



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



صدفرتا صد ریاضیات پایه گنگور تجربی

مهدی جعفری کیا

Site: [mkonkur.ir](http://mkonkur.ir)

ID: @jafarikia

امام علی (علیه السلام): عاقلترین مردم کسی است که در امور زندگیش بهتر

برنامه ریزی کند و در اصلاح آخرتش بیشتر همت نماید.

# فهرست مطالب

## فصل اول: آشنایی با ریاضیات پایه

بخش اول: مجموعه‌ها	صفحه ۱
بخش دوم: توان و ریشه‌ها (اعداد)	صفحه ۱۰
بخش سوم: اتحادها و تجزیه چند جمله‌ای‌ها	صفحه ۱۶
بخش چهارم: عبارتهای گویا	صفحه ۲۸

## فصل دوم: معادلات، نامعادلات و تعیین علامت چند جمله‌ای‌ها

بخش اول: معادلات درجه اول و درجه دوم	صفحه ۳۲
بخش دوم: معادلات گویا، رادیکالی و قدرمطلق	صفحه ۴۳
بخش سوم: تعیین علامت و نامعادلات	صفحه ۴۹

## فصل سوم: دنباله‌ها

دنباله‌ها	صفحه ۵۸
-----------	---------

## فصل چهارم: مثلثات

بخش اول: مفاهیم پایه	صفحه ۷۲
بخش دوم: نسبت‌های مثلثاتی زوایای خالص	صفحه ۸۱
بخش سوم: رسم توابع مثلثاتی	صفحه ۹۲

## فصل پنجم: توابع

بخش اول: مفهوم تابع و انواع آن	صفحه ۹۸
بخش دوم: تابع یک به یک و وارون تابع	صفحه ۱۳۰
بخش سوم: اعمال بر روی توابع	صفحه ۱۳۶
بخش چهارم: توابع نمایی	صفحه ۱۴۲
بخش پنجم: توابع لگاریتمی	صفحه ۱۴۹

## فصل ششم: حد و پیوستگی

بخش اول: حد توابع	صفحه ۱۶۴
بخش دوم: پیوستگی توابع	صفحه ۱۷۶

## فصل هفتم: آمار و احتمال

بخش اول: آمار	صفحه ۱۸۳
بخش دوم: آنالیز ترکیبی و احتمال	صفحه ۲۰۳

## فصل هشتم: هندسه

بخش اول: هندسه تحلیلی	صفحه ۲۲۹
بخش دوم: تریگنومی‌های هندسه	صفحه ۲۳۸
بخش سوم: استدلال هندسی و قضیهای تالس	صفحه ۲۴۵
بخش چهارم: تشابه مثلث‌ها	صفحه ۲۵۴



تعریف (مجموعه): به دسته‌ای از اشیا مشخص و دو به دو متمایز، مجموعه گفته می‌شود. مجموعه‌ها با حروف بزرگ نامگذاری می‌شوند.

نکته: مجموعه  $A$  زیر مجموعهی مجموعه  $B$  است هرگاه:  $a \in A \Rightarrow a \in B$ .  
در این صورت می‌نویسیم:  $A \subseteq B$ .

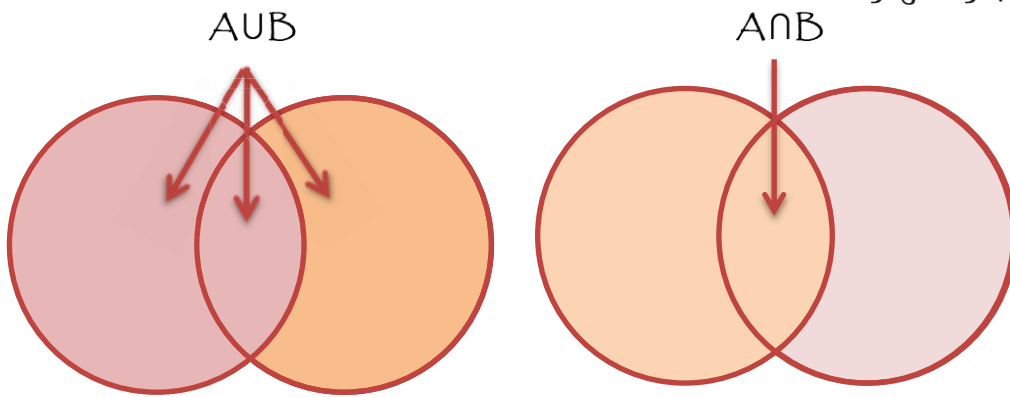
نکته: هر مجموعه  $n$  عضوی،  $2^n$  زیر مجموعه دارد.

مثال: مجموعه  $A$  ۴ عضوی، چند برابر مجموعه  $B$  ۱۰ عضوی زیر مجموعه دارد؟

اعمال روی مجموعه‌ها:

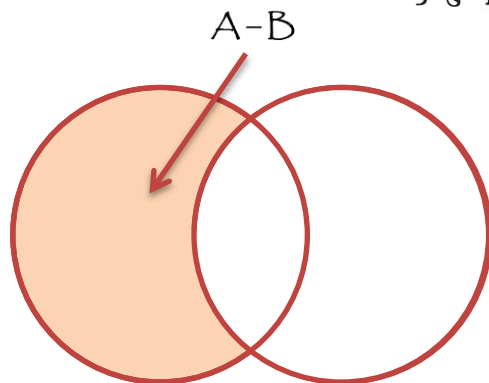
(۱) اجتماع: اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با  $A \cup B$  نشان داده می‌شود، از همه اعضای این دو مجموعه تشکیل شده است.

(۲) اشترک: اشترک دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با  $A \cap B$  نشان داده می‌شود، فقط از اعضای مشترک این دو مجموعه می‌شود.



نکته: اگر اشترک دو مجموعه تهی باشد، دو مجموعه از هم جدا یا مجزا نامیده می‌شوند.

(۳) تفاضل: تفاضل مجموعه  $B$  از مجموعه  $A$  که با  $A - B$  نشان داده می‌شود، شامل همگی اعضای  $A$  بجز اشترک  $A$  و  $B$  می‌شود.



سؤال: اگر  $n(A \cup B) = ۳۲$  و  $n(A - B) = ۹$  و  $n(B)$  کدام است؟

۲۲ (۲)

۲۰ (۴)

۲۳ (۱)

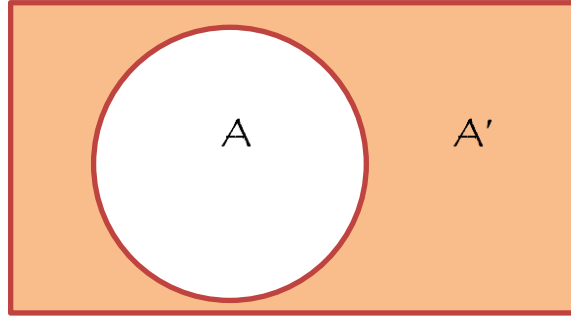
۲۵ (۳)





**تعریف (مجموعه مرجع):** در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.

**تعریف (متمم مجموعه):** هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.



نکته: در حالت کلی داریم:

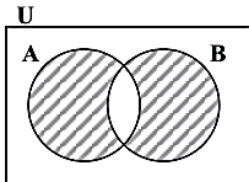
- ۱)  $A \cup B = B \cup A$  ,  $A \cup \emptyset = A$  ,  $A \cup U = U$
- ۲)  $A \cap B = B \cap A$  ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ,  $A \cap U = A$
- ۳)  $A - B \neq B - A$  ,  $A - \emptyset = A$  ,  $A - A = \emptyset$
- ۴)  $(A')' = A$  ,  $A \cup A' = U$  ,  $A \cap A' = \emptyset$  ,  $A - A' = A$
- ۵)  $A \subseteq B \Rightarrow$     a)  $B' \subseteq A'$  , b)  $A \cap B = A$  , c)  $A \cup B = B$

تست ۲: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، کدام گزینه نادرست است؟

- ۱)  $A \cap A' = \emptyset$     ۲)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$     ۳)  $(A')' = A$     ۴)  $A \cup A' = \emptyset$



تست ۳: با توجه به شکل، متمم قسمت هاشورخورده کدام است؟



- ۱)  $U - (A \cap B)$   
 ۲)  $U - (A \cup B)$   
 ۳)  $(A \cup B) - (A \cap B)$   
 ۴)  $(A \cup B)' \cup (A \cap B)$



تست ۴: دو مجموعه  $A$  و  $B$  را در اختیار داریم. با کم کردن  $B$  از  $A$  در  $A$  تغییری ایجاد نمی‌شود. در این صورت اشتراک  $B$  و متمم  $A$  کدام است؟

- ۱)  $A'$     ۲)  $B'$     ۳)  $B$     ۴)  $\emptyset$



((اشار علی(ع): علم و دانش، بنیاد و ریشه‌ی مهمی خوبی‌ها و نادانی ریشه و اساس مهمی بدی‌ها است.))

مجموعه‌های  $A = \{7, a, 5\}$ ،  $B = \{0, 2, 5, 7\}$  و  $C = \{1, 2, 5\}$  را در نظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم  $A - (B \cap C) = \{3, 7\}$ ، آنگاه مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۴)



اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

- ۱ (۱)  $(A \cap B)' = U$       ۲ (۲)  $A \cup B = U$   
 ۳ (۳)  $A - B = \emptyset$       ۴ (۴)  $(A \cup B)' = \emptyset$

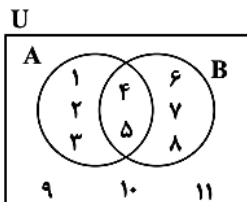


اگر  $A \subseteq B$  و  $A \neq B$  باشد، آنگاه کدام گزاره نادرست است؟

- ۱ (۱)  $B' \subseteq A'$       ۲ (۲)  $A' \cup B = U$   
 ۳ (۳)  $A \cap B' = \emptyset$       ۴ (۴)  $A' \cap B = \emptyset$



در نمودار ون مقابل، اعضای هر مجموعه درون آن نوشته شده است. مجموعه  $A - B'$  کدام است؟



- ۱ (۱)  $\{1, 2, 3\}$   
 ۲ (۲)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 ۳ (۳)  $\{4, 5\}$   
 ۴ (۴)  $\{4, 5, 6, 7, 8\}$



نکته: در حالت کلی داریم:

- ۱)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  ،  $(A \cap B)' = A' \cup B'$   
 ۲)  $A - (A - B) = A \cap B$  ،  $B - (B - A) = A \cap B$



متمم مجموعه‌ی  $(A - (A - B)) \cup (A \cap B)'$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $A$       ۲ (۲)  $B'$       ۳ (۳)  $A' \cup B'$       ۴ (۴)  $\{\}$





تعریف: تعداد اعضای مجموعه  $A$  را با  $n(A)$  نشان می‌دهیم.

تعریف (مجموعه متناهی): مجموعه  $A$  متناهی است هر گاه  $n(A)$  مشخص باشد.

نکته: اگر  $B$  یک مجموعه متناهی باشد و داشته باشیم  $A \subseteq B$ ، آنگاه مجموعه  $A$  نیز متناهی است.

نکته: اگر  $A$  یک مجموعه نامتناهی باشد و داشته باشیم  $A \subseteq B$ ، آنگاه مجموعه  $B$  نیز نامتناهی است.

مثال: اگر  $\mathbb{N} \subseteq A$ ، مجموعه  $A$  نامتناهی است.

تست ۱۰

اگر  $A$  نامتناهی و  $B$  متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ ( $U$  مجموعه مرجع است)

- (۱)  $B - A$       (۲)  $A - B$       (۳)  $A \cap B$       (۴)  $U - B'$



تست ۱۱

$A$  یک مجموعه متناهی است. اگر  $A \subseteq B$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $B$  یک مجموعه متناهی است.      (۲)  $B$  یک مجموعه نامتناهی است.  
(۳)  $B$  ممکن است یک مجموعه متناهی باشد.      (۴)  $B - A$  یک مجموعه متناهی است.



تست ۱۲

اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه متناهی از اعداد حقیقی باشند، کدام مجموعه نامتناهی است؟

- (۱)  $A - B$       (۲)  $B' \cap A$       (۳)  $A \cup B$       (۴)  $A' \cup B$



تست ۱۳

اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشند، چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- $A - B$  ،  $B - A$  ،  $A \cup B$  ،  $A \cap B$
- (۱) ۱      (۲) ۲  
(۳) ۳      (۴) ۴



تست ۱۴

کدام گزینه درست است؟

- (۱) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، همواره متناهی است.      (۲) اشتراک دو مجموعه متناهی، همواره تهی است.  
(۳) اجتماع دو مجموعه متناهی، همواره نامتناهی است.      (۴) تفاضل دو مجموعه متناهی، متناهی است.



((عمر آنقدر کوتاه است که نمی‌ارزد آدم حقیر و کوچک بماند.)))



نکته: در حالت کلی برای دو مجموعه  $A$  و  $B$  داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته: اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجزا باشند، آنگاه:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

نکته: اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجزا باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \overbrace{n(A \cap B)}^0 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

**مثال ۱:** در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این

کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟

**مثال ۲:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ ،

$n(A) = 60$ ،  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوب است:

- (الف)  $n(A \cup B)$       (ب)  $n(A \cap B')$       (پ)  $n(A' \cap B)$       (ت)  $n(A' \cap B')$

**تست ۱۵:** اگر  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ ،  $n(A) = 40$ ،  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$ ،

$n(A' \cap B')$  کدام است؟

- ۶۰ (۴)      ۴۰ (۳)      ۳۰ (۲)      ۲۰ (۱)

**تست ۱۶:** اگر  $n(A) = 15$ ،  $n(B') = 22$ ،  $n(U) = 40$  و  $n(A \cup B) = 32$  باشد،  $n(A - B)$  کدام است؟

- ۱۵ (۴)      ۱۴ (۳)      ۱۳ (۲)      ۱۲ (۱)



سؤال ۱۷: اگر  $n(U) = 59$ ،  $n(A - B) = 15$ ،  $n(B - A) = 22$  و  $n(A') = 32$  باشد،  $n(A \cap B)$  کدام است؟

- ۱) ۱۲      ۲) ۱۰      ۳) ۱۷      ۴) ۱۴

سؤال ۱۸: در کدام گزینه، دو مجموعه مجزا نیستند؟

- ۱)  $A \cup A'$  و  $A' \cap A$       ۲)  $A - B$  و  $B - A$       ۳)  $(A \cap B)'$  و  $(A \cup B)'$       ۴)  $U - \emptyset$  و  $\emptyset - U$

سؤال ۱۹: در یک کلاس ۳۰ نفری، اگر ۹ نفر در برنامه‌های پژوهشی و ۴ نفر هم در هر دو نوع برنامه‌ی پژوهشی و

پرورشی شرکت کرده باشند و ۷ نفر در هیچ کدام از برنامه‌ها شرکت نکرده باشند، چند نفر فقط در

برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند؟

- ۱) ۱۴      ۲) ۱۳      ۳) ۱۰      ۴) ۱۵

سؤال ۲۰: کلاسی ۳۸ دانش‌آموز دارد. ۸ نفر اصلاً ورزش نمی‌کنند. تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، سه

برابر تعداد افرادی هستند که فقط والیبال بازی می‌کنند و تعداد تمام افرادی که فوتبال بازی می‌کنند، پنج

برابر تعداد افرادی هستند که فقط والیبال بازی می‌کنند. در این کلاس چند نفر هم فوتبال و هم والیبال

بازی می‌کنند؟

- ۱) ۵      ۲) ۱۰      ۳) ۱۵      ۴) ۲۰

سؤال ۲۱: یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد. به طوری که

۳ فیلم پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. تعداد کل فیلم‌هایی که غیرپویانمایی و غیرطنز هستند، کدام است؟

- ۱) ۹      ۲) ۸      ۳) ۷      ۴) ۶

سؤال ۲۲: در یک پرسش و پاسخ پیرامون علاقمندی به رشته تجربی و ریاضی از میان ۱۶۰ نفر، ۸۰ نفر اعلام کردند که به هر دو رشته ریاضی و تجربی

علاقمند هستند. ۱۵ نفر علاقمندی خود را فقط به رشته ریاضی اعلام کردند، ۲۰ نفر هم گفتند که هیچ کدام از این دو رشته علاقه ندارند. چند

نفر به رشته تجربی علاقمند هستند؟

- ۱) ۴۵      ۲) ۸۰      ۳) ۳۵      ۴) ۱۲۵

((( یادداشت هدف‌هایتان بر روی کاغذ، احتمال دستیابی به آن‌ها را ۱۰۰٪ افزایش می‌دهد. )))

۳۳- اگر در یک کلاس ۴۰ نفره، ۳۰ نفر به والیبال و ۱۵ نفر به بسکتبال علاقه‌مند باشند و ۳ نفر به هیچ‌کدام از این دو رشته علاقه‌مند نباشند، چند نفر در این کلاس به هر دو رشته علاقه‌مند هستند؟

۸ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۷ (۴)



### چند مجموعه‌ی خاص:

۱. مجموعه اعداد طبیعی: این مجموعه را با حرف  $\mathbb{N}$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

نکته: مجموعه  $W = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ، مجموعه اعداد حسابی نامیده می‌شود.

۲. مجموعه اعداد صحیح: این مجموعه را با حرف  $\mathbb{Z}$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

۳. مجموعه اعداد گویا: چون این مجموعه نامشمارا است پس نمی‌توان این مجموعه را به صورت دو مجموعه فوق نوشت. تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

نکته: بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویای دیگر وجود دارد.



۳۴- اگر  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع،  $A$  مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۴ و  $B$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۸۰ باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

۱)  $A \cap B'$       ۲)  $A \cup B$       ۳)  $A \cap B$       ۴)  $B \cup A'$



۳۵- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعه اعداد طبیعی فرد  
۲) مجموعه اعداد اول یک رقمی  
۳) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰  
۴) بازه  $(0, 1)$



۳۶- اگر  $A = \{n \in X \mid 0 < n < 2\}$  یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه‌ی  $X$  مجموعه‌ی ... می‌باشد.

۱)  $\mathbb{R}$       ۲)  $\mathbb{Q}$       ۳)  $\mathbb{Z}$       ۴)  $\mathbb{Q}'$



۳۷- کدام گزاره زیر درست است؟

۱) اگر  $A \subseteq B$  و مجموعه  $B$  نامتناهی باشد، مجموعه‌ی  $A$  حتماً نامتناهی است.  
۲) اگر  $A \subseteq B$  و مجموعه  $A$  نامتناهی باشد، مجموعه‌ی  $B$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.  
۳) مجموعه‌ی شماره‌های طبیعی عدد ۲۰، نامتناهی است.  
۴) اگر  $A$  مجموعه اعداد صحیح و  $B$  مجموعه اعداد حسابی باشد، آنگاه  $B - A$  متناهی است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( با ارزش‌ترین سرمایه شما خودتان هستید، برای بالا بردن ارزش خود تمامی آموزش‌های لازم را فرا بگیرید. ))



ع. مجموعه اعداد اصم (گنگ): اعدادی که گویا نباشد (یعنی دارای بسط اعشاری مشخصی نباشند) اصم یا گنگ نامیده می‌شوند. این اعداد با نماد  $Q^c$  و یا  $Q'$  نشان داده می‌شوند. نظیر: اعداد  $\sqrt{5}$  و  $\pi$ .

