
بسم الله الرحمن الرحیم

جهت تهیه کتب و جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور و دبیر رسمی آموزش وپرورش با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱تماس حاصل فرمایید.

مقاطع مخروطی

- آموزش نکته ها و مفاهیم
- پاسخ های تشریحی به سوالات
- سوالات چند گزینه ای

مؤلفین:
حبیب هاشمی- سکینه عله زاده

۱۳۹۵

فیپـــــــــــــــــــــــــــــــــا

نام کتاب: مقاطع مخروطی

مؤلفین: حبیب هاشمی، سکینه عله‌زاده

ویرأستارادبی: عبیداله کاظمی

ناشر: صبح آراد

صفحه آرایی: سکینه عله‌زاده

طراحی جلد: یاسر زیدی

نوبت چاپ: اول– ۱۳۹۵

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ خانه: تهران –دیبا

شابک: ۹-۱۷-۸۴۶۹-۶۰۰-۹۷۸

قیمت: ۱۴۰۰۰تومان

مرکز پخش تهران: خیابان انقلاب، بین خیابان صبا و فلسطین جنوبی شماره ۱۰۸۰

تلفن: ۱-۰۹۱۲۰۴۱۹۳۳۰ تلفن ۶۶۱۷۵۵۱۹

وبسایت:http://www.sanjeshsa.ir/, Email: Sobharad@yahoo.com

مقدمه

کتاب حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «مقاطع مخروطی» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

مؤلفان

فهرست مطالب

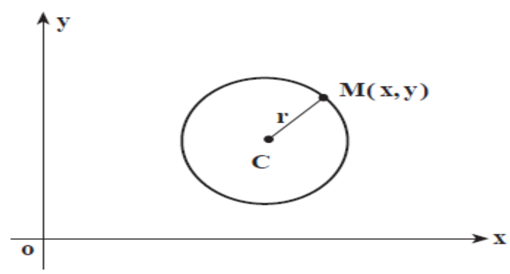
فهرست صفحه

دایره

نمودار معادلات درجه دوم از x وy را منحنی های درجه دوم می نامند. این منحنـی هـا از برخـورد یـک صـفحه بـا یـک مخروط دوار نیز قابل به دست آوردن هستند، و به همین علت آن ها را مقاطع مخروطی نیز می نامند.

تعریف و معادله دایره

تعریف: دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت مفـروض در صـفحه، مقـداری ثابـت است. نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می نامند.



معادله دایره: معادلهٔ استاندارد دایره ای به مرکز$\mathrm{O} = (\alpha, \beta)$ و به شعاع r بـه صـورت $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = r^۲$ نوشته می شود. در حالت خاص اگر مرکز دایره مبدأ مختصات باشد معادلـه دایـره بـه صـورت$x^۲ + y^۲ = r^۲$ مـی باشد.

مثال ۱: معادله دایره ای به مبدأ مختصات که از نقطه ی$A = (۳,۴)$ بگذرد را بنویسید.

حل:

$$R^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \rightarrow \quad x^۲ + y^۲ = ۲۵$$

مثال۲: معادله دایره ای به مرکز $\mathrm{O} = (۲,۳)$ که از نقطه ی $A = (۱,۱)$ بگذرد را بنویسید.

حل:

$$(۱ - ۲)^۲ + (۱ - ۳)^۲ = ۱ + ۴ = ۵ \rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۵$$

نکته۱: اگر $A = (\mathrm{x}_۱, y_۱), B = (\mathrm{x}_۲, y_۲)$ مختصات دو سر یک پاره خط باشند آنگاه مختصات وسط پـاره خـط M از رابطه $M = \left(\frac{\mathrm{x}_۱+\mathrm{x}_۲}{۲}, \frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)$ به دست می آید. و فاصله دو نقطهA وB نیز از رابطه زیر به دست می آید.

$$AB = \sqrt{(\mathrm{x}_۲ - \mathrm{x}_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

مثال۳: معادله دایره ای را بنویسید به طوری که نقاط $A = (۲,۵), B = (۴, -۱)$ دو سر قطر آن می باشند.

حل: قطر بزرگ ترین وتر دایره است، مرکز دایره وسط قطر می باشد بنابراین مرکز دایره برابر است با:

$$O=\left(\frac{۴+۲}{۲},\frac{-۱+۵}{۲}\right)=(۳,۲)$$

نصف فاصله دو نقطه A و B برابر با شعاع می باشد، بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۱-۵)^۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۳۶}}{۲}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}$$

معادله دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$

$$(x-۳)^۲+(y-۲)^۲=\left(\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}\right)^۲=\frac{۴۰}{۴}=۱۰$$

مرکز و شعاع در معادله گسترده دایره

معادله گسترده دایره: در دایره به معادلهٔ

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

همواره ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید برابر یک باشد و

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c},O=\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)$$

به ترتیب مرکز و شعاع دایره می باشند.

مثال۴: شعاع دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ چقدر است؟

حل:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

$$\to r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(۴)^۲-۴(۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$$

مثال۵: اگر شعاع دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۴x+۶y+k=۰$ برابر ۲ باشد k را به دست آورید.

حل:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\to ۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۶^۲-۴k}$$

$$\to ۴=\sqrt{۵۲-۴k}\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسا نیم.}}۱۶=۵۲-۴k$$

$$\to ۴k=۵۲-۱۶=۳۶\to k=\frac{۳۶}{۴}=۹$$

نکته۲: در معادله $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ داریم:

$$\text{اگر}\begin{cases} a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰ \to \text{دایره} \\ a^۲ + b^۲ - ۴c = ۰ \to \text{نقطه} \\ a^۲ + b^۲ - ۴c < ۰ \to \text{تهی} \end{cases}$$

مثال۶: به ازای کدام مقدار m، نمودار $۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲mx + ۴y + ۸ = ۰$ یک دایره است؟

حل: ابتدا طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم.

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲mx + ۴y + ۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ + mx + ۲y + ۴ = ۰$$

$$a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰ \to m^۲ + ۲^۲ - ۴(۴) > ۰$$

$$\to m^۲ + ۴ - ۱۶ > ۰ \to m^۲ - ۱۲ > ۰$$

$$m^۲ = ۱۲ \to m = \pm\sqrt{۱۲} = \pm\sqrt{۴ \times ۳} = \pm ۲\sqrt{۳}$$

$$\to m \in \left(-\infty, -۲\sqrt{۳}\right) \cup \left(۲\sqrt{۳}, \infty\right)$$

m	$-\infty$ $-۲\sqrt{۳}$	$۲\sqrt{۳}$	∞
$m^۲ - ۱۲$	+ **جواب**	−	+ **جواب**

نکته۳: مقطع مخروطی به معادلهٔ $Ax^۲ + By^۲ + Cx + Dy + E = ۰$ دایره است. هرگاه $A = B$ (ضریب توان دوم ها با هم برابر باشد.)

