



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

دایره

📖 **معادله استاندارد:** معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و به شعاع R عبارت است از:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

📖 **معادله گسترده:** اگر معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد آن را معادله گسترده می نامند. در

این حالت مرکز و شعاع به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 2x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2y + b = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad R = \sqrt{(\text{عرض مرکز})^2 + (\text{طول مرکز})^2 - c}$$

📖 **سؤال ۱:** دایره ای به معادله $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$ از نقطه $(1, 1)$ می گذرد شعاع آن کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

👉 پاسخ: گزینه ۴

نقطه $A(1, 1)$ را درون معادله قرار می دهیم:

$$a(1^2 + 1^2) + b(1 + 1) = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow a(x^2 + y^2) - a(x + y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0 \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

📖 **شرط دایره بودن:**

شرط دایره بودن یک معادله $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ به شکل دو چیز است:

(۱) ضریب x^2, y^2 برابر باشد.

(۲) وقتی شعاع را پیدا می کنیم زیر رادیکال مثبت باشد.

📖 **سؤال ۲:** به ازای کدام مجموعه مقادیر a منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

$$\emptyset \quad (۴)$$

$$\{-3, 3\} \quad (۳)$$

$$\{3\} \quad (۲)$$

$$\{-3\} \quad (۱)$$

👉 پاسخ: گزینه ۳

با توجه به توضیحات درسنامه برای دایره بودن باید ضرایب x^2, y^2 برابر باشند بنابراین داریم:

$$2 = a^2 - 7 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, -3$$

اگر $a = 3$ باشد داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow[f'_y=0]{f'_x=0} O(0, -1) \Rightarrow R = \sqrt{0 + 1 - \frac{3}{2}}$$

ولی اگر $a = -3$ باشد داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow[f'_y=0]{f'_x=0} O(0, -1) \Rightarrow R = \sqrt{0 + 1 + \frac{3}{2}}$$

نوشتن معادله دایره:

برای نوشتن معادله دایره دو چیز لازم است: مرکز و شعاع که باید از اطلاعات مسأله این دو را پیدا کنیم و از رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ معادله را بنویسیم:

توجه: در بسیاری مسائل گفته می شود مرکز دایره روی خط مثلاً $y = mx + h$ است و یا می گویند $y = mx + h$ یک قطره دایره است در این موارد مرکز را به صورت $O(\alpha, m\alpha + h)$ فرض می کنیم یعنی شناور روی خط.

سؤال ۳: شعاع دایره ای که از $A(3, 0), B(1, 2)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ می باشد چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{13}$

پاسخ: گزینه ۳

چون مرکز روی خط $y = 2x - 1$ است فرض کنیم $O(\alpha, 2\alpha - 1)$ بنابراین باید فاصله مرکز از نقاط روی دایره یکسان باشد یعنی:

$$|OA| = |OB| \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2} \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 \Rightarrow -10\alpha = -14\alpha \Rightarrow 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow R = |OA| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

سؤال ۴: دایره از دو نقطه $(0, 0), (3, 1)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره

کدام است؟ (تجربی خارج ۸۶)

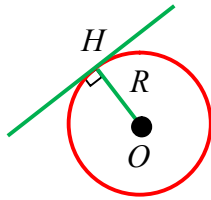
(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

مرکز دایره روی خط $y = 2x$ قرار دارد پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha, 2\alpha)$ می باشد. چون این دایره از دو نقطه $B(3, 1), A(0, 0)$ می گذرد لذا فاصله مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع است داریم:

$$OB = OA \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^2 + 4\alpha^2 = (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (4\alpha^2 - 4\alpha + 1) \Rightarrow 5\alpha^2 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow \alpha = 1 \xrightarrow{O(\alpha, 2\alpha)} O(1, 2) \Rightarrow R = OA = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

یادآوری کاربردی:



(۱) فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر است با شعاع دایره.

(۲) فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$|AH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

سؤال ۵: مرکز دایره ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(3, 6)$ گذشته و بر خط $y = 2x$

مماس شود شعاع آن کدام است؟ (داخل ۹۲)

$$\sqrt{10} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{6} \quad (۲)$$

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

چون گفته مرکز روی خط $y = x$ است آن را به صورت شلوار روی خط یعنی $O(\alpha, \alpha)$ فرض می کنیم. فاصله مرکز از خط مماس برابر است با شعاع:

$$R = \frac{|\alpha - \alpha|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{5}} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \frac{\alpha^2}{5} \xrightarrow{A(3,6)} (3 - \alpha)^2 + (6 - \alpha)^2 = \frac{\alpha^2}{5}$$

$$\Rightarrow 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 36 - 12\alpha + \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{5} \Rightarrow 9\alpha^2 - 90\alpha + 225 = 0 \Rightarrow (3\alpha - 15)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

سؤال ۶: دایره ای از نقاط $A(2, 0), B(1, -1)$ گذشته و مرکز آن بر خط $y - x = 3$ واقع است. فاصله دورترین

نقطه دایره از خط $3x - 4y + 6 = 0$ کدام است؟

$$\sqrt{13} - 1 \quad (۴)$$

$$\sqrt{10} - 1 \quad (۳)$$

$$1 + \sqrt{7} \quad (۲)$$

$$1 + \sqrt{13} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

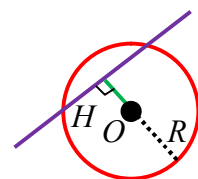
مرکز دایره به فرم $O(\alpha, \alpha + 3)$ می باشد و فاصله اش از A و B برابر است:

$$R = |OA| = |OB| \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (\alpha + 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 4)^2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha + 13 = 2\alpha^2 + 6\alpha + 17 \Rightarrow \alpha = -1$$