تست ۲۸: کدام عدد زیر عددی گنگ را نشان می‌دهد؟

- ۱)  $0/2525...$  ۲)  $0/1444...$  ۳)  $0/29231...$  ۴) هر سه گزینه

تست ۲۹: کدام گزینه درست نیست؟







- ۱) هر عدد طبیعی، یک عدد حسابی است.  
 ۲) هر عدد صحیح، یک عدد گویا است.  
 ۳) عددی حسابی وجود دارد که عدد صحیح نیست.  
 ۴) عدد گنگی وجود ندارد که بتوان آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت.



اعداد حقیقی: از اجتماع اعداد گویا و گنگ بدست می‌آید. یعنی داریم:  $\mathbb{R} = Q \cup Q^c$

نکته: زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی را می‌توانیم به صورت بازه‌ای از اعداد نشان دهیم.

نکته: تعریف می‌کنیم:

- ۱)  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  
- ۲)  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  
- ۳)  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  
- ۴)  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  
- ۵)  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$  
- ۶)  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$  

تست ۳۰: اجتماع و اشتراک دو بازه  $(-1, 4]$  و  $(2, +\infty)$  به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟

- ۱)  $(-1, 2]$  و  $(-1, +\infty)$  ۲)  $(2, 4]$  و  $(-1, +\infty)$  ۳)  $(2, 4]$  و  $(-1, +\infty)$  ۴)  $(-1, 4]$  و  $[4, +\infty)$

تست ۳۱: اگر  $A = (-5, -1]$  و  $B = [-2, 2)$ ؛ آن‌گاه عدد ۲ عضو کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

(۴)  $A' \cap B$

(۳)  $A \cup B$

(۲)  $A' - B$

(۱)  $A - B$



تست ۳۲: دو بازه‌ی باز  $A = (a, b)$  و  $B = (c, d)$  را در نظر بگیرید. با کدام شرط  $A \cap B$  غیرتهی است؟

(۴)  $b > c$  یا  $d > a$

(۳)  $b > c$  و  $d > a$

(۲)  $b > c$

(۱)  $d > a$



تست ۳۳: کدام بازه شامل تعداد بیشتری از اعداد طبیعی است؟

(۲)  $[0, 3) \cup (1, 5)$

(۱)  $[-3, 5) \cap (2, 5]$

(۴)  $(0, 6) \cap [1, 7)$

(۳)  $[1, 6] - [2, 3]$



تست ۳۴: کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ی نامتناهی است؟

(۲) مجموعه‌ی تمام درخت‌های یک جنگل

(۱) مجموعه‌ی خطوط گذرنده از مبدأ مختصات

(۴) مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی موجود در  $(-\infty, 1] \cap [1, +\infty)$

(۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح موجود در بازه‌ی (۱ و ۰)





**توان اعداد:** تعداد مرتبهای که عدد در خودش ضرب می‌شود را توان آن عدد می‌گوییم. در مورد اعداد توان‌دار قوانین زیر برقرار است.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad , \quad a^m \div a^n = a^{m-n} \quad , \quad a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad , \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad , \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad , \quad a^0 = 1$$

$$EX) \quad \frac{25^7 \times 2^{-3} \times 16}{7^9 \times 5^0 \times 5^4} = \frac{7^7 \times 5^7 \times 2^4}{7^9 \times 5^4 \times 2^3} = \frac{5^2 \times 2}{7^3}$$

**تست:**

اگر  $x = 2^{2a}$  ،  $y = 8^{a-1}$  ، آنگاه چه رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  برقرار است ؟  
 (۱)  $y = 2x$       (۲)  $x = 2y$       (۳)  $y = 8x$       (۴)  $x = 8y$



**تست:**

حاصل  $27^{-1} \times 9^3 \times 3^{\frac{1}{3}}$  کدام است؟

(۱) ۹      (۲) ۳      (۳) ۱      (۴)  $\frac{1}{2}$



**نکته:** اگر اعداد حقیقی را توسط اعداد  $-1$  و  $0$  و  $1$  به چهار دسته تقسیم کنیم، داریم:

الف) اعداد بزرگتر از یک ( $x > 1$ ) هر چه به توان بیشتری برسند، بزرگتر می‌شوند.

$$EX) \quad 7^4 > 7^2 \quad , \quad (2/5)^3 > (2/5)^2$$

ب) اعداد بین صفر و یک ( $0 < x < 1$ ) هر چه به توان بیشتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

$$EX) \quad (0/7)^4 < (0/7)^2 \quad , \quad \left(\frac{1}{3}\right)^7 > \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

ب) اعداد بین منفی یک و صفر ( $-1 < x < 0$ ) هر چه به توان فرد بیشتری برسند، بزرگتر می‌شوند.

$$EX) \quad (-0/2)^3 < (-0/2)^5 \quad , \quad \left(-\frac{1}{5}\right)^7 > \left(-\frac{1}{5}\right)^3$$

الف) اعداد کوچکتر از منفی یک ( $x < -1$ ) هر چه به توان فرد بیشتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

$$EX) \quad (-3)^3 > (-3)^5 \quad , \quad (-5)^9 < (-5)^3$$

تست ۳: کدام گزینه نادرست است؟

(۱)  $(2-\sqrt{5})^{10} > (2-\sqrt{5})^{18}$  (۲)  $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{200} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{300}$  (۳)  $\left(\frac{1}{4}\right)^5 > \left(\frac{1}{4}\right)^7$  (۴)  $(\pi-3)^{30} > (\pi-3)^{20}$



تست ۴: کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱)  $\sqrt{3/2} = \sqrt{3}/\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^8}$  (۳)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5}$  (۴)  $\sqrt[3]{0.03} > (0.03)^{2/3}$



تست ۵: اگر  $0 < a < 1$  باشد، فاصله‌ی کدام عدد از صفر کوچک‌تر است؟

(۱)  $a^2\sqrt{a}$  (۲)  $\frac{1}{a}$  (۳)  $a\sqrt[3]{a}$  (۴)  $\sqrt[5]{a}$



**ریشه‌گیری:** عکس عمل توان رساندن ریشه‌گیری نام دارد و در حالت کلی اگر داشته باشیم  $b^n = a$ ، آنگاه  $b$  ریشه  $n$ ام عدد  $a$  نامیده می‌شود و می‌نویسیم:  $\sqrt[n]{a} = b$ .



**مثال:** ریشه‌های دوم عدد ۲۵ برابر  $\pm 5$ ، ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ برابر  $\pm \sqrt[4]{16}$  و ریشه‌ی سوم عدد ۲۷ برابر ۳ است.

**نکته:** اعداد منفی، ریشه زوج ندارند و در حالت کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n = 2k \\ a & n = 2k + 1 \end{cases}, \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

EX)  $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = +5$  ,  $\sqrt[3]{-8} = -2$  ,  $\sqrt[5]{32} = 2$  ,  $\sqrt[4]{-16} = x$

**نکته:** روابط زیر در صورت منفی نبودن عبارت با ریشه زوج، برقرار هستند:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad , \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

EX)  $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$  ,  $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{2^5 \times 5^3} = \sqrt[15]{200}$

تست ۶: تساوی  $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$  به‌ازای چه مقادیری از  $a$  و  $n$  برقرار نیست؟

(۱)  $a > 0$ ،  $n$  زوج (۲)  $a < 0$ ،  $n$  زوج (۳)  $a > 0$ ،  $n$  فرد (۴)  $a < 0$ ،  $n$  فرد



(( امام علی (ع): علم، گنج بزرگی است که با خرج کردن تمام نمی شود. ))

تست ۷: حاصل عبارت  $A = x^2 \sqrt{x} \sqrt[5]{x^2}$  به ازای  $x = \sqrt[3]{2^{15}}$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)



تست ۸: چه تعداد از عبارتهای زیر نادرست هستند؟

الف)  $\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[3]{0.0081}$       ب)  $\sqrt[4]{(-5)^4} = -5$

ب)  $(\sqrt[4]{-2})^4 = \sqrt[4]{(-2)^4}$       ت)  $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[4]{(-3)^4} = 9$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



تست ۹: اگر  $x$  عددی منفی باشد، ساده شده کسر  $\frac{\sqrt[5]{x^5} \times \sqrt[4]{x^8}}{\sqrt[3]{x^3}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $-x$  (۲)  $x$  (۳)  $-1$  (۴)



تست ۱۰: اگر  $6^{x+1} = \sqrt[3]{2^{y+2}} \times \sqrt[3]{3^{x+5}}$  باشد، حاصل  $x+y$  کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)



تست ۱۱: حاصل عبارت  $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[2]{2^4 \sqrt[3]{6}}$ ، کدام است؟

- ۱)  $6\sqrt[3]{2}$  (۱)  $3\sqrt[6]{32}$  (۲)  $2\sqrt[3]{9}$  (۳) ۶ (۴)



تست ۱۲: حاصل عبارت  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$ ، کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{3}$  (۱) ۲ (۲)  $1 + \sqrt{3}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)



تست ۱۳: اگر  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح متوالی باشند که در رابطه‌ی  $n < \sqrt[3]{25} < m$  صدق می کنند،  $m^2 - n^2$  کدام

است؟

- ۱)  $-3$  (۱)  $-4$  (۲)  $-5$  (۳)  $-7$  (۴)



تست ۱۴: حاصل  $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$  برابر است با:

- ۱)  $1-\sqrt{5}$  (۱)      ۲)  $\sqrt{5}-1$  (۲)      ۳)  $\pm(1-\sqrt{5})$  (۳)      ۴)  $1+\sqrt{5}$  (۴)

تست ۱۵: اگر  $a < b < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{a^2+b^2+2ab} + \sqrt{a^2-2ab+b^2}$  کدام است؟

- ۱)  $-2b$  (۱)      ۲)  $2a$  (۲)      ۳)  $-2a$  (۳)      ۴)  $2b$  (۴)

تست ۱۶: حاصل  $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}}$  کدام است؟

- ۱) ۱ (۱)      ۲) ۲ (۲)      ۳) ۳ (۳)      ۴) ۴ (۴)

تست ۱۷: حاصل  $\sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^4} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}$  کدام است؟

- ۱) ۲ (۱)      ۲) ۱ (۲)      ۳)  $\sqrt{2}$  (۳)      ۴)  $\sqrt[5]{2}$  (۴)

تست ۱۸: حاصل  $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{3} + 1$  کدام است؟

- ۱) ۱ (۱)      ۲)  $2\sqrt{3}-1$  (۲)      ۳) ۳ (۳)      ۴)  $\sqrt{3}-1$  (۴)

نکته: در حالت کلی برای هر عدد حقیقی نظیر  $x$  و اعداد طبیعی  $n$  و  $m$  داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 1 \xrightarrow{n > m} \sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x} < x \\ \bullet < x < 1 \xrightarrow{n > m} \sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x} > x \end{array} \right. \quad \text{[X]} \quad \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{2} < 2 \Rightarrow$$

هر چه ریشه بزرگتر، عدد کوچکتر

$$\left\{ \bullet < x < 1 \xrightarrow{n > m} \sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x} > x \quad \text{[X]} \quad \sqrt[4]{0.2} > \sqrt[3]{0.2} > 0.2 \Rightarrow$$

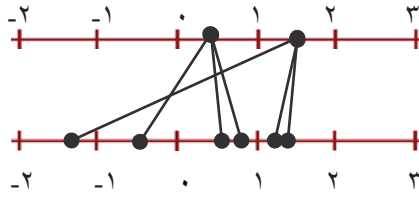
هر چه ریشه بزرگتر، عدد بزرگتر



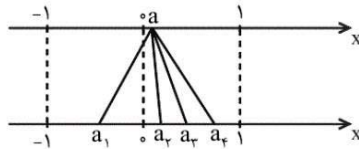


«(پیامبر اکرم(ص): هر که در جستجوی دانش باشد، بهشت در جستجوی او برآید.»

نقاط پایین که مربوط به ریشه‌های (های) دوم و ریشه سوم نقاط بالا هستند را مشخص کنید.



در شکل زیر، نقطه‌ی  $a$  از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام نقطه



ریشه‌ی چهارم نقطه‌ی  $a$  است؟

(۲)  $a_1$  و  $a_2$

(۱) فقط  $a_1$

(۴)  $a_1$  و  $a_3$

(۳) فقط  $a_3$



اگر  $0 < a < 1$  باشد، ریشه‌ی پنجم  $a$  از ریشه‌ی ششم  $a$  ... است و اگر  $a > 1$  باشد، ریشه‌ی چهارم  $a$  از

ریشه‌ی پنجم  $a$  ... است.

(۱) بزرگ‌تر - بزرگ‌تر (۲) بزرگ‌تر - کوچک‌تر (۳) کوچک‌تر - بزرگ‌تر (۴) کوچک‌تر - کوچک‌تر



اگر  $0 < a < 1$  باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

(۴) صفر

(۳)  $2a$

(۲)  $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$

(۱)  $2\sqrt[3]{a}$



اگر  $0 < b < 1$  باشد، بین ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم  $b$  کدام رابطه می‌تواند برقرار باشد؟

(۲) ریشه سوم  $b$  > ریشه پنجم  $b$  > ریشه چهارم  $b$

(۱) ریشه پنجم  $b$  > ریشه چهارم  $b$  > ریشه سوم  $b$

(۴) ریشه پنجم  $b$  > ریشه سوم  $b$  > ریشه چهارم  $b$

(۳) ریشه چهارم  $b$  > ریشه سوم  $b$  > ریشه پنجم  $b$



نکته: در حالت کلی برای هر عدد حقیقی نظیر  $x$  و اعداد طبیعی  $n$  و  $m$  فرد باشند، داریم:

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \xrightarrow{n>m} \sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x} & \text{E(X)} \quad \sqrt[5]{-0.7} < \sqrt[3]{-0.7} \\ x < -1 \xrightarrow{n>m} \sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x} & \text{E(X)} \quad \sqrt[5]{-2} > \sqrt[3]{-2} \end{cases}$$

هر چه ریشه بزرگتر، عدد کوچکتر

هر چه ریشه بزرگتر، عدد بزرگتر



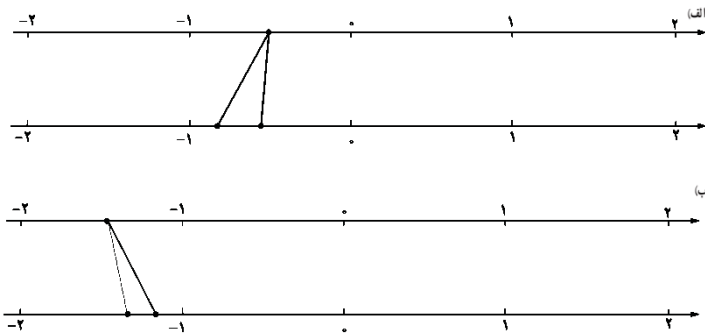
«(پیامبر اکرم(ص): پرسش نیمی از دانش است.)»

شرح ۲:

در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر پاره‌خط



مربوط به کدام ریشه است.



تست ۲۳:

اگر  $-1 < a < 0$ ، کدام عدد زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟

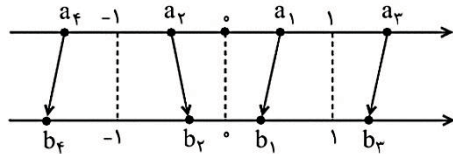


- (۱)  $\sqrt[3]{a}$       (۲)  $a$       (۳)  $a^3$       (۴)  $-a^4$

تست ۲۴:

در شکل زیر، هر یک از اعداد روی محور بالا به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با

ریشه‌ی سوم آن است، وصل شده است. چند تا از پیکان‌ها نادرست است؟



- (۱) یکی      (۲) دو تا  
(۳) سه تا      (۴) چهار تا



الف) مهمترین اتحادهای جبری:

۱. مربع دو جمله‌ای:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

EX)  $(5x+4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$  ,  $(3-2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$

۲. مربع سه جمله‌ای:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

EX)  $(x-2y+3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy + 6x - 12y$

۳. مکعب دو جمله‌ای:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

EX)  $(2x-3)^3 = 8x^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 27$   
 $= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

**تذکره:** به کمک اتحادها حاصل را بیابید.

$$(2x+5)^2 =$$

$$(3x-1)^2 =$$

$$(2-x+2y)^2 =$$

$$(2x+y-1)^2 =$$

$$(x+5)^3 =$$

$$(3x-1)^3 =$$

$$(995)^2 =$$

$$(1005)^3 =$$

((اهام علی(ع): آفت موفقیت، تنبلی است.)))