مثال۷: به ازای کدام مقدار k معادلهٔ $(k - ۲)x^۲ + (۶ - k)(y + ۱)^۲ = ۱۸$ یک دایره را مشخص می کند؟

حل:

$$(k - ۲)x^۲ + (۶ - k)(y + ۱)^۲ = ۱۸$$

$$\to (k - ۲)x^۲ + (۶ - k)(y^۲ + ۲y + ۱) - ۱۸ = ۰$$

$$(k - ۲)x^۲ + (۶ - k)y^۲ + (۱۲ - ۲k)y + ۶ - k - ۱۸ = ۰$$

طبق نکته ۳ داریم:

$(k-۲) = (۶-k) \to ۲k = ۸ \to k = \frac{۸}{۲} = ۴$

تست۱: رابطه ی $(m-۱)x^۲ + (۲m-۳)y^۲ = k^۲ + ۱$ معادلهٔ دایره است اگر:

۱) $m = ۲, k \in R$ ۲) $m = ۲, k = ۱$ ۳) $m, k > ۰$ ۴) $m, k \in R$

حل: گزینه ۱

$(m-۱) = (۲m-۳) \to -۱+۳ = ۲m - m \to ۲ = m$

$(m-۱)x^۲ + (۲m-۳)y^۲ = k^۲ + ۱$

$\xrightarrow{m=۲} (۲-۱)x^۲ + (۲(۲)-۳)y^۲ = k^۲ + ۱ \to x^۲ + y^۲ = k^۲ + ۱$

$r^۲ = k^۲ + ۱ \to r = \sqrt{k^۲+۱} \to k^۲ + ۱ > ۰ \to k \epsilon R$

تست۲: به ازای کدام مجموعه مقادیرa منحنی به معادلهٔ
$۲x^۲ + (a^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + a = ۰$

یک دایره است؟(سراسری تجربی۸۵ خارج از کشور)

۱) $\{-۳\}$ ۲) $\{۳\}$ ۳) $\{۳, -۳\}$ ۴) $\emptyset$

حل: گزینه ۱

$۲ = a^۲ - ۷ \to a^۲ = ۹ \to a = \pm ۳$

$a = ۳ \to ۲x^۲ + (۳^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

$\to ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y + ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ + ۲y + \frac{۳}{۲} = ۰$

$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲ + ۲^۲ - ۴\left(\frac{۳}{۲}\right)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴-۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{-۲}$ غیر قابل قبول

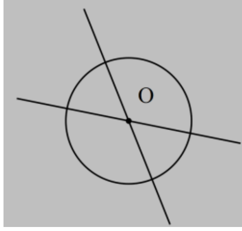
$a = -۳ \to ۲x^۲ + ((-۳)^۲ - ۷)y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$

$\to ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$

$\xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ + ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰$

$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲ + ۲^۲ - ۴\left(-\frac{۳}{۲}\right)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$ قابل قبول

نکته۴: محورهای تقارن دایره همان قطرهای دایره هستند. بنابراین نقطه های تقاطع آن ها مرکز دایره است.



مثال۸: اگر دو خط $x - y = ۳$ و $۲x + y = -۶$ محورهای تقارن دایره به معادله‌ی $۲x^۲ + ۲y^۲ + mx - ny - ۳۸ = ۰$ باشند حاصل $m + n$ را به دست آورید.

حل: طبق نکته ی ۴ محل تقاطع دو خط مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x - y = ۳ \\ ۲x + y = -۶ \\ \xrightarrow{\text{روش حذفی}} ۳x + ۰ = -۳ \rightarrow x = \frac{-۳}{۳} = -۱ \rightarrow \alpha = -۱ \quad (۱) \end{cases}$$

$$x - y = ۳ \xrightarrow{x=-۱} -۱ - y = ۳ \rightarrow -۱ - ۳ = y$$

$$\rightarrow y = -۴ \rightarrow \beta = -۴ \quad (۲)$$

$$(۱)_و(۲) \Rightarrow \quad O = (-۱, -۴)$$

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + mx - ny - ۳۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ + \frac{m}{۲}x - \frac{n}{۲}y - ۱۹ = ۰$$

درمعادله گسترده دایره داریم $O = \left(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲}\right)$ در نتیجه مرکز دایره به صورت زیر است

$$O = \left(\frac{-\frac{m}{۲}}{۲}, \frac{-\frac{-n}{۲}}{۲}\right) = \left(\frac{-m}{۴}, \frac{n}{۴}\right) = (-۱, -۴)$$

$$\begin{cases} \frac{-m}{۴} = -۱ \rightarrow -m = -۴ \rightarrow \boxed{m = ۴} \\ \frac{n}{۴} = -۴ \rightarrow \boxed{n = -۱۶} \end{cases}$$

$$m + m = ۴ + (-۱۶) = ۴ - ۱۶ = -۱۲$$

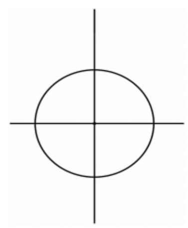
مثال۹: دو قطر دایره ای خطوط $x-y=۰$ و$۲x+y=۳$ می باشد. مرکز این دایره را به دست آورید.

حل: محل تقاطع دو قطر مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x-y=۰ \\ ۲x+y=۳ \\ \xrightarrow{\text{روش حذفی}} ۳x+۰=۳ \rightarrow x=\frac{۳}{۳}=۱ \rightarrow \alpha=۱ \quad (۱) \end{cases}$$

$$x-y=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱-\mathrm{y}=۰ \rightarrow ۱=\mathrm{y} \rightarrow \beta=۱ \quad (۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} O=(۱,۱)$$

نکته۵: خطوط قائم بر دایره همان قطرهای دایره هستند، پس خطوط قائم بر دایره از مرکز دایره می گذرند.



مثال۱۰: تمام خطوطی که با دایره$x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ زاویه ی ۹۰° می‌سازند و از نقطه ی ثابتA می گذرند A را به دست آورید.

حل: A همان مرکز دایره است.

$$A=\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)=\left(\frac{-(-۲)}{۲},\frac{-۴}{۲}\right)=(۱,-۲)$$

مثال۱۱: به ازای کدام مقدارa قائم های بر منحنی به معادلهٔ

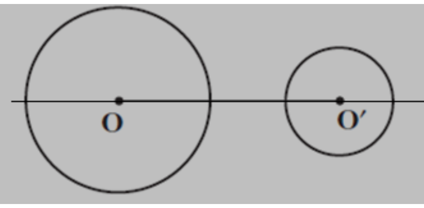
$$۲x^۲+(a-۱)y^۲-۳x+۴y=۰$$

همواره از نقطه ثابتی می گذرند؟

حل: طبق نکته۵ این معادله باید یک معادلهٔ دایره باشد، خطوط عمود بر آن از مرکز (نقطه ی ثابت) می گذرند.

$$۲=a-۱ \rightarrow a=۲+۱ \rightarrow a=۳$$

نکته۶: خط عمود بر دایره، همان خط المرکزین است.



تست۳: کدام خط بر دو دایره ی $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ عموداست؟

۱) $y-x=$ ۲) $x+y=۰$ ۳) $y=۰$ ۴) $x=۰$

حل: گزینه ۲

روش اول:
$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰,O=\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)$$

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰\rightarrow O_۱=\left(\frac{-۲}{۲},\frac{-(-۲)}{۲}\right)=(-۱,۱)$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\rightarrow O_۲=\left(\frac{-(-۲)}{۲},\frac{-۲}{۲}\right)=(۱,-۱)$$

گزینه ای درست است که مختصات $O_۱$ و $O_۲$در آن صدق کند.

روش دوم: با داشتن مختصات $O_۱$ و $O_۲$ ، معادله خط از فرمول زیر بدست می آید.

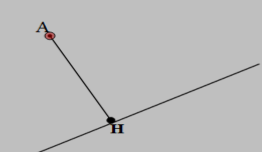
$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\quad ,y-y_.=m(x-x_.)$$

$$O_۱=(-۱,۱),O_۲=(۱,-۱)\rightarrow m=\frac{-۱-۱}{۱-(-۱)}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

$$y-۱=-۱\big(x-(-۱)\big)\rightarrow y=۱-x-۱$$

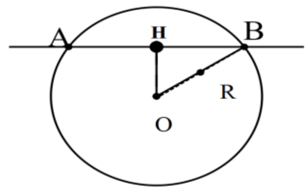
$$\rightarrow y=-x\rightarrow y+x=۰$$

نکته۷: فاصله ی نقطه ی $A=(x_۱,y_۱)$ از خط d به معادلـهٔ $ax+by+c=۰$ از فرمـول $AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به دست می آید.