پس دایره به مرکز $O(-1, 2)$ و شعاع $\sqrt{13}$ می باشد. مطابق شکل فاصله دورترین نقطه دایره تا خط $3x - 4y + 6 = 0$ برابر $OH + R$ می باشد.

$$|OH| = \frac{|-3 - 8 + 6|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \text{فاصله دورترین} = 1 + \sqrt{13}$$



سؤال ۷: به ازای کدام مقدار m خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

- (۱) $0, -\frac{4}{3}$ (۲) $0, \frac{4}{3}$ (۳) $1, -\frac{2}{3}$ (۴) $1, \frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$O(1,0) \Rightarrow R = \sqrt{1+0+3} = 2 \Rightarrow |OH| = \frac{|0-m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow \frac{(m+2)^2}{m^2+1} = 4$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 4 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \frac{4}{3}$$

سؤال ۸: خط $5x + 12y = 14$ دایره $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ را در نقاط A و B قطع می کند. فاصله A و

B از هم چقدر است؟

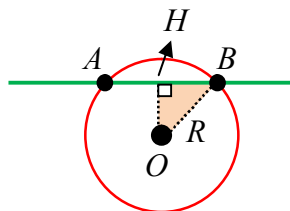
- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا فاصله مرکز دایره را تا خط پیدا می کنیم سپس به کمک فیثاغورس $|HB|$ را پیدا کرده و دو برابر می کنیم:

$$\begin{cases} O(1,4) \\ R = \sqrt{1+16+8} = 5 \end{cases} \Rightarrow |OH| = \frac{|5+48-14|}{\sqrt{25+144}} = 3$$

$$\Rightarrow |HB| = \sqrt{R^2 - OH^2} = 4 \Rightarrow |AB| = 8$$



سؤال ۹: مرکز دایره ای در زیر محور x ها و بر محور y ها واقع است. اگر این دایره بر دو خط به معادله

$2x - y + 6 = 0$ و $x - 2y - 3 = 0$ مماس باشد آنگاه شعاع آن کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $5\sqrt{3}$ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

چون مرکز این دایره بر محور y ها واقع است پس مختصات آن را به صورت $\omega(0, \beta)$ در نظر می گیریم از طرفی اگر خطی بر یک دایره مماس باشد فاصله مرکز دایره از آن خط برابر با شعاع دایره است.

$$\begin{cases} \omega(0, \beta) \\ L: 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{|2(0) - \beta + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-\beta + 6|}{\sqrt{5}} \quad (*)$$

$$\begin{cases} \omega(0, \beta) \\ L': x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{|0 - 2\beta - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2\beta - 3|}{\sqrt{5}} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \frac{|-\beta + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2\beta - 3|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |-\beta + 6| = |-2\beta - 3| \Rightarrow -\beta + 6 = \pm(-2\beta - 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\beta + 6 = -2\beta - 3 \Rightarrow \beta = -9 \xrightarrow{(*)} R = \frac{|-(-9) + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \\ -\beta + 6 = 2\beta + 3 \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $\beta = 1$ آنگاه مرکز این دایره بالای محور x ها قرار می گیرد که خلاف فرض مسئله است. پس $\beta = 1$ را نمی پذیریم.

سؤال ۱۰: طول وترى از دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ که نقطه $(1, 2)$ وسط آن باشد کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 4 - 16 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10 \Rightarrow O(2, 4), R = \sqrt{10}$$

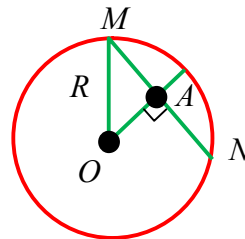
حال با توجه به شکل فرضی زیر طول وتر MN را می یابیم:

$$A(1, 2)$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{R^2 - OA^2} = \sqrt{10 - 5} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MN = 2AM = 2\sqrt{5}$$



دایره مماس بر دو خط متقاطع:

اگر دایره ای بر دو خط متقاطع مماس باشد فاصله مرکز آن تا دو خط برابر است (در واقع مرکز روی یکی از نیمسازهای دو خط است).

دایره ای که بر محورهای مختصات مماس است، مرکز آن روی $y = x$ یا $y = -x$ می باشد.

سؤال ۱۱: دایره از $A(2, 1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس اند. شعاع این دایره ها کدام است؟ (داخل ۸۷)

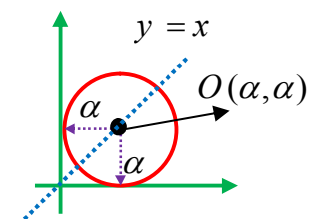
- (۱) ۱، ۴ (۲) ۱، ۵ (۳) ۲، ۴ (۴) ۲، ۵

پاسخ: گزینه ۴

چون دایره بر هر دو محور مماس است مرکز آن روی $y = x$ یا $y = -x$ است ولی چون از نقطه ای در ربع اول می گذرد مرکز روی $y = x$ است که آن را $O(\alpha, \alpha)$ فواید بود در این صورت:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2 \xrightarrow{A(2, 1)} (2 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, 5$$



سؤال ۱۲: نقطه $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره ای است که بر دو خط $x = 2y, y = 2x$ مماس است. شعاع دایره

کوچکتر کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

چون دایره بر دو خط متقاطع مماس است مرکز آن از این دو خط به یک فاصله است.

$$\left| \frac{2\sqrt{5} - 2b}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{b - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right| \Rightarrow 2\sqrt{5} - 2b = \pm(b - 4\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{5} \\ b = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

