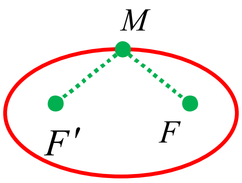
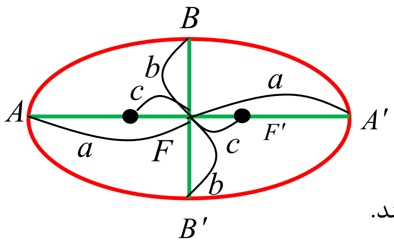
بیضی

تعریف : مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت F و F' به نام کانون های بیضی، مقدار ثابت $۲a$ است که $۲a$ طول قطر بزرگ بیضی است.



$$\boxed{|MF|+|MF'|=۲a}$$

نقاط و اعداد مهم در بیضی :



۱) **مرکز**: نقطهٔ O وسط و مرکز بیضی نام دارد.

۲) **رأس های کانونی**: نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ را رأس های کانونی می نامند.

۳) **رأس های ناکانونی**: نقاط B و B' دو سر قطر کوچک را رأس های ناکانونی می نامند.

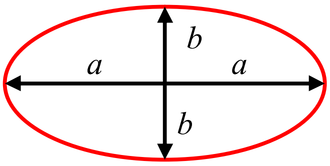
۴) **کانون ها**: نقاط F و F' را کانون های بیضی و $|FF'|=۲c$ را فاصلهٔ کانونی می نامند.

رابطهٔ طلایی :

اگر در بیضی $|AA'|=۲a$، $|BB'|=۲b$ و $|FF'|=۲c$ باشد آنگاه همواره داریم: $\boxed{a^۲=b^۲+c^۲}$

معادلهٔ استاندارد بیضی :

۱) **بیضی افقی**: معادلهٔ بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور x ها باشد به صورت زیر است:

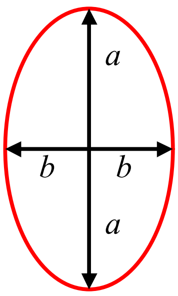


$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱$$

عدد بزرگه زیر x

*: در بیضی افقی، عرض های رأس و کانون ها یکسان است.

۲) **بیضی قائم**: معادلهٔ بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور y ها باشد به صورت زیر است:



$$\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}=۱$$

عدد بزرگه زیر y

*: در بیضی قائم، طول های رأس و کانون ها یکسان است.

توجه: $a^۲$ همیشه عدد بزرگتر بین دو مخرج و $b^۲$ همیشه عدد کوچکتر بین دو مخرج است.

📖 سؤال ۱: به ازای کدام مقادیر a بیضی $\frac{x^2}{a-1}+\frac{y^2}{2-a}=1$ یک بیضی قائم است؟

۱) $0<a<1/5$ ۲) $1<a<2$ ۳) $1<a<1/5$ ۴) $1/5<a<2$

☜ پاسخ: گزینه۳

در بیضی قائم باید عدد زیر y^2 بزرگتر از عدد زیر x^2 باشد: $2-a>a-1 \Rightarrow 2a<3 \Rightarrow a<1/5$

همچنین شرط بیضی بودن این است که $2-a>0$ و $a-1>0$ باشد بنابراین با اشتراک از این سه نامساوی داریم:

$1<a<1/5$

📖 سؤال ۲: نقاط $F'(5,-1), F(1,-1)$ کانون های یک بیضی هستند که طول قطر کوچک آن ۲واحد است. اگر M نقطه ای واقع بر بیضی باشد حاصل $MF+MF'$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{5}$

☜ پاسخ: گزینه۳

$$\begin{cases} 2c=FF'=5-1=4 \Rightarrow c=2 \\ BB'=2b=2 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow a^2=b^2+c^2=1+4=5 \Rightarrow a=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MF+MF'=2a=2\sqrt{5}$$

📖 سؤال ۳: در بیضی $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y+2)^2}{5}=1$ نقطهٔ M روی بیضی واقع است. اگر مجموع فواصل M از دو کانون بیضی برابر ۱۰ باشد فاصلهٔ دو کانون از هم چقدر است؟

۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

☜ پاسخ: گزینه۴

می دانیم همواره $MF+MF'=2a$ است بنابراین در این بیضی $2a=10$ می باشد پس $a=5$ است حال:

$$FF'=2c=2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$$

📖 سؤال ۴: اگر بیضی $\frac{x^2}{k^2}+k^2y^2=k^2$ قائم باشد آنگاه:

۱) $-1<k<1$ ۲) $0<k\le 1$ ۳) $k\neq 0$ ۴) $0<|k|<1$

☜ پاسخ: گزینه۴

معادلهٔ استاندارد بیضی را می نویسیم:

$$\frac{x^2}{k^2}+k^2y^2=k^2 \xrightarrow{\div k^2} \frac{x^2}{k^4}+\frac{y^2}{1}=1$$

در معادلهٔ استاندارد بیضی قائم، عدد مخرج کسر شامل x^2 (یعنی k^4) باید کوچکتر از عدد مخرج کسر شامل y^2 باشد لذا:

$$k^4<1 \Rightarrow |k|<1 \xrightarrow{k\neq 0} 0<|k|<1$$

استاندارد کردن:

اگر معادلهٔ یک بیضی به صورت $Ax^{۲}+By^{۲}+Cx+Dy=E$ (که $A\neq B$) باشد برای درآوردن آن به شکل استاندارد با مشتق ضمنی نسبت به x و y و صفر گذاشتن آنها، مرکز را پیدا می کنیم. سپس معادله را به صورت $A(x-\alpha)^{۲}+B(y-\beta)^{۲}$ می نویسیم و در طرف دوم اعداد $B\beta^{۲},A\alpha^{۲}$ را به E اضافه کرده و طرفین را بر عدد به دست آمده تقسیم می کنیم. (به جای x و y در پرانتزهای طرف اول صفر بگذارید، $B\beta^{۲},A\alpha^{۲}$ به دست می آید.)

مثال:

$$۶x^{۲}+۵y^{۲}-۱۲x+۲۰y=۴\Rightarrow O(۱,-۲)\Rightarrow ۶(x-۱)^{۲}+۵(y+۲)^{۲}$$
$$=۴+۶+۲۰\xrightarrow{\div ۳۰}\frac{(x-۱)^{۲}}{۵}+\frac{(y+۲)^{۲}}{۶}=۱$$

سؤال ۵: در بیضی به معادلهٔ $۳x^{۲}+۴y^{۲}+۱۸x-۱۶y=۵$ مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۸

پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases}۶x+۱۸=۰\Rightarrow x=-۳\\ ۸y-۱۶=۰\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

$$O(-۳,۲)\Rightarrow ۳(x+۳)^{۲}+۴(y-۲)^{۲}=\underbrace{۵+۲۷+۱۶}_{۴۸}\xrightarrow{\div ۴۸}\frac{(x+۳)^{۲}}{۱۶}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۱۲}=۱$$
$$\Rightarrow |MF|+|MF'|=۲a=۲\times ۴=۸$$

سؤال ۶: کانون های بیضی به معادلهٔ $۲x^{۲}+۷y^{۲}-۴x=۱۲$ دو سر قطری از دایره اند. این دایره نیمساز ناحیهٔ اول را با کدام طول قطع می کند؟

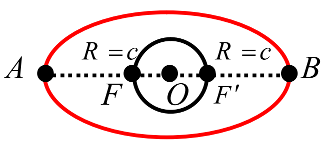
۱) ۲ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۱

مرکز دایره همان مرکز بیضی و شعاع دایره، c بیضی است. پس بیضی را استاندارد می کنیم تا c را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}۴x-۴=۰\Rightarrow x=۱\\ ۷y=۰\Rightarrow y=۰\end{cases}$$

$$O(۱,۰)\Rightarrow ۲(x-۱)^{۲}+۷(y-۰)^{۲}=۱۲+۲\xrightarrow{\div ۱۴}\frac{(x-۱)^{۲}}{۷}+\frac{y^{۲}}{۲}=۱$$



$$R=c=\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}\Rightarrow R=\sqrt{۷-۲}=\sqrt{۵}$$

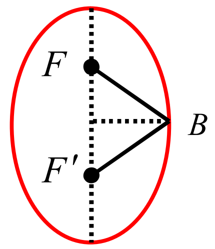
دایره: $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۵\Rightarrow\xrightarrow{y=x}(x-۱)^{۲}+x^{۲}=۵\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-۱\end{cases}$

سؤال ۷: بیشترین مساحت از بین مثلث هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادلهٔ $۴x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$ و دو رأس دیگر آن کانون های این بیضی باشند، کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) $\sqrt{۲}$ ‏ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه۴

بیشترین مساحت هنگامی حاصل می شود که نقطهٔ M روی رأس ناکانونی بیضی قرار گیرد چون در این حالت ارتفاع مثلث **max** می شود و در نتیجه $S_{\max} = \frac{۱}{۲}(۲c)(b) = bc$ می باشد بنابراین باید **c,b** را پیدا کنیم:



$$\begin{cases} ۸x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ ۲y = ۰ \Rightarrow y = ۰ \end{cases}$$

$$O\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right) \Rightarrow ۴\left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + (y - ۰)^۲ = ۳ + ۱ + ۰ \xrightarrow{\div ۴}$$

$$\frac{(x - ۰/۵)^۲}{۱} + \frac{y^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴ - ۱ = ۳$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{۳} \Rightarrow S_{\max} = bc = ۱ \times \sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