مثال۱۲: طول پاره خطی که دایره ی $x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸$ از خط $۵x+۱۲y=۱۴$ جدا می کند را به دست آورید.

حل:



$$x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸ \rightarrow \ x^۲+y^۲-۲x-۸y-۸=۰$$

$$O=\left(\frac{-(-۲)}{۲},\frac{-(-۸)}{۲}\right)=(۱,۴)$$

$$\mathrm{R}=\tfrac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(-۸)^۲-۴(-۸)}=\tfrac{۱}{۲}\sqrt{۴+۶۴+۳۲}$$

$$\rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

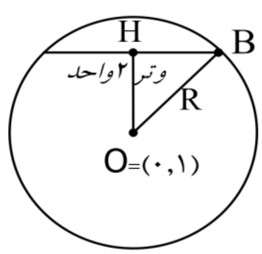
$$\begin{cases} \mathrm{O}=(۱,۴)\ ,۵\mathrm{x}+۱۲\mathrm{y}=۱۴\rightarrow ۵\mathrm{x}+۱۲\mathrm{y}-۱۴=۰ \\ \mathrm{OH}=\dfrac{|۵(۱)+۱۲(۴)-۱۴|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\dfrac{|۵+۴۸-۱۴|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\dfrac{|۳۹|}{\sqrt{۱۶۹}}=\dfrac{۳۹}{۱۳}=۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} HB^۲=R^۲-OH^۲\rightarrow HB=\sqrt{R^۲-OH^۲}=\sqrt{۵^۲-۳^۲}$$

$$HB=\sqrt{۲۵-۹}=\sqrt{۱۶}=۴\rightarrow AB=۲HB=۲\times۴=۸$$

مثال۱۳: معادله دایره ای به مرکز $O=(۰,۱)$ که از خط $y=۳$ وتری به طول ۲جدا می کند را به دست آورید.

حل: شکل فرضی



$$\begin{cases} \mathrm{O}=(۰,۱)\ ,\mathrm{y}=۳\rightarrow ۰\mathrm{x}+\mathrm{y}-۳=۰ \\ \mathrm{OH}=\dfrac{|۰(۰)+۱(۱)-۳\,|}{\sqrt{۰^۲+۱^۲}}=\dfrac{|۱-۳\,|}{\sqrt{۱}}=\dfrac{۲}{۱}=۲ \end{cases}$$

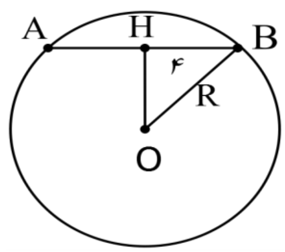
$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} R^۲ = OH^۲ + HB^۲ \to R = \sqrt{OH^۲ + HB^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲}$

$R = \sqrt{۴ + ۱} \to \boxed{R = \sqrt{۵}}$

$(x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = (\sqrt{۵})^۲ \to x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱ = ۵ \quad \to$ $\boxed{x^۲ + y^۲ - ۲y = ۴}$ معادله دایره

مثال۱۴: دایره ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۸y + m = ۰$ از خط$۵x + ۱۲y = ۱۴$ وتری به طول ۸ جدا می کند m را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل زیر فاصله مرکز دایره تا خط را به دست می آوریم.



$$AB = ۸ \to HB = ۴$$

$O = \left(\frac{-(-۲)}{۲}, \frac{-(-۸)}{۲}\right) = (۱,۴)\ , ۵x + ۱۲y = ۱۴$

$\to ۵x + ۱۲y - ۱۴ = ۰$

$OH = \frac{|۵(۱) + ۱۲(۴) - ۱۴|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{|۵ + ۴۸ - ۱۴|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}} = \frac{|۳۹|}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{۳۹}{۱۳} = ۳$

$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} R^۲ = OH^۲ + HB^۲ \to R = \sqrt{OH^۲ + HB^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲}$

$R = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵ \to \boxed{R = ۵}$

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (-۸)^۲ - ۴(m)} \to ۵ \times ۲ = \sqrt{۶۸ - ۴m}$

$\to ۱۰۰ = ۶۸ - ۴m \to ۳۲ = -۴m \to m = \frac{۳۲}{-۴} = -۸ \to \boxed{m = -۸}$

مثال۱۵: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله ی آن ها از نقطه ی $(۲,۱-)$ نصف فاصله ی آن ها از نقطه ی $(۴,-۲)$ باشد را به دست آورید.

حل: اگر $M(x,y)$ یک نقطه ازمکان هندسی باشد آنگاه

$$M(x,y)\ ,A(-۲,۱)\ ,B(۴,-۲) \to |MA| = \frac{۱}{۲}|MB|$$

$$\to \sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(x-۴)^۲+(y+۲)^۲}$$

$$\to ۲\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲} = \sqrt{(x-۴)^۲+(y+۲)^۲}$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم.}} ۴(x+۲)^۲+۴(y-۱)^۲ = (x-۴)^۲+(y+۲)^۲$$

$$۴x^۲+۱۶x+۱۶+۴y^۲-۸y+۴ = x^۲-۸x+۱۶+y^۲+۴y+۴$$

$$\to ۳\,x^۲+۲۴x+۳y^۲-۱۲\,y = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲+y^۲+۸x-۴y = ۰$$

مثال۱۶: فاصله ی نقطه متحرک $M(x,y)$ از نقطه $A(۱,۳)$ ، با اندازه ی $\sqrt{۲}$ برابر فاصله ی M تا نقطه ی $B(-۲,۴)$ است، شعاع دایره مسیر حرکت M را به دست آورید.

حل:

$$|MA| = \sqrt{۲}|MB|$$

$$\to \sqrt{(x-۱)^۲+(y-۳)^۲} = \sqrt{۲}\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۴)^۲}$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم.}} (x-۱)^۲+(y-۳)^۲ = ۲(x+۲)^۲+۲(y-۴)^۲$$

$$x^۲-۲x+۱+y^۲-۶y+۹ = ۲x^۲+۸x+۸+۲y^۲-۱۶y+۳۲$$

$$\to x^۲+y^۲+۱۰x-۱۰y+۳۰ = ۰$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۱۰)^۲+(-۱۰)^۲-۴(۳۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰+۱۰۰-۱۲۰}$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰} = \frac{۱}{۲}۴\sqrt{۵} \to \boxed{R = ۲\sqrt{۵}}$$

نوشتن معادله دایره در حالت های مختلف

۱- نوشتن معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن

۲- نوشتن معادله دایره با داشتن دو نقطه از دایره و یک رابطه بین αوβ (αوβ مختصات مرکز دایره هستند.)

۳- نوشتن معادله دایره با داشتن مرکز و یک خط مماس بر دایره

حالت های خاص $\begin{cases} \text{مماس بر محور } x \text{ها} \\ \text{مماس بر محور } y \text{ها} \end{cases}$

۴- نوشتن معادلهٔ دایره مماس بر محورهای مختصات

۵- نوشتن معادلهٔ دایره مماس بر نیمسازهای اول ودوم-دوم و سوم-سوم وچهارم- اول و چهارم

نوشتن معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن

برای به دست آوردن معادلهٔ دایره ای که از سه نقطه Aو B و C می گذرد معادله دایره به صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ در نظر گرفته، سپس مختصات نقاط A و Bو C را در معادله قرار داده از حل معادلات به دست آمده a, b, c را به دست می آوریم.