حال شعاع برابر است با فاصله مرکز از خط مماس :

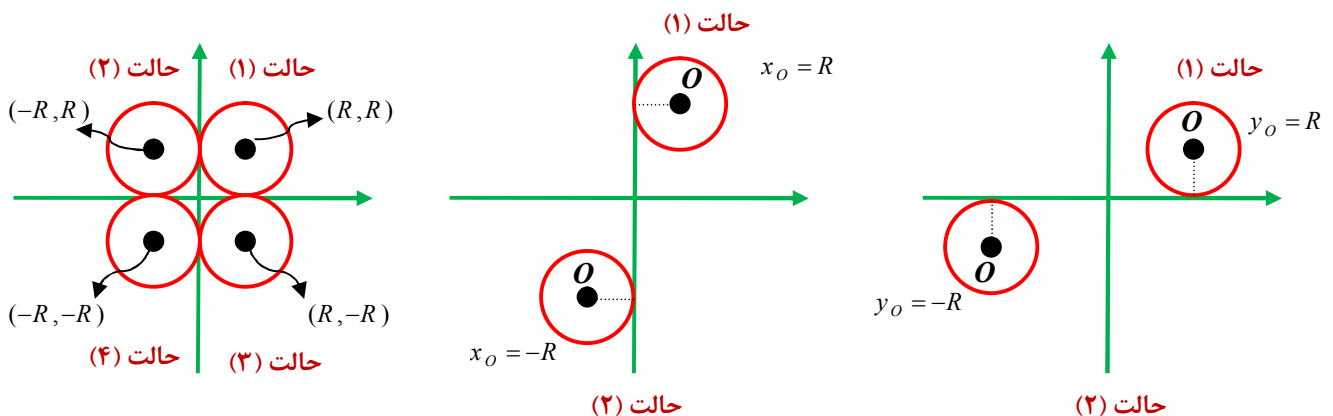
$$x - 2y = 0 \Rightarrow |MH| = \frac{|2\sqrt{5} \pm 4\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \begin{cases} MH = R = 6 \\ MH = R = 2 \end{cases}$$

مماس بودن دایره بر محور یا محورهای مختصات :

الف) دایره بر محور x ها مماس باشد.

ب) دایره بر محور y ها مماس باشد.

ج) دایره بر هر دو محور x, y مماس باشد.



مثال: اگر دایره ای به شعاع ۳ مماس بر هر دو محور و در ناحیه سوم باشد مرکز آن $O(-3, -3)$ بوده و معادله

آن برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \xrightarrow{O(-3, -3)} (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

* برای نوشتن معادله دایره باید هواستان باشد دایره در کدام ناحیه بر هر دو محور مماس است تا مفتحات مرکز را اشتباه ننویسید!

سؤال ۱۳: دایره ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) (تجربی داخل ۹۰)

پاسخ: گزینه ۲

دایره از نقطه $(-1, 2)$ که در ناحیه دوم است می گذرد، پس این دایره در ناحیه دوم بر هر دو محور مختصات مماس است و مفتضات مرکز دایره $O(-R, R)$ است داریم:

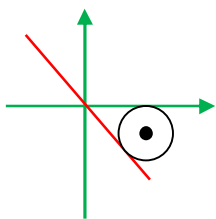
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \xrightarrow{O(-R, R)} (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

نقطه $(-1, 2)$ روی دایره است پس در معادله صدق می کند:

$$(-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 - 4R + R^2 \Rightarrow 2R^2 - 6R + 5 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{قطر} = 2R = 10$$

سؤال ۱۴: دایره ای بر محور x ها و خط به معادله $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه چهارم و شعاع آن ۳ واحد باشد نقطه مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟



- ۹ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل مقابل مرکز دایره $O(\alpha, -3)$ می باشد می دانیم فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است پس:

$$|OH'| = 3 = \frac{|3(\alpha) + 4(-3)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow |\alpha - 4| = 5 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$$

غ ق ق زیرا در ناحیه دوم است. -۱

بنابراین نقطه مشترک دایره با محور ها به طول ۹ می باشد.

سؤال ۱۵: دایره ای از دو نقطه $(0, 6)$ و $(1, -1)$ گذشته و بر محور y ها مماس است. شعاع دایره کدام است؟

- ۲۷ (۱) ۲۵ (۲) ۲۴ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

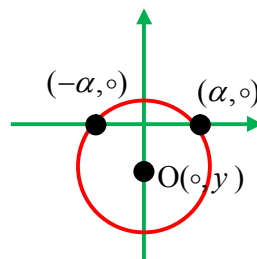
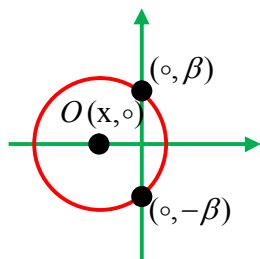
معادله دایره به مرکز $O'(h, k)$ و مماس بر محور y ها به صورت $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2$ است. با توجه به این که دایره در نقطه $(0, 6)$ بر محور y ها مماس است مرکز آن روی خط $y = 6$ قرار دارد و در نتیجه $k = 6$ می باشد بنابراین معادله دایره به صورت $(x - h)^2 + (y - 6)^2 = h^2$ است.

$$(1, -1) \Rightarrow (1 - h)^2 + (-1 - 6)^2 = h^2 \Rightarrow 2h = 50 \Rightarrow h = 25 \Rightarrow r = h = 25$$

عبور دایره از دو نقطه متقارن:

الف) اگر دایره ای از دو نقطه متقارن $(\alpha, 0), (-\alpha, 0)$ بگذرد. آنگاه مرکز آن روی محور y ها قرار دارد یعنی $\text{مرکز} = x=0$

ب) اگر دایره ای از دو نقطه متقارن $(0, \beta), (0, -\beta)$ بگذرد. مرکز آن روی محور x ها قرار دارد یعنی $\text{مرکز} = y=0$



سؤال ۱۶: دایره ای از دو نقطه $A(2, 0), B(-2, 0)$ گذشته و بر خط $y=1$ مماس است. شعاع این دایره کدام

است؟ (تجربی خارج ۸۸)

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

چون دایره از دو نقطه متقارن $A(2, 0), B(-2, 0)$ که عرض یکسان دارند می‌گذرد پس مرکز آن روی محور y ها قرار دارد و می‌توان مفتصات آن را به صورت $O(0, y)$ در نظر گرفت. با توجه به شکل چون فاصله مرکز از تمام نقاط روی دایره یکسان و برابر شعاع است داریم:

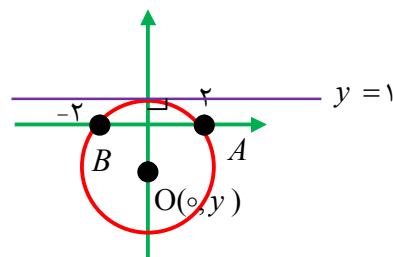
$$\text{شعاع} = OB = OA = OH$$

حال برای مناسبه y از تساوی $OA = OH$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (0-y)^2} = |1-y| \Rightarrow \sqrt{4+y^2} = |1-y|$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4+y^2 = 1+y^2-2y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{مفتصات مرکز: } O\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$



برای مناسبه شعاع می‌توان OA یا OB یا OH را پیدا نمود که OH فرمول ساده تری دارد پس داریم:

$$= |1-y| \xrightarrow{y=-\frac{3}{2}} \left|1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$$

سؤال ۱۷: دایره ای از دو نقطه $(۱, ۰)$, $(۵, ۰)$ گذشته و بر خط به معادله $y = -۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام

است؟

$$\frac{۵}{۲} \quad (۴)$$

$$\frac{۳}{۲} \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

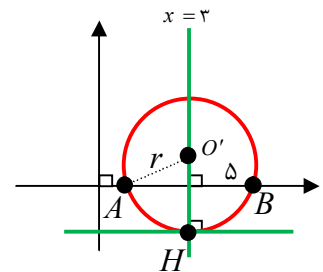
مطابق شکل فنی که از وسط AB و عمود بر خط $y = -۱$ می‌گذرد از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین طول $O'H$ برابر ۳ است. فرض کنیم $O'(۳, k)$ باشد در این صورت:

$$O'H = O'A = r$$

$$O'H = k + ۱, O'A = \sqrt{(۳-۱)^2 + (k-۰)^2} \Rightarrow \sqrt{۴+k^2} = k + ۱$$

$$\Rightarrow ۴+k^2 = (k+۱)^2 \Rightarrow ۴+k^2 = k^2 + ۲k + ۱$$

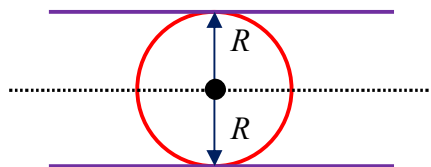
$$\Rightarrow ۲k = ۳ \Rightarrow k = \frac{۳}{۲} \Rightarrow r = k + ۱ = \frac{۵}{۲}$$



دایره مماس بر دو خط موازی:

اگر دایره ای بر دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ مماس باشد مرکز آن روی خط میانگین آنها یعنی $ax + by = \frac{c+c'}{۲}$ قرار دارد و طول قطر دایره برابر فاصله این دو خط موازی است. پس شعاع برابر نصف فاصله این دو خط موازی می‌باشد.

$$۲R = \frac{|c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



سؤال ۱۸: دایره ای که مرکز آن به طول ۱- بوده و بر دو خط $y = x$ و $y = x + ۴$ مماس است، نیمساز ناحیه

دوم را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$(-۳, ۳) \quad (۴)$$

$$\left(-\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}\right) \quad (۳)$$

$$(-۲, ۲) \quad (۲)$$

$$(-۱, ۱) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

چون دایره بر دو خط موازی $y = x$ و $y = x + ۴$ مماس است پس مرکز آن روی خط میانگین یعنی $y = x + \frac{۴+۰}{۲}$ است. با توجه به اینکه طول مرکز ۱- است $O(-۱, ۱)$ خواهد بود. از طرفی فاصله دو خط $y = x$ و $y = x + ۴$ برابر $۲R$ است.

$$2R = \frac{|4+0|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \xrightarrow{y=-x}$$

$$(-y+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 2)$$

سؤال ۱۹: معادله دایره ای که بر دو خط $y = -5$ و $y = 1$ مماس باشد و مرکز آن روی خط $y = x - 1$ قرار دارد

کدام است؟

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y - 1 = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اینکه دایره بر دو خط موازی مماس است بنابراین قطر دایره برابر فاصله بین این دو خط است. پس $2R = 6 \Rightarrow R = 3$ از طرفی مرکز دایره روی خط $y = -2$ است. (زیرا خط $y = -2$ به فاصله مساوی از دو خط $y = 1$ و $y = -5$ قرار دارد.) پس:

$$\begin{cases} \text{مرکز روی خط } y = -2 \text{ است.} \\ \text{مرکز روی خط } y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

مرکز دایره: $(-1, -2)$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (3)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

