در تدوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر نیز استفاده شده و ندرتاً برخی از سؤالات که از نظر نگارنده غیرقابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱ـ حرف آخر (مهندس منتظری)

۲ـ دیفرانسیل تخته سیاه (مهندس مهربان)

۳ـ ریاضی یازدهم خیلی سبز

۴ـ سه سطحی قلم چی

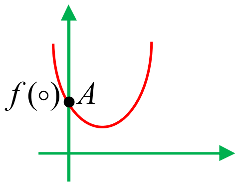
۵ـ ریاضی دهم و یازدهم (خیلی سبز)

۶ـ حسابان (خیلی سبز)

تشخیص علامت های a , b , c از روی نمودار $f(x)=ax^2+bx+c$

❖ تشخیص c

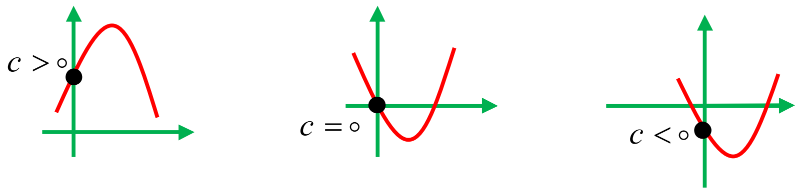
در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ عرض از مبدأ برابر است با:



$$f(0)=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow f(0)=c$$

مقدار c، عرض منحنی $f(x)=ax^2+bx+c$ در $x=0$ می باشد.

✍ **مثال:** شکل های زیر، نمودار تابع هستند. در هر مورد علامت c رو مشخص کنید.



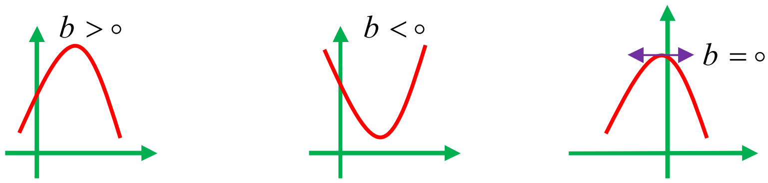
❖ تشخیص b

شیب منحنی $f(x)=ax^2+bx+c$ در $x=0$ برابر است با:

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(0)=b$$

مقدار b، شیب منحنی $f(x)=ax^2+bx+c$ در $x=0$ می باشد.

✍ **مثال:** شکل های زیر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند. در هر مورد علامت b رو مشخص کنید.



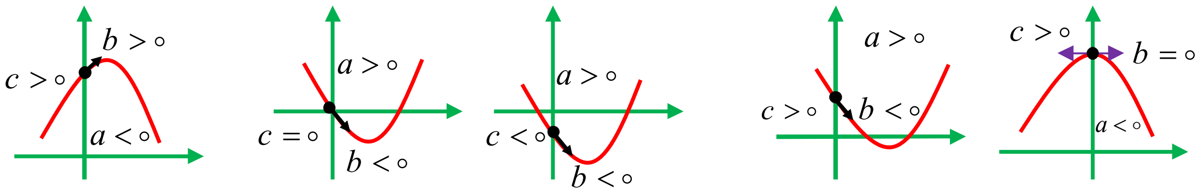
جمع بندی: $f(x)=ax^2+bx+c$

a ↓ همه‌ی شما می دونید

b ↓ شیب منحنی در $x=0$

c ↓ عرض از مبدأ منحنی (عرض منحنی در $x=0$)

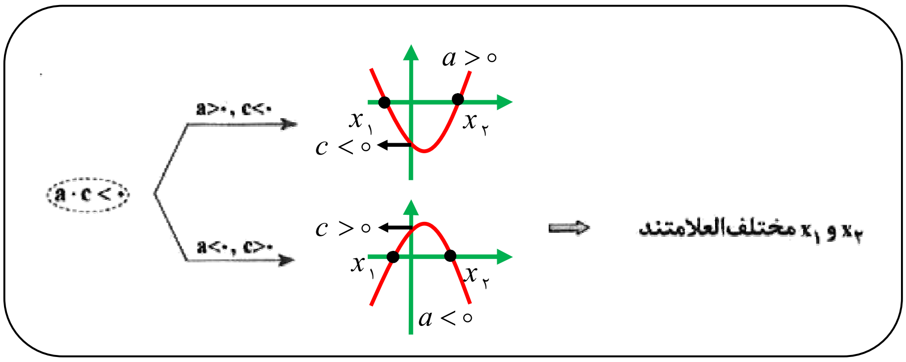
مثال: شکل های زیر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند. در هر شکل علامت a و b و c را معلوم کنید.



نقش علامت های a و c در تعداد ریشه های تابع درجه‌ی دو

اگه در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ دیدید که a و c مختلف العلامتند، ۱۰۰٪ مطمئن باشید که تابع دو ریشه داره، اونهم دو ریشه‌ی مختلف العلامت.

x_1,x_2 مختلف العلامت $\Leftrightarrow$ a و c مختلف العلامت و معادله درجه دوم از هر چهار ناحیه مختصات می گذرد



سؤال۱: کدام یک از معادلات زیر به ازای جمع مقادیر k، دو ریشه حقیقی منفی دارد؟

۱) $x^2+kx+k^2+1=0$

۲) $x^2+(k^2+1)x+k-2=0$

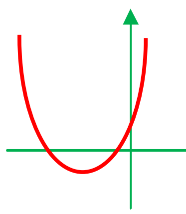
۳) $x^2-(k^2+1)x+k^2=0$

۴) $x^2+(k^2+3)x+k^2+2=0$

پاسخ: گزینه (۴)

در چهار گزینه $a>0$

تنها در گزینه (۴) $b>0$است.



