



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضیات کنکور ۹۷

((مطابق با جدیدترین تغییرات کتاب درسی))

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

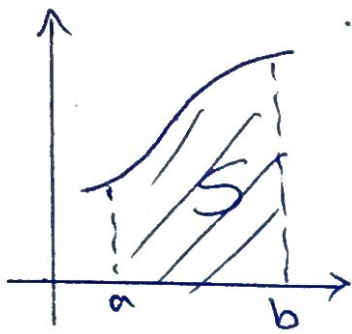
$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

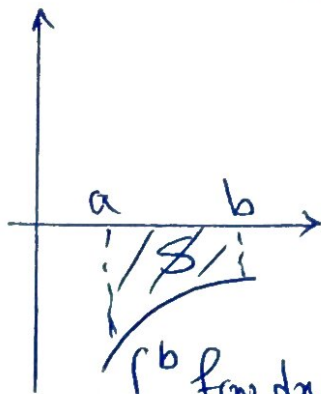
مهندس مهرپویان

۰۹۱-۷۷۰۲۰۲۷

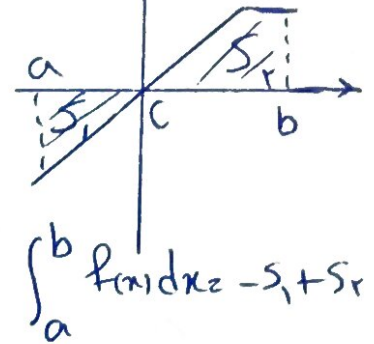
تعریف انتگرال: مساحتی که بین نمودار و محور x ها قرار دارد را انتگرال گویند.



$$\int_a^b f(x) dx = S$$



$$\int_a^b f(x) dx = S$$

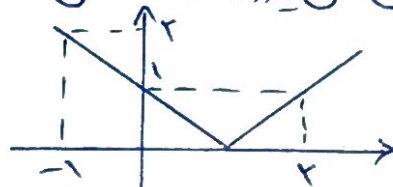


$$\int_a^b f(x) dx = -S_1 + S_2$$

آن قسمت هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارند، با علامت منفی در حساب انتگرال آورده می شود.

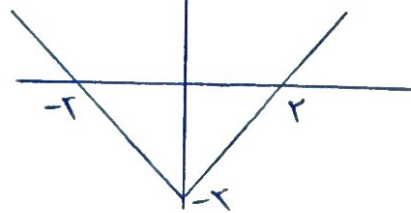
حاصل انتگرال های زیر را با توجه به شکل به دست آورید.

$$\int_{-1}^2 |x-1| dx =$$



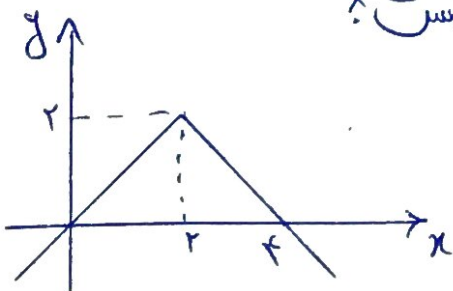
ج: $\frac{3}{2}$

$$\int_{-2}^1 (|x|-2) dx =$$



ج: $\frac{7}{4}$

با توجه به شکل زیر، حاصل $\int_0^4 (2-x-x^2) dx$ را بدست آورید؟

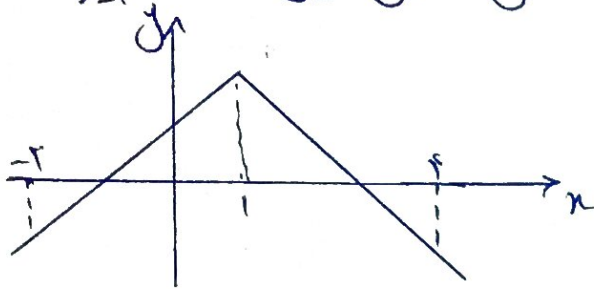


- ۲(۱)
- ۳(۲)
- ۲(۳)
- ۴(۴)

گزینه صحیح

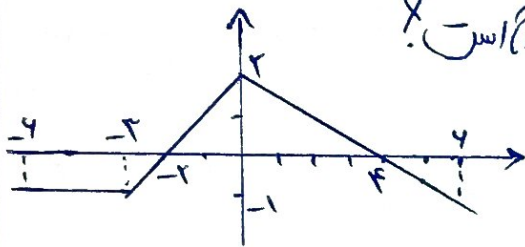
بازوی به نمودار تابع $f(x) = 2 - |x - 1|$ ، حاصل انتگرال معین $\int_{-2}^4 f(x) dx$ را بیابید؟

پسندیده ۱۹
اس - ۱
۲(۱) ۲(۲) ۲(۳) ۲(۴)
گزینۀ صحیح -



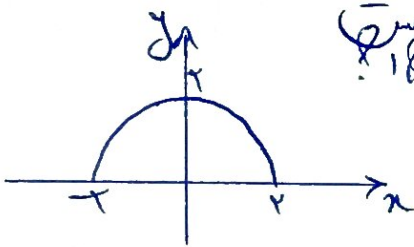
مثال متقابل نمودار تابع f است. $\int_{-4}^4 f(x) dx$ را بیابید (نوعی است)؟

* مثال
۱(۱) ۲(۲) ۲(۳) ۲(۴)
گزینۀ صحیح -



بازوی به شکل یو بیو ، حاصل $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ را بیابید؟