سؤال ۲۰: معادله دایره ای که بر هر چهار خط $x = -1, x = 3, y = 2, y = 6$ مماس باشد کدام است؟

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 13 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 13 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - x + y^2 - 4y - 4 = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$O' = (1, 4), r = 2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

سؤال ۲۱: دایره ای مماس بر دو خط به معادلات $2y = -x + 2$ و $2y = -x + 6$ است اگر مرکز دایره روی خط

$$2y - 3x = 0 \text{ قرار داشته باشد عرض مرکز دایره کدام است؟}$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

مرکز دایره روی خط $2y - 3x = 0$ قرار دارد بنابراین اگر طول مرکز h باشد آنگاه عرض آن $\frac{3}{2}h$ است زیرا:

از طرفی دو خط و با هم موازی اند لذا مرکز دایره روی خط قرار دارد.

$$x = h, 2y - 3x = 0 \Rightarrow 2y = 3h \Rightarrow y = \frac{3}{2}h \Rightarrow O'\left(h, \frac{3}{2}h\right)$$

از طرفی دو خط $2y = -x + 2$ و $2y = -x + 6$ با هم موازی اند لذا مرکز دایره روی خط

$$2y = -x + \frac{6+2}{2} = -x + 4 \text{ قرار دارد.}$$

$$O' \Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}h\right) = -h + 4 \Rightarrow 3h = -h + 4 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow O'\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

سؤال ۲۲: دایره ای بر دو نقطه $(0, 2)$ و $(4, 0)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه

دیگر، با کدام عرض قطع می کند؟ (خارج ۸۵)

۸ (۴)

۷ (۳)

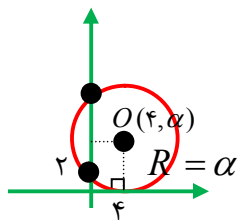
۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل طول مرکز ۴ و عرض آن نامعلوم است. یعنی مرکز روی خط $x = 4$ می باشد.

بنابراین فرض می کنیم $O(4, \alpha)$ باشد پس:



$$(x - 4)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2 \xrightarrow{A(0,2)} (0 - 4)^2 + (2 - \alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 16 + 4 - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 5$$

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25 \xrightarrow[\text{تقاطع با } x=0]{\text{by } x=0} (0 - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25 \Rightarrow y - 5 = \pm 3 \Rightarrow y = 2, 8$$

پیدا کردن معادله مکان هندسی:

برای پیدا کردن معادله یک مکان هندسی، یک نقطه مانند $M(x, y)$ در نظر می گیریم و تعریف مسأله را روی آن اجرا می کنیم. رابطه به دست آمده بین x و y همان معادله مکان هندسی است.

دایره آپولونیوس:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه A ، k برابر فاصله آنها از نقطه B باشد، یک دایره است. این دایره را دایره

$$R = \frac{k}{|k^2 - 1|} |AB| \text{ آپولونیوس می نامند و شعاع آن برابر است با:}$$

سؤال ۲۳: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه $A(2, 4)$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آن از $B(1, 2)$ می

باشد یک دایره است. شعاع این دایره کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$|MA| = \sqrt{2} |MB| \xrightarrow{M(x,y)} \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = 2(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) \Rightarrow x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

سؤال ۲۴: اگر فاصله نقطه $M(x, y)$ تا نقطه $A(6, 0)$ دو برابر فاصله اش تا نقطه $B(0, 3)$ باشد M مکان

هندی دایره ای با کدام شعاع است؟

$\sqrt{5}$ (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} A(6, 0) \\ B(0, 3) \Rightarrow R = \frac{2}{|2^2 - 1|} \times \sqrt{(6-0)^2 + (0-3)^2} = \frac{2}{3} \times \sqrt{36+9} = \frac{2}{3}(\sqrt{45}) = \frac{2}{3}(3\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \\ k=2 \end{cases}$$

سؤال ۲۵: مکان هندسی نقطه $M(x, y)$ که فاصله آن تا نقطه $A(-2, 2)$ دو برابر فاصله آن تا نقطه $B(2, 2)$ باشد

یک دایره با کدام مرکز است؟

$\left(\frac{10}{3}, 2\right)$ (۱) $\left(\frac{10}{3}, -2\right)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(3, -2)$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$AM = 2MB \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4(x-2)^2 + 4(y-2)^2 \Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4)$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 4y + 4) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 24 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow Q'\left(\frac{10}{3}, 2\right)$$

نوشتن معادله دایره به کمک سه نقطه :

مختصات سه نقطه داده شده را در معادله گسترده دایره یعنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ قرار داده و مجهولات a, b, c را می یابیم. با معلوم شدن a, b, c معادله دایره به دست آمده است.

ترفند ویژه: اگر مثلث حاصل از به هم وصل کردن سه نقطه داده شده قائم الزویه باشد آنگاه می توان شعاع دایره را بدون نوشتن

معادله از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\text{شعاع} = \frac{\text{وتر مثلث}}{2}$$

تذکره: تاکنون در اکثر تست های کنکور که از این درسنامه آمده اند سه پاره خط تشکیل مثلث قائم الزویه می داده اند. پس این راه ارزش بررسی کردن را دارد. قائم الزویه بودن مثلث را می توانید با محاسبه شیب خطوط بررسی کنید.