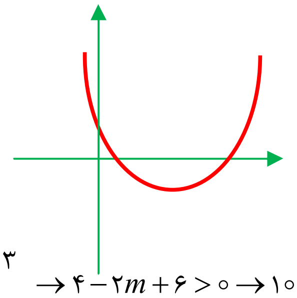
$a>0$

$b>0$

$c>0$

📖 **سؤال۲: اگر منحنی به معادله $y=2x^2-4x+m-3$، محور x ها را در دو نقطه با طول مثبت قطع کند. آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ۸۷)**

$a>0, b<0$



$\Rightarrow c>0$

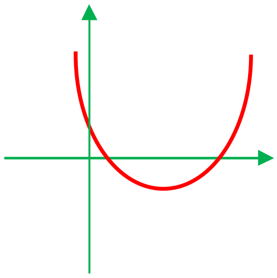
$$\begin{cases} c>0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m-3>0 \rightarrow m>3 \\ (-2)^2-2(m-3)>0 \end{cases} \rightarrow 4-2m+6>0 \rightarrow 10-2m>0$$

$$\begin{cases} m>3 \\ 10>2m \rightarrow m<5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 3<m<5$$

📖 **سؤال۳: به ازای کدام مقادیر m، معادله $3x^2+(m-5)x+2=m$ دارای دو ریشه متمایز مثبت است؟ (سنجش)**

$$3x^2+(m-5)x+(2-m)=0$$

$a>0$



$$\begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ c>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$$

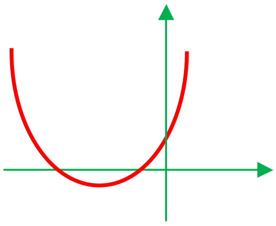
$$\begin{cases} m-5<0 \rightarrow m<5 \\ 2-m>0 \rightarrow m<2 \rightarrow m<2 \\ (m-5)^2-4(3)(2-m)>0 \rightarrow m^2-10m+25-24+12m>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m<2 \\ m^2+2m+1>0 \rightarrow (m+1)^2>0 \rightarrow m\neq -1 \end{cases} \Rightarrow m<2-\{-1\}$$

📖 **سؤال۴: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $(1-m)x^2+x+m-2=0$ از هر چهار ناحیه مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟**

$$\left.\begin{matrix} a.c<0 \rightarrow (1-m)(m-2)<0 \rightarrow (m-1)(m-2)>0 \rightarrow m>2 \cup m<1 \quad (1) \\ 1-m<0 \rightarrow m>1 \quad (2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(1)\cap(2)} m>2$$

📖 **سؤال۵: نمودار تابع $y=x^2-(a^2-a-6)x+a$ شکل مقابل است. در معادله $x^2+(a-1)x+1=0$ ریشه ها چگونه است؟ (تقدیم به دانش آموزای باهوشم)**



$$\begin{cases} a>0 \\ c>0 \\ b>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -(a^2-a-6)>0 \\ a>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a^2-a-6)<0 \rightarrow (a-3)(a+2)<0 \\ a>0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}-۲<a<۳\\ a>۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۰<a<۳$$

$$x^۲+(a-۱)x+۱=۰$$

$$\Delta=(a-۱)^۲-۴$$

$$۰<a<۳\rightarrow -۱<(a-۱)<۲\rightarrow ۰\leq(a-۱)^۲<۴$$

$\Rightarrow -۴\leq(a-۱)^۲-۴<۰\rightarrow -۴\leq\Delta<۰$ معادله ریشه حقیقی ندارد

◀◀نکته: هرگاه در یک چند جمله ای مجموع ضرایب صفر باشد آنگاه چند جمله ای بر $x-۱$ بخش پذیر است یعنی $x=۱$ یک ریشهٔ آن است.

📖 سؤال ۶: **عبارت های زیر را تجزیه کنید.**

•) $۵x^۳+۶x^۲-۷x-۴$

$$\begin{array}{c|cccc} & ۵ & ۶ & -۷ & -۴\\ ۱ & \downarrow & ۵ & ۱۱ & ۴\\ \hline & ۵ & ۱۱ & ۴ & ۰\end{array}$$

$$(x-۱)(۵x^۲+۱۱x+۴)$$

•) $x^۳-۳x+۲$

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۰ & -۳ & ۲\\ ۱ & \downarrow & ۱ & ۱ & -۲\\ \hline & ۱ & ۱ & -۲ & ۰\end{array}$$

$$(x-۱)(x^۲+x-۲)=(x-۱)(x-۱)(x+۲)=(x-۱)^۲(x+۲)$$

📖 سؤال ۷: **به ازای کدام مقادیر a معادلهٔ $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است.**

(خارج تجربی ۹۴) (با اندکی تغییر)

۱) $a<-۴-\{-۵\}$ ۲) $a>-۴$ ۳) $a<۴-\{-۵\}$ ۴) $a>۴-\{۵\}$

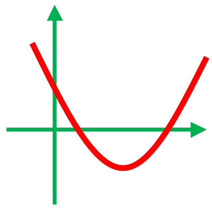
$$x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=۰$$