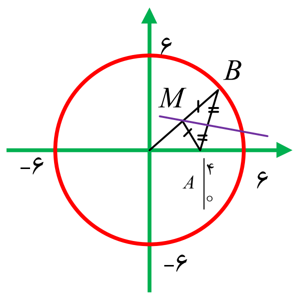
سؤال ۸: دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۶ مفروض است. نقطهٔ $A(۴,۰)$ را در نظر می گیریم. اگر B نقطه ای روی دایره باشد و عمودمنصف AB شعاع OB را در نقطهٔ M قطع کند آنگاه M همواره روی کدام بیضی قرار دارد؟

۱) $\frac{(x-۲)^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۵} = ۱$ ‏ ۲) $\frac{(x-۲)^۲}{۵} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$

۳) $\frac{(x-۱)^۲}{۹} + \frac{(y-۱)^۲}{۵} = ۱$ ‏ ۴) $\frac{(x-۱)^۲}{۵} + \frac{(y-۱)^۲}{۹} = ۱$

پاسخ: گزینه۱

مطابق شکل عمود منصف AB شعاع OB را در نقطهٔ M قطع کرده است چون هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است پس $MA = MB$ در نتیجه:



$$OM + MA = OM + MB = OB = ۶$$

پس M روی بیضی به کانون های $O(۰,۰), A(۴,۰)$ ، $۲a = ۶$ قرار دارد.

مرکز بیضی $O'=\frac{O+A}{2}=(2,0), a=3, 2c=OA\Rightarrow 2c=4\Rightarrow c=2$

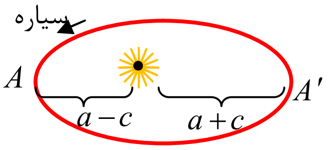
$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 9=b^2+4\Rightarrow b^2=5$

و چون کانون ها هم عرض اند پس بیضی افقی است و معادلهٔ آن $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ می شود.

قانون اول کپلر :

مسیر حرکت سیارات به دور خورشید، یک بیضی است که خورشید در یکی از کانون های این بیضی قرار دارد.

دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ سیاره از خورشید $a+c$ و $a-c$ در این بیضی است که همان فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس و نزدیکترین رأس هستند.



سؤال ۹: در بیضی به معادلهٔ $3x^2+4y^2-6x+4y=44$ فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) $4+2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه۲

باید $a+c$ را در این بیضی پیدا کنیم بنابراین بیضی را استاندارد می کنیم:

$$\begin{cases}6x-6=0\Rightarrow x=1\\ 8y+4=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$O\left(1,-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 3(x-1)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=44+3+1\xrightarrow{\div 48}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+0/5)^2}{12}=1\Rightarrow c=\sqrt{16-12}=2\Rightarrow a+c=4+2=6$$

سؤال ۱۰: معادلهٔ بیضی به کانون های $F(1,1), F'(1,-1)$ و قطر بزرگ $2\sqrt{5}$ کدام است؟

۱) $5x^2+4y^2-10x=15$ ۲) $5x^2+4y^2+10x=15$

۳) $4x^2+5y^2-8x=16$ ۴) $4x^2+5y^2+8x=16$

پاسخ: گزینه۱

با نقاط F, F' سه چیز از چهار چیز لازم به دست می آید اولاً عرض آنها تغییر کرده که نشان می دهد بیضی قائم است. در ضمن:

$$O=\frac{F+F'}{2}\Rightarrow O(1,0)$$

$$\begin{cases}2c=FF'=2\Rightarrow c=1\\ 2a=2\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5-1}=2\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$$

چون بیضی قائم است عدد بزرگتر (بین a^2 و b^2) را زیر y^2 می گذاریم و اما گزینه ها گسترده است پس معادله را باز می کنیم:

$$5(x^2-2x+1)+4y^2=20\Rightarrow 5x^2+4y^2-10x=15$$

سؤال ۱۱: مختصات یکی از کانون های بیضی $2x^2+6y^2+4x-12y=4$ کدام است؟

۱) $(1,-3)$ ۲) $(3,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-3,1)$

پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases} 4x+4=0 \Rightarrow x=-1 \\ 12y-12=0 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$O(-1,1) \Rightarrow 2(x+1)^2+6(y-1)^2=4+2+6 \xrightarrow{\div 12} \frac{(x+1)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{6-2}=2$$

$$\text{بیضی افقی} \Rightarrow F,F'(-1\pm 2,1) \Rightarrow \begin{cases} F(1,1) \\ F'(-3,1) \end{cases}$$