سؤال ۲۶: شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات $(۰,۰)$, $(۲,۱)$, $(-۲,۴)$ می گذرد کدام است؟

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دایره از سه نقطه با مختصات $(۰,۰)$, $(-۲,۴)$, $(۲,۱)$ می گذرد لذا معادلات این سه نقطه در معادله گسترده دایره صدق می کند داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} (0,0) \rightarrow c = 0 \\ (-2,4) \rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \\ (2,1) \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 10 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -5$$

$$R = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} - 0 = \frac{5}{2} \quad \text{حال با معلوم بودن مقادیر } a, b, c \text{ شعاع دایره برابر است با:}$$

سؤال ۲۷: شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(۰,۰)$, $(۲,۱)$, $(۱,-۲)$ برابر کدام است؟

$\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

سه نقطه $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(1,-2)$ تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند. زیرا شیب های دو پاره فط AC و BC قرینه و

مکوس هم هستند $\left(m_{AC} = -2, m_{AB} = \frac{1}{2}\right)$:

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (1-(-2))^2}}{2} = \frac{\sqrt{1+9}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

سؤال ۲۸: دایره ای محور x ها را با طول های (-۱) و ۳ و محور y ها را با عرض ۱ قطع می کند. شعاع این دایره کدام

است؟

$\sqrt{6}$ (۴)

۳ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

معادله این دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می گیریم از آنجا که این دایره محور x ها را با طول های (-۱) و ۳ و محور y ها را با عرض ۱ قطع می کند پس معادلات نقاط $(0,1)$, $(3,0)$, $(-1,0)$ در معادله آن صدق می کند:

$$\begin{cases} (-1)^2 + 0 + a(-1) + b(0) + c = 0 \\ 3^2 + 0 + a(3) + b(0) + c = 0 \\ 0 + 1^2 + a(0) + b(1) + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a + c = 0 \\ 9 + 3a + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases}$$

از دو معادله اول نتیجه می شود:

$$\begin{cases} 1 - a + c = 0 \\ 9 + 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow 1 + b - 3 = 0$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow \text{معادله دایره: } x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

$$R = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 3} = \sqrt{5} \quad \text{از طرفی شعاع هر دایره به معادله } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ برابر با:}$$

قائم بر دایره:



(۱) هر خط که از مرکز دایره می گذرد بر دایره عمود است.

(۲) دایره تنها منحنی است که قائم های بر آن همواره از نقطه ثابتی (به نام مرکز) می گذرند.

سؤال ۲۹: دایره ای بر خط به معادله $y = 2x - 1$ مماس است و تمام قائم های آن دایره از نقطه $O(-1, 2)$

می گذرند، بیشترین فاصله نقاط این دایره از محور x کدام است؟

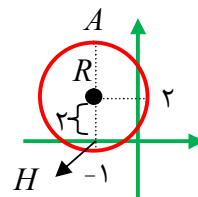
- (۱) $2 + \sqrt{5}$ (۲) $3 + \sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

نقطه $O(-1, 2)$ مرکز دایره است و فاصله مرکز تا خط مماس شعاع دایره است حال یک شکل رسم می کنیم تا بینیم اوضاع از چه

قرار است:

$$\begin{aligned} y - 2x + 1 = 0 &\Rightarrow R = \frac{|2 + 2 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5} \\ O(-1, 2) & \\ \Rightarrow |AH| = 2 + R = 2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$



سؤال ۳۰: هر خط قائم بر یک دایره از نقطه $(-2, 1)$ می گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است.

شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم مرکز دایره نقطه ای است که هر خط قائم بر دایره از آن می گذرد. پس نقطه $(-2, 1)$ مرکز دایره است. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. پس فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است داریم:

$$OH = R = \frac{|y_o - x_o + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - (-2) + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

سؤال ۳۱: اگر دایره $x^2 + y^2 + mx - 2y = 0$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیه اول مماس باشد آنگاه فاصله

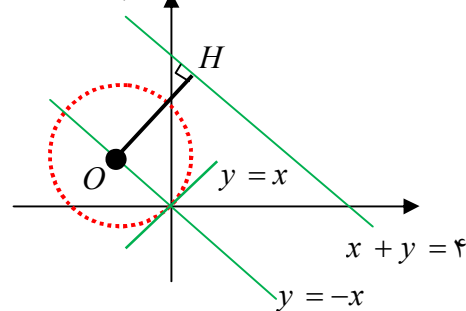
نزدیکترین نقاط دایره تا خط $x + y = 4$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} + 1$ (۲) $\sqrt{2} - 1$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

خط $y = -x$ بر خط $y = x$ در مبدأ مختصات (که همان نقطه تماس است) عمود می باشد پس مرکز دایره یعنی روی خط $y = -x$ قرار می گیرد. با جایگذاری O در خط $y = -x$ مقدار $m = 2$ می شود حال نزدیکترین فاصله

نقاط دایره تا خط $x + y = 4$ را پیدا می کنیم:



$$OH = \frac{|-1+1-4|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OH - R$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

سؤال ۳۲: دایره $x^2 + y^2 + kx - 2y = 0$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع اول و سوم مماس است شعاع دایره

چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

مرکز دایره روی خط قائم بر دایره در مبدأ مختصات قرار دارد. لذا مرکز دایره روی خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) قرار دارد.

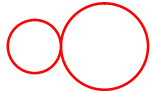
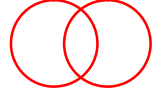
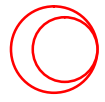
$$x^2 + y^2 + kx - 2y = 0 \Rightarrow O' \left(-\frac{k}{2}, 1 \right)$$

$$y = -x \Rightarrow 1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

وضعیت دو دایره:

دو دایره نسبت به هم دارای ۵ وضعیت مختلف می باشند. برای تشخیص مراحل زیر را طی می کنیم:

- (۱) O_1 و R_1 را پیدا می کنیم.
- (۲) O_2 و R_2 را پیدا می کنیم.
- (۳) $d = |O_1 O_2|$ را به دست می آوریم.
- (۴) $|R_1 - R_2|$ و $R_1 + R_2$ را محاسبه می کنیم.
- (۵) d را با $|R_1 - R_2|$ و $R_1 + R_2$ مقایسه می کنیم.