* تفریق فارک ۲۲
۲(۱) ۲(۲) ۲(۳) ۲(۴)
گزینۀ صحیح -



$S = 2$ = نیم دایره به شعاع ۲

$\int_a^b f(x) dx \rightarrow$ انتگرال محدود
 $\int f(x) dx \rightarrow$ انتگرال نامحدود
 انتگرال نامحدود \rightarrow نمی‌تواند
 انتگرال محدود \rightarrow می‌تواند
 انتگرال نامحدود \rightarrow نمی‌تواند

خواص انتگرال محدود

$$1) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$2) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

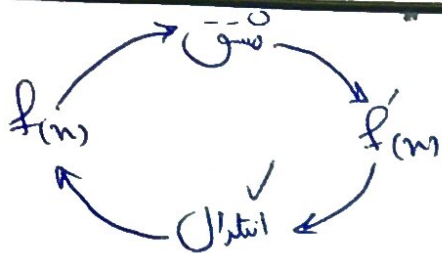
یعنی عدد ثابت k را می‌توانیم بیرون بیاوریم

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(c می‌تواند بین a و b باشد)



* مفهوم اساسی و بنیادی انتگرال

$$\int f(x) dx = A(x) = F(x)$$

یعنی به حاصل انتگرال تابع اولیه یا تابع صاف می‌گویند (انتگرال و مشتق عکس هم هستند و اثر همدیگر را فسخ می‌کنند)

در واقع برای یافتن پاسخ انتگرال می‌توانیم تابعی را پیدا کنیم که از آن مشتق گرفته و حاصل آن $f(x)$ باشد. یعنی اگر از $F(x)$ مشتق بگیریم، حاصلش $f(x)$ (تابع درون انتگرال) می‌شود.

* اولین قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر f تابعی پیوسته روی $[a, b]$ و $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ باشد، تابع صاف محسوب می‌شود. به عنوان f در فاصله $[a, b]$ و صورت x ها باشد، داریم $A'(x) = f(x)$ یعنی اگر از انتگرال مشتق بگیریم، تابع درون انتگرال پاسخ مای شود:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

$$* \left(\int_{-1}^x (2 \sin t + \cos t) dt \right)' = 2 \sin x + \cos x$$

$$* \left(\int_{\sqrt{x}}^x (2t^2 - 2t) dt \right)' = 2x^2 - 2x$$

$$* \left(\int_x^x \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt \right)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

دقت کنید که x باید در بالای انتگرال باشد و این علامت منفی هم خارج خارج.

مثال $F(x) = \int_1^x (e^t + Lnt) dt$ باشد با توجه به جدول مشتق تابع زیر در آن است.

1) $y = F(x) \rightarrow y' = F'(x) = e^x + Lnx$

* یادآوری:

$$\begin{cases} y = F(u) \rightarrow y' = u' \alpha F'(u) \\ y = \sqrt{u} F(u) \rightarrow y' = \sqrt{u}' F(u) + u' F'(u) \sqrt{u} \end{cases}$$

2) $y = F(x^2) \rightarrow y' = 2x \alpha F'(x^2) = 2x \alpha (e^{x^2} + Lnx^2)$
 یعنی در تابع F بجای x عبارت x^2 قرار بده

3) $y = F(\sqrt{x}) \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \alpha F'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (e^{\sqrt{x}} + Ln\sqrt{x})$

4) $y = F(\frac{1}{x}) \rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \alpha F'(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2} (e^{\frac{1}{x}} + Ln\frac{1}{x})$

5) $y = x F(\sin x) \rightarrow y' = 1 \alpha F(\sin x) + \cos x F'(\sin x) \alpha x =$
 یعنی در تابع F بجای x عبارت $\sin x$ قرار بده

$$\int_1^{\sin x} (e^t + Lnt) dt + \cos x (e^{\sin x} + Ln \sin x) \alpha x$$

* نکته مهم در محاسبه انتگرال (پایانه مستقیم) یا (سریع) و اگر بجای صورت انتگرال نه پایه عدد بسته و عبار بود صورت زیر عمل می‌کنیم یعنی اگر $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ بجای a و x و تابعی از x بود مثلا u و v

* $y = \int_a^u f(t) dt \rightarrow y' = u' \times f(u)$

* $y = \int_v^a f(t) dt \rightarrow y' = -v' \times f(v)$

* $y = \int_v^u f(t) dt \rightarrow y' = u' \times f(u) - v' \times f(v)$

* مثال انتگرال $G(x) = \int \frac{x^r}{x} \frac{t}{r+1} dt$ باشد و $G'(x)$ را $x=2$ حساب کن!

$u = x^r, v = \frac{1}{x}$ $\frac{24d}{149} (4) \quad \frac{19d}{144} (3) \quad \frac{24d}{144} (2) \quad \frac{24d}{149} (1)$

$G' = u' \times G(u) - v' \times G(v) = 2x \times \frac{x^r}{2x^r+1} - \frac{-1}{x^2} \times \frac{\frac{1}{x}}{\frac{r}{x}+1} \xrightarrow{x=2} \frac{24d}{144}$

* مثال $\frac{d}{dx} \int \cos x (1-t^2) dt$ و مقدار است $x = \frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2} (4) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (1)$

$y = u' \times f(u) - v' \times f(v) = \cos x (1 - \sin^2 x) - (-\sin x) (1 - \cos^2 x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

نیزه اصغر

سوال * $G(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$ باشد و مقدار مشتق $y = \kappa \cdot G(x)$ در $x=2$ را بیابیم.