تست ۱: حاصل عبارت  $30^2 - 29 \times 31$  با استفاده از اتحادها کدام است؟

- ۱) -۱    ۲) ۱    ۳) ۲    ۴) -۲

تست ۲: عدد  $33^3 - 100^2 - 133^3$  چند برابر ۱۳۳ است؟

- ۱) ۹۰۰۰    ۲) ۹۹۰۰    ۳) ۹۰۰    ۴) ۹۹۰



ادامه مهمترین اتحادهای جبری:

۵. مزدوج:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$\text{EX) } \left(\frac{x}{3} - y^2\right)\left(\frac{x}{3} + y^2\right) = \left(\frac{x^2}{9} - y^4\right)$$

۵. يك جمله مشترك:

$$(x+A)(x+B) = x^2 + (A+B)x + AB$$

$$\text{EX) } (5x-6)(5x+4) = 25x^2 - 10x - 24$$

۶. مجموع و تفاضل مکعبات (چاق و لاغر):

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

$$\text{EX) } (3x-5)(9x^2 + 15x + 25) = 27x^3 - 125$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

«مشکلات در زندگی به دو دلیل ایجاد می‌شوند: عمل می‌کنیم بدون آنکه در مورد آن، فکر کنیم، یا فکر می‌کنیم بدون آنکه به آن فکر، عمل کنیم.»  
 به کمک اتحادها حاصل را بیابید.

$$\begin{aligned} (4x-1)(4x+1) &= (2-x)(2+x)(4+x^2)(16-x^2) = \\ (2x-1)(2x+5) &= (x+5)(x-9) = \\ (3x+2)(3x-5) &= (1-x)(1+x+x^2) = \\ (x+6)(x^2-6x+36) &= 106 \times 94 = \end{aligned}$$

ساده شده‌ی عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟

$$A = (2a-3)(2a+3)(16a^4 + 36a^2 + 81)$$

- (۱)  $64a^6 - 729$     (۲)  $8a^6 - 729$     (۳)  $64a^6 - 243$     (۴)  $8a^6 - 243$

حاصل عبارت  $(\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^{101} (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^{102}$  برابر است با:

- (۱)  $\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$     (۲)  $\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$     (۳)  $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$     (۴)  $-\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$

مقدار عددی عبارت  $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{256}+1)$ ، برابر است با:

- (۱)  $2^{256} + 1$     (۲)  $2^{128} + 1$     (۳)  $2^{128} - 1$     (۴)  $2^{256} - 1$

حاصل عبارت  $(x-a)(x+a)(x^2+a^2+ax)(x^2+a^2-ax)$  همواره، برابر است با:

- (۱) صفر    (۲)  $x^4 + 3a^2x^2 - a^4$     (۳)  $x^4 - 3a^2x^2 + 3a^2x - a^4$     (۴)  $x^4 - a^4$

تست ۷: حاصل عبارت  $A = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) + \frac{1}{9}$  به‌ازای  $x=10$  کدام است؟



(۴)  $\frac{10^{15}}{9}$

(۳)  $10^{15}$

(۲)  $\frac{10^{16}}{9}$

(۱)  $10^{16}$

تست ۸: اگر  $\sqrt{2x+4} - \sqrt{2x-1} = 2$ ، حاصل  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x-1}$  کدام است؟



(۴)  $\frac{7}{2}$

(۳)  $\frac{5}{2}$

(۲) ۲

(۱)  $\frac{3}{2}$

تست ۹: اگر  $A = \sqrt{3\sqrt{2}+4} - \sqrt{3\sqrt{2}-4} + \sqrt{2}$ ، مقدار  $A^2$  کدام است؟



(۴)  $11\sqrt{2} + 8$

(۳)  $11\sqrt{2}$

(۲)  $9\sqrt{2}$

(۱)  $9\sqrt{2} + 8$

تست ۱۰: حاصل عبارت  $A = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + 25$  برابر با مربع کدام گزینه است؟



(۲)  $x^2 + x - 7$

(۱)  $x^2 - x - 7$

(۴)  $x^2 - x - 5$

(۳)  $x^2 + x - 5$

تست ۱۱: اگر  $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$  و  $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$  باشند، حاصل  $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ ، کدام است؟



(۴)  $7\sqrt{2}$

(۳)  $6\sqrt{2}$

(۲) ۸

(۱) ۶

تست ۱۲: حاصل عبارت  $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)(x^{12}+x^6+1)$  به ازای  $x = \sqrt[3]{2}$  کدام است؟

۱۶ (۲)

۶۳ (۱)



۱۵ (۴)

۳۲ (۳)

تست ۱۳: اگر  $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$ ، حاصل  $x^3 - 3x$  کدام است؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

-۸ (۲)

-۱۰ (۱)



چند اتحاد مهم دیگر:



$$a^2 + b^2 = \underbrace{(a+b)^2}_S - \underbrace{2ab}_P, \quad a^3 + b^3 = \underbrace{(a+b)^3}_S - \underbrace{3ab(a+b)}_{P \cdot S}$$

EX)  $\begin{cases} x+y = -4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = ? , x^3 + y^3 = ?$

۱)  $x^2 + y^2 = (-4)^2 - 2(3) = 25$

۲)  $x^3 + y^3 = -64 - 3(3)(-4) = -64 + 36 = -28$

تست ۱۴: اگر  $x + \frac{1}{x} = 2$  باشد، حاصل  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  برابر است با:

۲ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

تست ۱۵: اگر  $x+y=7$  و  $xy=5$  باشد، حاصل  $x^3+y^3$  کدام است؟

۲۶۴ (۴)

۲۴۴ (۳)

۲۳۸ (۲)

۲۱۶ (۱)

**تست ۱۶:** اگر  $xy=1$  و  $x+y=5$  باشد،  $x^3+y^3$  چقدر است؟

- ۱۱۰ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۱۳۰ (۳)      ۱۴۰ (۴)

**نکته:** اگر  $a+b+c=0$  باشد، انگاه داریم:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$



**تست ۱۷:** حاصل عبارت  $(2\sqrt{2})^3 + (3-\sqrt{2})^3 + (-3-\sqrt{2})^3$  کدام است؟

- $-6\sqrt{2}$  (۱)       $-36\sqrt{2}$  (۲)       $36\sqrt{2}$  (۳)       $-42\sqrt{2}$  (۴)

**(ب) تجزیه چند جمله‌ی‌ها:**

انواع روش‌های تجزیه چندجمله‌ی‌ها به ترتیب زیراند:

۱. **فاکتور گیری:** در مورد عباراتی که دارای یک عبارت مشترک در تمام جملات هستند، بکار می‌رود.

**نکته:** در برخی عبارات، ابتدا به دسته‌بندی و سپس فاکتور گیری می‌پردازیم.

**مثال ۳:** تجزیه کنید.

$$4xy - 1 \cdot x^2 = \quad , \quad 3ax^3 + 6x^2 =$$

$$9(x-1) - x^2(x-1) =$$

$$ax - 3b + 3a - bx =$$

**تست ۱۸:** در تجزیه عبارت  $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2$  کدام عامل وجود دارد؟

- $2x+y^2$  (۴)       $x^2-2y$  (۳)       $x-y$  (۲)       $x^2+2y$  (۱)





۲. استفاده از اتحادها: اگر عبارتی با روش‌های فوق تجزیه نشود از اتحادها استفاده می‌کنیم.

الف) دو جمله‌ای باشد: برای توان‌های دو و سه معمولا از اتحادهای مزدوج و مجموع و تفاضل مکعبات استفاده می‌کنیم.

$$E(X) \quad x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9), \quad 9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$$

شرح: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$1 - 9x^2 =$$

$$81 - x^4 =$$

$$x^3 + 27 =$$

$$x^6 - 125 =$$

$$x^6 - 1 = (x + 1)$$

$$x^6 - 27 =$$

$$x^5 - 32 =$$

$$\frac{x^3 + 1}{x^5 + 1} =$$

تست ۱۹: مقدار  $A = \frac{99^3 - 1}{99^2 + 100} \times \frac{99^3 + 1}{99^2 - 98}$  کدام است؟

۹۸<sup>۲</sup> (۴)

۹۹<sup>۲</sup> (۳)

۹۸۰۰ (۲)

۹۹۰۰ (۱)



تست ۲۰: در تجزیه عبارت  $3a^3b - 12ab^3 + a^3 - 8b^3$  کدام عامل ضرب وجود دارد؟

$a + 2b$  (۲)

$a - 2b$  (۱)

$3a - b$  (۴)

$3a + 2b$  (۳)



تست ۲۱: در تجزیه عبارت  $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ ، همواره کدام عامل ضرب وجود دارد؟

$x + 3$  (۴)

$x + 2$  (۳)

$x - 2$  (۲)

$x - 4$  (۱)



تست ۲۲: در تجزیه عبارت  $(\sqrt[5]{x^4})^3 - 1$  کدام عبارت وجود ندارد؟

- (۱)  $\sqrt[5]{x^2} - 1$  
- (۲)  $\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x^4} + 1$
- (۳)  $\sqrt[5]{x^2} + 1$
- (۴)  $\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^2} + 1$

تست ۲۳: در تجزیه‌ی  $x^2 + 64$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $x^2 + 8$  
- (۲)  $x^2 - 8$
- (۳)  $x^2 + 4x + 8$
- (۴)  $x^2 + 4x + 4$

(ب) سه جملهای باشد: از اتحاد های مربع دوجمله‌ای و یا یک جمله مشترک استفاده می‌کنیم.

$$EX) \quad x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2, \quad x^2 + 6x + 8 = (x + 1)(x + 8)$$

نکته (تبدیل عبارت به مربع کامل): داریم:

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

نکته: در مورد عباراتی که در آنها ضریب جمله  $x^2$  غیر از یک باشد، می‌توان تجزیه با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک را به صورت زیر انجام داد:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n), \quad \begin{cases} m + n = b \\ m \times n = ac \end{cases}$$



مشروع ۵: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 4 =$$

$$, x^2 - 6x + 9 =$$

$$4x^2 - 12x + 9 =$$

$$, x^2 + 7x - 6 =$$

$$x^2 + 14x - 15 =$$

$$, x^2 - 5x - 36 =$$

$$3x^2 - x - 2 =$$

$$, 2x^2 + 5x - 7 =$$

((اگر از کاری که انجام می دهید خرسند و راضی باشید، حتما موفق خواهید شد.))

از طریق مربع کامل کردن، تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 3 = \quad , x^2 - 6x =$$

تست ۲۲: اگر  $ab - 2a + 6 - 3b = 0$  آن گاه  $a + b$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۳ (۲)      ۵ (۳)      ۴ (۴)

تست ۲۵: اگر  $c - d = -7$  و  $d^2 - c^2 = 77$ ، مقدار  $(c + d)^2$  کدام است؟

- ۶۴ (۱)      ۸۱ (۲)      ۱۲۱ (۳)      ۱۴۴ (۴)

تست ۳۳: حاصل عبارت  $(50/01)^2 - (49/99)^2$  برابر است با:

- ۰/۲ (۱)      ۰/۰۲ (۲)      ۲ (۳)      هیچکدام (۴)

تست ۳۷: در تجزیه‌ی عبارت  $y^5 + 2y^3 - 24y$  کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱  $y^2 + 6$  (۱)       $y - 2$  (۲)       $y + 2$  (۳)       $y - 4$  (۴)

$$A = \frac{xy^3 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1}$$

تست ۳۸: ساده شده‌ی عبارت مقابل کدام است؟

- ۱  $xy^2 - 1$  (۱)       $y^2 - x$  (۲)       $xy - x + 1$  (۳)       $y - x$  (۴)

«(امام علی(ع): هرگاه از کاری ترسیدی، خود را به کار آن بینداز، زیرا ترس شدید از آن کار، دشوارتر و زیان‌بارتر از اقدام به آن کار است.))»

**تست ۲۹:** اگر  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$  باشد، کدام رابطه درست است؟

(۱)  $x^2 + y^2 = 1$  (۲)  $x^2 + y^2 = x + y$

(۳)  $x^2 + y^2 = 0$  (۴)  $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2$

**تست ۳۰:** تجزیه شده عبارت  $x^2 - y^2 - 4 + 4y$  کدام است؟

(۱)  $(x + y - 2)(x - y - 2)$  (۲)  $(x - y - 2)(x - y + 2)$  (۳)  $(x + y - 2)(x - y + 2)$  (۴)  $(x - y + 2)(x - y + 2)$

**تست ۳۱:** در تجزیه‌ی عبارت  $x^4 + x^2 + 1$  کدام عامل وجود دارد؟

(۱)  $x^2 - x + 1$  (۲)  $x^2 + x - 1$

(۳)  $x^2 + 1$  (۴)  $x^2 + x$

**تست ۳۲:** اگر حاصل عبارت  $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{(2 + \sqrt{3})^2} \times \sqrt[2]{(2 - \sqrt{3})^2}$ ، به صورت  $\sqrt[3]{A}$  باشد، کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3} - 1$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $2$  (۴)  $\sqrt{3} + 1$

**تست ۳۳:** کدام یک از گزینه‌های زیر ریشه‌ی دوم عدد  $11 - 4\sqrt{7}$  است؟

(۱)  $4 - 2\sqrt{7}$  (۲)  $1 - \sqrt{7}$  (۳)  $\sqrt{7} - 4$  (۴)  $2 - \sqrt{7}$

**تست ۳۴:** مقدار عددی عبارت  $A = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{8})^3} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $-1$  (۳)  $2 + \sqrt{2}$  (۴)  $4(1 - \sqrt{2})$

**تست ۳۵:** اگر  $x > 0 > y$  و  $|y| > |x|$  باشد، حاصل  $A = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{4x^2 y^2}$  کدام است؟  
 (۱)  $x - y$  (۲)  $y - x$  (۳)  $x + y$  (۴)  $-x - y$



**نکته:** برای تجزیه عبارتهای زیر داریم:

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$$

**تست ۳۶:** عبارت  $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = \sqrt{3} + 1$ ، برابر است با:  
 (۱)  $1 + 3\sqrt{3}$  (۲)  $1 + \sqrt{3}$  (۳)  $1$  (۴)  $3\sqrt{3} - 1$

**تست ۳۷:** حاصل عبارت  $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = 2 + \sqrt{3}$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲)  $8 + \sqrt{3}$   
 (۳)  $8 + 3\sqrt{3}$  (۴) ۱۱

**تست ۳۸:** به ازای کدام یک از اعداد زیر، رابطه  $x^3 + 3x^2 + 3x = 1$  برقرار است؟

- (۱)  $\sqrt{3} - 1$  (۲)  $\sqrt{3} + 1$  (۳)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2} - 1$



پ) ک.م.م چند جمله‌ای‌ها:

ک.م.م دو عبارت را بعد از تجزیه آن‌ها به ترتیب زیر می‌یابیم:  
ک.م.م: حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر در عوامل غیر مشترک.

تج ۳۹: کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت  $x^2 + x^2 - x - 1$  و  $x^2 - x^2 - x + 1$ ،

(۱)  $(x+1)^2(x-1)^2$       (۲)  $(x+1)^2(x-1)^2$

(۳)  $(x-1)^2(x+1)^2$       (۴)  $(x^2-1)(x^2+1)$

تج ۴۰: بزرگترین عامل مشترک دو عبارت  $x^2 - 2xy - 15y^2$  و  $x^2 + 7xy + 12y^2$  کدام است؟

(۱)  $x - 2y$       (۲)  $x + 3y$       (۳)  $x + 4y$       (۴)  $x + 6y$



عبارت گویا: این عبارات به صورت کسری هستند که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است.

نکته: دامنه عبارت‌های گویا به صورت مقابل است.  $D = \mathbb{R} - \left\{ \text{ریشه‌های مخرج کسر} \right\}$

مثال ۱: دامنه‌ی عبارت‌های گویای  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{x+1}{x^2-6x}$ ,  $y = \frac{1-2x}{x^3-4x}$  را بیابید.



اعمال روی عبارت‌های گویا:

الف) ضرب و تقسیم عبارت گویا: پس از تجزیه و ساده کردن صورت و مخرج، ضرب و تقسیم به صورت زیر اتفاق می‌افتد:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

مثال ۲: حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.



a)  $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$

b)  $\frac{x^3-1}{(x-1)^3}$

c)  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

d)  $\frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y}$

e)  $\frac{2}{x-2} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

f)  $\frac{x^2-4x}{5x^3} \div \frac{x^2-16}{x^2+4x}$



(ب) جمع و تفریق عبارت گویا: پس از گرفتن مخرج مشترک از همه مخرج کسرها و تغییر تک تک کسرها بر اساس آن، حاصل عبارت را بدست می‌آوریم.  
 نکته: مخرج مشترک همان ک.م.م مخرج‌ها است.

مثال ۲: حاصل را بیابید.

a)  $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x^2-3x+2}$

b)  $\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3}{x-1}$



مثال ۳: حاصل عبارت  $\frac{1+\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ} - \frac{1-\sin 15^\circ}{1+\sin 15^\circ}$  کدام است؟

$\frac{2\sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$  (۴)

$\frac{2\sin^2 15^\circ}{\cos 15^\circ}$  (۳)

$\frac{4\sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$  (۲)

$\frac{4\cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}$  (۱)



از اتحاد  $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$  مقدار  $a + \frac{b}{2}$  چقدر است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

مثال ۴:

حاصل  $\frac{x^2+2x}{x^2-4} + \frac{4-x}{2-x}$  کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)



حاصل عبارت تعریف شده  $\frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$  کدام است؟

$\frac{2}{x+y}$  (۲)

$\frac{2}{x-y}$  (۱)

$\frac{2x}{x+y}$  (۴)

$\frac{2x}{y-x}$  (۳)





((کارتن را آغاز کنید، توانایی انجاش بدنبال هی آید.)))



**گویا کردن مخرج عبارت‌های گویا:**

**الف) مخرج يك جملهای باشد:** بر اساس سوال، به یکی از صورت‌های زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

**الف) مخرج چند جملهای باشد:** صورت و مخرج را در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

$$EX) \frac{7}{\sqrt{5}-2} = \frac{7}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{7(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 7\sqrt{5}+14$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{3}$$

**تست ۵:** ساده‌شده کسر  $A = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$  کدام است؟

۱- $\sqrt{2}$  (۴)

۱+ $\sqrt{2}$  (۳)

$\sqrt{2}-1$  (۲)

۱+ $\sqrt{2}$  (۱)

**تست ۶:** حاصل عبارت  $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 1$ ، کدام است؟

$\sqrt{3}$  (۴)

$-\sqrt{3}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

$-\sqrt{2}$  (۱)

**تست ۷:** حاصل عبارت  $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$  کدام است؟

$\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$  (۱)

$\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$  (۴)

$\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}$  (۳)

تست ۸: حاصل عبارت  $(2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \frac{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1})^{-1}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{8}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{16}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{16}$  (۱)

تست ۹: حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-1} + \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$  کدام است؟

$2 + \sqrt{12}$  (۴)

$2 + \sqrt{8}$  (۳)

$2 + \sqrt{2}$  (۲)

$2 + \sqrt{6}$  (۱)

تست ۱۰: حاصل کسر  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$ ، چند برابر  $2 + \sqrt{3}$  است؟

$-(\sqrt[4]{3} + \sqrt{2})$  (۲)

$\sqrt[4]{3} + 2$  (۱)

$2(\sqrt[4]{3} + \sqrt{2})$  (۴)

$-2(\sqrt[4]{3} + 2)$  (۳)

تست ۱۱: خلاصه شده عبارت  $(\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})^{1/5}$  کدام است؟

۲ (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

$\sqrt[3]{2}$  (۴)

$\sqrt[3]{2^2}$  (۳)

تست ۱۲: اگر گویا شده‌ی کسر  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}$  به صورت  $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})(9 + 3\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2)}{x}$  باشد،  $x$  کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۵ (۳)

۲۱ (۲)

۲۷ (۱)



**الف: معادلات درجه اول**

صورت کلی این معادلات  $ax + b = 0$  ( $a \neq 0$ ) است و ریشه آن به صورت  $x = -\frac{b}{a}$  است.

**نکته:** برای حل معادلات درجه اول، ابتدا معلوم، مجهول و سپس ساده سازی انجام می‌دهیم تا به عبارتی به صورت بالا برسیم.

**مثال ۱:** معادلات زیر را حل کنید.

۱)  $4x - 2 = 5(3x - 1)$

۲)  $\frac{2x+1}{3} = \frac{x}{2} - 1$

۳)  $1 - \frac{2x-6}{4} = \frac{x+5}{6}$

۴)  $\frac{4-x}{6} + \frac{2}{3} = x$



**ب) معادلات درجه دوم:** معادلات درجه دوم در حالت کلی به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) هستند.

**حل معادله درجه دوم:** برای حل معادلات درجه دوم، چندین روش وجود دارد که به شرح برخی از آنها می‌پردازیم.

**الف) روش تجزیه:** در این روش ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم و در نهایت تک تک معادلات درجه اول بدست آمده را حل می‌کنیم.

$$x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x - 6) = 0 \\ (x - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3, 6$$

**ب) روش مربع کامل:** با افزودن  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$  به طرفین یک معادله درجه دوم، در معادله به یک اتحاد مربع کامل می‌رسیم که از طریق گرفتن جذر از طرفین معادله به جواب معادله می‌رسیم.

$$x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = -12 + 25 \Rightarrow (x - 5)^2 = 13 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = \sqrt{13} \\ x - 5 = -\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} + 5 \\ x = -\sqrt{13} + 5 \end{cases}$$

**پ) روش دلتا (کلی):** در این روش ریشه‌های معادله (در صورت وجود) از رابطه  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  بدست می‌آید.