۱) $d > R_1 + R_2$	متخارج	
۲) $d = R_1 + R_2$	مماس خارج	
۳) $ R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	مقاطع	
۴) $d = R_1 - R_2 $	مماس داخل	
۵) $d < R_1 - R_2 $	متداخل	

سؤال ۳۳: دو دایره به معادلات $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$

نسبت به هم چگونه اند؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل ۳) متقاطع در دو نقطه ۴) یکی خارج دیگری

پاسخ: گزینه ۲

حال مراحل ۵ گانه را اجرا می کنیم یعنی مرکزها و شعاع های دو دایره را پیدا می کنیم، طول فاصله مرکزین را محاسبه و آن را با تفاضل و جمع شعاع ها مقایسه می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 1) O_1(2, -2) \Rightarrow R_1 = \sqrt{4+4+1} = 3 \\ 2) O_2(2, -4) \Rightarrow R_2 = \sqrt{4+16-19} = 1 \\ 3) d = |O_1O_2| = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(4)} \begin{cases} R_1 + R_2 = 4 \\ |R_1 - R_2| = 2 \end{cases} \xrightarrow{(5)} d = |R_1 - R_2| \Rightarrow \text{مماس داخل}$$

سؤال ۳۴: به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$

مماس داخل اند؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲

باید $d = |R_1 - R_2|$ باشد بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} O_1(-1, 1) \Rightarrow R_1 = \sqrt{2} \\ O_2(0, 2) \Rightarrow R_2 = \sqrt{4-b} \\ d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} = |\sqrt{2} - \sqrt{4-b}| \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{4-b} \Rightarrow b = 4 \\ \sqrt{2} = \sqrt{4-b} - \sqrt{2} \Rightarrow 4-b = 2 \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $b = 4$ شعاع دایره دوم صفر می شود.

سؤال ۳۵: دایره C بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است و هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(8, 7)$ می گذرد. شعاع دایره C کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۶)

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \longrightarrow \text{مرکز دایره} \rightarrow O_1(2, -1)$$

$$R_1 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} + 4 = \sqrt{5} = 3$$

چون هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(8, 7)$ می گذرد، مرکز دایره C ، $(8, 7)$ است پس: $O_1O_2 = R_1 + R_2$

$$O_1O_2 = R_1 + R_2$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(8-2)^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$10 = 3 + R_2 \Rightarrow R_2 = 7$$

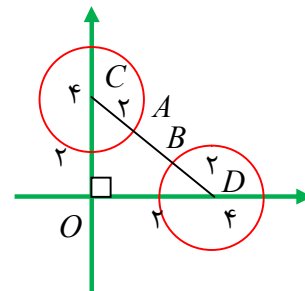
سؤال ۳۶: کوتاهترین فاصله بین نقاط دایره به مرکز $(0, 4)$ و شعاع ۲ و دایره به مرکز $(4, 0)$ و شعاع ۲ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $4 - \sqrt{2}$ (۳) $2(\sqrt{2} - 1)$ (۴) $4(\sqrt{2} - 1)$

پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل مثلث COD قائم الزاویه و متساوی الساقین است پس $CD = 4\sqrt{2}$ و کوتاهترین فاصله نقاط دو دایره برابر

است با:



$$AB = CD - (BD + AC) = 4\sqrt{2} - 2 - 2$$

$$= 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$$

سؤال ۳۷: دو دایره به مرکز مبدأ مختصات که بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$ مماسند را

در نظر بگیرید نسبت شعاع دایره بزرگ به شعاع دایره کوچکتر کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

$$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0 \Rightarrow C: (x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + 24 = 0$$

$$\Rightarrow C: (x - 3)^2 - 9 + (y + 4)^2 - 16 + 24 = 0 \Rightarrow C: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره } C: \omega(3, -4) \\ \text{شعاع دایره } C: R = 1 \end{cases}$$

فرض می کنیم که دایره C' به مرکز $O(0, 0)$ و شعاع R' بر دایره C مماس است دو حالت امکان پذیر است.

(۱) C', C مماس خارج باشند:

$$O\omega = R + R' \Rightarrow \sqrt{(3-2)^2 + (-4-0)^2} = 1 + R' \Rightarrow 5 = 1 + R' \Rightarrow R' = 4$$

(۲) C', C مماس داخل باشند؛

$$O\omega = |R + R'| \Rightarrow 5 = |1 - R'| \Rightarrow \pm 5 = 1 - R'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = 1 - R' \Rightarrow R' = -4 < 0 \\ -5 = 1 - R' \Rightarrow R' = 6 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده شعاع دایره بزرگتر $R' = 6$ و شعاع دایره کوچکتر برابر با $R' = 4$ است پس؛

$$\frac{R'_1}{R'_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

روش ویژه برای محاسبه معادله وتر مشترک:

اگر بخواهیم معادله وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ را به دست آوری، کافی است این دو معادله را در یک دستگاه قرار داده x^2 و y^2 را حذف کنیم در این صورت معادله باقیمانده همان معادله وتر مشترک دو دایره است:

$$\text{مثلاً: } \begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y + 20 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

برای حذف x^2 و y^2 معادله بالایی را در ۲ ضرب کرده و سپس دو معادله را با هم جمع می‌کنیم؛

$$\begin{cases} -2x^2 - 2y^2 - 16x - 4y + 164 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\text{معادله وتر مشترک: } -8x + 8y + 184 = 0$$

تذکر: اگر معادله دایره‌ها به صورت گسترده بیان نشده باشند قبل از هر کاری باید آنها را تبدیل به فرم گسترده نمود.