$y = \kappa \alpha G(x) \rightarrow y' = \alpha' v + v' \alpha =$

$\frac{1}{3} (1) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{2}{3} (3) \quad \frac{4}{3} (4)$

$1 \times G(x) + \frac{\kappa}{\sqrt{1+x^2}} \times \kappa = \frac{4}{3}$ نیزه اصبح ✓

سوال * $F(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1-t^2} dt$ باشد

$\frac{2}{3} (1) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{2}{3} (3) \quad \frac{2}{3} (4)$

$F(x) = \cos x \times \frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \rightarrow$

$F'(x) = 0 - \frac{(-\sin x)}{\cos^2 x} \times \frac{x=\pi/4}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{2}$ نیزه اصبح ✓

سوال * $F(x) = \int_{-1}^x (t-t^2) dt$ باشد

۱) دو max و min
 ۲) min و max
 ۳) min و max
 ۴) min و max

* بازوری و برای یافتن استریم با $F'(x) = 0$ را بیابیم و علامت آن را تعیین کنیم.

$F(x) = 2x(x^2 - x^4) = 2x^3(1-x^2) = 0 \rightarrow x = 0, \pm 1$

x	-1	0	1
y'	+	0	-
	+	-	+

max min max

دو max و min
 نیزه اصبح ✓

مسئله ۱: معادله خط مماس بر نمودار $F(x) = \int_2^x \frac{t^2-1}{\sqrt{t+1}} dt$ در $x=2$ را بیابید.

$2x + 2y = 4$ (۴)
 $x + 2y = 2$ (۳)
 $2x - 2y = 4$ (۲)
 $2x - y = 4$ (۱)

معادله خط مماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

y_1 و x_1 از معادله F بیایند
 F' شیب است
 x و y از معادله خط مماس بیایند

در $x=2 \rightarrow y=0$ بیاید

$$m = F' = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} \Big|_{x=2} = \frac{3}{2} \rightarrow y - 0 = \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

$2x - 2y = 4$ (نیز می‌تواند صحیح باشد)

مسئله ۲: اگر تابع مساحت $G(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ و $y = G(x^2)$ باشد، این لفظی تغییر

$\frac{3 \sin 4}{8}$ (۴)
 $\frac{3 \sin 2}{10}$ (۳)
 $\frac{3 \sin 1}{41}$ (۲)
 $\frac{3 \cos 1}{12}$ (۱)

این لفظی را نوشته یعنی می‌تواند بله/خیر است

$$y' = 2x \cdot G'(x^2) = 2x \cdot \frac{\sin 2x^2}{1+x^4} \Big|_{x=2} = \frac{3 \sin 16}{41}$$

مسئله ۳: اگر تابع مساحت $G(x) = \int_1^x (1-t) dt$ و $y = \frac{x}{G(x)}$ باشد، شیب خط مماس بر

4 (۴)
 -4 (۳)
 4 (۲)
 -4 (۱)

$$y = \frac{1 \cdot G(x) - G'(x) \cdot x}{G(x)^2} \Big|_{x=2} = \frac{\int_1^2 (1-t) dt - (1-2) \cdot 2}{G(2)^2}$$

$$G(2) = \int_1^2 (1-t) dt = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow y' = \frac{\frac{-1}{2} - (1-2)(2)}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = 6$$

* فرمول های استاندارد

$$1) \int dx = x + C$$

مثلاً $\int \Delta dx = \Delta x + C$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

مثلاً : * $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$

$$* \int (dx^4 + 4x^3 - v) dx = dx \frac{x^4}{4} + 4x \frac{x^3}{3} - vx + C = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - vx + C$$

$$* \int \frac{1}{x^r} dx = \int x^{-r} dx = \frac{x^{-r+1}}{-r+1} + C = \frac{-1}{r} + C$$

$$* \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$* \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$* \int \frac{dx^r - rx}{x} dx = \int \left(\frac{dx^r}{x} - \frac{rx}{x} \right) dx = \int (dx - r) dx = dx \frac{x^r}{r} - rx + C$$

$$* \int \frac{(1-\sqrt{x})^r}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1-2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{\sqrt{x}}{1} \right) dx =$$

$$\int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 1 + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \sqrt{x} - x + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$$

$$* \int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 1}{x} dx = \int \frac{(1+2\sqrt{x}+x) - 1}{x} dx =$$

$$\int \left(\frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{x}{x} \right) dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) dx =$$

$$2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{x} + x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$۳) \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

* تذکر ۹۹ هر زمان که x عدد و جود داشته باشد در صورتی که آن عدد را به توان ضرب در مربع کسری توسعه.

$$۴) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int (1 + \tan^2 ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax + C$$

$$\int (1 + \cot^2 ax) dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C$$

$$۵) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$۶) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$۷) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

✓ اگر مشتق عبارت، در درون اشتراک باشد (یعنی تا فروش باشد) آن را بنظر
 * نکته: قبلی هم
 نمی تریغ مثلا

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال: $\int x^r (x^r - 1)^4 dx = \frac{(x^r - 1)^5}{5} + C$

$$\int \frac{x^r}{x^r + v} dx = \ln|x^r + v| + C$$

$$\int x(4x^r + 1)^r dx = \int \frac{1}{12} (4n^r + n)^r dx = \frac{1}{12} \frac{(4x^r + 1)^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int u' f(u) dx = F(u) + C$$