مجموع ضرایب این معادله درجهٔ سوم صفر است پس بر $x-۱$ بخش پذیر است خارج قسمت را به روش هورنر بدست می آوریم:

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & (a-۱) & (۴-a) & -۴\\ ۱ & \downarrow & ۱ & a & ۴\\ \hline & ۱ & a & ۴ & ۰\end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=(x-۱)(x^۲+ax+۴)$$

معادلهٔ بالا دارای ریشهٔ مثبت $x=1$ است. پس برای اینکه معادلهٔ درجه سوم بالا دارای سه ریشهٔ حقیقی مثبت باشد باید معادلهٔ $x^2+ax+4=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد.



$$\begin{cases} x \text{ ضریب } = a<0 & (1) \\ \Delta>0 \Rightarrow a^2-16>0 \Rightarrow a^2>16 \Rightarrow a>4 \cup a<-4 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} a<-4$$

** حواستون رو جمع کنین $x=1$ نباید ریشهٔ معادلهٔ $x^2+ax+4=0$ باشد یعنی $x=1$ نباید $x^2+ax+4=0$ رو صفر کنه.

$$(1)^2+a(1)+4\neq 0 \Rightarrow a\neq -5$$

زیرا اگر $a=-5$ باشد:

$$(x-1)(x^2+ax+4)\underline{\underline{a=-5}}(x-1)(x^2-5x+4)=(x-1)(x-1)(x-4)$$

$$=(x-1)^3(x-4)\Rightarrow \text{ ریشه ها } :1,4$$

همانطور که می بینید به ازای $a=-5$ ، ۳ ریشهٔ حقیقی متمایز نداریم پس : $a<-4-\{-5\}$

◀◀ نکته: هرگاه در یک چندجمله ای مجموع ضرایب توان های زوج با مجموع ضرایب توان های فرد برابر باشد این چند جمله ای بر $x+1$ بخش پذیر است یعنی $x=-1$ یک ریشهٔ آن است

📖 سؤال ۸: **عبارت های زیر را تجزیه کنید.**

•) $6x^3+7x^2+9x+8$

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 7 & 9 & 8 \\ -1 & \downarrow & -6 & -1 & -8 \\ \hline & 6 & 1 & 8 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(6x^2+x+8)$$

•) x^3-3x^2+4

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & \downarrow & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$$

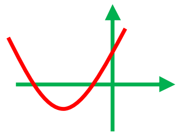
📖 سؤال۹: **تمام محدودهٔ a کدام باشد تا معادلهٔ $x^3+(a+1)x^2+(a+4)x=-4$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز منفی باشد؟ (مشابه کنکور خارج تجربی ۹۴)**

۱) $a<4-\{3\}$ ۲) $a<-4$ ۳) $a>4-\{5\}$ ۴) $a<-4-\{-5\}$

چون مجموع ضرایب توان های فرد با مجموع ضرایب توان های زوج با هم برابرند، عبارت درجهٔ سوم بالا بر $x+1$ بخش پذیر است ($x=-1$ عبارت بالا را صفر می کند.) پس: $x^3+(a+1)x^2+(a+4)x+4$ را بر $x+1$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & (a+1) & (a+4) & 4 \\ -1 & & -1 & -a & -4 \\ \hline & 1 & a & 4 & 0 \end{array}$$

$$x^3+(a+1)x^2+(a+4)x+4=(x+1)(x^2+ax+4)$$

برای اینکه معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی منفی باشد باید معادلهٔ درجهٔ دوم x^2+ax+4 دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد یعنی به صورت  باشد.

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب} >0 \\ b>0 \\ c>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 & (1) \\ \Delta=a^2-16>0 \to \begin{cases} a>4 \\ \text{یا} \\ a<-4 \end{cases} & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} a>4$$

اما توجه کنید چون در صورت سوال گفته سه ریشهٔ متمایز پس $x=-1$ نباید ریشهٔ x^2+ax+4 باشد پس $1-a+4\neq 0$ یعنی a نباید برابر ۵+ باشد زیرا اگر a برابر ۵باشد داریم:

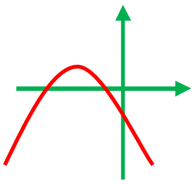
$$(x+1)(x^2+5x+4)=(x+1)(x+1)(x+4)$$

یعنی دارای سه ریشهٔ ۱-، ۱-، ۴- خواهد بود که با صورت مسأله (متمایز) در تضاد است.

📖 **سؤال ۱۰:** به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز منفی است. (داخل تجربی ۹۷)

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

$$\left.\begin{array}{l} m-6<0 \Rightarrow m<6 \\ -2m<0 \Rightarrow m>0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0<m<6 \quad (1)$$



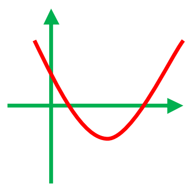
$$\Delta'>0:(-m)^2-(m-6)(-3)>0 \Rightarrow m^2+3m-18>0 \Rightarrow (m+6)(m-3)>0 \Rightarrow \begin{cases} m>3 \\ \text{یا} \\ m<-6 \end{cases} \quad (2)$$

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 3<m<6$ گزینه۴ درست است

📖 **سؤال ۱۱:** به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+(m-2)x+m+1=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است. (خارج تجربی۹۷)

۱) $-1<m<0$ ۲) $m<0$ ۳) $2<m<8$ ۴) $m>8$

$$\left.\begin{array}{l} m-2<0 \Rightarrow m<2 \\ m+1>0 \Rightarrow m>-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1<m<2 \quad (1)$$



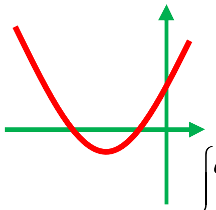
$$\Delta>0:(m-2)^2-4(1)(m+1)>0 \Rightarrow m^2-4m+4-4m-4>0 \Rightarrow m^2-8m>0$$

$$\Rightarrow m(m-8)>0 \Rightarrow \begin{cases} m>8 \\ \text{یا} \\ m<0 \end{cases} \quad (2)$$

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -1<m<0$ گزینه ۱ درست است.