سؤال ۱۲: دورترین نقطه از بیضی به معادلهٔ $2x^2+y^2+4x-4y+2=0$ تا مرکز آن به کدام مختصات است؟ (تجربی خارج ۸۶)

۱) $(-1-\sqrt{2},2)$ ۲) $(-2,2+\sqrt{2})$ ۳) $(-1,4)$ ۴) $(-1,6)$

پاسخ: گزینه۳

دورترین نقطهٔ بیضی از مرکز همان رأس های کانونی هستند.

$$\begin{cases} 4x+4=0 \Rightarrow x=-1 \\ 2y-4=0 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$$O(-1,2) \Rightarrow 2(x+1)^2+(y-2)^2=-2+2+4 \xrightarrow{\div 4} \frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

$$\text{بیضی قائم} \Rightarrow A,A'(-1,2\pm 2) \qquad \begin{cases} (-1,4) \\ (-1,0) \end{cases}$$

سؤال ۱۳: اگر معادلهٔ مدار گردش یکی از سیارات منظومهٔ شمسی به دور خورشید به صورت $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$ باشد مختصات نقطهٔ قرار گرفتن خورشید کدام می تواند باشد؟

۱) $(2,-2)$ ۲) $(1+\sqrt{2},-2)$ ۳) $(1,-1)$ ۴) $(2,-1)$

پاسخ: گزینه۱

خورشید روی یکی از کانون ها قرار می گیرد پس:

$$\begin{cases} 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \\ 4y+8=0 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$

$$x^2+2y^2-2x+8y+7=0 \Rightarrow O(1,-2) \Rightarrow (x-1)^2+2(y+2)^2=-7+9$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{1}=1 \Rightarrow c=\sqrt{2-1}=1$$

با توجه به افقی بودن بیضی $F(2,-2), F'(0,-2)$ کانون ها می باشند.

خروج از مرکز بیضی :

در هر بیضی نسبت $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و همواره $۰<e<۱$ است. این نسبت میزان چاقی و لاغری بیضی را نشان می دهد. (هرچه کمتر چاق تر)

سؤال ۱۴: در یک بیضی فاصلهٔ یک کانون از دورترین نقاط بیضی، ۳ برابر فاصلهٔ همان کانون از نزدیکترین نقاط آن بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه۴

$$a+c=۳(a-c)\Rightarrow ۴c=۲a\Rightarrow \frac{c}{a}=e=\frac{۱}{۲}$$

خروج از مرکز بیضی گسترده :

اگر معادلهٔ گستردهٔ بیضی را بدهند برای پیدا کردن خروج از مرکز نیازی به استاندارد کردن نیست و فقط به ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ نگاه می کنیم که همواره یکی کوچکتر است و یکی بزرگتر. در این صورت:

$$e=\sqrt{۱-\frac{\text{کوچکتر}}{\text{بزرگتر}}}$$

سؤال ۱۵: بیضی به معادلهٔ $x^۲+۴y^۲+ay+bx+c=۰$ در نقطه ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و از نقطهٔ $(-۱,-۲)$ می گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه۳

$$e=\sqrt{۱-\frac{\text{ضریب درجهٔ ۲ کوچک}}{\text{ضریب درجهٔ ۲ بزرگ}}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

سؤال ۱۶: به ازای کدام مقادیر k خروج از مرکز مقطع مخروطی $x^۲+ky^۲=۴x$ برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است؟

۱) ۲، ۴ ۲) ‎-۲، ‎-۴ ۳) $۲,\frac{۱}{۲}$ ۴) $۴,\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه۴

چون بین k و ۱ نمی دانیم کدام بزرگتر است و کدام کوچکتر هر دو حالت را در نظر می گیریم:

$$e=\sqrt{۱-\frac{۱}{k}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{k}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow k=۴$$

$$e=\sqrt{۱-k}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۱-k=\frac{۳}{۴}\Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

سؤال ۱۷: مختصات دو سر قطر کوچک بیضی $B(-1,3), B'(-1,-1)$ است. این بیضی از نقطهٔ $M(-4,2)$ می گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه۳