* نکته: هم برای رانش اموزان ریاضی

مثال: $\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\cos x^r}_{f(u)} dx = \sin x^r + C$

$$\int x^r \sin x^r dx = \int \frac{x^r}{r} \sin x^r dx = -\frac{1}{r} \cos x^r + C$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

حاصل استدلال های زیر را به دست آورید:

$$*1) \int (2 \sin x + 3 \cos x) dx = -2 \cos x + 3 \sin x + C$$

$$*2) \int (2x-1)(2x+4) dx = \int (4x^2 + 10x - 2x - 4) dx = \int (4x^2 + 8x - 4) dx = \frac{4x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 4x + C$$

$$*3) \int x(x+1)(x+2) dx = \int (x^3 + 3x^2 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C$$

$$*4) \int (3x+7)^4 dx = \int \frac{4}{3} (3x+7)^4 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+7)^5}{5} + C$$

البته می توانیم طبق آمار مکتب، ابتدا آن را از پرانتز خارج کنیم.

$$*5) \int (10x \sqrt{x^3} + x\sqrt{x} + \sin 2x) dx = \int (10x \cdot x^{\frac{3}{2}} + x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \sin 2x) dx = \int (10x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \sin 2x) dx = 10 \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \cos 2x + C = \frac{20}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$*6) \int (A \sin^2 x + \frac{1}{x} + \cos^2 x + 3) dx = \frac{A}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \sin 2x + 3x + C$$

$$*7) \int ((1 + \cot^2 3x) - 3 \cos 2x + \frac{3}{x} - \frac{e}{x^2}) dx = \frac{1}{3} \cot 3x - \frac{3}{2} \sin 2x + 3 \ln x + \frac{3}{x} + C$$

$$*1) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$*2) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\frac{1}{\sin x} + C$$

$$*3) \int x \sin^2 x dx = \int x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2} \\ \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\sin^2 x} &= 1 + \cot^2 x \end{aligned}$$

رابطه های *

$$*4) \int x \cos^2 x dx = \int x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$*5) \int (x - \tan x) dx = \int \left(x - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$$*6) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x| + \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} + C$$

$$\sqrt{x^2+2x} + C$$

! شرطی $f(x)$ با $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 1}{x} dx = 2\sqrt{x} \cdot f(x) + C$ اگر $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 1}{x} dx = 2\sqrt{x} \cdot f(x) + C$ باشد، $f(x)$ را بیابید. * تفریق ۹۲

$\frac{2}{3}x + \sqrt{x} + 2$ (۴)

$\frac{2}{3}x + 2\sqrt{x} + 2$ (۱)

$\frac{2}{3}x + \sqrt{x} + 2$ (۴)

$\frac{2}{3}x + 2\sqrt{x} + 2$ (۳)

$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 1}{x} dx = \int \frac{(1 + 2\sqrt{x} + x) - 1}{x} dx = \int \frac{(1 + 2\sqrt{x} + x) - 1}{x} dx =$

$\int \left(\frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{x\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} \right) dx =$

$4\sqrt{x} + x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} \left(2 + \sqrt{x} + \frac{1}{3}x \right) + C$

✓ تفریق صحیح

! شرطی $f(x)$ با $\int \frac{2x^2 - 2x}{\sqrt{x}} dx = f(x) \cdot (2x\sqrt{x}) + C$ اگر $\int \frac{2x^2 - 2x}{\sqrt{x}} dx = f(x) \cdot (2x\sqrt{x}) + C$ باشد، $f(x)$ را بیابید. * تفریق ۹۱

✓ تفریق صحیح

$2x - 2$ (۴) $2x - 2$ (۳) $x - 1$ (۲) $x - 2$ (۱)

! شرطی $f(x)$ با $\int \frac{x - 2x}{1 - \sqrt{x}} dx = x \cdot f(x) + C$ با شرط $x > 1$ اگر $\int \frac{x - 2x}{1 - \sqrt{x}} dx = x \cdot f(x) + C$ باشد، $f(x)$ را بیابید. * تفریق ۹۰

$2x - 2\sqrt{x}$ (۴) $2x - \sqrt{x}$ (۳) $2 + \sqrt{x}$ (۲) $2 + 2\sqrt{x}$ (۱)

$\int \frac{x(1-x)}{1-\sqrt{x}} dx = \int \frac{x(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} dx = \int x(1+\sqrt{x}) dx = x\left(x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + C$

$2x + 2x\sqrt{x} + C = x(2 + 2\sqrt{x}) + C$

✓ تفریق صحیح

پیدا کردن انتگرال $\int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx$ با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ * تقریبی ۹۲

$\sin x - \cos x + C$ (۲)

$\sin x + \cos x + C$ (۱)

$-\sin x - \cos x + C$ (۴)

$-\sin x + \cos x + C$ (۳)

$$\int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$$

تجزیه صحیح ✓

پیدا کردن انتگرال $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} f(x) + C$ * تقریبی ۱۹

$1 + \sqrt{x} - \frac{1}{4}x$ (۴)

$2 - \sqrt{x} + \frac{1}{4}x$ (۳)

$2 - \sqrt{x} + \frac{1}{2}x$ (۲)

$1 - \sqrt{x} + \frac{1}{4}x$ (۱)