سؤال ۱۲: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادلهٔ $(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور x ها را در دو نقطهٔ با طول های منفی قطع می کند. (ریاضی داخل ۹۵)

۱) $m>2$ ۲) $-1<m<2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

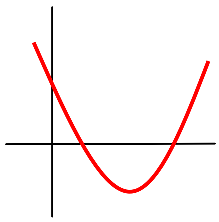


گزینه (۴) درست است.

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \Rightarrow \begin{array}{ll} m-2>0 \Rightarrow m>2 & (1) \\ -2(m+1)>0 \Rightarrow m+1<0 \Rightarrow m<-1 & (2) \end{array} \\ c>0 \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} \phi$$

سؤال ۱۳: به ازای کدام مقدار a ، معادلهٔ درجه دوم $x^2-2(a-2)x+(14-a)=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. (داخل ریاضی ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<4$ ۴) $5<a<14$



$$\begin{cases} x^2_{\text{ضریب}}>0 \\ b<0 \\ c>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$$

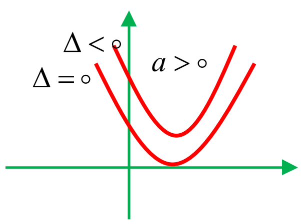
$$\left.\begin{cases} -2(a-2)<0 \Rightarrow a-2>0 \Rightarrow a>2 & (1) \\ 14-a>0 \Rightarrow a<14 & (2) \end{cases}\right\} \Rightarrow 2<a<14 \qquad (\mathrm{I})$$
$$\Delta'=(-(a-2))^2-(1)(14-a)>0$$

$$\begin{cases} 2<a<14 \\ (a-2)^2-(14-a)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2<a<14 \\ a^2-4a+4-14+a>0 \Rightarrow a^2-3a-10>0 \Rightarrow (a-5)(a+2)>0 \end{cases}$$

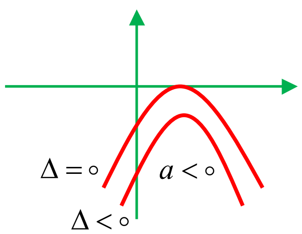
$$\begin{cases} 2<a<14 & (I) \\ \left.\begin{array}{l} a>5 \\ a<-2 \end{array}\right\} & (II) \end{cases} \Rightarrow (I)\cap(II) \Rightarrow 5<a<14$$

عبور نمودار تابع درجه‌ی دوم از نواحی مختلف

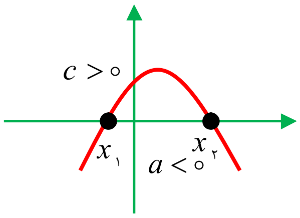
نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ در چه صورت از :
- ۲ ناحیه عبور می کند؟
- ۳ ناحیه عبور می کند ؟
- ۴ ناحیه عبور می کند ؟

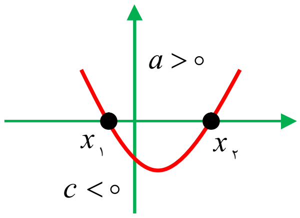


اگه $\Delta\le 0$ و
- $a>0$ ← نمودار تابع حتماً از دو ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور می کند. یعنی:
- $a<0$ ← نمودار تابع حتماً از دو ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور می کند. یعنی:



اگر و نمودار حتماً دو ریشه مختلف العلامت داره و از هر ۴ ناحیه عبور می کنه.





سؤال ۱۴: به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادلهٔ $y=(m+2)x^{2}+3x+1-m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند.(خارج ریاضی ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) $m<-2$ ۴) $m>1$

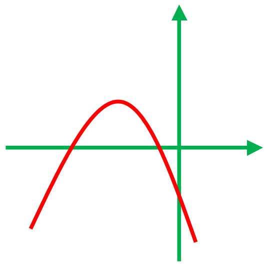
باید $ac<0$ شود پس:

$$(m+2)(1-m)<0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -2 & & 1 & \\ - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow \begin{cases} m>1 \\ \text{یا} \\ m<-2 \end{cases}$$

گزینه (۱) درست است.

سؤال ۱۵: به ازای چه مقادیری از k سهمی $f(x)=(k-1)x^{2}+2(k+1)x+k+2$ فقط از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات عبور نمی کند.