که در آن  $\Delta = b^2 - 4ac$  است.

**نکته:** اگر  $\Delta > 0$ ، معادله دو ریشه حقیقی، اگر  $\Delta = 0$ ، معادله یک ریشه مضاعف و اگر  $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

((((اهام علی(ع): بدانید که کمال دین در طلب دانش و به کار بستن آن است.)))

شرح ۲: معادلات زیر را حل کنید.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x^2 - x - 7 = 0$$

$$5x^2 - 7x + 1 = 0$$

تست ۱: معادله‌ی  $x^2 + 4x = 1$  را به کمک مربع کامل کردن حل کرده‌ایم و به عبارت  $(x+a)^2 = b$  رسیده‌ایم. مقدار  $a+b$  چقدر است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)



تست ۲: در حل معادله‌ی  $2x^2 - 12x + 7 = 0$  به روشی مشابه روش مربع کامل، معادله را به فرم  $2(x+b)^2 + c = 0$

می‌نویسیم. حاصل ضرب ریشه‌های معادله چند برابر  $b+c$  است؟

$-\frac{3}{2}$  (۴)

$-\frac{7}{4}$  (۳)

$\frac{7}{2}$  (۲)

$-\frac{1}{4}$  (۱)



تست ۳: اگر معادله  $x^2 + ax + b = 0$  دارای ریشه مضاعف  $x = \frac{1}{4}$  باشد،  $a+b$  کدام است؟

$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$-\frac{1}{4}$  (۲)

$-\frac{3}{4}$  (۱)

تست ۴: حدود  $k$  برای این که تابع با ضابطه  $A(x) = \frac{6x^2 - 2x}{-kx^2 + 2x - 9k}$  همواره به ازای جمیع مقادیر حقیقی  $x$  تعریف شده باشد، کدام است؟

$k > \frac{1}{3}$  یا  $k < -\frac{1}{3}$  (۴)


$-\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3}$  (۳)

$0 < k < \frac{1}{3}$  (۲)

$R - \{0\}$  (۱)



تست ۶: معادله‌ی درجه‌ی دوم  $\frac{m}{4}x^2 - 4x + 8 = 0$  به‌ازای مقادیر  $m \in (m_0, +\infty)$  ریشه‌ی حقیقی ندارد. کم‌ترین


مقدار  $m_0$  کدام است؟ 

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

تست ۷: مجموع مربعات سه عدد طبیعی متوالی برابر با ۷۷ است. مجموع این سه عدد کدام است؟

- ۱۲ (۱)      ۱۵ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۱ (۴) 

تست ۷: فاصله‌ی هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق

۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟ 

- ۸ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

تست ۸: اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - x + m = 0$  برابر دلتای معادله باشد، مقدار مثبت  $m$  چقدر است؟

- ۱ (۴)       $\frac{1}{4}$  (۳)       $\frac{3}{16}$  (۲)       $\frac{3}{4}$  (۱) 

تست ۹: در معادله  $x^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$ ، ریشه‌ی بزرگ‌تر چند برابر ریشه‌ی کوچک‌تر است؟

- $-\frac{1}{3}$  (۱)      -۳ (۲)      ۳ (۳)       $\frac{1}{3}$  (۴) 

مثال ۳:  $m$  را چنان بیابید که معادله  $x^2 + mx + 1 = 0$  (الف) ریشه حقیقی نداشته باشد. (ب) یک ریشه مضاعف داشته باشد.





**نکته:** در حل معادله درجه دوم، دو حالت خاص زیر را داریم:

الف) اگر  $a + b + c = 0$  باشد، در آن صورت جواب‌های معادله برابر  $x = 1$  و  $x = \frac{c}{a}$  است.

ب) اگر  $a + c = b$  باشد، در آن صورت جواب‌های معادله برابر  $x = -1$  و  $x = -\frac{c}{a}$  است.

**مثال ۴:**

۱) جواب‌های معادله  $3x^2 - x - 2 = 0$  برابر

و جواب‌های معادله  $7x^2 - 4x - 3 = 0$  برابر

است.

۲) جواب‌های معادله  $5x^2 - 2x - 7 = 0$  برابر

و جواب‌های معادله  $2x^2 - 9x - 11 = 0$  برابر

است.

**تست ۱۰:**

در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 + bx + c = 0$  با شرط  $b = c + 1$ ، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت زیر

است؟

- (۱)  $-c$
- (۲)  $2b - 1$
- (۳)  $\frac{b}{2}$
- (۴)  $c$

**تست ۱۱:**

مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $9x^3 + 8 = x^6$  کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۹
- (۳) ۸
- (۴) ۳

**تست ۱۲:**

اگر  $x = 1$  یک ریشه از معادله  $x + a = x(2x + 1)$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۲
- (۳) -۲
- (۴) -۱



**نکته:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد، همواره داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}, |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3ps, \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2p$$

«اگر می‌خواهید چیزی را بدست آورید که تاکنون نداشته‌اید، باید کارهایی که تاکنون نکرده‌اید را انجام دهید.»

**مثله:** مجموع، حاصل ضرب، تفاضل و مجموع مربعات و مکعبات ریشه‌های معادلات  $\Delta x^2 - 4x - 1 = 0$ ،  $x^2 - x - 3 = 0$  را بیابید.



**مثله:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 8x + 2 = 0$  باشند، مطلوب است:

$$\alpha^2 + \beta^2 =$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$$



$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} =$$

$$\alpha^3 + \beta^3 =$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) =$$

$$\alpha^2 - \beta^2 =$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 =$$

$$2\alpha^2 - 16\alpha =$$

$$\beta^2 - 8\beta =$$

**مثله:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$  کدام است؟

۲۴ (۴)

$\sqrt{6}$  (۳)

۶ (۲)

$\frac{1}{\sqrt{6}}$  (۱)

**مثله:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چه قدر است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(خارج ریاضی ۸۵)

**مثله:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - x = 3$  باشند، حاصل  $(\alpha - \beta)^2$  چه قدر است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۱۱ (۱)



تست ۱۶: اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + \frac{1}{k}x + 27 = 0$  مربع ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه  $12k$  کدام است؟

- ۱) -۲    
  ۲) ۲    
  ۳) ۱    
  ۴) -۱

تست ۱۷: اگر دامنه‌ی تابع  $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 13x + k}$  برابر  $\mathbb{R} - \left\{t, \frac{3}{t}\right\}$  باشد، مقدار  $t + k$  کدام است؟

- ۱) ۱۲ یا ۶/۵    
  ۲) ۵/۵ یا صفر    
  ۳) ۴/۵ یا ۸    
  ۴) ۳/۵ یا ۹

تست ۱۸: در معادله‌ی  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیش‌تر است.  $m$  کدام است؟

- ۱) ۱۰ (خارج ریاضی ۹۱)    
  ۲) ۱۲    
  ۳) ۱۴    
  ۴) ۱۵

تست ۱۹: یکی از ریشه‌های معادله  $x = a(x-2)^2$  از ۱۰ برابر ریشه‌ی دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{9}{5}$     
  ۲)  $\frac{4}{5}$     
  ۳)  $\frac{5}{9}$     
  ۴)  $\frac{5}{4}$

تست ۲۰: اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم  $-3mx^2 + 9x + m^2 + 2 = 0$  برابر یک باشد، مجموع آن‌ها کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{2}$     
  ۲)  $-\frac{3}{2}$     
  ۳) ۳    
  ۴) -۳

تست ۲۱: به ازای کدام مقدار  $m$  مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد؟

- ۱)  $-\frac{9}{5}$     
  ۲) ۱    
  ۳) ۱ و  $-\frac{9}{5}$     
  ۴)  $\frac{9}{5}$  و -۱ (تجربی ۹۳)





**نکته:**

الف) اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  علامت  $b$  را قرینه کنیم، ریشه‌های معادله قرینه می‌شوند.

ب) اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  جای ضرایب  $a$  و  $c$  را عوض کنیم، ریشه‌های معادله معکوس می‌شوند.

پ) اگر  $a = c$ ، دو ریشه معادله (در صورتی که دلتا مثبت باشد) عکس هم‌اند.

**مثال ۷:**

چون ریشه‌های معادله  $x^2 + 5x + 6 = 0$  برابر

هستند، پس ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 6 = 0$  برابر

هستند.

**مثال ۸:**

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینه ریشه‌های  $2x^2 - x - 3 = 0$  باشند؟

**مثال ۹:**

چون ریشه‌های معادله  $3x^2 - 2x - 1 = 0$  برابر

هستند پس ریشه‌های معادله  $-1x^2 - 2x + 3 = 0$  برابر

هستند.

**مثال ۱۰:**

معادله  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  دارای دو ریشه است که



**نکته:**

ت) اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، معادله دارای دو جواب با علامت مخالف است. (در این حالت نیازی به محاسبه دلتا نیست)

ث) اگر  $\frac{c}{a} > 0$ ،  $\Delta > 0$  و  $-\frac{b}{a} > 0$  معادله دو ریشه مثبت و همچنین اگر  $\frac{c}{a} > 0$ ،  $\Delta > 0$  و  $-\frac{b}{a} < 0$  معادله دو ریشه منفی دارد.

ج) اگر  $\frac{c}{a} = 0$  و  $\Delta > 0$  معادله لااقل یک ریشه برابر صفر دارد.

**تست ۲۲:**

معادله  $3x^2 + x - a^2 = 0$ ، ( $a \in \mathbb{R}$ ،  $a \neq 0$ ) چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱) ۲ هم‌علامت      ۲) ۱      ۳) ۲ غیر هم‌علامت      ۴) بدون ریشه

**تست ۲۳:**

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، از معادله  $mx - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$  فقط یک جواب برای  $x$  حاصل می‌شود؟

- ۱)  $-\frac{3}{2} < m < 2$  (تجربی ۸۸)      ۲)  $0 < m < 2$       ۳)  $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$       ۴)  $2 < m < \frac{7}{2}$

«(آزموهای زندگیمان را به اهداف زندگیمان تبدیل کنیم تا برای رسیدن به آنها تلاش کنیم نه اینکه فقط دعا کنیم.)»

به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $m$ ، از معادله‌ی  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای  $x$  حاصل می‌شود؟ (خارج تجربی ۸۸)

(۱)  $m \geq 1$       (۲)  $m < 2$       (۳)  $1 \leq m < 2$       (۴) هیچ مقدار  $m$

تست ۲۴

معادله‌ی  $\sqrt{x} - x + 6 = 0$  چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) صفر

تست ۲۵

در مورد معادله‌ی  $3x^2 - 4x - \sqrt{3} = 1$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱) دو ریشه‌ی حقیقی مثبت دارد.      (۲) دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.  
(۳) دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد.      (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تست ۲۶



**نکته:** اگر مجموع و حاصلضرب ریشه‌های یک معادله به ترتیب برابر  $S$  و  $P$  باشند، معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  خواهد بود.

**نکته:** برای نوشتن یک معادله جدید بر اساس معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  که ریشه‌هایش در ارتباط با ریشه‌های این معادله باشند، کافیت با استفاده از یک تغییر متغیر به معادله مورد نظر برسیم. راه دیگر برای یافتن معادله جدید، محاسبه  $S$  و  $P$  جدید است.

(مثال) معادله درجه دومی را بنویسید که ریشه‌های آن یک واحد از ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 2 = 0$  کمتر باشند.

روش اول (تغییر متغیر):

$$1) \quad x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{y=x-1 \Rightarrow x=y+1} (y+1)^2 + (y+1) - 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 3y = 0$$

روش دوم (استفاده از جمع و ضرب ریشه‌ها):

$$2) \quad x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = (\alpha - 1) + (\beta - 1) = S - 2 = -1 - 2 = -3 \\ P' = \alpha'\beta' = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = P - S + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - (-3)x + 0 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$$

(چ) ریشه‌های معادله  $ax^2 + b'x + c' = 0$ ، برابر ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  است.

(( کارتان را آغاز کنید، توانایی انجاش بدنبال می‌آید. ))

**مثال ۱۱:** معادلات درجه دوم بنویسید که ریشه‌های آن‌ها به ترتیب برابر  $۳-۵$  و  $۲ \pm \sqrt{۳}$  باشند.

**مثال ۱۲:** معادله درجه دوم بنویسید که ریشه‌های آن:

الف) یک واحد از دو برابر ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - 1 = 0$  بیشتر باشند.

ب) از معکوس ریشه‌های معادله  $3x^2 + 2x - 4 = 0$  آن سه واحد بیشتر باشند.

ج) عکس و قرینه ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند.

**مثال ۱۳:** معادلات درجه دوم بیابید که ریشه‌های آن  $۳$  و  $-۲$  برابر ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 8 = 0$  باشند.

**تست ۷۷:** اگر هر یک از ریشه‌های معادله  $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی

(تجربی ۸۶)  $x^2 - 7x + 3 = 0$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۱)  $-۱۴$  (۲)  $-۱۲$  (۳)  $-۸$  (۴)  $-۶$

**تست ۷۸:** ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + ax + b = 0$  یک واحد از ریشه‌های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  بیشتر است

(تجربی ۸۷)  $b$  کدام است؟

(۱)  $-۲$  (۲)  $-۱$  (۳)  $\frac{۲}{۳}$  (۴)  $\frac{۴}{۳}$

(( (اهام علی(ع): اندازه‌ی هر کس به اندازه‌ی همت اوست. ))))

تست ۲۹: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x(5x+3)=2$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله‌ی  $4x^2-kx+25=0$  به صورت  $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$  است؟ (ریاضی ۹۰)

۳۱ (۴)

۲۸ (۳)

۲۹ (۲)

۲۷ (۱)

تست ۳۰: اگر  $\alpha$ ،  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2-3x-4=0$  باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت  $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$  است؟ (ریاضی ۹۲)

$$4x^2-3x-1=0 \quad (۴)$$

$$4x^2-5x-1=0 \quad (۳)$$

$$4x^2-3x+1=0 \quad (۲)$$

$$4x^2-5x+1=0 \quad (۱)$$

تست ۳۱: معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ برابر معکوس ریشه‌های معادله  $x^2-3x+1=0$  باشد، کدام است؟

$$x^2-9x-9=0 \quad (۴)$$

$$x^2+9x-3=0 \quad (۳)$$

$$x^2-9x+3=0 \quad (۲)$$

$$x^2-9x+9=0 \quad (۱)$$

تست ۳۲: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2-3x=1$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله‌ی  $8x^2+kx-1=0$  به

صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است؟ (خارج ریاضی ۹۰)

نکته: برای حل معادلات  $ax^2+bx+c=0$  یا  $au^2+bu+c=0$  که در آن  $u$  یک عبارت بر حسب  $x$  است، مشابه معادلات درجه دوم عمل می‌کنیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

سوال ۱۴: معادله‌های  $۲(۳x-۱)^۲ + (۳x-۱) - ۳ = ۰$ ،  $۵x^۴ - ۲x^۲ - ۱ = ۰$  را حل کنید.

سوال ۳۳: - مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰$ ، کدام است؟

- (تجربی ۹۰) ۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

سوال ۳۴: حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله  $(x^۲ + ۳)^۲ - ۵x^۲ - ۱۱ = ۰$  کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۴

سوال ۳۵: تعداد جواب‌های معادله  $۲x^۲ + \frac{۲}{x^۲} - ۵x - \frac{۵}{x} + ۷ = ۰$  کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۳



معادلات گویا: این معادلات به صورت کسری هستند که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است.

نکته: دامنه معادلات گویا به صورت مقابل است.  $D = \mathbb{R} - \left\{ \text{ریشه های مخرج کسر} \right\}$

نکته: برای حل معادلات گویا کافی است طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم. جواب‌هایی که ریشه مخرج نباشند، مورد قبول هستند.

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow ((x-2)(x-1)) \left( \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 3 = (x-2) \Rightarrow x = -3 \notin \{1, 2\} \quad \text{ok}$$

مثال ۱: دامنه‌ی توابع  $y = \frac{x+1}{x^2-6x}$ ,  $y = \frac{1-2x}{x^3-4x}$ ,  $y = \frac{1}{\frac{x}{7-x} - x - 1}$  را بیابید.



تست ۱: - مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{2}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۶

(۲) ۶

(۱) ۱۲



تست ۲: - معادله‌ی  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$  دارای چند ریشه‌ی حقیقی است؟

(۴) ریشه حقیقی ندارد.

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۴



تست ۳: - معادله‌ی  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$  دارای چند ریشه‌ی حقیقی است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



(( اهامر علی(ع): کرامت، زابیده‌ی همت است. ))

تست ۴: اگر معادله  $\frac{3-x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{ax+b}{x^2-9}$  دارای بی‌شمار جواب باشد، حاصل  $a+b$  کدام است؟

- ۴ (۱)  ۱۶ (۲)  ۹ (۳)  صفر (۴)

تست ۵: چند عدد طبیعی وجود دارد که مجموع نصف آن و دو برابر معکوسش برابر  $\frac{10}{3}$  شود؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲)  ۳ (۳)  صفر (۴)

تست ۶: یک آشپز به همراه شاگردش غذایی را در ۷۲ دقیقه آماده می‌کند. اگر شاگرد بخواهد به تنهایی آن غذا را آماده کند، یک ساعت بیشتر از مدت

زمانی طول می‌کشد که آشپز بخواهد آن را به تنهایی آماده کند. شاگرد آشپز آن غذا را به تنهایی در چند ساعت آماده می‌کند؟

- ۱/۵ (۱)  ۲ (۲)  ۳ (۳)  ۲/۵ (۴)

تست ۷: تعداد جواب‌های معادله  $\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{3}{x-1}$ ، کدام است؟

- صفر (۱)  ۱ (۲)  ۲ (۳)  ۳ (۴)

تست ۸: مجموع جواب‌های معادله  $x^3 - \frac{1}{x^2} = 3x - \frac{3}{x}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  صفر (۲)  ۱ (۳)  ۲ (۴)

تست ۹: اگر  $x=2$  یکی از ریشه‌های معادله  $\frac{a}{x+1} = \frac{a-2x}{x^2+1} + \frac{3a-1}{x^2-x+1}$  باشد، ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

- ۱ (۱)   $x = -1$  (۲)   $x = \frac{3}{4}$  (۳)

(۴) معادله ریشه‌ی دیگری ندارد.