روش ویژه برای محاسبه طول وتر مشترک:

ابتدا معادله عمود مشترک را یافته و سپس آن معادله و یکی از معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا دو نقطه ابتدا و انتهای وتر مشترک یعنی A و B در شکل بالا حاصل شود و در انتها به کمک فرمول $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ طول عمود مشترک را می‌یابیم.

سؤال ۳۸: معادله وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1, 2)$ و $(2, 1)$ به شعاع‌های مساوی ۲ واحد کدام است؟

$$(1) \ y = 2x \quad (2) \ y = 3x \quad (3) \ 3y = 2x \quad (4) \ 2y = 3x$$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا معادله دو دایره را نوشته و سپس معادله این دو دایره را از هم کم می‌کنیم داریم؛

$$\left. \begin{aligned} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 &\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$6x - 2y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

سؤال ۳۹: طول وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره را می یابیم:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{معادله وتر مشترک: } 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

حال معادله وتر مشترک را با معادله یکی از دایره ها در یک دستگاه قرار داده تا دو نقطه ابتدا و انتهای وتر مشترک به دست آید:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

با مشخص شدن مختصات دو سر وتر مشترک طول آن را حساب می کنیم:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{0 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

سؤال ۴۰: طول وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2 - 2x + y^2 - 4 = 0$ و $x^2 + 2x + y^2 = 0$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نقاط برخورد دو دایره را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$-4x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1)^2 + 2(-1) + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

بنابراین نقاط برخورد دو دایره $A(-1, 1), B(-1, -1)$ هستند بنابراین طول وتر مشترک برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = 2$$

سؤال ۴۱: اگر عرض از مبدأ خطی که وتر مشترک دو دایره به معادله های $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 6y + b = 0$ بر آن واقع است برابر $-\frac{1}{4}$ بر آن واقع است باشد مقدار b کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

معادله فنی که وتر مشترک دو دایره بر آن منطبق است به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 4y - b - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{b+2}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow b+2 = -1 \Rightarrow b = -3$$

سؤال ۴۲: دایره ای به مرکز (۲, ۱) و مماس بر خط $y = x + 3$ و خط $x = 4$ را با کدام عرض ها قطع می کند؟

- (۱) ۵، ۳ (۲) ۲، ۱ (۳) ۳، -۱ (۴) ۴، -۲

پاسخ: گزینه ۳

فاصله O' تا خط $y - x - 3 = 0$ برابر شعاع دایره است. $r = \frac{|1-2-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$

معادله دایره به مرکز (۲, ۱) و شعاع $2\sqrt{2}$ به صورت $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$ است.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 8 \xrightarrow{x=4} (4-2)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow y-1 = \pm 2 \Rightarrow y = 3, y = -1$$

سؤال ۴۳: شعاع کوچکترین دایره ای که در ناحیه اول بر محورهای مختصات و خط $3x + 4y - 6 = 0$ مماس باشد کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

مرکز و شعاع دایره ای که در ناحیه اول بر محورهای مختصات مماس است $O'(r, r)$ و r است.

$$3x + 4y - 6 = 0 \text{ فاصله } O' \text{ تا خط} = r \Rightarrow \frac{|3r+4r-6|}{\sqrt{9+16}} = r \Rightarrow |7r-6| = 5r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7r-6 = 5r \Rightarrow r = 3 \\ 7r-6 = -5r \Rightarrow r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

سؤال ۴۴: نقطه $(a, -1)$ مرکز دایره ای است که بر دو خط به معادلات $2x + y - 1 = 0$ و $x + 2y + 2 = 0$ مماس است. شعاع دایره کوچکتر چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{15}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

فاصله $O'(a, -1)$ تا هر یک از دو خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$2x + y - 1 = 0 \text{ فاصله } O' = r = \frac{|2a - 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2|a - 1|}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y + 2 = 0 \text{ فاصله } O' = r = \frac{|a - 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{2|a - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2|a - 1| = |a| \Rightarrow \begin{cases} 2(a - 1) = a \Rightarrow a = 2 \\ 2(a - 1) = -a \Rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین شعاع های دو دایره برابر $r = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$ است. لذا شعاع دایره کوچکتر برابر $\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{15}\sqrt{5}$ است.

سؤال ۴۵: خط $x + 3y + a = 0$ دایره $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$ را قطع نمی کند. حدود a کدام است؟

۱) $0 < a < 5$ ۲) $a > 5$ یا $a < 0$ ۳) $a > 21$ یا $a < 1$ ۴) $1 < a < 21$

پاسخ: گزینه ۳

اگر فاصله مرکز دایره تا خط $x + 3y + a = 0$ بیشتر از شعاع دایره باشد آنگاه خط دایره را قطع نمی کند.

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0 \Rightarrow O'(-2, -3), r = \sqrt{10}$$

$$\text{فاصله } O' \text{ تا خط} = d = \frac{|-2 - 9 + a|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|a - 11|}{\sqrt{10}} > r = \sqrt{10} \Rightarrow |a - 11| > 10$$

$$\Rightarrow a - 11 > 10 \text{ یا } a - 11 < -10 \Rightarrow a > 21 \text{ یا } a < 1$$