۱) $-1<k<1$ ۲) $-2\le k<1$ ۳) $-3<k\le 2$ ۴) $-3<k\le -1$



$$\begin{cases} (k-1)<0 \Rightarrow k<1 \\ 2(k+1)<0 \Rightarrow k<-1 \\ k+2\le 0 \Rightarrow k\le -2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k\le -2 \qquad (1)$$

$$\Delta'>0 \Rightarrow (k+1)^{2}-(k-1)(k+2)>0$$

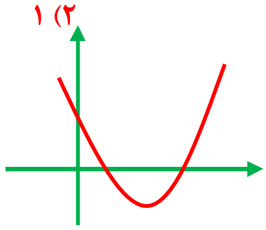
$$\Rightarrow (k+1)^{2}-(k^{2}+k-2)>0 \Rightarrow (k^{2}+2k+1)-(k^{2}+k-2)>0$$

$$\Rightarrow k+3>0 \Rightarrow k>-3 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -3<k\le -2$$

سؤال ۱۶: به ازای چند مقدار صحیح m نمودار تابع درجهٔ دوم $y=\frac{m}{4}x^{2}+(m-4)x+2$ فقط از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات عبور نمی کند.

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳



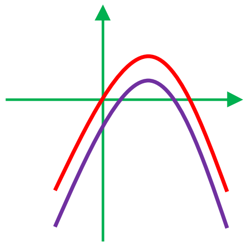
$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{4}>0 \Rightarrow m>0 \\ m-4<0 \Rightarrow m<4 \end{array}\right\} \Rightarrow 0<m<4 \qquad (1)$$

$$\Delta>0:(m-4)^2-4\left(\frac{m}{4}\right)(2)>0\Rightarrow m^2-8m+16-2m>0\Rightarrow m^2-10m+16>0$$

$$(m-2)(m-8)>0\Rightarrow\begin{cases}m>8\\ \text{یا}\\ m<2\end{cases}\quad(2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)}0<m<2\xrightarrow{m\in Z}m=1$$

📖 سؤال ۱۷: تمام محدودهٔ m تا معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-2)x^2+2x+1-m=0$ فقط از ناحیهٔ دوم عبور نکند. (قلم‌چی)



$$\left.\begin{array}{l}(m-2)<0\Rightarrow m<2\\ 1-m\le 0\Rightarrow m\ge 1\end{array}\right\}\Rightarrow 1\le m<2\ (1)$$

$$\Delta'>0\Rightarrow 1-(m-2)(1-m)>0\Rightarrow m^2-3m+3>0$$

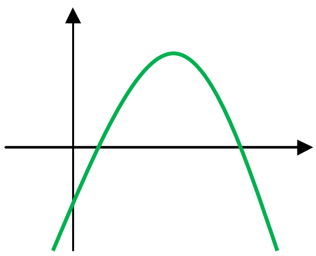
$$\Rightarrow\begin{cases}m^2\ \text{ضریب}\ >0\\ \Delta=9-12<0\end{cases}$$ همواره مثبت است

جواب $\Rightarrow 1\le m<2$

📖 سؤال۱۸: به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیه اول عبور نمی کند؟ (سراسری ۹۲)

۱) $a\le 2$ ۲) $0<a\le 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

می دانیم اگر ضریب x^2 بزرگتر یا مساوی صفر باشه، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می گذرد، پس حتماً باید ضریب x^2 کوچکتر از صفر باشد یعنی $a-3<0\Rightarrow a<3$ حالا با توجه به شرط $a<3$ تابع ماکزیمم دار می شه، حالا مقادیری از a رو پیدا می کنیم که منحنی از ناحیه‌ی اول بگذرد:

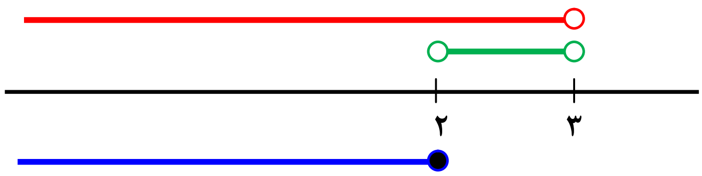


$$\Delta>0\Rightarrow a^2-4(a+3)(-1)=a^2+4a-12>0$$

$$\begin{cases}(a+6)(a-2)>0\Rightarrow a>2\cup a<-6 & (1)\\ b\ \text{ضریب}\Rightarrow a>0 & (2)\\ x^2\ \ <0\Rightarrow a-3<0\Rightarrow a<3 & (3)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)}2<a<3$$

تحت این شرایط نمودار حتماً از ناحیه‌ی اول می گذرد پس این مجموعه جواب رو از شرط $a<3$ کم می کنیم و جواب بدست می آید:

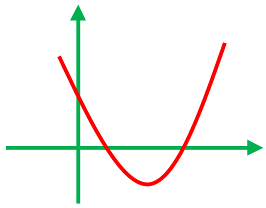


$$a<3-2<a<3=a\le 2$$

سؤال۱۹: تمام محدودهٔ a کدام باشد تا معادلهٔ درجهٔ دوم $(a+6)x^2+(a-2)x+1$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور نکند.

۱) $-6<a<-2$ ۲) $a\le -6$ ۳) $a\ge -2$ ۴) $a>5$

می دانیم اگر ضریب x^2 $(a+6>0)$ مثبت باشد معادلهٔ درجهٔ دوم رو به بالاست حال حالت هایی که ضریب x^2 مثبت و معادلهٔ درجهٔ دوم به طور کامل از ناحیهٔ چهارم عبور می کند را از $a+6>0$ کم می کنیم:



$$\begin{cases} x^2 \quad >0 \Rightarrow a+6>0 \Rightarrow a>-6 \Rightarrow \\ b<0 \Rightarrow a-2<0 \Rightarrow a<2 \end{cases} \to -6<a<2 \qquad (1)$$
$$\Delta>0 \Rightarrow (a-2)^2-4(a+6)>0$$

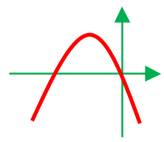
$$a^2-4a+4-4a-24>0 \Rightarrow a^2-8a-20>0 \Rightarrow (a-10)(a+2)>0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a>10 \\ a<-2 \end{cases} (2) \xrightarrow{(1)\cap(2)} -6<a<-2$$

حال اگر از $a>-6$ ، $-6<a<-2$ را کم کنیم $a\ge -2$ به دست می آید.