تجزیه صحیح ✓

پیدا کردن انتگرال $\int (2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \sqrt{x} f(x) + C$ * سوال

تجزیه صحیح ✓

$x - 2$ (۴)

$2x - 2$ (۳)

$3x - 2$ (۲)

$2x - 1$ (۱)

؟ $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} dx = \frac{f(x)}{x} + C$ * مثال *

نیزه ۲ ص ۲۰۰ ✓
—

$2-\sqrt{x}$ (۴) $1-2\sqrt{x}$ (۳) $x+\sqrt{x}$ (۲) $x-\sqrt{x}$ (۱)

؟ $\int \frac{dx^2+4x}{2\sqrt{x}} dx = f(x) \cdot \sqrt{x} + C$ * مثال *

نیزه ۴ ص ۲۰۰ ✓
—

x^2+2x (۴) x^2+2x (۳) $2x^2+2$ (۲) $2x^2+2$ (۱)

؟ $\int x(1-\sqrt{x}) dx = \frac{x^2}{2} f(x) + C$ * مثال *

نیزه ۱ ص ۲۰۰ ✓
—

$x-x\sqrt{x}$ (۴) $x-2\sqrt{x}$ (۳) $1-2\sqrt{x}$ (۲) $1-2\sqrt{x}$ (۱)

؟ $\int \frac{x^2-2x+d}{(x-1)^2} dx = \frac{x^2+f(x)}{x-1} + C$ * مثال *

$-2x+2$ (۴) $2x-2$ (۳) $-x-2$ (۲) $x-2$ (۱)

انتگرال ✓
 $\int \frac{x^2-2x+1+\epsilon}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(x-1)^2 + \epsilon}{(x-1)^2} dx = \int (1 + \frac{\epsilon}{(x-1)^2}) dx = x + \frac{\epsilon(x-1)^{-1}}{-1} + C$

$= x - \frac{\epsilon}{x-1} + C = \frac{x^2-x-\epsilon}{x-1} + C \rightarrow$

نیزه ۲ ص ۲۰۰ ✓
—

$\int \frac{dx^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} f(x) + C$
تقریبی با جدول

با استفاده از جدول و تقریب
 گزینه‌ها: $2x+3$ (۴) $2x+2$ (۳) $x+3$ (۲) $x+2$ (۱)

$\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} f(x) + C$
تقریبی با جدول

با استفاده از جدول و تقریب
 گزینه‌ها: $2x^2-1$ (۴) x^2-1 (۳) x^2-x (۲) $2x^2-x$ (۱)

$\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2}} dx = 2\sqrt{x} f(x) + C$
تقریبی با جدول

با استفاده از جدول و تقریب
 گزینه‌ها: x^2-2 (۴) x^2-x (۳) $\frac{2}{3}x^2-1$ (۲) $\frac{1}{3}x^2-2x$ (۱)

$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) + C$
تقریبی با جدول

با استفاده از جدول و تقریب
 گزینه‌ها: $x+2$ (۴) $x-2$ (۳) $2x-1$ (۲) $2x+2$ (۱)

با شرط $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ جواب $\int \sqrt{1+\tan^2 x} \sin x dx$ کدام است؟ * سوال

$2\sin x + C$ (f) $2\cos x + C$ (g) $-2\sin x + C$ (r) $-2\cos x + C$ (l)

$$\int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} \times \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{|\cos x|} \times \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{-\cos x} \times \sin x \cos x dx$$

$$= \int -\sin x dx = 2\cos x + C$$

نزینه صحیح ✓

جواب $\int (\tan^2 x - \cot^2 x) dx$ کدام است؟ * سوال

$\cot^2 x + C$ (f) $\tan^2 x + C$ (r) $\tan x + \cot x + C$ (r) $\tan x - \cot x + C$ (l)

$$\int (\tan^2 x + 1 - \cot^2 x - 1) dx = \int ((1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 x)) dx = \tan x + \cot x + C$$

نزینه صحیح ✓

جواب $\int \frac{x e^x - 1}{x} dx$ کدام است؟ * سوال

$e^x + \frac{1}{x} + C$ (f) $e^x - \frac{1}{x} + C$ (r) $e^x - \ln|x| + C$ (r) $e^x + \ln|x| + C$ (l)

$$\int (e^x - \frac{1}{x}) dx = e^x - \ln|x| + C$$

نزینه صحیح ✓

* تذکر مهم این فرم فقط با x باشد ساره می تونه و پس اشتغال می تونه و می آید تصحیح عبارت باشد با x باید ابتدا بصورت ساره کنه (معمولا آقا در زوج و ... فعلی کنه می کنه و پس اشتغال می تونه.

جواب $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$ برابر کدام است؟ * سوال

$x - \cos x + C$ (f) $-x + \cos x + C$ (r) $x - \sin x + C$ (r) $x + \sin x + C$ (l)

$$\int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} dx = x + \sin x + C$$

نزینه صحیح ✓

؟ (سوال) $\int \frac{x^r}{x-1} dx$ حاصل

$\ln|x-1| - rx + C$ (f) $x + \frac{1}{r} \ln|x-1| + C$ (r) $\frac{1}{r} \ln|x-1| - rx + C$ (r) $x + \ln|x-1| + C$ (1)

$\int \frac{x^{r-1} + 1}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = x + \frac{1}{r} \ln|x-1| + C$ ✓
 نتیجه صحیح -