- ۳ (۳)   $x = -\frac{1}{2}$  (۴)

(( (امام علی(ع): هیچ شرافتی چون بلند همتی نیست. ))))

تست ۱۰: اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{(4a-3)x^2 + 2ax + 1}$ ، فقط شامل یک عدد حقیقی نباشد، چند مقدار برای  $a$  وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



نکته: مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به

عرض آن باشد. یعنی اگر  $x$  و  $y$  به ترتیب طول و عرض مستطیل باشد داشته باشیم:  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$

نکته: اگر در نسبت طلایی  $y = 1$  باشد خواهیم داشت:  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . به این عدد، عدد طلایی می‌گوییم.

تست ۱۱: «مستطیل طلایی» مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}-2}{2}$  (۴)

$\frac{\sqrt{5}+2}{2}$  (۳)

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (۱)



تست ۱۲: مساحت یک مستطیل طلایی  $2(1+\sqrt{5})$  است. محیط مستطیل چقدر است؟

$3+\sqrt{20}$  (۴)

$3+\sqrt{5}$  (۳)

$6+\sqrt{20}$  (۲)

$6-\sqrt{20}$  (۱)



معادلات رادیکالی: ساده‌ترین شکل توابع رادیکالی  $f(x) = \sqrt{x}$  است که به هر عضو از دامنه جذرش را نسبت می‌دهد.

دامنه عبارات رادیکالی: در دامنه عبارات رادیکالی با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد اما اگر فرجه فرد باشد، زیر رادیکال هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

نکته: برای حل معادلات رادیکالی، طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم. جواب‌هایی مورد قبول هستند که در معادله برقرار باشند.

$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x-1}+1)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x-1+1+2\sqrt{x-1}=x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-1}+1=1 \\ \sqrt{1}=1 \end{cases}$$





مثال ۲: معادلات زیر را حل کنید.  $\sqrt{x-2}-2=1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ ,  $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=1$ .



مثال ۳: معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\sqrt{t}+2=0$

ب)  $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

ب)  $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$



تست ۱۳: - معادله  $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}=1$  چند ریشه حقیقی دارد؟

۴ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۱۴: - تعداد جواب‌های معادله  $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-2x}=0$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



تست ۱۵: - معادله  $2\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^3+x-10}=0$  چند ریشه دارد؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۱۶: - چند عدد صحیح وجود دارد که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



((اهام علی(ع): از تنبلی و بی‌حوصلگی بپرهیز زیرا که این دو خصلت تو را از بهره دنیا و آخرت باز می‌دارند.))

تست ۱۷:

معادله‌ی  $\sqrt{4x-3} + 2 - 3x = 0$  از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

- (۱) یک جواب (۲) دو جواب هم علامت (۳) دو جواب با علامت مخالف (۴) جواب ندارد

(خارج ۸۷)



تست ۱۸:

تعداد ریشه‌های قابل قبول معادله‌ی  $\sqrt{x} + 6 = 0$  برابر  $k_1$  و تعداد ریشه‌های قابل قبول  $\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5$  برابر  $k_2$  است، مقدار

$k_1 + k_2$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) هیچ



تست ۱۹:

اگر  $x = 4$  یکی از جواب‌های معادله  $x + a = \sqrt{5x - x^2}$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگر ندارد.



تست ۲۰:

اگر  $x = 1$  یکی از جواب‌های معادله  $2\sqrt{2x-a} = 1+x$  باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) ۲



تست ۲۱:

جواب‌های معادله  $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x-5$  چگونه است؟

- (۱) جواب حقیقی ندارد. (۲) یک جواب حقیقی دارد. (۳) دو جواب حقیقی دارد. (۴) بی‌شمار جواب حقیقی دارد.



تست ۲۲:

اگر  $27 = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}$ ، مقدار  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{9}$



تست ۲۳: دو نقطه روی نیم‌ساز ربع اول و سوم وجود دارد که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی  $A(2, 0)$  برابر  $\sqrt{10}$  باشد. مجموع عرض‌های دو نقطه‌ی مورد نظر

کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۳ (۱)



قدر مطلق: برای عبارت جبری  $u$  تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

نکته: در حالت کلی داریم:  $|x| = c \Rightarrow x = \pm c$ ، از این موضوع برای حل معادلات قدرمطلق استفاده می‌کنیم.

مثال ۴: جواب معادلات و نامعادلات زیر را بیابید.

$$2|x-5|+3=11$$

$$|3x-4|=2|x|$$

$$|x-10|-6=2$$

$$|3+|x-1||=6$$

تست ۲۴: معادله  $|x^2-1|+|x+1|=0$  چند جواب دارد؟

۴) بیشمار

۳) ۲

۲) ۱

۱) ۰

تست ۲۵: مجموعه جواب معادله  $|x-3|+x=3$  کدام است؟

۴)  $\emptyset$

۳)  $(-\infty, 3]$

۲)  $[3, \infty)$

۱)  $[0, 3]$

تست ۲۶: اگر  $x^2+7x+12 < 0$ ، حاصل عبارت  $\sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$  کدام است؟

۴)  $-2x-4$

۳)  $2x+4$

۲) ۲

۱) -۲



**تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها:** برای تعیین علامت هر چند جمله‌ای، ابتدا همه ریشه‌های آن را می‌یابیم و سپس در جدول، علامت سمت راست بزرگترین ریشه را هم‌علامت ضریب بزرگترین توان قرار می‌دهیم و سپس یکی در میان این علامت را در بین سایر ریشه‌ها (به جز ریشه‌های مضاعف از درجه زوج) تغییر می‌دهیم.

**مثال:** عبارت  $P = (x^2 + 1)(x^3 - 3x)$  را تعیین علامت کنید.

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = +\sqrt{3}, x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\sqrt{3}$	.	$\sqrt{3}$
p	-	+	-

**نکته:** عبارات کسری نیز مانند عبارات ضربی تعیین علامت می‌شوند، با این تفاوت که این عبارات در ریشه مخرج تعریف نشده هستند.

**مثال:** عبارت  $P = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$  را تعیین علامت کنید.

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	-1	.	2
p	-	+	-

**نکته:** عباراتی که ریشه‌ی حقیقی ندارند ( $\Delta < 0$ )، همیشه هم‌علامت ضریب بزرگترین جمله هستند.

**مثال ۱:** تعیین علامت کنید.

a)  $P = (4x + 2)^3 (x^3 - 3x)$

b)  $P = x^3 - x$

c)  $P = x^3 + x^2 - 3x - 3$

d)  $P = \frac{2x^2 - x}{1 - x}$

((اهم علی(ع): برای دنیایت چنان کار کن که گویا برای همیشه در این دنیا خواهی بود، برای آخرت چنان سعی و تلاش کن که گویا فردا از دنیا خواهی رفت.))

**تست ۱:** اگر  $x \geq 3$  باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله  $|x^2 - 2| - x \leq 21$  کدام است؟

- (۱)  $3 \leq x \leq 4$  (۲)  $3 \leq x \leq 5$  (۳)  $3 \leq x \leq \frac{7}{2}$  (۴)  $x \geq 5$

**تست ۲:** اگر برای تعیین علامت  $p(x)$  و  $q(x)$  به ترتیب از راست به چپ جداول زیر رسم شده باشد، آن‌گاه  $m \times n$

کدام است؟ ( $p(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $q(x) = cx^2 + bx + a$  و  $a, c > 0$ )

$x$	$\frac{2}{d}$	$\frac{n}{d}$	$+$
$q(x)$	$+$	$-$	$+$

$x$	$\frac{1}{3}$	$m$	$+$
$p(x)$	$+$	$-$	$+$

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۶ (۴)  $\frac{1}{6}$

**نکته:** برای تعیین علامت  $p(x) = ax^2 + bx + c$  با ریشه‌های  $\alpha, \beta$  که  $\alpha < \beta$  بدون جدول داریم:

i:  $ap \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha \vee x \geq \beta$       ii:  $ap \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$

برای عبارات کسری نظیر  $p(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  شبیه بالا عمل می‌کنیم با این تفاوت که بجای علامت  $a$  از علامت  $ac$  استفاده می‌کنیم.

**مثال ۲:** عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

- a)  $P = x^2 - 5x + 6$       b)  $P = -x^2 + 5x$

**تست ۳:** عبارت  $P(x) = x^2 + ax + b$  به ازای  $2 < x < 3$  منفی و به ازای بقیه مقادیر نامنفی است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۱۱ (۴) -۱۱

**تست ۴:** جدول تعیین علامت عبارت  $A = \frac{ax+b}{a-2x}$  به صورت مقابل است. مقدار  $b$  کدام است؟

$x$	$1$	$\frac{5}{2}$	$+$
$A$	$-$	$+$	$-$

تعریف نشده

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۵



**الف) نامعادلات درجه اول:**

صورت کلی این نامعادلات به یکی از صورت‌های زیر است:

$$ax + b \leq 0, ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \geq 0, (a \neq 0)$$

**نکته:**

الف) اگر طرفین یک نامعادله در یک عبارت منفی ضرب یا تقسیم شود، جهت آن عوض می‌شود.  
ب) اگر طرفین یک نامعادله هم‌علامت باشند، با معکوس کردن طرفین نامعادله، جهت آن عوض می‌شود.

**مثال ۳:** نامعادلات زیر را حل کنید.

$$6x - 2 < 2(x - 1)$$

$$\frac{x - 2}{5} \geq \frac{x}{6}$$

$$-2 \leq 2x + 5 < 9$$

$$2 < \frac{1 - 3x}{5} < 7$$

**تست ۷:**

مجموعه جواب نامعادله  $|x - 4| < 2x - 5$  کدام است؟

(۴)  $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

(۳)  $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$

(۲)  $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$

(۱)  $(1, 5)$  (ریاضی ۹۲)

**تست ۸:**

چند عدد صحیح منفی در نامعادله‌ی  $\frac{1+x}{3} < -2 - \frac{x}{4}$  صدق می‌کند؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۱



**تست ۸:**

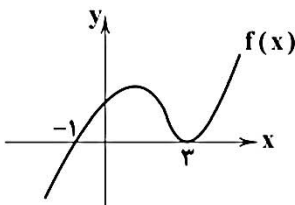
اگر  $f(x)$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه جواب نامعادله‌ی  $\frac{x}{f(x)} < 0$  کدام است؟

(۱)  $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$

(۲)  $(-1, 3)$

(۳)  $(-1, 0)$

(۴)  $(0, +\infty)$



«(امام علی(ع): لذت فهمیدن، مخصوص جوینده پابنده است.)»



**ب) نامعادلات درجه دوم و کسری**

برای حل این نوع نامعادلات، ابتدا تمام عبارات را به یک سمت نامعادله منتقل می‌کنیم و در نهایت بعد از ساده سازی، به کمک تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم.

$$\frac{x-4}{-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{3x-4}{4-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x-4+x^2+4}{4-x^2} \leq 0 \Rightarrow p = \frac{x^2+3x}{4-x^2} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3, x = 0 \\ x = -2, x = 2 \end{cases}$$

x	-3	-2	0	2
p	-	+	-	+
	⌊	⌊	⌊	⌊

**مثال ۴:** نامعادلات زیر را حل کنید.

a)  $x^2 - 9 < 0$

b)  $\frac{x^2 + 5x}{x+2} \geq 0$

**مثال ۵:** مجموعه جواب نامعادلات  $x - x^2 + 6 \geq 0$ ,  $-2x^2 - 5x + 7 \geq 0$ ,  $x^2 - 12x + 27 > 0$  را بیابید.

**مثال ۶:** مجموعه جواب نامعادلات  $\frac{2x+6}{x-1} \leq 0$ ,  $\frac{3-x}{x+4} < 0$  را بیابید.

**تست ۱:** مجموعه جواب نامعادله‌ی  $\frac{3x-5}{6x^2-7x-5} < 0$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$       (۲)  $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$       (۳)  $(-\infty, -\frac{1}{2})$       (۴)  $(-\infty, \frac{5}{3})$

تست ۱۰: به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $3x^2 + mx - 3 = 0$  دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

(۲) هیچ مقدار  $m$

(۱) هر مقدار  $m$

(۴)  $m > 6$

(۳) فقط  $m = \pm 6$

تست ۱۱: - نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4; x > -1$ ، در بازه  $(a, b)$  زیر محور  $x$ ها است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۴) 2

(۳) 4

(۲) 3

(۱) 5 (ریاضی ۸۸)

تست ۱۲: مجموعه جواب نامعادله‌ی  $\frac{x^3 - x^2}{3x^3 - 3} > 1$  کدام است؟

(۴)  $\{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

(۳)  $\emptyset$

(۲)  $\{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$

(۱)  $\mathbb{R} - \{1\}$

تست ۱۳: مجموعه جواب نامعادله‌ی  $\frac{-x^2 + 3x + 10}{x^2 - 1} > 0$  کدام است؟

(۴)  $(-\infty, 5)$

(۳)  $(-\infty, -2) \cup (1, 5)$

(۲)  $(-5, +\infty)$

(۱)  $(-2, 1)$

تست ۱۴: مجموعه جواب نامعادله‌ی  $\frac{1}{x-2} < \frac{1}{x-3}$  کدام است؟

(۴)  $\mathbb{R} - (2, 3)$

(۳)  $[2, 3)$

(۲)  $\mathbb{R} - [2, 3]$

(۱)  $(2, 3)$



تست ۱۵: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی  $\frac{2x(x-1)^2(x-2)^3}{|x+1|} > 0$  کدام است؟

- (۱)  $[2, +\infty)$  (۲)  $((-\infty, 0] \cup [2, +\infty)) - \{-1\}$   
 (۳)  $((-\infty, 0) \cup (2, +\infty)) - \{-1\}$  (۴)  $\{-1\} \cup (2, +\infty)$

تست ۱۶: مجموعه جواب نامعادله‌ی  $\frac{(x+2)^2(x^2-3x+2)}{(-x^2+x)^3} \geq 0$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 2] \cup \{-2\}$  (۲)  $(0, 1) \cup (1, 2] \cup \{-2\}$   
 (۳)  $(0, 2]$  (۴)  $[-2, 0] \cup (1, 2]$

تست ۱۷: در کدام فاصله‌ی زیر منفی است؟  $A = \frac{x^4 - 27x}{x^2 + x + 1}$

- (۱)  $(-4, 3)$  (۲)  $(3, 4)$  (۳)  $(1, 2)$  (۴)  $(-3, 0)$

تست ۱۸: جواب نامعادله‌ی  $1 - 2x < x^2 + 1 < x + 1$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $(-\infty, -2)$  (۳)  $(-1, 0)$  (۴)  $(0, 1)$

تست ۱۹: جواب نامعادله‌ی  $\frac{x^2 + x - 2}{|x| + 1} < 0$  را به صورت  $|x - \alpha| < \beta$  تبدیل کرده‌ایم. مقدار  $\alpha + \beta$  چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴) ۲

نکته: در حالت کلی داریم:

$$x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a, \quad x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow (x \geq a \vee x \leq -a)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

«(امام علی(ع): عبادت کننده بدون دانش، مانند چهارپای آسیاب است که می‌گردد و از مکان خود خارج نمی‌شود.)»

مثال ۷: نامعادله مقابل را حل کنید.

$$x^2 - 16 > 0 \Rightarrow$$

$$4x^2 - 20 \leq 100 \Rightarrow$$

$$5 - x^2 < 2 \Rightarrow$$

$$2(6 + 2x) > x^2 + 4x + 1$$

نامعادلات قدر مطلق: در حالت کلی از این روابط زیر برای حل نامعادلات قدر مطلق استفاده می‌کنیم.

$$|x| \leq c \Rightarrow -c \leq x \leq c, |x| \geq c \Rightarrow x \leq -c \vee x \geq c$$

$$\text{EX) } |x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5, |x - 2| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3 \\ x - 2 \leq -1 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$



مثال ۸: جواب نامعادلات زیر را بیابید.



$$|2x + 3| < 2$$

$$2|x + 1| - 4 \leq 0$$

$$|2x - 5| - 5 > 1$$

$$\left| \frac{x+1}{1-x} \right| > 2$$

مثال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله‌ی  $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$  شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱۰ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)



تست ۲۱: کدام یک از گزینه‌ها قسمتی از جواب نامعادله  $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} > 0$  است؟

- (۱)  $1 < x < 2$  (۲)  $0 < x < 1$  (۳)  $-1 < x < 0$  (۴)  $-2 < x < -1$

تست ۲۲: مجموعه جواب نامعادله  $|x^2 + x| \leq 2$  به صورت  $[a, b]$  است. حاصل  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۲۳: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{2x - 3}{x + 2} \leq 2$  به صورت  $[a, +\infty)$  است.  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{7}{8}$

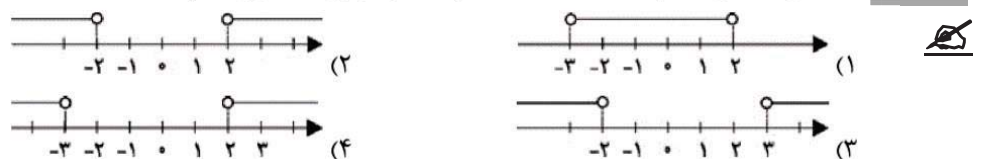
تست ۲۴: اگر مجموعه جواب نامعادله  $|ax + b| > 5$  به صورت  $R - [-3, 2]$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

تست ۲۵: مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{x-1}{2} - 2 \right| \geq 2$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -1] \cup [9, +\infty)$  (۲)  $[1, 9]$   
(۳)  $[-1, 9]$  (۴)  $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

تست ۲۶: نمایش مجموعه جواب نامعادله  $|2x + 1| > 5$  بر روی محور کدام است؟

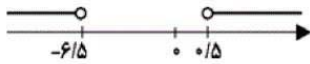


((اشار علی(ع): رشد انسان، به خرد و ارزشش به آگاهی اوست.))

سؤال ۲۷: اگر مجموعه جواب نامعادله‌های  $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \leq 3$  و  $A \leq -2x + 3 \leq B$  برابر باشند،  $A+B$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۷ (۴) -۷

سؤال ۲۸: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی  $|2x+b| > c$  به صورت زیر باشد، در این صورت حاصل  $2c-b$  کدام است؟



- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) -۶ (۴) -۸

سؤال ۲۹: مجموعه جواب معادله  $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{2-x}{x-3}$  کدام است؟

- (۱) (۲, ۳) (۲) (۲, ۴) (۳) [۲, ۳] (۴) [۰, ۳]

سؤال ۳۰: مجموعه جواب نامعادله  $2x - |x-1| > 8$  کدام است؟

- (۱)  $\{x | x > 7\}$  (۲)  $\{x | x > 9\}$  (۳)  $\{x | x > 7 \text{ و } x < 1\}$  (۴)  $\{x | x > 9 \text{ و } x < 1\}$

سؤال ۳۱: - مجموع تمام اعداد صحیحی که در نامعادله  $|x^2 + 3x - 11| \leq 7$  صدق می‌کنند، کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) -۹ (۴) -۶



**تعریف الگو:** به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می‌باشد که ممکن است تکرار شوند یا رشد کنند و یا ترکیبی از این دو باشد.

