شهرستان خلخال