با $B' < B$ سه چیز از چهار چیز لازم برای نوشتن معادلهٔ بیضی معلوم می شود. در این حالت می گوییم چون عرض تغییر کرده بیضی افقی است و در ضمن:

$$\begin{cases} O = \frac{B+B'}{2} \Rightarrow O(-1,1) \\ 2b = BB' = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \xrightarrow{M(-4,2)} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

سؤال ۱۸: بیضی به کانون های $(1,-1),(1,1)$ و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$، خط $y = 2x$ را با کدام طول قطع می کند؟

(تجربی خارج ۹۶)

۱) $-\frac{1}{2},1$ ۲) $-\frac{1}{4},1$ ۳) $-1,\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2},2$

پاسخ: گزینه۱

چون طول کانون های بیضی برابر است پس بیضی قائم است.

$$O = (1,0) \quad , \quad 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{3} = 1 \xrightarrow{y=2x} \frac{4x^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{3} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{(x-1)^2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + (x-1)^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 + x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

سؤال ۱۹: دو نقطهٔ $(-3,0),(3,0)$ دو سر کوتاهترین قطر یک بیضی با خروج از مرکز ۰/۵ هستند. معادلهٔ این بیضی کدام است؟

۱) $2x^2 + 3y^2 = 18$ ۲) $3x^2 + 2y^2 = 18$

۳) $3x^2 + 4y^2 = 36$ ۴) $3y^2 + 4x^2 = 36$

☜ پاسخ: گزینه۴

رئوس ناکانونی بیضی دو سر کوتاهترین قطر بیضی هستند پس:

$$B(۳,۰),B'(-۳,۰)$$

چون پس بیضی قائم بوده و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$\text{مرکز بیضی}:\omega\left(\frac{x_B+x_{B'}}{۲},\frac{y_B+y_{B'}}{۲}\right)=\left(\frac{۳-۳}{۲},\frac{۰+۰}{۲}\right)=(۰,۰)$$

$$BB'=۲b\Rightarrow|۳-(-۳)|=۲b\Rightarrow b=۳$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{a^۲-۹}{a^۲}\Rightarrow ۴a^۲-۳۶=a^۲\Rightarrow ۳a^۲=۳۶\Rightarrow a^۲=۱۲$$

چون $y_B=y_{B'}$ پس بیضی قائم بوده و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$\frac{(y-y_\omega)^۲}{a^۲}+\frac{(x-x_\omega)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{y^۲}{۱۲}+\frac{x^۲}{۹}=۱\xrightarrow{\times۳۶}۳y^۲+۴x^۲=۳۶$$

📖 سؤال ۲۰: مختصات دو سر بزرگترین قطر یک بیضی $(۲,۵),(۲,-۱)$ است. این بیضی از نقطهٔ $(۱,۳)$ نیز می گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۱۳}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۷}{۸}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$

☜ پاسخ: گزینه۲

با توجه به اینکه $A(۲,۵),A'(۲,-۱)$ دو سر قطر بزرگ بیضی هستند بنابراین بیضی قائم است. بنابراین این بیضی نقطهٔ $O(۲,۲)$ است. از طرفی:

$$AA'=۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$\text{معادلهٔ بیضی قائم}:\frac{(y-y_O)^۲}{a^۲}+\frac{(x-x_O)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{(y-۲)^۲}{۹}+\frac{(x-۲)^۲}{b^۲}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{(۳-۲)^۲}{۹}+\frac{(۱-۲)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{۱}{b^۲}=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow b^۲=\frac{۹}{۸}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{\frac{۹}{۸}}{۹}}=\sqrt{\frac{۷}{۸}}$$

📖 سؤال ۲۱: به ازای کدام مقدار k شکل ظاهری بیضی به معادلهٔ $۴x^۲+ky^۲=۴۸$ به دایره نزدیکتر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۳

☜ پاسخ: گزینه۴

می دانیم که در هر بیضی خروج از مرکز عددی بین صفر و یک است. هرچقدر خروج از مرکز به یک نزدیکتر شود بیضی کشیده تر و هرچقدر خروج از مرکز به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره شبیه تر می شود. از طرفی اگر معادلهٔ

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ $(A,B>0)$ یک بیضی را مشخص کند آنگاه خروج از مرکز بیضی از رابطهٔ زیر محاسبه می شود:

$$e=\sqrt{1-\frac{\min\{A,B\}}{\max\{A,B\}}}$$

گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$1)\ e=\sqrt{1-\frac{4}{12}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\qquad 2)\ e=\sqrt{1-\frac{4}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3)\ e=\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad 4)\ e=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

ملاحظه می شود که کمترین مقدار برای خروج از مرکز در گزینه «۴» به دست می آید.