تست۴: شعاع دایره ای که از سه نقطه $A = (۲,۱)$ و $B = (۰.-۱)$و $O = (۰.۰)$ می گذرد چه قدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) ۵

حل: گزینه ۲

$O = (۰.۰) \rightarrow ۰^۲ + ۰^۲ + ۰ + ۰ + c = ۰ \rightarrow \boxed{c = ۰}$

$B = (۰.-۱) \rightarrow ۰^۲ + -۱^۲ + ۰a - ۱b = ۰$

$\rightarrow -b = -۱ \rightarrow \boxed{b = ۱}$

$A = (۲,۱) \rightarrow ۲^۲ + ۱^۲ + ۲a + b = ۰ \rightarrow ۲a + b = -۵$

$\xrightarrow{b=۱} ۲a + ۱ = -۵ \rightarrow ۲a = -۶ \rightarrow a = -۳$

$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^۲ + y^۲ - ۳x + y = ۰ \rightarrow R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)}$

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹ + ۱} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$

مثال۱۷: معادله دایره ای را بنویسید که از مبدا مختصات گذشته ومحور xها را در نقطه ای به طول (-۲) و محور yها را در نقطه ای به عرض (۱) قطع می کند.

حل:

$O = (۰.۰) \rightarrow ۰^۲ + ۰^۲ + ۰ + ۰ + c = ۰ \rightarrow \boxed{c = ۰}$

$B = (-۲.۰) \rightarrow (-۲)^۲ + ۰^۲ - ۲a + (۰)b = ۰$

$\rightarrow -۲a = -۴ \rightarrow \boxed{a = ۲}$

$$A=(۰,۱)\rightarrow ۰^۲+۱^۲+۰a+b=۰\rightarrow \boxed{b=-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^۲+y^۲+۲x-y=۰$$

تست۵: شعاع دایره ای که از سه نقطه ی(۲,۱)و(۲,۴−)و(۰,۰) می گذرد کدام است؟(سراسری تجربی۹۱)

۱) ۲ ۲) ۲.۵ ۳) ۳ ۴) ۲.۵

حل:گزینه۲

$$(۰.۰)\rightarrow ۰^۲+۰^۲+۰+۰+c=۰\rightarrow \boxed{c=۰}$$

$$(-۲.۴)\rightarrow (-۲)^۲+۴^۲-۲a+۴b=۰\rightarrow -۲a+۴b=-۲۰\ \ (۱)$$

$$(۲,۱)\rightarrow ۲^۲+۱^۲+۲a+b=۰\rightarrow ۲a+b=-۵\ \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۵b=-۲۵\rightarrow \boxed{b=-۵}\rightarrow \boxed{a=۰}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^۲+y^۲-۵y=۰$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+(-۵)^۲-۴(۰)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵}=\frac{۵}{۲}=۲.۵\rightarrow \boxed{R=۲.۵}$$

تست۶: شعاع دایره ی گذاری سه نقطه ی (۲,۱)و $\left(۲-\text{و}۱\right)$ و(۰,۰)برابر کدام است؟(سراسری تجربی۹۳)

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$

حل: گزینه۱

$$(۰.۰)\rightarrow ۰^۲+۰^۲+۰+۰+c=۰\rightarrow \boxed{c=۰}$$

$$(۱,-۲)\rightarrow (۱)^۲+(-۲)^۲+a-۲b=۰\rightarrow a-۲b=-۵$$

$$\rightarrow a=۲b-۵\ \ (۱)$$

$$(۲,۱)\rightarrow ۲^۲+۱^۲+۲a+b=۰\rightarrow ۲a+b=-۵$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۲(۲b-۵)+b=-۵\rightarrow ۵b=۵\rightarrow \boxed{b=۱}$$

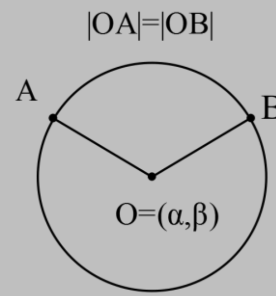
$$a=۲b-۵\xrightarrow{b=۱} a=۲(۲)-۵\rightarrow \boxed{a=-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^۲+y^۲-۳x+y=۰$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^{۲} + (۱)^{۲} - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰} \to \boxed{R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}}$$

نوشتن معادله دایره با داشتن دو نقطه از دایره و یک رابطه بین α و β

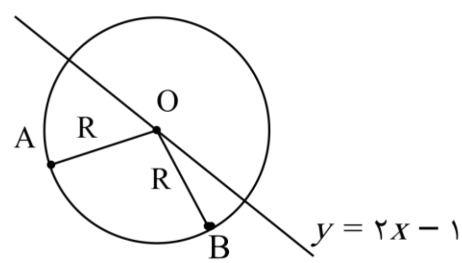
با توجه به اینکه فاصله ی مرکز دایره از هر نقطه ی دایره برابر شعاع دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط را به دست می آوریم و مساوی هم قرار می دهیم.



مثال۱۸: شعاع دایره ای که از دو نقطه $B(۳,۰)\ , A = (۱,۲)$ گذشته و مرکز تقارن آن روی خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۱$ باشد را به دست آورید.

حل: طول مرکز را α و عرض مرکز را $\beta = ۲\alpha - ۱$ می گیریم.

$$(y = ۲x - ۱ \xrightarrow{(\alpha,\beta)} \beta = ۲\alpha - ۱)$$



$$OA = OB$$

$$OA = \sqrt{(۱-\alpha)^{۲} + \big(۲ - (۲\alpha - ۱)\big)^{۲}} = \sqrt{(۱-\alpha)^{۲} + (۳ - ۲\alpha)^{۲}}$$

$$OB = \sqrt{(۳-\alpha)^{۲} + \big(۰ - (۲\alpha - ۱)\big)^{۲}} = \sqrt{(۳-\alpha)^{۲} + (۲\alpha - ۱)^{۲}}$$

$$|OA| = |OB|$$

$$\to ۱ - ۲\alpha + \alpha^{۲} + ۹ - ۱۲\alpha + ۴\alpha^{۲} = ۹ - ۶\alpha + \alpha^{۲} + ۴\alpha^{۲} - ۴\alpha + ۱$$

$۴\alpha = ۰ \to \alpha = ۰, R = \sqrt{(۳-\alpha)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲}$

$R = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۲(۰)-۱)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$

تست۷: دایره ای از دو نقطه $A = (۰,۱)$, $B = (۳,۰)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن بـه صـورت $x - y = ۲$ اسـت. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

حل: گزینه۳

$x - y = ۲ \xrightarrow{(\alpha,\beta)} \alpha - \beta = ۲ \to \beta = \alpha - ۲$

$\to O = (\alpha, \alpha - ۲)$ و $|OA| = |OB|$

$\sqrt{(۰-\alpha)^۲ + \left(۱-(\alpha-۲)\right)^۲} = \sqrt{(۳-\alpha)^۲ + \left(۰-(\alpha-۲)\right)^۲}$

$\to \sqrt{\alpha^۲ + (۳-\alpha)^۲} = \sqrt{(۳-\alpha)^۲ + (\alpha-۲)^۲}$

$\alpha^۲ + ۹ - ۶\alpha + \alpha^۲ = ۹ - ۶\alpha + \alpha^۲ + \alpha^۲ - ۴\alpha + ۴$

$\to ۰ = ۴ - ۴\alpha \to \boxed{\alpha = ۱}$

$R = \sqrt{\alpha^۲ + (۳-\alpha)^۲} = \sqrt{۱^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۱+۲^۲} = \sqrt{۵}$

تست۸: *نقطه ی $(a, ۲a)$ مرکز دایره ی گذرنده از دو نقطه ی $(۲,۱)$, $(-۱,۴)$ است شعاع دایره کدام است؟(سراسری تجربی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: *گزینه۳*