؟ (سوال) $\int \frac{x^r + rx^r + rx + r}{(x+1)^r} dx$ حاصل

$\frac{x^r}{r} - x + \frac{1}{x+1} + C$ (r)

$\frac{x}{r} + x^r + \frac{1}{x+1} + C$ (1)

$\frac{x^r}{r} + x - \frac{1}{x+1} + C$ (f)

$\frac{(x+1)^r}{r} - x + \frac{1}{(x+1)^r} + C$ (r)

$\int \frac{(x+1)^r + 1}{(x+1)^r} dx = \int \left((x+1) + \frac{1}{(x+1)^r} \right) dx =$ ✓
 نتیجه صحیح -

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مبحث:

باتوجه به دو صحنه بنیادی (اساسی) حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

* معادله انتگرال معین

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

یعنی در تابع $F(x)$ بجای x ها a و b بنویسیم

($F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ می باشد یعنی $F'(x) = f(x)$ انتگرال)

پس ابتدا انتگرال را حل می کنیم و سپس $F(b) - F(a)$ را محاسبه می کنیم.

$$* \int_{-1}^1 (3x^2 - 4x + 2) dx = \left(x \frac{3x^2}{3} - \frac{4x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = F(1) - F(-1) =$$

$$(1^3 - 4(1)^2 + 2(1)) - ((-1)^3 - 2(-1)^2 + 2(-1)) = 4$$

$$* \int_{+1}^+ \frac{3x+4}{\sqrt{x}} dx = \int_{+1}^+ (3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}) dx =$$

ج: ۲۴

$$\int_1^2 \frac{(x+2)^2}{x} dx =$$

ج: $\frac{70}{3} + 14 \ln 2$

* روش مناسبه انتگرال معین در توابع (رای مدرصطلق)

ابتدا ریشه تابع درون مدرصطلق رای تابع و پس تعیین علامت می بینیم. حال با توجه به صدوری به تابع داخل مدرصطلق مثبت و منفی دهیم (با توجه به جدول تعیین علامت) حدود انتگرال گیری به دو قسمت (بافتنه قسمت) تقسیم می شود و پس انتگرال می گیریم.

* مثال حاصل انتگرال های زیر را بنویسید.

$$* 1) \int_{-1}^2 (x - |2x|) dx = \int_{-1}^0 (x - |2x|) dx + \int_0^2 (x - |2x|) dx =$$

\downarrow ریشه = 0 \downarrow در این بازه منفی است \downarrow در این بازه مثبت است

$$\int_{-1}^0 (x + 2x) dx + \int_0^2 (x - 2x) dx = \int_{-1}^0 3x dx + \int_0^2 (-x) dx =$$

$$\frac{3x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{-x^2}{2} \Big|_0^2 = (0 - \frac{3(-1)^2}{2}) + (\frac{-2^2}{2} - 0) = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2}$$

مثال ۹۲

$$\int_0^4 (2 - |x-2|) dx = \int_0^2 (2 + (x-2)) dx + \int_2^4 (2 - (x-2)) dx =$$

\downarrow ریشه = 2

۴ = ۲

* روش مناسبه انتگرال دارای جزء صحیح

جزء صحیح بعنوان یک ضرب (عدد) در انتگرال عمل می‌کنه و پس باید تابع را در فاصله مورد نظر طوری بشنیم که در هر یک از فواصل، جزء صحیح فقط یک مقدار داشته باشه.

$$1 < x < 2 \rightarrow [x] = 1$$

$$-1 < x < 0 \rightarrow [x] = -1$$

* کاراوری

* مثال حاصل انتگرال های زیر را بنویسید.

$$* 1) \int_0^3 [x](x+1) dx = \int_0^1 [x](x+1) dx + \int_1^2 [x](x+1) dx + \int_2^3 [x](x+1) dx$$

[x]=0 [x]=1 [x]=2

$$= \int_0^1 0(x+1) dx + \int_1^2 1(x+1) dx + \int_2^3 2(x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_1^2 + \left(\frac{2x^2}{2} + 2x\right) \Big|_2^3 = 3$$

$$* 2) \int_0^3 [x][x-1] dx = \int_0^1 [x][x-1] dx + \int_1^2 [x][x-1] dx + \int_2^3 [x][x-1] dx$$

$$= 0 + 0 + \int_2^3 2 dx = 2x \Big|_2^3 = 2(3-2) = 2$$

$$* 3) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{x}\right] \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \rightarrow 1 < \frac{1}{x} < 2 \rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-2} dx = \frac{-1}{x^{-1}} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{1}$$

تمرینات تستی شامل توابع فرد و زوج و متقارن

$$* \int_{-1}^2 (x + \ln|x|) dx = \int_{-1}^0 (x - x) (-1) dx + \int_0^1 (2x) (0) dx + \int_1^2 (2x + 1) dx =$$

$$x^2 \Big|_{-1}^2 = 4 - 1 = 3$$

تستی ۹۱

$$\int_{-1}^2 (\ln|x| - [x]) dx = \int_{-1}^0 (-x - (-1)) dx + \int_0^1 (x - 0) dx + \int_1^2 (x - 1) dx =$$

$$\left(-\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

تستی ۹۲ و ۹۳

$$\int_{-1}^2 (x + [x]) dx =$$

۶ = ۳

تستی ۹۴

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx =$$

باید در این مسئله دقت کرد

۰ (۴) : ۵ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = 2$$

تستی ۹۵

تستی ۹۶

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx =$$

تستی ۹۷

۵ (۴) ۲ (۳) ۲ (۲) ۵ (۱)