تشکیل معادلهٔ بیضی از روی دایره :

اگر عرض نقاط واقع بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=R^2$ را به نسبت k تقسیم کنیم، شکل حاصل یک بیضی به معادلهٔ $x^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2=R^2$ خواهد شد.

سؤال ۲۲: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که عرض نقطه های واقع بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کند کدام است؟

۱) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ۲) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{25}=1$ ۳) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ۴) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

پاسخ: گزینه۱

$$x^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2=16\xrightarrow{k=\frac{3}{4}}x^2+\left(\frac{y}{\frac{3}{4}}\right)^2=16\Rightarrow x^2+\left(\frac{4y}{3}\right)^2=16$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{16y^2}{9}=16\xrightarrow{\div 16}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

معادلهٔ پارامتری بیضی :

معادلهٔ پارامتری بیضی افقی را می توان به صورت $\begin{cases}x=\alpha+a\sin t\\ y=\beta+b\cos t\end{cases}$ و معادلهٔ پارامتری بیضی قائم را می توان به صورت $\begin{cases}x=\alpha+b\sin t\\ y=\beta+a\cos t\end{cases}$ نمایش داد. برای آنکه معادلهٔ پارامتری بیضی را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنیم باید از هر دو معادله $\sin t$ و $\cos t$ را برحسب بقیه به دست آورده و سپس در فرمول $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ جایگذاری کنیم.

سؤال ۲۳: نقطهٔ $M \begin{cases} x = 1 + 3\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$ مفروض است مکان هندسی نقطهٔ M وقتی t تغییر می کند کدام است؟

۱) $4x^2 + 9y^2 = 32$
۲) $4x^2 - 8x + 9y^2 = 35$
۳) $4x^2 + 8x + 9y^2 = 32$
۴) $4x^2 - 8x + 9y^2 - 32 = 0$

پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases} x = 1 + 3\sin t \Rightarrow 3\sin t = x - 1 \Rightarrow \sin t = \dfrac{x-1}{3} \\ y = 2\cos t \Rightarrow \cos t = \dfrac{y}{2} \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 t + \cos^2 t = 1} \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

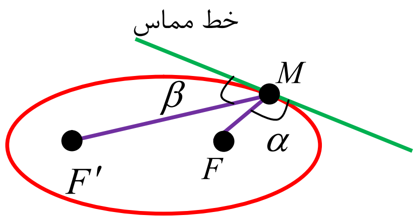
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{\times 36} 4(x-1)^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 = 36$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 9y^2 - 32 = 0$$

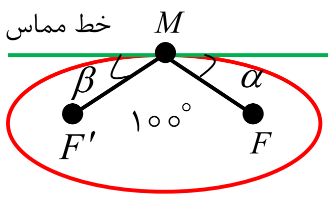
ویژگی بازتابندگی بیضی :

۱) اگر پرتویی از یکی از کانون ها به بیضی بتابد پرتو بازتاب آن از کانون دیگر عبور می کند.

۲) اگر در نقطهٔ M روی بیضی مماسی رسم کنیم و سپس از M به دو کانون وصل کنیم آنگاه زوایای β, α با هم مساوی خواهند بود (α, β).



مثال: با توجه به شکل β, α را بیابید.



می دانیم: $\alpha + \beta + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 80^\circ \xrightarrow{\alpha = \beta} \alpha = \beta = 40^\circ$

سؤال ۲۴: اگر یک شعاع نورانی از نقطهٔ $(4, -1)$ بر بیضی $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$ بتابد پرتو بازتاب الزاماً از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

۱) $(-3, -1)$
۲) $(-5, -1)$
۳) $(-4, -1)$
۴) $(-2, -1)$

پاسخ: گزینه۳

صحبت از شعاع نورانی شد احتمالاً نقطهٔ داده شده باید کانون بیضی باشد که اگر حدسمان درست باشد پرتو بازتاب طبق ویژگی بیان شده حتماً از کانون دیگر بیضی خواهد گذشت. پس مختصات کانون ها را می یابیم:

$$\frac{x^{۲}}{۲۵}+\frac{(y+۱)^{۲}}{۹}=۱ \Rightarrow \begin{cases} O(۰,-۱) \\ a^{۲}=۲۵ \Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}=۲۵=۹+c^{۲} \Rightarrow c^{۲}=۱۶ \Rightarrow c=۴ \\ b^{۲}=۹ \end{cases}$$

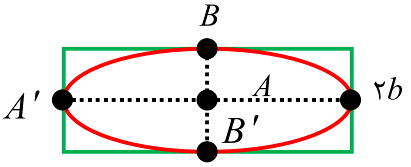
بیضی افقی بوده و لذا کانون های بیضی به اندازهٔ c واحد جلوتر و عقب تر از مرکزند:

$$F' \xrightarrow[O(۰,۱)]{\text{۴ واحد عقب} \qquad \text{۴ واحد جلو}} F \Rightarrow F(۴,-۱), F'(-۴,-۱)$$

پس درست حدس زدیم شعاع نورانی از یکی از کانون ها یعنی $(۴,-۱)$ به بیضی تابیده شده بود و در نتیجه پرتو بازتاب از کانون دیگر یعنی $(-۴,-۱)$ می گذرد.