$O = (a, ۲a)$, $A = (۲,۱)$, $B = (-۱,۴)$, $|OA| = |OB|$

$\to \sqrt{(۲-a)^۲ + (۱-۲a)^۲} = \sqrt{(-۱-a)^۲ + (۴-۲a)^۲}$

$۴ - ۴a + a^۲ + ۱ - ۴a + ۴a^۲ = ۱ + ۲a + a^۲ + ۱۶ - ۱۶a + ۴a^۲$

$\to ۶a = ۱۲ \to \boxed{a = ۲}$

$R = \sqrt{(۲-a)^۲ + (۱-۲a)^۲} = \sqrt{(۲-۲)^۲ + \left(۱-۲(۲)\right)^۲}$

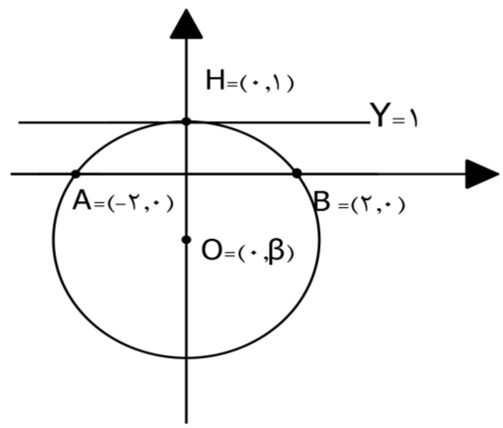
$R=\sqrt{۰+۹}=۳\rightarrow \boxed{R=۳}$

تست۹: دایره ای از دو نقطه$(۲,۰)$ و$(-۲,۰)$گذشته و بر خط $y=۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟(سراسری تجربی۸۸خارج از کشور)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل: گزینه ۱

طبق شکل زیر مرکز دایره روی عمود منصف پاره خط AB یعنی محور yها قرار دارد پس مختصات مرکز دایره$(۰,\beta)$ است.



$OA=OH\rightarrow\sqrt{(-۲-۰)^۲+(۰-\beta)^۲}=\sqrt{(۰-۰)^۲+(\beta-۱)^۲}$

$\rightarrow\sqrt{۴+\beta^۲}=\sqrt{\beta^۲-۲\beta+۱}$

$۴+\beta^۲=\beta^۲-۲\beta+۱\rightarrow ۲\beta=۱-۴=-۳\rightarrow \boxed{\beta=\frac{-۳}{۲}}$

$$R=OH=\sqrt{(\beta-۱)^۲}=\sqrt{\left(\frac{-۳}{۲}-۱\right)^۲}=\sqrt{\left(\frac{-۵}{۲}\right)^۲}=\left|\frac{-۵}{۲}\right|=\frac{۵}{۲}$$

تست۱۰: دایره ای محور xها را در دو نقطه به طول های۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟(سراسری تجربی۹۵ خارج از کشور)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴)۳

حل: گزینه ۳

$\underset{y=x}{\text{مرکز در ربع اول}} : O=(\alpha,\alpha) \rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=R^۲$

$A=(۱,۰), B=(۳,۰)$

$\rightarrow \begin{cases}(۱-\alpha)^۲+(۰-\alpha)^۲=R^۲\\(۳-\alpha)^۲+(۰-\alpha)^۲=R^۲\end{cases}$

$\rightarrow (۱-\alpha)^۲+\alpha^۲=(۳-\alpha)^۲+\alpha^۲ \rightarrow (۱-\alpha)^۲=(۳-\alpha)^۲$

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} |۱-\alpha|=|۳-\alpha| \rightarrow ۱-\alpha=\pm(۳-\alpha)$

$\rightarrow \begin{cases}۱-\alpha=۳-\alpha \rightarrow ۱=۳ & \text{غیر قابل قبول}\\ ۱-\alpha=-۳+\alpha \rightarrow ۲\alpha=۴ \rightarrow \alpha=۲ & \text{قابل قبول}\end{cases}$

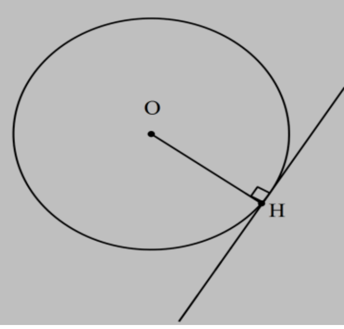
$(۱-\alpha)^۲+(۰-\alpha)^۲=R^۲ \rightarrow (۱-۲)^۲+(۰-۲)^۲=R^۲$

$\rightarrow R^۲=۵ \rightarrow R=\sqrt{۵}$

نوشتن معادله دایره با داشتن مرکز دایره و خط مماس بر دایره

با توجه به اینکه فاصله ی مرکز دایره از خط مماس بر دایره همواره برابر شعاع دایره است فاصله مرکز دایـره از خـط را از فرمول زیر محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases}O=(\alpha,\beta)\\ax+by+c=۰\end{cases} \rightarrow OH=R=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



مثال۱۹: معادلۀ دایره ای به مبدا مختصات که برخط $۴x+۳y=۱۵$ مماس باشد را بنویسید.

حل: معادله دایره به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$می باشد، مرکز دایره را داریم بنابراین ابتـدا شـعاع را بـه دست می آوریم.

$\begin{cases}O=(۰,۰)\\۴x+۳y=۱۵ \rightarrow ۴x+۳y-۱۵=۰\end{cases}$

$$OH = R = \frac{|۴(۰) + ۳(۰) - ۱۵|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{|-۱۵|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}} = ۳$$

$$(x - ۰)^۲ + (y - ۰)^۲ = ۳^۲ \xrightarrow{\text{معادله دایره}} \boxed{x^۲ + y^۲ = ۹}$$

مثال۲۰: دایره ای به مرکز $O = \left(۲ و -۲\right)$ بر خط $x + y = ۸$ مماس است طول قطر این دایره را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} O = \left(۲ و -۲\right) \\ x + y = ۸ \rightarrow x + y - ۸ = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|۱(۲) + ۱(-۲) - ۸|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{|۲ - ۲ - ۸|}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}}$$

$$R=\frac{۸}{\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{گویا}} R = \frac{۸}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۸\sqrt{۲}}{۲} = ۴\sqrt{۲} \rightarrow \text{قطر} = ۲R = ۲ \times ۴\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}$$

مثال۲۱: دو قطر دایره ای خطوط $۲x + y = ۳$ ، $x - y = ۰$ می باشند اگر این دایره بر خط به معادله $x + y = ۰$ مماس باشد معادله این دایره را بنویسید.