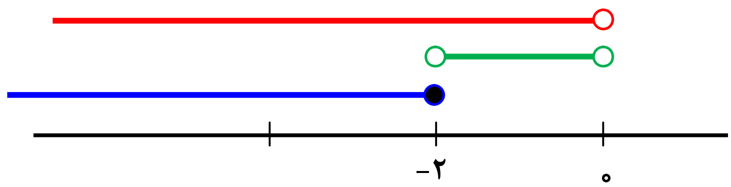
سؤال۲۰: به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی گذرد؟ (سراسری ۸۹)

۱) $a\le 2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\le -2$ ۴) $-2\le a<0$

شرط لازم برای اینکه از ناحیهٔ دوم عبور نکند این است که معادلهٔ درجهٔ دوم رو به پایین باشد $(a<0)$ اکنون از تمام معادلات درجهٔ دوم رو به پایین آنهایی که بطور کامل از ناحیهٔ دوم عبور می کنند را کم می کنیم.

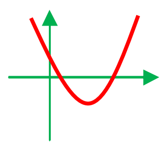


$$\begin{cases} a<0 \\ -(a+2)<0 \end{cases} \to \begin{cases} a<0 \\ a+2>0 \end{cases} \longrightarrow -2<a<0$$



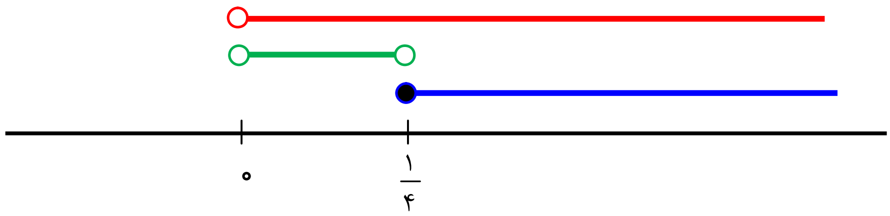
سؤال۲۱: تمام محدودهٔ k را طوری تعیین کنید که منحنی $x^2-x+k=0$ از ناحیهٔ چهارم نگذرد. (قلم چی)

از تمام معادلات رو به بالا، آنهایی که بطور کامل از ناحیهٔ چهارم عبور می کنند را کم می کنیم.



$$\begin{cases} k>0 \quad (1) \\ \Delta>0 \Rightarrow 1-4k>0 \Rightarrow k<\frac{1}{4} \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} 0<k<\frac{1}{4}$$

توجه کنید اگر $k<۰$ باشد حتماً از ناحیهٔ چهارم می گذرد پس برای اینکه از ناحیهٔ چهارم نگذرد، حتماً باید $k>۰$ باشد.

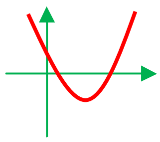


جواب: $k\geq \frac{۱}{۴}$

📖 **سؤال۲۲: تمام محدودهٔ m را بیابید بطوریکه منحنی $mx^۲+(m+۳)x+۱$ از ناحیهٔ چهارم عبور نکند. (قلم چی)**

شرط لازم برای اینکه منحنی از ناحیهٔ چهارم عبور نکند این است که رو به بالا باشد ($m>۰$)

$$\begin{cases} m>۰ \\ m+۳<۰ \Rightarrow m<۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \phi$$



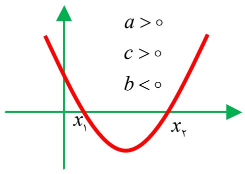
$$\longrightarrow m>۰-\{\ \}=\mathrm{m}>۰$$

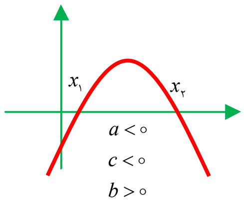
بررسی معادلات دومجذوری ($ax^۴+bx^۲+c=۰$)

فرض می کنیم که $x^۲=t$ پس معادله فوق به معادله $at^۲+bt+c=۰$ در میآید که همون معادله درجه دوم خودمونه.

۱) تابلو هست که اگه $\Delta<۰$ این معادله کوچکتر از صفر باشه معادله اصلاً ریشه ندارد. پس باید روی حالت های $\Delta>۰$ و $\Delta=۰$ بحث کنیم.

۱) $\Delta=b^۲-۴ac>۰$





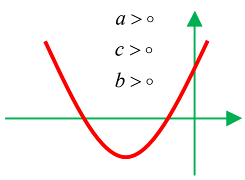
در این حالت برای t دو ریشه مثبت داریم پس:

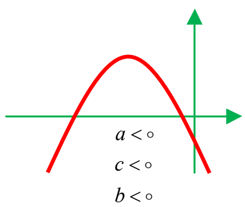
$$x^۲=x_۱>۰ \rightarrow x=\pm\sqrt{x_۱}$$
$$x^۲=x_۲>۰ \rightarrow x=\pm\sqrt{x_۲}$$

پس در این حالت معادله دو مجذوری چهار ریشه حقیقی دارد که دو به دو قرینه یکدیگرند.