معادلهٔ خطوط مماس و قائم بر بیضی :

خطوط مماس بر رئوس بیضی، خطوطی افقی یا عمودی بوده که شکل حاصل از برخورد آنها یک مستطیل به ابعاد $۲a$ و $۲b$ می باشد. پس برای یافتن مساحت یا محیط مستطیل حاصل از برخورد خطوط مماس بر رأس بیضی باید b,a را بیابیم.



* خطوط مماس و قائم بر بیضی را می توان به کمک مشتق گیری و قواعد کاربرد مشتق محاسبه نمود و نیازی به حفظ کردن فرمول خاصی در این بخش نیست.

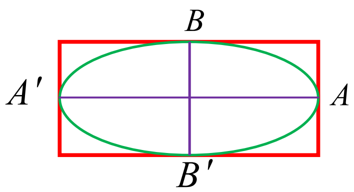
سؤال ۲۵: **مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی $x^{۲}+۴y^{۲}-۴x=۴$ در هر رأس کانونی و غیرکانونی آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)**

۱) ۸   ۲) ۱۲   ۳) ۱۶   ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه۳

خطوط مماس بر بیضی در رأس های آن مطابق شکل تشکیل یک مستطیل به ابعاد $۲a$ و $۲b$ می دهند که مساحت آن برابر $۴ab$ می باشد.

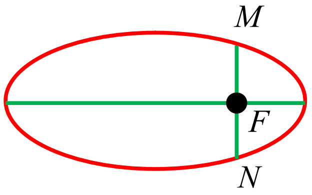
$$x^{۲}+۴y^{۲}-۴x=۴$$
$$\Rightarrow (x-۲)^{۲}+۴y^{۲}=۸$$
$$\Rightarrow \frac{(x-۲)^{۲}}{۸}+\frac{y^{۲}}{۲}=۱$$



بنابراین $a^{۲}=۸$, $b^{۲}=۲$ و در نتیجه $a^{۲}b^{۲}=۱۶$ و نهایتاً: $S=۴ab=۴\times۴=۱۶$

وتر کانون بیضی :

وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر محور کانونی عمود است، وتر کانونی بیضی نامیده می شود و طول آن از فرمول زیر به دست می آید:



$$\boxed{MN = \frac{2b^2}{a}} \quad \text{یا} \quad \boxed{MN = 2b\sqrt{1-e^2}}$$

سؤال ۲۶: **در بیضی به معادلهٔ $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی بیضی را در N , M قطع می کند. اندازهٔ MN کدام است؟ (داخل تجربی ۹۶)**

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه۲

$$\begin{cases} 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 32y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5(x-1)^2 + 16y^2 = 75 + 5 \xrightarrow{\div 80}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \\ b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر کانونی}} \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{5})^2}{4} = \frac{10}{4} = 2/5$$

سؤال ۲۷: **طول وتر کانونی بیضی افقی به معادلهٔ $a^2x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ برابر $\frac{2}{3}$ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

پاسخ: گزینه۳

معادلهٔ بیضی را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$\Rightarrow a^2x^2 + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

نوع بیضی افقی است لذا:

$$\text{طول وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{2(1)^2}{\frac{1}{a}} = 2a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

📖 **سؤال ۲۸:** طول وتر کانونی بیضی به معادلهٔ $(x = 2 + 4\sin t, y = -2\cos t)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

☜ **پاسخ: گزینه۱**

معادلهٔ استاندارد بیضی را می نویسیم:

$$x = 2 + 4\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x-2}{4}, \cos t = \frac{y}{-2}$$

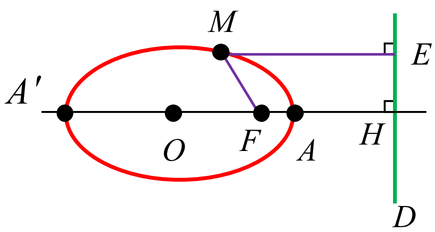
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

طول وتر کانونی برابر است با:

$$a^2 = 16, b^2 = 4 \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = \frac{8}{4} = 2$$

☜ **نکته:** در صفحه خط D و نقطهٔ F غیرواقع بر آن را در نظر می گیریم، مکان هندسی نقاطی که نسبت فاصلهٔ آنها از نقطهٔ F به فاصله شان از خط D مساوی عدد مثبت $\left(\frac{MF}{ME} = e\right)$ باشد:

با فرض $0 < e < 1$ بیضی است و کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقاط این بیضی از خط D با فرض اینکه فاصلهٔ F تا خط D برابر k باشد ($FH = k$) به ترتیب $AH = \frac{k}{1+e}$ و $A'H = \frac{k}{1-e}$ است.