حل: محل بر خورد دو قطر مرکز دایره می باشد بنابراین اول از روش حذفی(جایگذاری) محل برخورد دو قطر را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} ۲x + y = ۳ \\ x - y = ۰ \end{cases} \rightarrow ۳x = ۳ \rightarrow \boxed{x = ۱}$$

$$x - y = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۱ - y = ۰ \rightarrow \boxed{y = ۱} \rightarrow O = (۱,۱)$$

$$\begin{cases} O = (۱,۱) \\ x + y = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|۱(۱) + ۱(۱) + ۰|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{|۱ + ۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} R = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{۲}}$$

$$(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲ \rightarrow (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = \sqrt{۲}^۲$$

$$x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ - ۲y + ۱ = ۲ \xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۰$$

مثال۲۲: هر خط قائم بر دایره، از نقطه ی $(-۲,۱)$ می گذرد این دایره بر خط به معادله‌ی $y = x - ۱$ ممـاس اسـت. شعاع این دایره را به دست آورید. (سراسری تجربی ۸۸)

حل:

$$\begin{cases} O = (-۲,۱) \\ y = x - ۱ \to x - y - ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|۱(-۲) - ۱(۱) - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} \frac{۴}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲} \to \boxed{R = ۲\sqrt{۲}}$$

***مثال*۲۳:** معادلهٔ دایره ای بنویسید به مرکز $(۲,۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول باشد.

حل:

$$\begin{cases} O = (۲,۰) \\ y = x \to x - y = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|۱(۲) - ۱(۰) + ۰|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|۲|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

$$(x - ۲)^۲ + (y - ۰)^۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۲}}\right)^۲ \to (x - ۲)^۲ + y^۲ = ۲$$

مثال۲۴: دایره ای به مرکز $(۲,۰)$و مماس بر نیمساز ربع اول خط به معادلهٔ $y = ۱$ را با کـدام طـول قطـع مـی کنـد؟(سراسری تجربی ۸۶)

حل:

$$\begin{cases} O = (۲,۰) \\ y = x \to x - y = ۰ \end{cases}$$

$$\to OH = R = \frac{|۱(۲) - ۱(۰) + ۰|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|۲|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

$$(x - ۲)^۲ + (y - ۰)^۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۲}}\right)^۲ \to (x - ۲)^۲ + y^۲ = ۲$$

$$\xrightarrow{y=۱} (x - ۲)^۲ + ۱^۲ = ۲ \to (x - ۲)^۲ = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{طبق خاصیت ریشه زوج}} x - ۲ = \pm ۱$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \rightarrow x=۱+۲=۳ \rightarrow \boxed{x=۳} \\ x-۲=-۱ \rightarrow x=-۱+۲=۱ \rightarrow \boxed{x=۱} \end{cases} \rightarrow \boxed{x=۱,۳}$$

تست۱۱: دایره ای به مرکز $(۲,-۱)$و مماس بر خط به معادلهٔ $x-y=۱$ محور xها را با کدام طـول هـا قطـع مـی کند؟(سراسری تجربی ۹۵)

۱) ۱,۳   ۲) ۱,۴   ۳) ۲,۳   ۴) ۱.۵ , ۴

حل: گزینه ۱

$$\begin{cases} O=(۲,-۱) \\ x-y=۱ \rightarrow x-y-۱=۰ \end{cases}$$

$$OH=R=\frac{|۱(۲)-۱(-۱)-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} \frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=\left(\sqrt{۲}\right)^۲$$

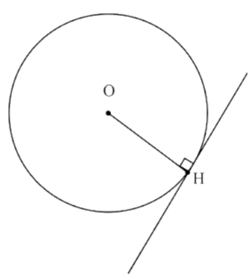
$$\xrightarrow[y=۰]{\text{محل برخورد محور } x \text{ ها}} (x-۲)^۲+(۰+۱)^۲=۲ \rightarrow (x-۲)^۲=۱$$

$$\xrightarrow{\text{طبق خاصیت ریشه زوج}} x-۲=\pm۱$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \rightarrow x=۱+۲=۳ \rightarrow \boxed{x=۳} \\ x-۲=-۱ \rightarrow x=-۱+۲=۱ \rightarrow \boxed{x=۱} \end{cases} \rightarrow \boxed{x=۱,۳}$$

مثال ۲۵: به ازای کدام مقدارa، دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$ بر خط به معادلهٔ $x+۳y=۰$ مماس است؟(سراسری تجربی ۸۵)

حل: درصورتی خط بر دایره مماس است که فاصله ی مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره باشد. یعنی طبق شکل زیر



$$OH=OR$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$$

$\rightarrow (x-۱)^{۲}-۱+(y+۲)^{۲}-۴+a=۰ \rightarrow O=(۱,-۲)$

$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^{۲}+۴^{۲}-۴(a)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴a}$

$\begin{cases} O=(۱,-۲) \\ x+۳y=۰ \end{cases}$

$OH=R=\frac{|۱(۱)+۳(-۲)+۰|}{\sqrt{۱^{۲}+(۳)^{۲}}}=\frac{|۱-۶|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$

$R=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

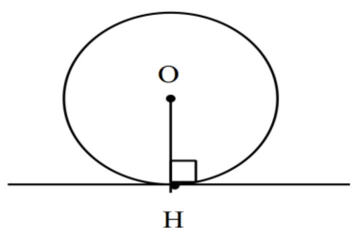
$\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴a} \rightarrow \sqrt{۱۰}=\sqrt{۲۰-۴a}$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم.}} ۱۰=۲۰-۴a \rightarrow ۴a=۱۰ \rightarrow a=\frac{۱۰}{۴} \rightarrow \boxed{a=\frac{۵}{۲}}$

مثال۲۶: به ازای کدام مقدار k، خط $y=k$ بر دایره $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y=۰$ مماس است؟

حل:

$$OH=R$$



$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y=۰$

$(x+۱)^{۲}-۱+(y-۱)^{۲}-۱=۰$

$\rightarrow (x+۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۲ \rightarrow O=(-۱,۱)\,, R=\sqrt{۲}$

$\begin{cases} O=(-۱,۱) \\ y=k \rightarrow y-k=۰ \end{cases}$

$OH=R=\frac{|۰(-۱)+۱(۱)-k|}{\sqrt{۰^{۲}+(۱)^{۲}}}=\frac{|۱-k|}{\sqrt{۰+۱}}=|۱-k|$

$\rightarrow |۱-k|=\sqrt{۲} \rightarrow \boxed{k=۱\pm\sqrt{۲}}$

تست۱۲: به ازای کدام مقدار m خط به معادلهٔ $y = mx + ۲$ بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۳$ مماس است؟(*سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)*

۱) $۰, \frac{-۴}{۳}$ ۲) $۰, \frac{۴}{۳}$ ۳) $۱, \frac{-۲}{۳}$ ۴) $۱, \frac{۲}{۳}$

حل: گزینه۲

$$x^۲ + y^۲ - ۲x = ۳ \to (x-۱)^۲ - ۱ + y^۲ = ۳ \to (x-۱)^۲ + y^۲ = ۴$$

$$\begin{cases} O = (۱,۰)\ , R = ۲ \\ y = mx + ۲ \to mx - y + ۲ = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|m(۱) - ۱(۰) + ۲|}{\sqrt{m^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|m+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}} = ۲ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲ می رسانیم.}}$$

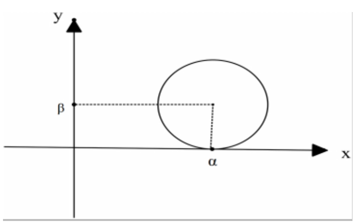
$$(m+۲)^۲ = ۴(m^۲+۱) \to m^۲ + ۴m + ۴ = ۴m^۲ + ۴$$

$$۳m^۲ - ۴m = ۰ \to m(۳m-۴) = ۰ \begin{array}{l} \boxed{m = ۰} \\ \boxed{m = \frac{۴}{۳}} \end{array}$$

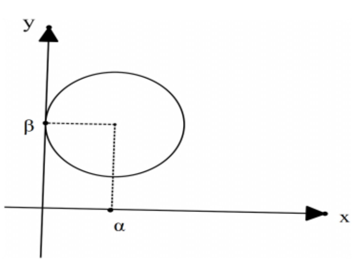
نوشتن معادلهٔ دایره مماس بر محورهای مختصات

شعاع دایره ای به مرکز $O = (\alpha, \beta)$ که بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد برابر است با:

الف) مماس بر محور xها $R = |\beta|$



ب) مماس بر محور yها $R = |\alpha|$



مثال۲۷: معادله دایره ای بنویسید به مرکز $O = (۱, -۲)$ که بر محور x مماس باشد.