پس شرط اینکه معادله دو مجذوری دارای چهار ریشه حقیقی باشد مانند این است که این حالت را بررسی کنیم که معادله درجه دوم دارای و ریشه حقیقی مثبت باشد. $\Delta>۰$

۲) $\Delta>۰$

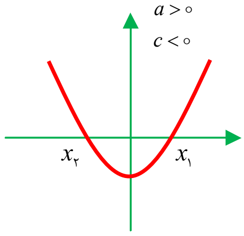


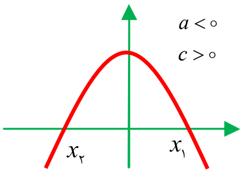


در این حالت برای t دو ریشه منفی دارد اما $t=x^۲$ پس در این حالت معادله دو مجذوری ریشه ندارد.

پس شرط اینکه معادله دو مجذوری دارای ریشه حقیقی نباشد مانند این است که این حالت را بررسی کنیم که معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد. $\Delta > 0$

۳) $\Delta > 0$



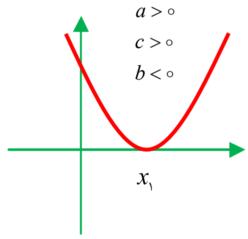


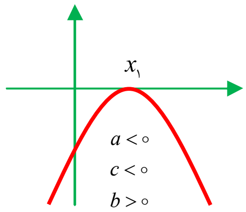
در این حالت برای t دو جواب x_2,x_1 رو داریم اما $t=x^2 \geq 0$ پس با x_2 کاری نداریم: $t=x^2=x_1>0 \rightarrow x=\pm\sqrt{x_1}$

یعنی معادله دومجذوری دارای دو ریشه حقیقی و قرینه هم می باشد.

پس: شرط اینکه معادله دو مجذوری دارای دو ریشه حقیقی باشد مانند این است که این حالت را بررسی کنیم که معادله درجه دوم از چهار ناحیه می گذرد یا همون $a.c<0$.

۴) $\Delta = 0$

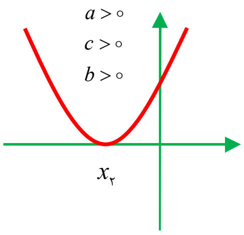


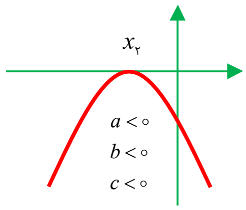


در این حالت $t=x^2=x_1>0$ یا $x=\pm\sqrt{x_1}$ دو ریشه حقیقی و قرینه هم خواهد داشت.

پس در حالت $\Delta=0$، شرط اینکه معادله دو مجذوری دارای دو ریشه حقیقی قرینه و متمایز باشد این است که a,c هم علامت و b مخالف علامت a,c باشد.

۵) $\Delta = 0$



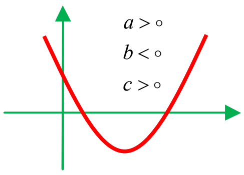


در این حالت $t=x^2=x_2<0$ که نشان میدهد معادله جواب ندارد.

پس در حالت $\Delta=0$، شرط اینکه معادله دو مجذوری دارای دو ریشه حقیقی نباشد این است که a,b,c هم علامت باشند.

📖 **سؤال ۲۳: اگر معادله $mx^4-4x^2+m-3=0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد محدوده m کدام است؟**

تو این سؤال $b<0$ است.

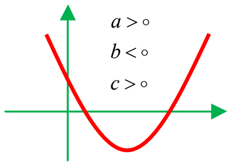


$$\begin{cases}\Delta>۰\to(-۴)^۲-۴m(m-۳)>۰\Rightarrow ۱۶-۴m(m-۳)>۰\\ \Rightarrow ۴-m^۲+۳m>۰\Rightarrow m^۲-۳m-۴<۰\\ \to(m+۱)(m-۴)<۰\to -۱<m<۴\\ \left.\begin{array}{l}a>۰\to m>۰\\ c>۰\to m-۳>۰\to m>۳\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} m>۳\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۳<m<۴$$

سؤال ۲۴: در مورد تعداد ریشه های معادلات دو مجذوری زیر بحث کنید؟

۱) $x^۴-۴x^۲+۱$

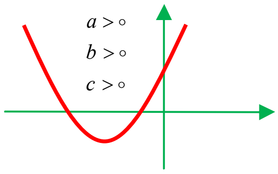
$\Delta=۱۶-۴>۰$



چهار ریشه حقیقی دارد که دو به دو قرینه یکدیگرند.

۲) $x^۴+۳x^۲+۱=۰$

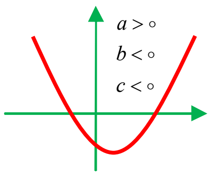
$\Delta=۹-۴>۰$



در این حالت معادله دو مجذوری ریشه حقیقی ندارد.

۳) $x^۴-۲x^۲-(m^۲+۱)=۰$

$\Delta=۴+۴(m^۲+۱)>۰$



معادله دو ریشه حقیقی و قرینه هم دارد.

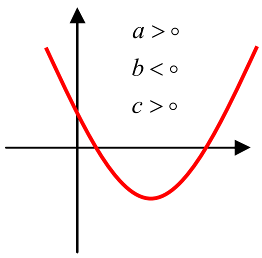
۴) $x^۴-۲x^۲+۵=۰$

$\Delta=-۴-۴\times۵<۰$

معادله اصلاً ریشه ندارد.