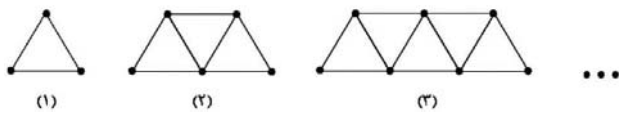
**جمله عمومی الگو:** جمله عمومی یک الگو رابطه‌ای است که ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

**نکته:** اگر جمله عمومی یک الگو را  $a_n$  در نظر بگیریم، آنگاه منظور از  $a_1$  جمله اول این الگو و در کل منظور از  $a_n$  جمله  $n$ ام الگو است.

**الگوی خطی:** به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. واضح است که در این نوع دنباله‌ها، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  است. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب  $n$  است.

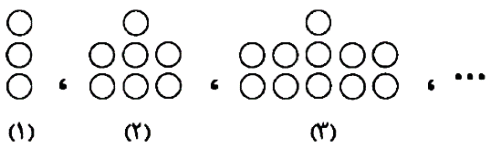
جمله‌ی عمومی الگوی زیر را بیابید.

$n$	۱	۲	۳	...
$a_n$	۵	۸	۱۱	...



با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خطها در شکل چندم برابر ۸۷ است؟

- (۱) ۲۱
- (۲) ۲۲
- (۳) ۲۳
- (۴) ۲۴

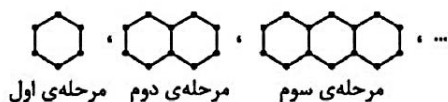


با توجه به الگوی زیر، هشتمین شکل شامل چند دایره است؟

- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۲
- (۳) ۲۸
- (۴) ۳۱



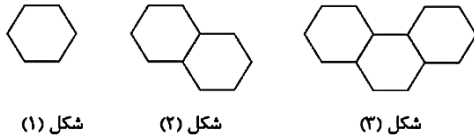
با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خطها در مرحله‌ی دهم کدام است؟



- (۱) ۵۰
- (۲) ۵۱
- (۳) ۶۰
- (۴) ۶۱



با توجه به الگوی زیر، در شکل چندم این الگو ۴۶ پاره‌خط وجود دارد؟



۹ (۲)

۸ (۱)

۱۰ (۴)

۷ (۳)

اگر  $c_n$  جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی،  $c_4 = 17$  و  $c_1 = 41$  باشد، کدام است؟

$c_n = 4n$  (۴)

$c_n = 5n - 9$  (۳)

$c_n = 4n + 1$  (۲)

$c_n = 5n - 3$  (۱)

الگوی غیر خطی: اگر جملات دنباله‌ها از الگویی غیر از الگوی خطی پیروی کند، غیر خطی نامیده می‌شود.

الگوی زیر از چه نوعی و جمله‌ی عمومی آن کدام است؟

۲, ۸, ۱۸, ۳۲, ...

$a_n = 2n^2$  و غیرخطی (۲)

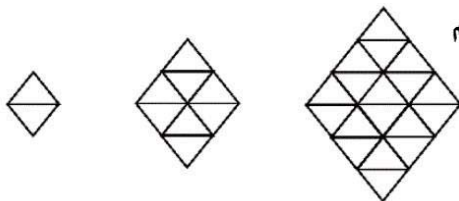
$a_n = 2n^2$  خطی (۱)

$a_n = 2n^2 - 1$  و غیرخطی (۴)

$a_n = 2n^2 - 1$  خطی (۳)

با توجه به الگوی موجود در شکل‌های زیر، تعداد مثلث‌های کوچک در شکل دهم

چقدر می‌باشد؟



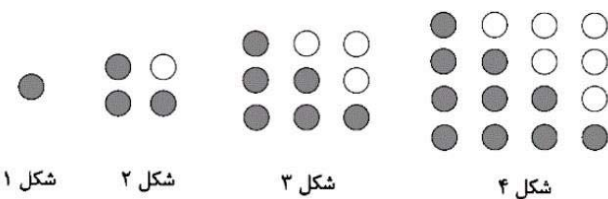
۲۲۴ (۲)

۲۰۰ (۱)

۱۹۶ (۴)

۱۸۴ (۳)

با توجه به الگوی زیر، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید در شکل یازدهم کدام است؟



۱۱ (۲)

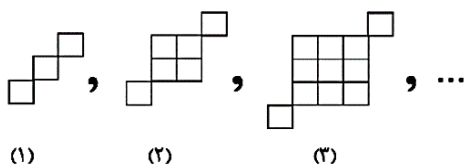
۱۰ (۱)

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

(( امام علی (ع): تقوای الهی پیشه کن گرچه اندک، و میان خود و خدای خویش حریم ننگه دار و لو کمر رنگ . ))

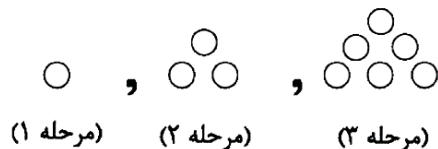
در الگوی شکل زیر، تعداد قوطی کبریت‌ها در مرحله‌ی یازدهم کدام است؟ (□ : یک قوطی کبریت)



- ۱) ۱۲۱  
۲) ۲۱۰  
۳) ۷۶  
۴) ۱۲۳



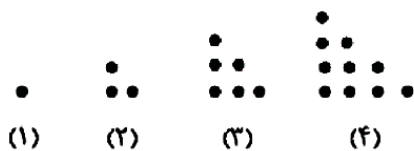
در دنباله‌ی مثلثی شکل زیر، مرحله‌ی بیستم شامل چند دایره است؟



- ۱) ۲۰۵  
۲) ۲۱۰  
۳) ۲۵  
۴) ۲۲۰



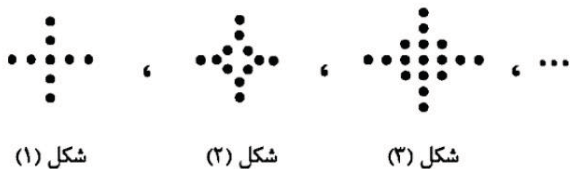
در الگوی زیر، تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟



- ۱) ۵۰ آمین  
۲) ۱۵۱ آمین  
۳) ۱۰۰ آمین  
۴) ۱۰۱ آمین



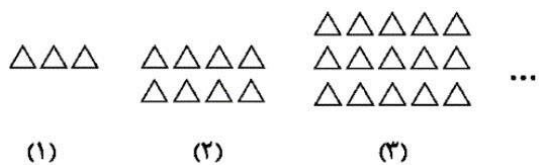
در چندمین شکل از الگوی غیرخطی زیر، تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱۲۹ می‌شود؟



- ۱) ۷  
۲) ۱۱  
۳) ۱۹  
۴) ۱۰



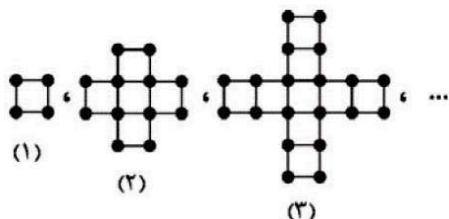
در الگوی مقابل، شکل دهم از چند مثلث تشکیل شده است؟



- ۱) ۸۶  
۲) ۹۸  
۳) ۱۱۲  
۴) ۱۲۰



با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۹۱ است؟



- ۱) ۸  
۲) ۱۰  
۳) ۱۲  
۴) ۱۴

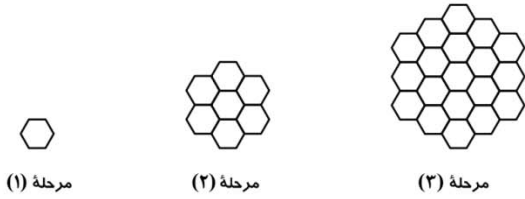


تست ۱۸: در یک الگوی غیرخطی درجه‌ی دوم، جملات اول تا چهارم دنباله برابر  $t_1 = 2$ ،  $t_2 = 5$ ،  $t_3 = 10$ ،  $t_4 = 17$  است. جمله‌ی یازدهم دنباله کدام است؟

- ۸۸ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۱۲۲ (۳)      ۹۲ (۴)



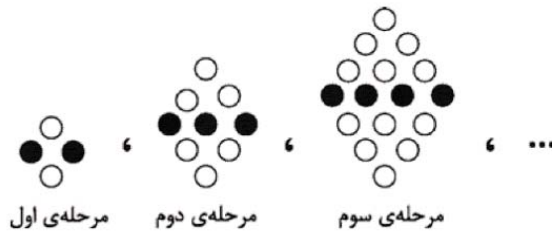
تست ۱۹: با توجه به الگوی زیر، تعداد شش‌ضلعی‌ها در مرحله‌ی دهم کدام است؟



- ۲۱۷ (۱)  
۲۷۱ (۲)  
۳۰۱ (۳)  
۳۳۱ (۴)



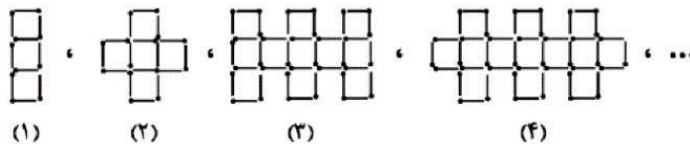
تست ۱۷: با توجه به الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های سفید در شکل مرحله‌ی یازدهم کدام است؟



- ۱۳۲ (۱)  
۱۳۶ (۲)  
۱۲۲ (۳)  
۱۲۶ (۴)



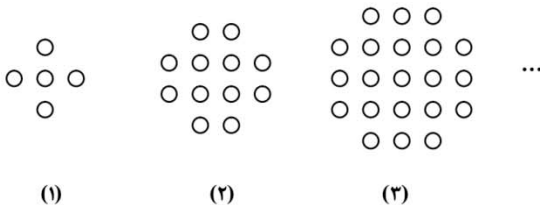
تست ۱۸: با توجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله‌ی یازدهم کدام است؟



- ۱۲۶ (۱)  
۱۳۰ (۲)  
۱۰۶ (۳)  
۸۲ (۴)



تست ۱۹: با توجه به الگوی زیر در شکل چن‌دم، تعداد دایره‌ها برابر ۱۱۷ می‌شود؟



- ۱۱ (۱)  
۸ (۲)  
۱۰ (۳)  
۹ (۴)



۱) تعریف دنباله: دنباله تابعی است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد.

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$



دانلود از سایت ریاضی سرا



**مثال ۲۰:** جمله‌ی عمومی دنباله‌های  $a_n = \frac{3n+2}{n}$ ،  $b_n = \sqrt{n^2+1}$ ،  $c_n = \{n^2 - 3n\}$  و  $d_n = \left\{ \frac{n+1}{2n+3} \right\}$  را داریم. سه

جمله‌ی اول آن را بنویسید.

**تست ۲۰:** در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ . جمله هشتم این دنباله، کدام است؟

تجربی ۹۵

۱) ۱۲۷      ۲) ۱۵۹      ۳) ۲۴۷      ۴) ۲۵۵

**تست ۲۱:** در یک دنباله اعداد  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ . حاصل  $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

تجربی خارج ۹۵

۱) ۳۲      ۲) ۴۸      ۳) ۵۶      ۴) ۶۴



۲) دنباله حسابی (عددی): جملات این دنباله‌ها از جمع عدد قبلی با یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله‌ها بصورت  $a, a+d, a+2d, \dots$  است. که در آن  $a$  جمله اول و  $d$  قدر نسبت است.

نکته: قدر نسبت در این دنباله‌ها از رابطه  $d = a_n - a_{n-1}$  محاسبه می‌شود. و همچنین جمله عمومی این دنباله‌ها در حالت کلی به شکل  $a_n = a + (n-1)d$  است.

**مثال ۲۱:** در دنباله  $\dots, -1, 2, 5$  قدر نسبت و جمله‌ی ۲۰ام و جمله ۱۲۵ام را مشخص کنید.



**تست ۲۲:** اگر در یک دنباله‌ی حسابی، جمله  $(n-1)$ ام به صورت  $3n-2$  باشد، جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۷۶

می‌باشد؟ ( $n > 1$ )



۱) بیستم      ۲) بیست و سوم      ۳) بیست و پنجم      ۴) سی ام

«مسئله‌ی زندگی‌تان را به عهده بگیرید، بدانید فقط شما هستید که می‌توانید خودتان را به جایی که می‌خواهید برسانید، نه هیچکس دیگری.»

در یک دنباله‌ی حسابی با جملات مثبت، حاصل ضرب جمله‌ی اول و پنجم برابر ۵۷ و حاصل ضرب جمله‌ی

تست ۲۳

دوم و چهارم برابر ۱۰۵ است. در این صورت سومین جمله‌ی دنباله کدام است؟



۱۵ (۴)

۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۹ (۱)

نکته: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  به ترتیب سه جمله از یک دنباله حسابی باشند، به  $b$  واسط عددی

$$b = \frac{a+c}{2} \text{ می‌گوییم و داریم:}$$

نکته: اگر جمله‌ی  $a_m$  و  $a_n$  از یک دنباله حسابی را داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

نکته: در دنباله‌های حسابی، مجموع  $n$  جمله متوالی، برابر است با  $n$  برابر جمله وسط آن جملات.

نکته: علاوه بر نکته بالا، می‌توان، می‌توانیم مجموع  $n$  جمله اول در دنباله‌های حسابی را از رابطه

زیر بیابیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$



مثال ۴: در مجموعه اعداد طبیعی عدد ۵ واسط عددی چه اعدادی است؟



مثال ۵: اگر در یک دنباله جمله ششم ۱۵ و جمله دهم ۳۴ باشد، قدر نسبت دنباله را بیابید.



تست ۲۴: در دنباله‌ی حسابی  $a_n$ ، اگر  $a_4 = 20$  و  $a_8 = 56$ ، مقدار  $a_{21}$  کدام است؟

۱۷۳ (۴)

۱۷۴ (۳)

۱۷۵ (۲)

۱۷۶ (۱)



تست ۲۵: در یک دنباله‌ی حسابی،  $a_3 + a_5 = 16$  و  $a_7 - a_2 = -160$  است، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۵ (۴) -۵



تست ۲۶: اگر در یک دنباله‌ی حسابی جملات چهارم و یازدهم به ترتیب ۶۴ و ۲۲ و جمله‌ی آخر دنباله ۲۰- باشد،

این دنباله چند جمله دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵

- (۳) ۱۷ (۴) ۱۸



تست ۲۷: اگر جمله‌ی سوم و پنجم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر ۳۳ و ۱۹ باشد، چندجمله‌ی

این دنباله مثبت است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۱۳



تست ۲۸: در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی دوم برابر با ۳ و مجموع سه جمله‌ی چهارم برابر با ۳۹ است.

جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹



تست ۲۹: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول دنباله برابر ۱ و مجموع پنج جمله‌ی اول آن برابر با یک چهارم

مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳

- (۳) -۴ (۴) -۶



تست ۳۰: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات دوم، هشتم و دهم از سه برابر جمله‌ی ششم ۱۰ واحد بیشتر

است. تفاضل جملات نهم و چهارم، مربع کدام عدد است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷

- (۳) ۶ (۴) ۵



تست ۳۱: اگر سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی  $۳ + ۲k$ ،  $۲k - ۴$  و  $۲k + ۱$  باشند، مقدار  $k$  کدام است؟

- ۱)  $-۱۰$     
 ۲)  $۱۰$     
 ۳)  $-۱۲$     
 ۴)  $۱۲$

تست ۳۲: اگر ...  $۵m + ۵$ ،  $۲m - ۳$ ،  $m + ۳$  سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه جمله‌ی عمومی

دنباله‌ی حسابی کدام است؟

- ۱)  $a_n = n + ۵$     
 ۲)  $a_n = ۲n + ۱$     
 ۳)  $a_n = ۲n + ۳$     
 ۴)  $a_n = ۳n + ۲$

تست ۳۳: اعداد  $۵p - ۱$ ،  $۲p + ۴$ ،  $۲p + ۳$  سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام

است؟

(ریاضی ۸۴)

- ۱)  $۴$     
 ۲)  $۵$     
 ۳)  $۶$     
 ۴)  $۷$

تست ۳۴: به ازای کدام مقدار  $m$  عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه‌ی عددی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی  $(m^2 - ۴)x^2 - ۳x + m = ۰$

است؟

(ریاضی ۸۴)

- ۱)  $۳$     
 ۲)  $-۳$     
 ۳)  $۴$     
 ۴)  $-۴$

تست ۳۵: تصاعد حسابی به جمله اول  $۶۳$  و قدر نسبت  $(-4)$  چند جمله مثبت دارد؟

- ۱)  $۱۵$     
 ۲)  $۱۶$     
 ۳)  $۱۷$     
 ۴)  $۱۸$

تست ۳۶: در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات هفدهم و سی و چهارم، سه برابر جمله‌ی بیستم است. کدام گزینه در مورد این دنباله صحیح

است؟

- ۱) جمله‌ی نهم دنباله، منفی است.    
 ۲) جمله‌ی نهم دنباله، صفر است.    
 ۳) جمله‌ی هشتم دنباله، مثبت است.    
 ۴) نه جمله‌ی منفی دارد.



**نکته:** اگر جملی  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد  $n$  عدد دیگر بکنجانیم بطوری که جملات حاصل یک دنباله عددی را تشکیل دهند، خواهیم داشت:  $d = \frac{b-a}{n+1}$ .

**سوال ۲۶:** بین اعداد ۲۰ و ۳۵ چهار واسط عددی درج کنید.



**سوال ۲۷:** بین دو عدد ۷ و ۵۵ به تعداد هفت جمله طوری نوشته شده است که دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، جمله‌ی وسط کدام است؟

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

۳۱ (۲)

۲۹ (۱)



**سوال ۲۸:** بین دو عدد حقیقی و متمایز  $k + \sqrt{k}$  و  $\sqrt{k} - k$ ، چند عدد برحسب  $k$  باید قرار دهیم تا اعداد حاصل،

تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۱ بدهند؟ ( $k \in \mathbb{N}$ )



۲k - ۲ (۴)

۲k - ۱ (۳)

۲k + ۱ (۲)

۲k (۱)



**نکته:** جملات مشترک هر دو دنباله حسابی نظیر  $a_n$  و  $b_n$ ، یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $[a_n, b_n]$  ایجاد می‌کنند.

**سوال ۲۹:** جمله بیست و یکم از دنباله حاصل از جملات مشترک دنباله‌های  $\begin{cases} 1, 3, 5, \dots \\ 4, 9, 14, \dots \end{cases}$  کدام است؟

۲۱۵ (۴)

۲۰۹ (۳)

۱۹۵ (۲)

۲۰۵ (۱)



«(امام علی(ع): کسی که خویش را در کسب دانش به زحمت نیندازد، گوی‌های پیشی گرفتن را به دست نیاورد.»