حل:

$$R = |\beta| \rightarrow R = |-۲| = ۲ \xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$$

مثال۲۸: دایره ای به مرکز $O = (۳,۲)$که بر محور y مماس باشد محور x را با کدام طول قطع می کند؟

حل:

$$R = |\alpha| \rightarrow R = |۳| = ۳ \xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x-۳)^۲ + (y-۲)^۲ = ۹$$

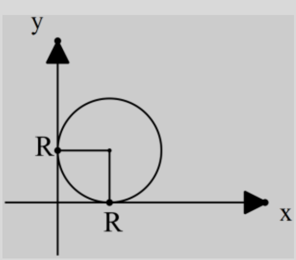
محل تلاقی با محورxها یعنی بایدy را مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x-۳)^۲ + (۰-۲)^۲ = ۹ \rightarrow (x-۳)^۲ = ۹ - ۴ = ۵$$

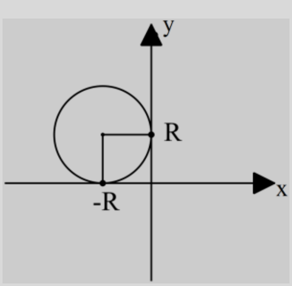
$$\rightarrow x - ۳ = \pm\sqrt{۵} \rightarrow \boxed{x = ۳ \pm \sqrt{۵}}$$

مختصات مرکز دایره های با شعاعR که بر محورهای مختصات مماس باشند عبارتند از:

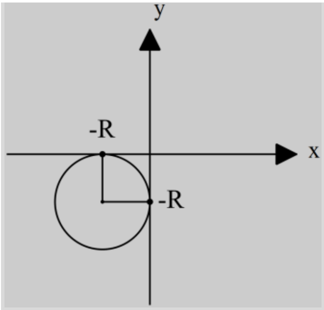
الف) در ناحیه اول $\quad O = (R, R)$



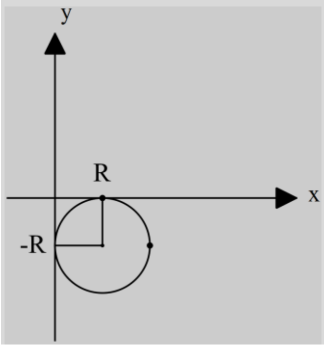
ب) در ناحیه دوم $\quad O = (-R, R)$



پ) در ناحیه سوم $\quad O = (-R, -R)$



ت) در ناحیه چهارم $O = (R, -R)$



مثال۲۹: معادله دایره ای بنویسید به شعاع ۱ که در ناحیه دوم بر محورهای مختصات مماس باشد.

حل:

$$O = (-R, R) = (-۱,۱) \rightarrow (x + ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱$$

مثال۳۰: مرکز دایره ای که در ناحیه سوم بر محورهای مختصات مماس باشد واقع بر خط $۲x + ۳y = -۱۵$ می باشد، شعاع این دایره چقدر است؟

حل:

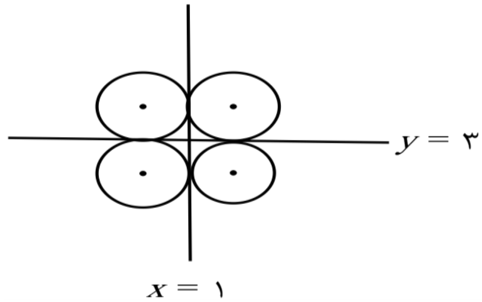
$$O = (-R, -R)$$

$$\rightarrow ۲(-R) + ۳(-R) = -۱۵ \rightarrow -۵R = -۱۵ \rightarrow \boxed{R = ۳}$$

مثال۳۱: معادله دایره ای به شعاع ۲ که بر خطوط $x = ۱$ و $y = ۳$ مماس باشد را بنویسید.

حل:

$$O = (۱ \pm R, ۳ \pm R)$$



$$\rightarrow \begin{cases} O_۱ = (۳,۵) \rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۵)^۲ = ۴ \\ O_۲ = (-۱,۱) \rightarrow (x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴ \\ O_۳ = (۳\,,۱) \rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴ \\ O_۴ = (-۱,۵) \rightarrow (x+۱)^۲ + (y-۵)^۲ = ۴ \end{cases}$$

تست۱۳: دایره ای از نقطه $(-۱,۲)$گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است قطر دایره بزرگتر کدام است؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳)۱۲ ۴)۱۵

حل:گزینه ۲

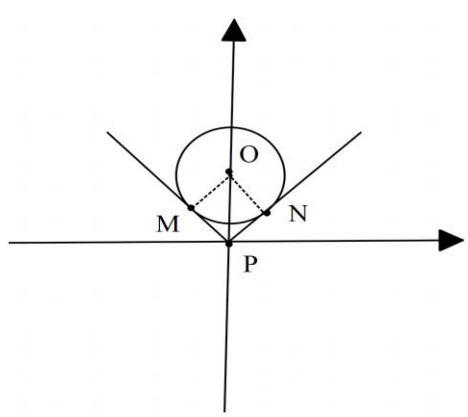
چون نقطه ی $(-۱,۲)$در ناحیه دوم قرار دارد پس $O=(-R,R)$ و معادله دایره به صورت$(x+R)^۲ + (y-R)^۲ = R^۲$ است.

$$\xrightarrow{(-۱,۲)} (-۱+R)^۲ + (۲-R)^۲ = R^۲$$

$$\rightarrow ۱ - ۲R + R^۲ + ۴ - ۴R + R^۲ = R^۲ \rightarrow R^۲ - ۶R + ۵ = ۰$$

نوشتن معادلهٔ دایره مماس بر نیمسازها

اگر یک دایره بر نیمسازهای اول و دوم مماس باشد باید مرکز دایره حتماً روی محورyها باشد.



چهارضلعی $OMNP$ یک مربع است.

$$\xrightarrow{\text{رابطه فیثاغورس}} OP^{۲} = OM^{۲} + MP^{۲} \to OP^{۲} = R^{۲} + R^{۲}$$

$$\to OP^{۲} = ۲R^{۲} \to OP = \sqrt{۲}R \xrightarrow{\text{مختصات مرکز دایره}} O = (۰, \sqrt{۲}R)$$

نتیجه: *مختصات مرکز دایره ای به شعاع* R *که:*

الف) مماس بر نیمساز اول و دوم باشد. $O = (۰, \sqrt{۲}R)$

ب) مماس بر نیمساز دوم و سوم باشد. $O = (-\sqrt{۲}R, ۰)$

پ) مماس بر نیمساز سوم وچهارم باشد. $O = (۰, -\sqrt{۲}R)$

ت) مماس بر نیمساز چهارم و اول باشد. $O = (\sqrt{۲}R, ۰)$

***مثال*۳۲:** مختصات مرکز دایره ای به شعاع $۲\sqrt{۲}$ که بر نیمساز ناحیه اول و دوم مماس باشد را به دست آورید.

حل:

$$O = (۰, \sqrt{۲}R) \to O = \left(۰, \sqrt{۲}(۲\sqrt{۲})\right) \to \boxed{O = (۰,۴)}$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱- مرکز و شعاع هر کدام از دایره ها را به دست می آوریم.

۲- فاصله مرکز دو دایره را از فرمول $d = O\acute{O} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^{۲} + (y_۲ - y_۱)^{۲}}$ به دست می آوریم.