سؤال ۲۵: اگر معادله $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ۸۵)

$a>۰$ و $\Delta>۰$ و باید

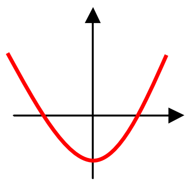


$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}-(m+۲)<۰\to m+۲>۰\to m>-۲\\ m+۵>۰\to m>-۵\end{array}\right\}\longrightarrow m>-۲\\ \Delta=(m+۲)^۲-۴(m+۵)=m^۲-۱۶>۰\to m>۴\cup m<-۴\end{cases}$$

اشتراک: $m>۴$

سؤال ۲۶ : به ازای کدام مقادیر a ، معادله $3x^4+5x^2+a^2-1=0$ فقط دو جواب قرینه هم برای x دارد؟

$$\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \longrightarrow \\ c<0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad ac<0 \Rightarrow c<0$$

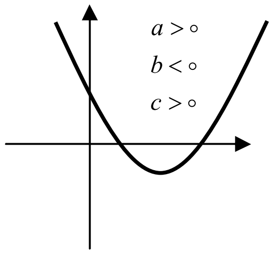
$$C<0 \to a^2-1<0 \to a^2<1 \to -1<a<1$$

حالت $\Delta=0$ امکان پذیر نیست چون در این حالت باید $b<0$ باشد که در مسئله $b>0$ است. پس جواب مسئله $|a|<1$ یا $-1<a<1$ است.

سؤال ۲۷: به ازای کدام مقادیر m از معادله $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟

(خارج از کشور)

با فرض $\sqrt{x}=A$ داریم $A^2-2A+m-1=0$ و $A\geq 0$ چون قراره که دو جواب داشته باشه که هر دو مثبت باشند یعنی پس حالت زیر رو داریم:

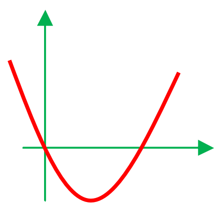


$$\begin{cases} \Delta>0 \\ C>0 \end{cases} \to \begin{cases} 4-4(1)(m-1)>0 \to 1-(m-1)>0 \to 2-m>0 \to m<2 \\ m-1>0 \to m>1 \end{cases}$$

بچه ها توجه کنین که اگه $C=0$ باشه معادله به صورت $x-2\sqrt{x}=0$ یا $\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)=0$ در میآد که دو جواب $x=0,4$ را دارد پس جواب معادله $1\leq m<2$ است.

سؤال ۲۸: معادلهٔ $x^4+(m+1)x^2+(m^2+m-2)=0$ سه ریشه دارد چند مقدار برای m وجود دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر



معادلهٔ دو مجذوری زمانی می تواند سه ریشه داشته باشد که

یکی از ریشه ها صفر باشد یعنی معادلهٔ

$t^2+(m+1)t+(m^2+m-2)=0$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} a>0 \\ b<0 \Rightarrow \\ c=0 \end{cases} \begin{cases} 1>0 \\ m+1<0 \to m<-1 \\ m^2+m-2=0 \Rightarrow (m+2)(m-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \checkmark \\ m=1 \ \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

سؤال۲۹: به ازای کدام بازه m از معادله $mx-3\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

(تجربی ۸۸)

$$\sqrt{x}=A\geq 0\rightarrow mA^{2}-3A+m-2=0$$

چی شده که یک جواب برای x حاصل شده اونم از نوع مثبتش دو حالت رخ می ده:

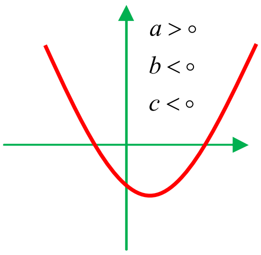
۱. $\Delta=0$، و ریشه معادله مثبت باشه

$$(-3)^{2}-4m(m-2)=0$$

$9-4m^{2}+8m=0\rightarrow 4m^{2}-8m-9=0\rightarrow$ دو مقدار دارد

اما مسأله بازه خواسته پس:

۲. معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشه یعنی:

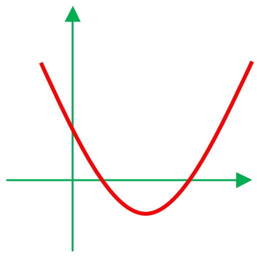


$$\begin{cases}m>0\\ m-2<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m>0\\ m<2\end{cases}\rightarrow 0<m<2$$

سؤال۳۰: نمودار تابع $f(x)=x^{4}+(m+4)x^{2}+9$ محور x ها را درچهار نقطهٔ متمایز قطع می کند m کدام می تواند باشد؟

۱) -6 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

معادلهٔ $t^{2}+(m+4)t+9$ باید به شکل زیر باشد:



$$\begin{cases}a>0\\ b<0\\ c>0\\ \Delta>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1>0\\ (m+4)<0\Rightarrow m+4<0 \qquad (1)\\ 9>0\\ \Delta=(m+4)^{2}-36>0\Rightarrow(m+4)^{2}>36\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+4>6\\ m+4<-6\end{cases}\qquad (2)\xrightarrow{1\cap 2}m+4<-6\Rightarrow m<-10$$

پس m می تواند ۱۲- باشد. گزینه ۴ درست است.