* تفریق ۹۳
 مقدار اشتراک همین
 $\int_{-1}^2 (x + [x]) dx$ ؟
 تفریق اصح -
 $\frac{1}{2}d(x) \quad y(x) \quad \frac{1}{2}d(x) \quad x(1)$

* تفریق ۹۵
 حاصل
 $\int_{-1}^1 (|2x-1| - [x]) dx$ ؟
 تفریق اصح -
 $4(x) \quad \frac{1}{2}(x) \quad 3(x) \quad \frac{1}{2}(1)$

* تفریق ۹۶
 حاصل
 $\int_{-1}^2 [x] |x| dx$ ؟
 تفریق اصح -
 $2(x) \quad \frac{1}{2}(x) \quad 1(x) \quad \frac{1}{2}(1)$

* سوال
 حاصل اشتراک
 $\int_0^2 \frac{x^2 - [x]}{x+1} dx$ ؟
 $1 + \ln 2(x) \quad \frac{1}{2} + \ln 2(x) \quad 1 - \ln 2(x) \quad \ln 2(1)$
 $\int_0^1 \frac{x^2 - 0}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1) + 1}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} dx =$

$\int_0^1 (x-1) dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^2 (x-1) dx = (x^2 - x)|_0^1 + \ln(x+1)|_0^1 + (x^2 - x)|_1^2 =$

تفریق اصح -

حل مثال * $\int_1^{14} [\sqrt{x}] dx$ حاصل است ؟

۳۴ (۴) ۳۲ (۳) ۳۱ (۲) ۳۰ (۱)

$$\int_1^{14} [\sqrt{x}] dx = \int_1^4 [\sqrt{x}] dx + \int_4^9 [\sqrt{x}] dx + \int_9^{14} [\sqrt{x}] dx = x|_1^4 + 2x|_4^9 + 2x|_9^{14} =$$

← ۳۴ نتیجه صحیح

حل مثال * $\int_0^4 \left[\frac{x}{2}\right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ حاصل است ؟

۲-√۲+Ln۲ (۴) ۲+√۲-Ln۲ (۳) ۴-۲√۲+Ln۲ (۲) ۴-۲√۲-Ln۲ (۱)

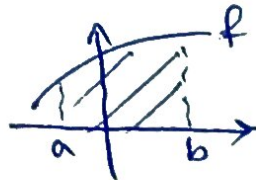
$$\int_0^2 \left[\frac{x}{2}\right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx + \int_2^4 \left[\frac{x}{2}\right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = 0 + \int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx =$$

← نتیجه صحیح

* بافتن مساحت معلوم

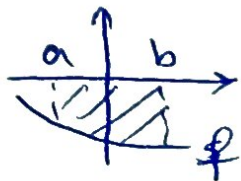
۱* مساحت مضامین معلوم به نمودار تابع با محور x ها :

الف) $f(x) \geq 0$



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

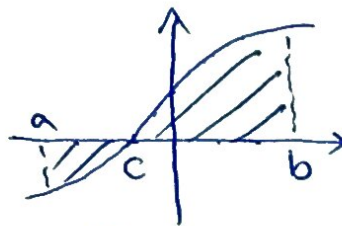
ب) $f(x) \leq 0$



$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

اگر نتیجه س یا به مثبت باشد

ج) $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$

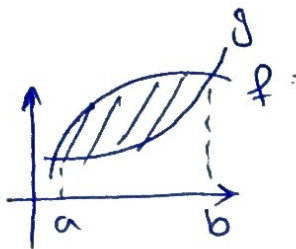


$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \int_c^b f(x) dx$$

معمولا نقطه c را در همان ابتدای تابع از طریق رابطه $f(x) = 0 \leftarrow c = x$ پیدا می‌کنیم

۲* مساحت مضامین معلوم به دو نمودار :

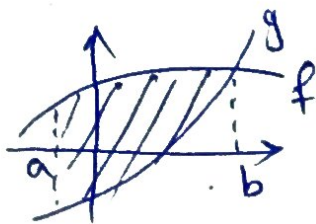
الف)



$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

a و b را در همان ابتدای تابع از طریق رابطه $f(x) = g(x) \leftarrow a, b$ پیدا می‌کنیم

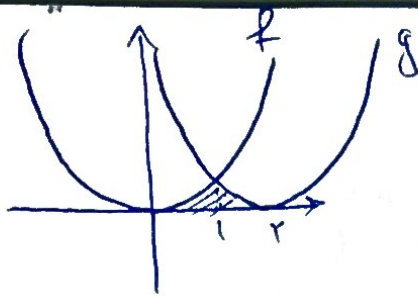
ب)



$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

تا از طریق حل طار $f(x) = g(x) \leftarrow a, b$ پیدا می‌کنیم

ج)



$$S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx$$

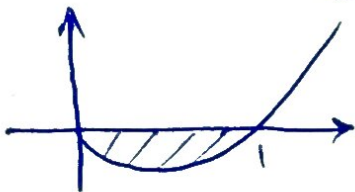
مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ ، محور x ها و نقاط $x=1$ و $x=-1$ * سوال ۹۰
 کدام است ؟ $\int_{-1}^1 (2x-1) dx$ $\int_{-1}^1 (-2x+1) dx$ $\int_{-1}^1 (2x-1) dx$ $\int_{-1}^1 (-2x+1) dx$

$$\int_{-1}^1 |2x-1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2x+1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx =$$