۳- شعاع دایره ها را یک بار از هم کم و یک بار با هم جمع می کنیم.(شعاع بزرگ تر منهای شعاع کوچک تر)

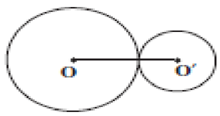
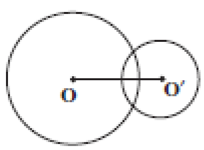
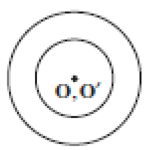
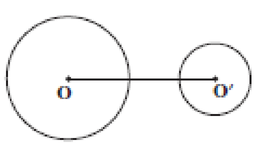
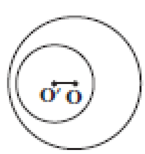
۴-با توجه به حالت های زیر وضعیت را مشخص می کنیم.

۱-اگر d با تفریق یا جمع شعاع ها برابر باشد مماس.

۲-اگر d بین جمع و تفریق شعاع ها باشد متقاطع.

۳-اگر d برابر صفر باشد هم مرکز.

۴-در غیر این صورت متخارج یا متداخل خواهد بود.

دو دایره مماس برون(مماس خارج)	$d = R + \acute{R}$	
دو دایره مماس درون(مماس داخل)	$d = R - \acute{R}$	
دو دایره متقاطع	$R - \acute{R} < d < R + \acute{R}$	
دو دایره هم مرکز	$d = ۰$	
دو دایره برون هم(متخارج)	$d > R + \acute{R}$	
دو دایره متداخل	$d < R - \acute{R}$	

مثال۳۳: دو دایـره $(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ و $(x-۷)^۲ + (y-۹)^۲ = ۸۱$ نسـبت بـه هـم چـه وضـعیتی دارند؟

حل:

$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱\rightarrow \acute{O}=(۱,۱)\,,\acute{R}=۱$

$(x-۷)^۲+(y-۹)^۲=۸۱\rightarrow O=(۷,۹)\,,R=۹$

$O\acute{O}=\sqrt{(۷-۱)^۲+(۹-۱)^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

$\rightarrow \boxed{d=O\acute{O}=۱۰}, R-\acute{R}=۹-۱=۸\,, R+\acute{R}=۹+۱=۱۰$

چون $d=R+\acute{R}$ پس این دو دایره مماس خارج اند.

مثال۳۴: مقدار k برای آن که دو دایره $x^۲-۲x+y^۲-۲y=k$ و $x^۲-۸x+y^۲-۲y+۱۶=۰$ بر هم مماس خارج باشند کدام است؟

حل:

$\boxed{(۱)}\ x^۲-۲x+y^۲-۲y=k$

$\xrightarrow{\text{مربع کامل}}(x-۱)^۲-۱+(y-۱)^۲-۱=k$

$\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=k+۲\rightarrow O=(۱,۱), R=\sqrt{k+۲}$

$\boxed{(۲)}x^۲-۸x+y^۲-۲y+۱۶=۰$

$\rightarrow (x-۴)^۲-۱۶+(y-۱)^۲-۱+۱۶=۰$

$\rightarrow (x-۴)^۲+(y-۱)^۲=۱\rightarrow \acute{O}=(۴,۱), \acute{R}=۱$

$d=O\acute{O}=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۹+۰}=۳$

برای این که این دو دایره مماس خارج باشند باید داشته باشیم: $d=R+\acute{R}$

$\rightarrow ۳=۱+\sqrt{k+۲}\rightarrow ۲=\sqrt{k+۲}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲ می رسانیم.}}$

$۴=k+۲\rightarrow \boxed{k=۲}$

مثال۳۵: معادلهٔ دو دایره به صورت $(x-۲)^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=R^۲$ می باشد هرگاه این دو دایره بر یکدیگر مماس باشند مقدار R را به دست آورید.

حل:

$(x-۲)^۲+y^۲=۱ \rightarrow O=(۲,۰), R=۱$

$x^۲+y^۲=R^۲ \rightarrow \acute{O}=(۰,۰), \acute{R}=R$

$d=O\acute{O}=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۰-۰)^۲}=\sqrt{۴}=۲$

برای این که این دو دایره مماس خارج باشند $d=R+\acute{R}$ بنابراین:

$$۲=R+۱ \rightarrow \boxed{R=۱}$$

برای این که این دو دایره مماس داخل باشند $d=R-\acute{R}$ بنابراین:

$$۲=R-۱ \rightarrow \boxed{R=۳}$$

تست۱۴: دو دایره به معـادلات $x^۲+y^۲-۲x+۶y=۸$ و $x^۲+y^۲+۸x-۴y+۱۲=۰$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟(سراسری تجربی۸۷)

۱) مماس خارج ۲)مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متخارج

حل: گزینه ۱

$x^۲+y^۲-۲x+۶y=۸$

$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x-۱)^۲-۱+(y+۳)^۲-۹=۸$

$\rightarrow (x-۱)^۲+(y+۳)^۲=۱۸ \rightarrow O=(۱,-۳), R=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$

$x^۲+y^۲+۸x-۴y+۱۲=۰$

$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x+۴)^۲-۱۶+(y-۲)^۲-۴+۱۲=۰$

$(x+۴)^۲+(y-۲)^۲=۸ \rightarrow \acute{O}=(-۴,۲), \acute{R}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

$d=O\acute{O}=\sqrt{(-۴-۱)^۲+(۲+۳)^۲}=\sqrt{۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$

چون $d=R+\acute{R}$ پس مماس خارج اند.

مثال۳۶: دو دایره به معادلات $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۱۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۱$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج ۲)مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متخارج

حل: گزینه ۲

$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳$

$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x-۱)^۲ - ۱ + (y+۲)^۲ - ۴ = ۱۳$

$\to (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱۸ \to O = (۱,-۲), R = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$

$x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱ \xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x+۱)^۲ - ۱ + (y-۰)^۲ = ۱$

$\to (x+۱)^۲ + y^۲ = ۲ \to \acute{O} = (-۱,۰), \acute{R} = \sqrt{۲}$

$d = O\acute{O} = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۰+۲)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$

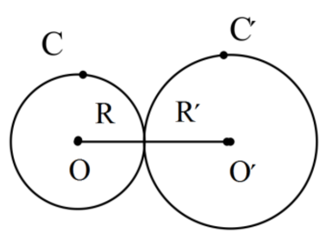
چون $d = R - \acute{R}$ پس مماس داخل اند.

تست۱۵: شعاع دایره ای به مرکز$(-۲,۲)$ و مماس خارج بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲)۳ ۳)$۲\sqrt{۳}$ ۴)۴

حل: گزینه ۲

با توجه به شکل زیر چون مماس خارج اند پس داریم:$O\acute{O} = R + \acute{R}$



$C: x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$

$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x-۱)^۲ - ۱ + (y+۲)^۲ - ۴ + ۱ = ۰$

$\to (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$

$O = (۱,-۲), R = ۲$

$\acute{C}: \acute{O} = (-۲,۲)$

$\to d = O\acute{O} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۲-۲)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$

$O\acute{O} = R + \acute{R} \to ۵ = ۲ + \acute{R} \to \boxed{\acute{R} = ۳}$

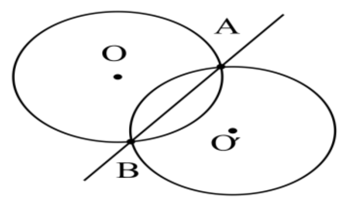
وتر مشترک دو دایره

معادله وتر مشترک دو دایره:

معادله وتر مشترک دو دایره از تفاضل معادلات دو دایره به دست می آید.

مثال۳۷: معادله وتر مشترک دو دایـره $x^۲ + y^۲ = ۲$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y = ۰$ را به دست آورید.

حل: وتر مشترک AB



$(x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y) - (x^۲ + y^۲ - ۲) = ۰$

$\rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - x^۲ - y^۲ + ۲ = ۰$

$\rightarrow ۲x + ۲y + ۲ = ۰ \rightarrow x + y + ۱ = ۰$