در حالت طول قطر بیضی برابر است با:

$$2a = AA' = A'H - AH$$

☜ **نکته:** در هر حالت فوق e خروج از مرکز می باشد. با فرض $e = 1$ سهمی است.

📖 **سؤال ۲۹:** فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ از نقطه ای به طول ۲ واقع بر محور x ها یک سوم فاصلهٔ آن از خط $y = 4$ است در منحنی مکان هندسی M طول کوتاه ترین وتر کانونی کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

☜ **پاسخ: گزینه۳**

در اینجا $y = 4$: D ,$F(2,0)$,$e = \frac{1}{3}$ پس مکان مطلوب بیضی است می خواهیم $MN = \frac{2b^2}{a}$ را محاسبه کنیم داریم:

$$k = |۴ - ۰| = ۴, AH = \frac{k}{۱+e} = \frac{۴}{۱+\frac{۱}{۳}} = \frac{۱۲}{۴} = ۳, A'H = \frac{k}{۱-e} = \frac{۴}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

$$۲a = AA' = A'H - AH = ۶ - ۳ \Rightarrow ۲a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{c}{۳} \Rightarrow c = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = \frac{۹}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲ \Rightarrow b = \sqrt{۲}$$

$$MN = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲\times ۲}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۸}{۳}$$

سؤال ۳۰: **فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ از نقطه ای به طول ۱ واقع بر محور xها برابر نصف فاصلهٔ همین نقطه از خط به معادلهٔ $y=۳$ است. در منحنی مکان هندسی M اندازهٔ بزرگترین وتر کدام است؟**

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه۳

$$\begin{cases} e = \frac{۱}{۲} \\ k = ۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} AH = \frac{k}{۱+e} = \frac{۳}{۱+\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = ۲ \\ A'H = \frac{k}{۱-e} = \frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{\frac{۱}{۲}} = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۴$$

سؤال ۳۱: **نقطهٔ $M(x,y)$ طوری حرکت می کند که همواره فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(۲,-۱)$ برابر $\frac{۲}{۳}$ فاصلهٔ آن از خط $y=۴$ است. کوتاهترین فاصلهٔ نقاط M تا خط $y=۴$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه۳

$$\begin{cases} e = \frac{۲}{۳} \\ k = ۵ \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{k}{۱+e} = \frac{۵}{۱+\frac{۲}{۳}} = \frac{۵}{\frac{۵}{۳}} = ۳$$

سؤال ۳۲: **نقطهٔ $M(x,y)$ طوری حرکت می کند که همواره فاصلهٔ آن از $(۰,۵)$ نصف فاصلهٔ آن از خط $y=-۱$ است. بیشترین فاصلهٔ M از $(۰,۵)$ کدام است؟**

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases} e=\frac{1}{2} \\ k=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH=\frac{k}{1+e}=\frac{6}{1+\frac{1}{2}}=4 \\ AH'=\frac{k}{1-e}=\frac{6}{1-\frac{1}{2}}=12 \\ AH'-AH=2a\Rightarrow 12-4=2a\Rightarrow a=4 \end{cases}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=2\Rightarrow \text{بیشترین فاصله}=4+2=6$$

سؤال ۳۳: نقطهٔ $M(x,y)$ طوری حرکت می کند فاصلهٔ آن از پایین ترین نقطهٔ بیضی $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$ برابر نصف فاصلهٔ همین نقطه از خط $x=1$ است. بیشترین فاصلهٔ M از خط $x=1$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۲

ابتدا پایین ترین نقطهٔ بیضی افقی $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2x+2=0\Rightarrow x=-1 \\ 8y-8=0\Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$x^2+4y^2+2x-8y+1=0\Rightarrow O(-1,1)\Rightarrow (x+1)^2+4(y-1)^2=-1+1+4$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1\Rightarrow b=1\Rightarrow B'(-1,0)$$

$$\begin{cases} e=\frac{1}{2} \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow \text{بیشترین فاصله}=\frac{k}{1-e}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$