\downarrow
نقطه $x = \frac{1}{2}$

نیزه اصبع ✓

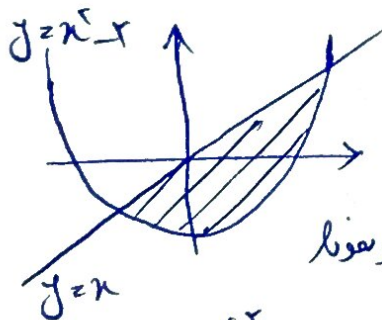
مساحت ناحیه سایه زده کدام است ؟ $f(x) = x - \sqrt{x}$ * سوال ۹۱



$$\int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$\int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

نیزه اصبع ✓



مساحت ناحیه سایه زده کدام است ؟ * سوال ۹۲

$$\int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2)) dx = 4.5$$

نقطه تقاطع بر محور x $x^2 - x = x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, 2$

$$S = \int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2)) dx = 4.5$$

نیزه اصبع ✓

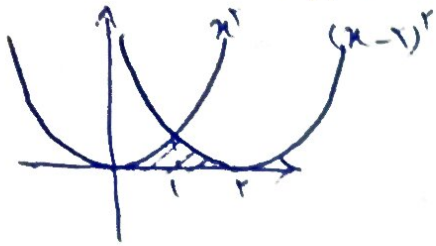
مساحت کوچکترین دایره $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ * سوال ۹۳

نقطه تقاطع بر محور x $x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x = 0, 1$ $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{4}$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{4}$$

نیزه اصبع ✓

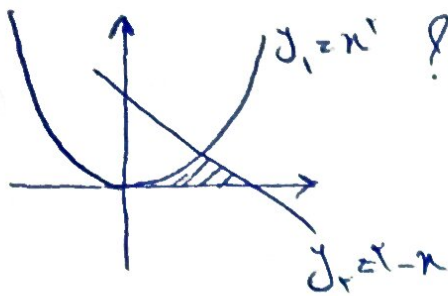
مساحت ناحیه محدود به یو صفتی به معارلات x^2 و $(x-1)^2$ و محور x ها کجاست؟



- ۱) $\frac{1}{3}$
- ۲) $\frac{2}{3}$
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{4}{3}$

$$\int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (x-1)^2 dx$$

گزینه ۳ صحیح



با توجه به شکل مقابل، مساحت ناحیه سایه زده چقدر است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$
- ۲) $\frac{7}{4}$
- ۳) $\frac{5}{4}$
- ۴) $\frac{2}{3}$

$$y_1 = y_2 \rightarrow x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, -2 \rightarrow x = 1$$

$$\int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx =$$

گزینه ۳ صحیح

مساحت ناحیه محدود به یو صفتی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & -x \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ و دو خط $x = -2$ و $x = 2$ کجاست؟

- ۱) ۸
- ۲) ۹
- ۳) ۱۰
- ۴) ۱۱

$$S = \left| \int_{-2}^0 x dx \right| + \left| \int_0^2 x^2 dx \right| =$$

گزینه ۳ صحیح

مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = x^2/|x|$ و خط به معارله $|x| = 8$ کجاست؟

$$x^2/|x| = 8 \rightarrow x^2 = 8|x|$$

- ۱) ۱۶
- ۲) ۱۸
- ۳) ۲۲
- ۴) ۲۴

$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = 2\sqrt{2} \\ x < 0 \rightarrow -x^2 = 8 \rightarrow x = -2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow S = \left| \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (8 - x^2/|x|) dx \right| =$$

$$\left| \int_{-2\sqrt{2}}^0 (8 + x^2) dx \right| + \left| \int_0^{2\sqrt{2}} (8 - x^2) dx \right| = 24$$

گزینه ۳ صحیح

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$A = \pi r^2$$

سوابق تحصیلی

- | | | | |
|---|---|---|---|
| ✓ | مؤلف کتابهای گنگور | ✓ | مدرس رسمی آموزش و پرورش |
| ✓ | عضو انجمن ریاضیدانان و فیزیکدانان ایران | ✓ | عضویت مدیره موسسه تبلیحان |
| ✓ | مشاور تحصیلی در برنامه های رادیویی رادیو جوان، اقتصاد رادیو فرسنگ و شبکه ۴ صدا و سیما جمهوری اسلامی ایران | ✓ | |
| ✓ | تهنادلنده مدرک برنامه ریزی و مشاوره تحصیلی از دانشگاه آکسفورد انگلستان در استان | ✓ | |
| ✓ | دولنده پروانه اشتغال از سازمان نظام مهندسی کشور | ✓ | مدرس برتر ریاضیات و فیزیک المپاد و گنگور |
| ✓ | برگزیده کننده هایش همی طلایی ضربتی گنگور در استان های تهران - تبریز و گیلان | ✓ | |
| ✓ | عضو انجمن علمی مهندسان برق ایران | ✓ | عضو باشگاه مهندسان ایران |
| ✓ | عضو انجمن علمی تبلیحان جوان | ✓ | عضو مرجع تخصصی ایران |
| ✓ | عضو انجمن علمی پژوهشگران جوان | ✓ | عضو انجمن مهندسی بهره داری صنعت برق ایران |
| ✓ | عضو انجمن خبرگان گنگور | ✓ | عضو انجمن مهندسی برق و الکترونیک ایران |