در دو دنباله‌ی حسابی به صورت‌های  $2, 7, 12, \dots$  و  $8, 11, 14, \dots$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۵۹ (۲)

۵۸ (۱)

۶۱ (۴)

۶۰ (۳)

(خارج ۹۴)



در دنباله‌های حسابی « $2, 9, 16, 23, \dots$ » و « $12, 17, 22, 27, \dots$ » چند عدد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ موجود است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

(خارج ۹۵)



نکته: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم  $m+n=p+q$  در آن صورت در هر دنباله حسابی خواهیم داشت:

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$



در یک دنباله حسابی جملات هشتم، سیزدهم و شصت و هفتم به ترتیب برابر ۱۱، ۳۶ و ۳۰۶ هستند. جمله ۶۲ کدام است؟

۲۶۹ (۴)

۲۵۹ (۳)

۲۸۱ (۲)

۲۶۳ (۱)

(خارج ۹۶)



(دنباله هندسی: جملات این دنباله‌ها از ضرب عدد قبلی در یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله‌ها بصورت  $a, aq, aq^2, \dots$  است. که در آن  $a$  جمله اول و  $q$  قدر نسبت است.)

نکته: قدر نسبت در این دنباله‌ها از رابطه  $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$  محاسبه می‌شود. و همچنین جمله عمومی این

دنباله‌ها در حالت کلی بشکل  $a_n = aq^{n-1}$  است.

$$EX) 3, 15, 75, \dots \Rightarrow q = \frac{15}{3} = 5, a_n = aq^{n-1} = 3(5)^{n-1}, a_{21} = 3(5)^{20}$$

نکته: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، به  $b$  واسط هندسی  $a$  و  $c$  می‌گوییم و داریم  $b^2 = ac$ .



دانلود از سایت ریاضی سرا

«(امام علی(ع): دانش بالاترین کاهیبی است.)»

مثال ۷: در دنباله  $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \dots$  قدر نسبت و جمله‌ی ۷-ام و ۲۰-ام را مشخص کنید.



تست ۴۳: توپی از ارتفاع ۱۰۰ متری یک ساختمان رها می‌شود. این توپ هر بار که به زمین می‌خورد، به اندازه‌ی  $\frac{1}{9}$  ارتفاع قبلی به بالا می‌رود، این توپ پس از برخورد سوم با زمین، تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



(۱) ۹۰ متر      (۲) ۸۱ متر      (۳)  $72/9$  متر      (۴)  $67/1$  متر

تست ۴۴: در یک تصاعد هندسی صعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (۴)

۵ (۳)

۲۵ (۲)

$\sqrt{5}$  (۱)



تست ۴۵: اگر  $4x, 3x-1$  و  $5x+3$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مجموعه مقادیر ممکن برای  $x$  کدام است؟

$\{-1, -3\}$  (۴)

$\{1, -3\}$  (۳)

$\{1, 3\}$  (۲)

$\{-1, 3\}$  (۱)



تست ۴۶: جمله‌ی بیستم از دنباله‌ی حسابی  $3, 0, -3, \dots$  با جمله‌ی چندم از دنباله‌ی هندسی  $2, 6, 18, \dots$  برابر است؟



هشتم (۴)

هفتم (۳)

پنجم (۲)

چهارم (۱)

تست ۴۷: اعداد  $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$  سه جمله متوالی از تصاعد هندسی اند. واسطه عددی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

$\sqrt{2}$  (۴)

$1/5$  (۳)

۲ (۲)

$2/5$  (۱)



تست ۴۸

اعداد  $a$ ،  $2$  و  $a-3$  جملات متوالی از دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند، جمله‌ی چهارم چند برابر جمله‌ی دهم آن است؟

۱۲۸ (۴)

۶۴ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)



تست ۴۹

در یک دنباله‌ی هندسی،  $t_1 = 3$  و  $t_2 = 1$  است. حاصل  $A = \frac{t_{21} + t_{22} + t_{25}}{t_{23} + t_{25} + t_{27}}$  کدام است؟

$\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$  (۲)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$  (۱)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-20}$  (۴)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-12}$  (۳)



نکته: اگر جمله‌ی  $a_n$  و  $a_m$  از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، خواهیم داشت:  $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$ .

نکته: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد  $n$  عدد دیگر بگنجانیم به طوری که

جملات حاصل یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، خواهیم داشت:  $q^{n+1} = \frac{b}{a}$ .

نکته: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم  $m+n = p+q$ ، در آن صورت در هر دنباله حسابی خواهیم

داشت:  $a_m a_n = a_p a_q$ .

نکته: مجموع  $n$  جمله اول از دنباله‌ی هندسی  $a_n$ ، از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:  $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ .

نکته: اگر جملات  $m$ ،  $n$  و  $k$  از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی را تشکیل دهند،

قدر نسبت دنباله هندسی از رابطه‌ی  $q = \frac{k-n}{n-m}$  به دست می‌آید.

شماره ۴۸ در یک دنباله هندسی جمله سوم و هفتم آن به ترتیب برابر ۵ و  $\frac{1}{125}$  هستند. دنباله را مشخص کنید.





سوال ۱۰: بین اعداد ۲ و ۱۲۸ پنج واسط هندسی بگنجانید.



سوال ۱۱: اگر بین دو عدد ۷ و ۱۷۰۱، چهار واسطه‌ی هندسی درج کنیم، نسبت بزرگ‌ترین واسطه به کوچک‌ترین واسطه کدام است؟



- |        |        |
|--------|--------|
| ۹ (۲)  | ۳ (۱)  |
| ۸۱ (۴) | ۲۷ (۳) |

سوال ۱۲: جملات دوم، چهارم و هشتم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی و متمایز از یک دنباله‌ی هندسی هستند. اگر جمله‌ی اول این دنباله‌ی هندسی  $\frac{1}{4}$  باشد، جمله‌ی دهم آن کدام است؟



- |         |         |
|---------|---------|
| ۹۶ (۲)  | ۶۴ (۱)  |
| ۱۲۸ (۴) | ۱۱۲ (۳) |

سوال ۱۳: در یک دنباله‌ی هندسی با جملات افزایشی مجموع جمله‌ی چهارم و ششم برابر ۱۲۰ و مجموع جمله‌ی پنجم و هفتم برابر ۲۴۰ است. جمله‌ی چهارم دنباله کدام است؟



- |        |        |       |       |
|--------|--------|-------|-------|
| ۴۸ (۴) | ۲۴ (۳) | ۳ (۲) | ۲ (۱) |
|--------|--------|-------|-------|

سوال ۱۴: در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۷- و مجموع جملات هفتم و هشتم برابر ۵۶ است. مجموع جملات اول و سوم کدام است؟




- |                     |                    |                    |        |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------|
| $-\frac{25}{8}$ (۴) | $\frac{17}{4}$ (۳) | $\frac{33}{8}$ (۲) | -۴ (۱) |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------|

سوال ۱۵: در دنباله‌ی حسابی ...،  $\frac{7}{4}$ ، ۲، اگر به جملات چهارم، هشتم و سیزدهم مقداری ثابت اضافه کنیم، به ترتیب از راست به چپ، سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی حاصل می‌شود، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟



- |                   |                   |       |       |
|-------------------|-------------------|-------|-------|
| $\frac{5}{4}$ (۴) | $\frac{4}{3}$ (۳) | ۲ (۲) | ۳ (۱) |
|-------------------|-------------------|-------|-------|

تست ۵۵: اگر دنباله‌ی شماره‌ی (۱) یک دنباله‌ی حسابی و دنباله‌ی شماره‌ی (۲) یک دنباله‌ی هندسی باشد، حاصل  $c - b$  کدام است؟ 


$$(۱): 1, a, a + b, 10, \dots \quad , \quad (۲): a, c, 16, 32, \dots$$

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۸ (۱)


تست ۵۶: عدد کدام گزینه، واسطه‌ی هندسی بین جمله‌های دهم و شانزدهم دنباله‌ی حسابی زیر است؟ 

$$4, 8, 12, \dots$$

 $16\sqrt{10}$  (۴) $8\sqrt{10}$  (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)


تست ۵۷: حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی  $3, x, y, 24, \dots$  کدام است؟ 

$3^{19} \times 2^{19}$  (۴)

$3^{20} \times 2^{19}$  (۳)

$3 \times 2^{19}$  (۲)

$3^{20} \times 2^{20}$  (۱)

تست ۵۸: جملات ششم و نهم دنباله‌ی حسابی  $1, 4, 7, \dots$  به ترتیب جملات سوم و پنجم یک دنباله‌ی هندسی هستند. در این دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی سیزدهم چند برابر جمله‌ی یازدهم است؟ 

$\frac{4}{5}$  (۴)

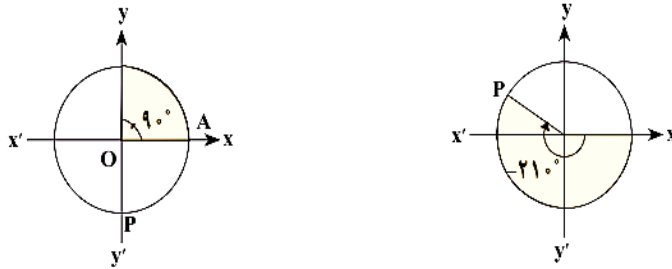
$\frac{25}{16}$  (۳)

$\frac{16}{25}$  (۲)

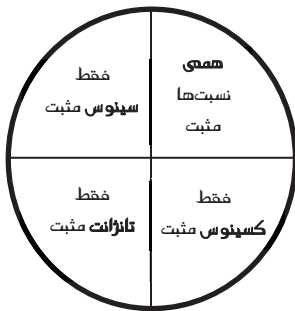
$\frac{5}{4}$  (۱)



دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ی جهت‌دار به شعاع یک است، که جهت مثبت آن عکس جهت حرکت عقربه‌های می‌باشد.



نکته (علامت نسبت‌های مثلثاتی): برای حفظ آسان نواحی که در آنها نسبت‌های مثلثاتی مثبت‌اند، از جدول زیر و یا از قانونی به نام "هستک" استفاده می‌کنیم. به این معنی که "همه"ی نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه اول مثبت‌اند و در ناحیه دوم فقط سینوس، در ناحیه سوم فقط تانژانت و در ناحیه چهارم فقط کسینوس مثبت است.



ربع / نسبت مثلثاتی	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

توجه: اگر  $\sin \alpha \cdot \tan \alpha < 0$  و  $\cos \alpha \cdot \cot \alpha > 0$ ، انتهای کمان زاویه  $\alpha$  در کدام ربع دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم



توجه: اگر  $\cos^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$  و  $\tan \theta + \cos \theta + 2 = 0$  باشد، آنگاه  $\theta$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

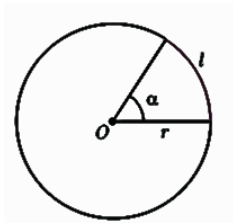
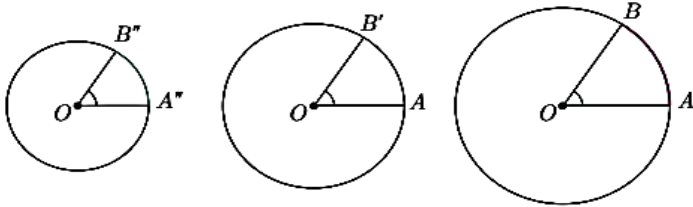


((اهام علی(ع): دانش را فراگیر، پس بدرستی که اگر بی‌نیاز باشی، تو را آرایش نماید و اگر فقیر باشی، تو را تأمین کند.))



**تعریف:** یک رادیان (rad)، برابر است با اندازه‌ی زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

**مثال:** در دایره‌های زیر داریم:  $\widehat{A''B''} = r''$ ،  $\widehat{A'B'} = r' \widehat{AB} = r$ . پس در هر سه دایره، اندازه زاویه مرکزی داده شده برابر یک رادیان است.

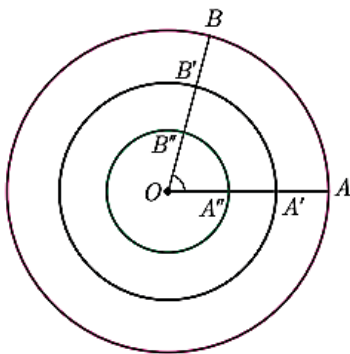


**نکته:** اگر  $l$  طول کمان روبه‌روی زاویه  $\alpha$  شعاع دایره و  $\alpha$  اندازه‌ی

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه داریم:

در شکل مقابل  $\angle O = 1(\text{rad})$ ، طول کمان‌های داده شده را بیابید.



$l$	$\Delta m$	$4 \text{ cm}$	
$r$		$20 \text{ cm}$	$7 \text{ cm}$
$\alpha(\text{rad})$	$\Delta(\text{rad})$		$2/5(\text{rad})$

جدول زیر را تکمیل کنید.

چه مدت زمان طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار ساعت، به اندازه  $\frac{8\pi}{3}$  رادیان دوران کند؟

(۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه

(۱) یک ساعت

(۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

(۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه



**نکته:** نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با  $\pi$  نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد  $3/14$  است.

**نکته:** اگر  $D$  اندازه‌ی زاویه  $\alpha$  برحسب درجه و  $R$  اندازه این زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi(\text{rad})}$$

**مثال:** زاویه‌های  $60^\circ$ ،  $150^\circ$  را، بر حسب رادیان بیابید.

$$R = \frac{\pi D}{180^\circ} = \frac{\pi(60^\circ)}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}(\text{rad}) \quad , \quad R = \frac{\pi D}{180^\circ} = \frac{\pi(150^\circ)}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}(\text{rad})$$

**مثال:** زاویه‌های  $1$ ،  $\frac{2}{3}$ ،  $\frac{\pi}{6}$ ،  $\pi$ ،  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان را، بر حسب درجه بیابید.

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{1 \times 180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3/14} = 57/32^\circ$$

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{2}{3} \times 180^\circ}{\pi} \approx \frac{120^\circ}{3/14} = 38/21^\circ$$

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{6} \times 180^\circ}{\pi} = 30^\circ$$

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\pi \times 180^\circ}{\pi} = 180^\circ \quad , \quad D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{2\pi}{3} \times 180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

سه مورد مثال آخر به صورت زیر نیز قابل محاسبه است:

$$\frac{\pi}{6}(\text{rad}) = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ \quad , \quad \pi(\text{rad}) = 180^\circ \quad , \quad \frac{2\pi}{3}(\text{rad}) = \frac{2 \times 180^\circ}{3} = 120^\circ$$

**تست ۴:** - انتهای کمان زاویه  $\frac{17\pi}{5}$  رادیان در کدام ربع دایره مثلثاتی واقع است؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول



**تست ۵:** - زاویه  $D$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  رادیان است. این زاویه چند درجه است؟

(۴) ۹

(۳) ۲۰

(۲) ۱۸

(۱) ۱۰





«(امام صادق(ع): نیکی به پدر و مادر نشانه شناخت شایسته بنده خداست، زیرا هیچ عبادتی زودتر از رعایت حرمت پدر و مادر مسلمان به خاطر خدا، انسان

را به رضایت خدا نمی‌رساند.))»

تست ۹: طول مسیری که نوک برف‌پاک‌کنی به طول  $\frac{3}{\pi}$  متر پس از طی زاویه مرکزی  $40^\circ$  طی می‌کند، تقریباً چند سانتی‌متر است؟

۶۷ (۲)

۶۰ (۱)

۵۷ (۴)

۷۶ (۳)

تست ۱۰: اندازه یک زاویه بر حسب رادیان برابر با  $\frac{20\pi}{3}$  است. اندازه این زاویه بر حسب درجه کدام است؟

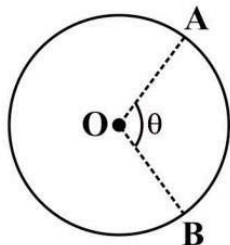
۱۲۰۰ (۲)

۶۰۰ (۱)

۷۲۰ (۴)

۹۰۰ (۳)

تست ۱۱: در شکل زیر، اگر شعاع دایره ۴cm و طول کمان AB برابر ۱۲cm باشد،  $\theta$  چند درجه است؟



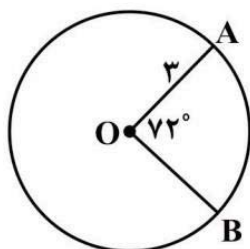
$\frac{360}{\pi}$  (۳)

$\frac{180}{\pi}$  (۱)

$\frac{720}{\pi}$  (۴)

$\frac{540}{\pi}$  (۲)

تست ۱۲: در شکل زیر طول کمان روبه‌رو به زاویه  $72^\circ$  درجه کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



$2\pi$  (۳)

$\pi$  (۱)

$\frac{6\pi}{5}$  (۴)

$\frac{2\pi}{5}$  (۲)

تست ۱۳: تقریباً چند ساعت طول می‌کشد تا عقربه ساعت‌شمار به اندازه  $1/57$  رادیان دوران کند؟ ( $\pi \simeq 3/14$ )

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

تست ۱۴: ماهواره‌ای روی مدار دایره‌ای شکل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در هر شبانه‌روز یک دور مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. زاویه‌ای که این

ماهواره نسبت به مرکز مسیر دایره‌ای در مدت ۵ ساعت طی می‌کند، تقریباً چند رادیان است؟ ( $\pi = 3/14$ )

$1/2$  (۲)

۱ (۱)

$1/4$  (۴)

$1/3$  (۳)

تست ۱۵: - یکی از زوایای یک مثلث متساوی‌الساقین برابر  $\frac{7\pi}{12}$  رادیان است. اندازه زاویه دیگر این مثلث چند درجه است؟

۳۷/۵ (۴)

۳۵ (۳)

۴۲/۵ (۲)

۱۵ (۱)



تست ۱۶: شعاع چرخ جلوبی تراکتوری ۱ متر و شعاع چرخ عقب آن ۱۲۰ سانتی‌متر است. وقتی چرخ جلو ۷۰ درجه می‌چرخد، چرخ عقب تقریباً چند درجه خواهد چرخید؟

چرخید؟



۵۸ (۲)

۵۶ (۱)

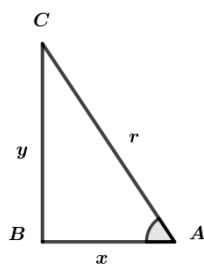
۶۸ (۴)

۶۶ (۳)



۱. علامت نسبت‌های مثلثاتی: با توجه به مطالب درس قبل داریم:

$\alpha$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



۲. در مورد زاویه دلخواه A از مثلث قائم‌الزاویه نظیر شکل مقابل داریم:

$$\sin A = \frac{y}{r}, \quad \cos A = \frac{x}{r}, \quad \tan A = \frac{y}{x}$$

و همچنین می‌دانیم که روابط زیر در حالت کلی برای این نسبت‌ها برقرار است:

$$a) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1) \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ 2) \frac{\div \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 3) \frac{\div \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$b) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad c) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (\tan \alpha \cot \alpha = 1)$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq +1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin \alpha \geq 0 \\ \sin \alpha - 1 \leq 0 \end{cases}, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq +1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos \alpha \geq 0 \\ \cos \alpha - 1 \leq 0 \end{cases}$$



مثال ۴: علامت نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را برای زاویه‌های داده شده را بیابید.

زاویه	$55^\circ$	$15^\circ$	$21^\circ$	$29^\circ$	$1(\text{rad})$	$\frac{\pi}{9}(\text{rad})$	$\frac{2\pi}{3}(\text{rad})$	$\frac{5\pi}{4}(\text{rad})$	$\frac{5\pi}{3}(\text{rad})$
علامت	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\sin \alpha$

تست ۱۷: علامت عبارت‌های  $\sin 82^\circ$ ،  $\tan 171^\circ$ ،  $\cos 262^\circ$  و  $\cot 279^\circ$  به ترتیب از راست به چپ برابر است با:

- (۱) مثبت-مثبت-مثبت-منفی  
 (۲) مثبت-منفی-منفی-مثبت  
 (۳) منفی-مثبت-مثبت-مثبت  
 (۴) مثبت-منفی-منفی-منفی

تست ۱۸: اگر  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{23}}{4}$ ، حاصل  $|\sin \alpha - \cos \alpha|$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{4}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

تست ۱۹: مقدار  $A = \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} - \sqrt{1 + 2\sin x \cos x}$  به ازای  $x = 200^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $2\sin 200^\circ$  (۲)  $2\cos 200^\circ$  (۳)  $-2\sin 200^\circ$  (۴)  $-2\cos 200^\circ$

تست ۲۰: اگر  $\cos(-x) = -\frac{4}{5}$  و  $\sin(\pi - x) > 0$ ، مقدار  $\tan x + \cot x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{25}{24}$  (۲)  $-2$  (۳)  $-\frac{13}{6}$  (۴)  $-\frac{25}{12}$

تست ۲۱: اگر  $\sin \alpha \cos \alpha > \sin \alpha$ ،  $\cos \alpha + \cot \alpha < 0$  باشد، آنگاه انتهای زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم  
 (۳) سوم (۴) چهارم

تست ۲۲: اگر  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{1000}$  باشد، کدام رابطه صحیح است؟ (x در ناحیه‌ی اول است.)

- (۱)  $\sin 2x < 0$  (۲)  $\cos 2x < 0$  (۳)  $\tan 2x > 0$  (۴)  $\tan x < 0$

تست ۲۳: ریاضیات پایه رشته‌ی علوم تجربی (دهم و یازدهم) - اگر  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3}$ ، حاصل عبارت  $\frac{\sin^2 x}{1 + 9 \cos^2 x}$  کدام است؟

$\frac{2}{9}$  (۴)

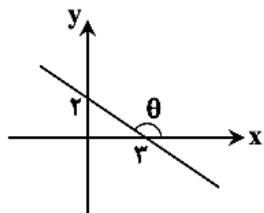
$\frac{2}{27}$  (۳)

$\frac{2}{81}$  (۲)

$\frac{1}{9}$  (۱)



تست ۲۴: با توجه به شکل مقابل، مقدار  $\cos \theta$  کدام است؟



$-\frac{4}{9}$  (۲)

$-\frac{5}{9}$  (۱)



$-\frac{3}{\sqrt{13}}$  (۴)

$-\frac{2}{\sqrt{13}}$  (۳)

جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه‌ی خاص:



(۱) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مهم ناحیه اول:

$\alpha$	$0^\circ = 0$ (rad)	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (rad)	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$ (rad)	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$ (rad)	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (rad)
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
$\tan \alpha$	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	-
$\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

(۲) نسبت‌های مثلثاتی راس‌های دایره:

$\alpha$	$0^\circ = 0$ (rad)	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (rad)	$180^\circ = \pi$ (rad)	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ (rad)	$360^\circ = 2\pi$ (rad)
$\sin \alpha$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	-	۰	-	۰
$\cot \alpha$	-	۰	-	۰	-



a)  $\sin^2 \frac{\pi}{4} + 3 \tan \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{3} =$

b)  $\frac{1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} =$

c)  $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \tan \frac{\pi}{4} \cot^2 \frac{\pi}{3} =$

d)  $\tan \frac{\pi}{9} \cot \frac{\pi}{9} + \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ =$

تست ۲۵: اگر  $\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{4}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت  $1 + \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha}$  کدام است؟



(۱) صفر

(۲) -۱

(۴) تعریف نشده

(۳) ۱

تست ۲۶: مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی  $a_n = [\sin n]$  چقدر است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)



(۱) صفر

(۲) -۲

(۳) -۱

(۴) ۱

تست ۲۷: اگر  $60^\circ < x \leq 270^\circ$  و  $A = 3 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ ، آنگاه حدود  $A$  کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{2} < A < \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$

(۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 < A \leq 2$

(۳)  $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$

(۴)  $\frac{1}{2} < A \leq 2$

تست ۲۸: اگر  $-15^\circ \leq x \leq 30^\circ$  و  $\cos 2x = \frac{2m-1}{5}$ ، حدود  $m$  کدام است؟



(۱)  $\left[\frac{7}{4}, 3\right]$

(۲)  $\left[\frac{7}{4}, \frac{5\sqrt{3}+2}{4}\right]$

(۳)  $\left[\frac{7}{4}, \frac{5\sqrt{3}+1}{4}\right]$

(۴)  $\left[-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$

تست ۲۹: دو نفر مطابق شکل با قد یکسان، یک تیر چراغ برق را از نقاط  $A$  و  $B$  به ترتیب با زوایای  $30^\circ$  و  $45^\circ$  می‌بینند. اگر فاصله  $A$  تا  $B$  برابر ۱۸ متر باشد، ارتفاع تیر چراغ برق ( $x$ ) کدام است؟

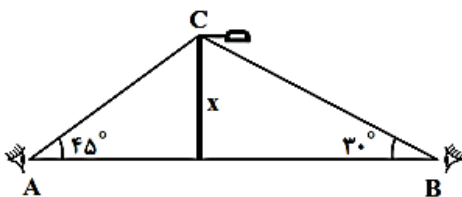


(۱)  $18(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(۲)  $9(\sqrt{3}+1)$

(۳)  $18(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

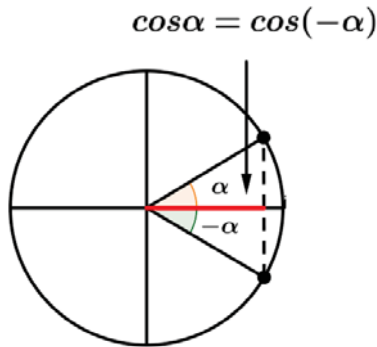
(۴)  $9(\sqrt{3}-1)$





محاسبه نسبت‌های مثلثاتی خاص:

۱. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه:



⇒

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

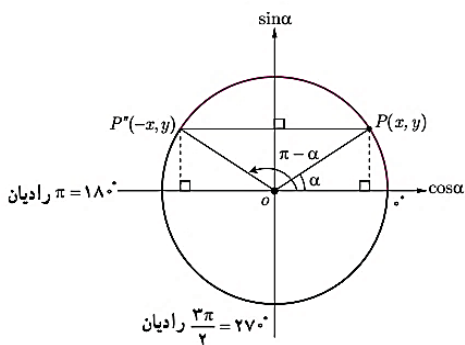
$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل:



⇒

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(\pi - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(\pi - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} (-\cos \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \quad = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

«(خداوند سبحان می‌فرماید: ای داوود! من پنج چیز را در پنج چیز قرار دادم ولی مردم در جاهای دیگر می‌جویند و نمی‌یابند:))»

تست ۱: حاصل عبارت  $A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{10\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}$  کدام است؟

- (۱) صفر  
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{5}{2}$   
 (۴)  $\frac{3}{2}$

تست ۲: محمود برای محاسبه مقدار  $\cot(-120^\circ)$  به صورت زیر عمل کرده است. در کدام مرحله او مرتکب اشتباه شده است؟

$$\cot(-120^\circ) \stackrel{(1)}{=} -\cot(120^\circ) \stackrel{(2)}{=} -\cot(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{(3)}{=} -\cot 60^\circ \stackrel{(4)}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- (۱)  
 (۲)  
 (۳)  
 (۴)

تست ۳: اگر  $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$  باشد، مقدار  $\sin x + \cos x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 (۳)  $\frac{1}{2}$   
 (۴)  $-\frac{1}{2}$

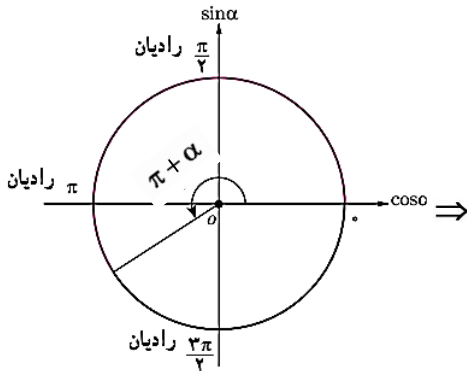
تست ۴: مقدار  $2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1$  با کدام عبارت زیر برابر است؟

- (۱)  $\cos 210^\circ$   
 (۲)  $-\sin 210^\circ$   
 (۳)  $\cos 240^\circ$   
 (۴)  $-\sin 240^\circ$

((۱- من علم و دانش را درگرسنگی و تلاش فراوان قرار داده‌ام، هر دم آن را در سیری و راحتی جستجو می‌کنند و نمی‌یابند.))



۳. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف  $\pi$  رادیان:



$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha, & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

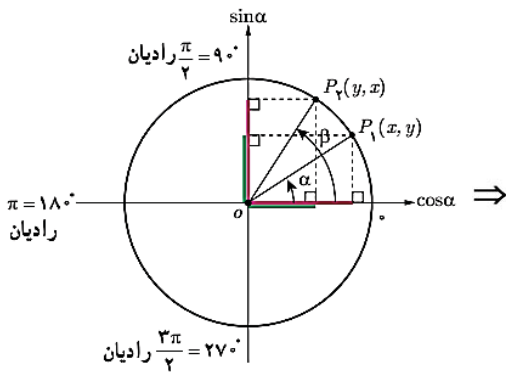
مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cot\left(\pi + 45^\circ\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \cot 45^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۴. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم:



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha, & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

نکته: اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 30^\circ\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\tan 75^\circ = \cot, \quad \sin 15^\circ = \cos$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

تست ۵: اگر  $\frac{a \sin \frac{2\pi}{3} + b \cos \frac{5\pi}{6}}{a \sin \frac{5\pi}{6} + b \cos \frac{2\pi}{3}} = \tan \frac{11\pi}{6}$  باشد،  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۲      (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴) -۲

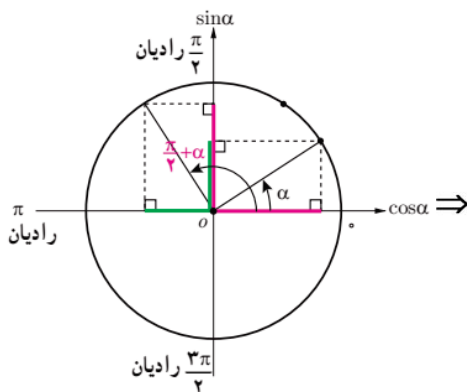
تست ۶: مقدار عبارت  $\frac{\tan 4\alpha}{\cot 6\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 7\alpha} + \sqrt{2} \sin 15\alpha$  به ازای  $\alpha = \frac{\pi}{20}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳)  $2 + \sqrt{2}$       (۴) ۳

تست ۷: چند مقدار برای  $x$  در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی یافت می‌شود که در رابطه‌ی  $\sin(x + \frac{\pi}{7}) = \cos(x - \frac{5\pi}{14})$  صدق کند؟

- (۱) ۱      (۲) صفر      (۳) ۲      (۴) بی‌شمار

۵. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف  $\frac{\pi}{2}$  رادیان:



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) = \cos 30^\circ, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4}$$

$$\tan 95^\circ = -\cot 5^\circ, \quad \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۰۲- هن عزت و افتخار را در عمل به دستورات و فرامینم قرار داده‌ام، ولی مردم آن را در خدمتگذاری به ستمگران جستجو می‌کنند و هرگز نمی‌یابند.))

تست ۸: اگر  $\tan x = -\frac{3}{4}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم باشد، حاصل  $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{5}$   
 (۲)  $\frac{3}{5}$   
 (۳)  $-\frac{4}{5}$   
 (۴)  $-\frac{3}{5}$

تست ۹: حاصل عبارت  $A = \frac{\cos^2(25^\circ + x) + \cos^2(65^\circ - x)}{\cot(25^\circ + x) \cdot \cot(x + 115^\circ)}$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) -۱  
 (۴) صفر

تست ۱۰: اگر  $x$  و  $y$  دو زاویه حاده باشند و  $x + y = \frac{\pi}{4}$ ، حاصل عبارت  $A = \tan(\Delta x + 4y) \times \tan(3x + 2y)$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲)  $-\tan^2 x$   
 (۳)  $\tan^2 x$   
 (۴) -۱

تست ۱۱: اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  باشد، آنگاه حاصل عبارت  $A = \frac{\sin(2\alpha + 3\beta)}{\cos(4\alpha + 5\beta)}$  در صورت تعریف شدن کدام است؟

- (۱)  $\tan \alpha$   
 (۲)  $\tan \beta$   
 (۳) ۱  
 (۴) -۱

تست ۱۲: اگر  $\cot \alpha = \frac{4}{3}$  و  $-\frac{9\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$  باشد، حاصل  $A = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{7\pi}{2} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{28}$   
 (۲)  $\frac{1}{68}$   
 (۳)  $-\frac{1}{28}$   
 (۴)  $-\frac{1}{68}$



۳. من بی‌نیازی را در قناعت قرار دادم و هر دم آن را در زیادی ثروت جستجو می‌کنند و هرگز نمی‌یابند. ((

تست ۱۳: حاصل عبارت  $\frac{\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 165^\circ + \cos 255^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 95^\circ + \cos 185^\circ + \cos 275^\circ}$  کدام است؟

- (۱) ۱ 
- (۲) -۱
- (۳)  $\tan 5^\circ$
- (۴)  $-\tan 5^\circ$

تست ۱۴: اگر  $\tan x = -\frac{1}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\tan(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi + x)}{\cos(-x)}$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{10}$  
- (۲)  $1 - 3\sqrt{10}$
- (۳)  $\frac{3\sqrt{10} - 1}{3}$
- (۴)  $\frac{1 - 3\sqrt{10}}{3}$


تست ۱۵: حاصل عبارت  $A = 2 \sin^2(225^\circ) + 4 \sin^2(300^\circ) - \frac{\cos(570^\circ)}{\cos(390^\circ)} - \tan(135^\circ)$  کدام است؟

- (۱) ۷ 
- (۲) ۶
- (۳) ۵
- (۴) ۴

تست ۱۶: مقدار عبارت  $\frac{\sin 200^\circ + \cos 290^\circ - \sin 340^\circ + \cos 420^\circ}{\cos \frac{10\pi}{9} - \sin \frac{11\pi}{18}}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan 20^\circ$  
- (۲)  $-\tan 20^\circ$
- (۳)  $\cot 20^\circ$
- (۴)  $-\cot 20^\circ$

تست ۱۷: اگر  $\sin(\pi + x) = \frac{1}{4} + \sin(\pi - x)$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم باشد، حاصل  $\cot(\frac{\pi}{4} + x)$  کدام است؟

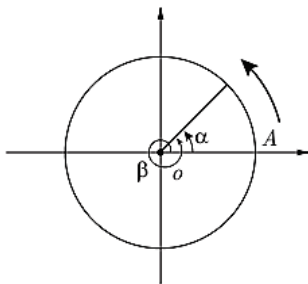
- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{15}}$  
- (۲)  $-\frac{1}{\sqrt{15}}$
- (۳)  $\sqrt{15}$
- (۴)  $-\sqrt{15}$



محاسبه نسبت‌های مثلثاتی خاص:

۱. نسبت‌های مثلثاتی زوایایی با مجموع یا تفاضل  $k\pi$  رادیان (مضارب زوج  $\pi$  رادیان):

دو زاویه را هم انتها می‌گوییم هرگاه اضلاع انتهایی آن‌ها بر هم منطبق شود. مثلا دو زاویه  $5^\circ$  و  $365^\circ$  یا دو زاویه  $76^\circ$  و  $40^\circ$  هم انتها هستند. منظور از زاویه‌های  $2k\pi + \alpha$  رادیان، زاویه‌های هم انتهای  $\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \dots$  هستند و منظور از زاویه‌های  $2k\pi - \alpha$  رادیان، زاویه‌های هم انتهای  $-\alpha, 2\pi - \alpha, 4\pi - \alpha, \dots$  داریم:



$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha & \cos(2k\pi + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2k\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \cot(2k\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(2k\pi - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(2k\pi - \alpha) &= \tan(-\alpha) = -\tan \alpha & \cot(2k\pi - \alpha) &= \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{aligned}$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin(390^\circ) = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{25\pi}{2} = \cos\frac{24\pi + \pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cot(-76^\circ) = -\cot(76^\circ + 4^\circ) = -\cot 80^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{9\pi}{4} = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

«(ع- هن رضای خودم را در سختی و ناراحتی نفس اماره قرار دادم ولی هر دم آن را در جلب رضایت نفس اماره جستجو می‌کنند و هرگز نمی‌یابند.))»

شرح: حاصل را بیابید.

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \quad , \cot \frac{5\pi}{3} =$$

$$\sin \frac{13\pi}{2} = \quad , \cot \frac{15\pi}{4} =$$

تست ۱۸: اگر  $\tan 7^\circ = m$ ، حاصل عبارت  $A = \frac{3\sin(187^\circ) + 4\cos(727^\circ)}{2\sin(97^\circ) + 3\cos(173^\circ)}$  بر حسب  $m$  کدام است؟

(۱)  $-3m + 4$  (۲)  $-3m - 4$  (۳)  $3m - 4$  (۴)  $3m + 4$

تست ۱۹: حاصل عبارت  $A = (\sin 40.5^\circ)(\cos \frac{-7\pi}{3})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{6}}{4}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$

تست ۲۰: اگر  $\sin 70^\circ \simeq 0.94$  و  $\cos 70^\circ \simeq 0.34$  باشد، آنگاه حاصل  $\cos(200^\circ) + \tan(340^\circ)$  تقریباً کدام است؟

(۱)  $1/76$  (۲)  $-3/64$  (۳)  $-1/76$  (۴)  $-1/3$

تست ۲۱: نمودار دو تابع  $y = \sin(x - 8\pi)$  و  $y = 1 - x$  در چند نقطه متقاطع‌اند؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

تست ۲۲: برای زاویه دلخواه  $\theta$ ، کدام رابطه صحیح نیست؟

(۱)  $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$  (۲)  $\sin(\pi - \theta) = \sin \pi - \sin \theta$   
 (۳)  $\cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos^2 \theta = 1$  (۴)  $\cos(\pi + \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = 0$

تست ۲۳: اگر  $\tan 50^\circ = \frac{6}{5}$  باشد، حاصل  $\frac{-2\sin 310^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ - 2\cos 220^\circ}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{16}{15}$

(۳)  $\frac{17}{18}$

(۲)  $\frac{17}{6}$

(۱)  $-\frac{17}{6}$



تست ۲۴: اگر  $\tan 18^\circ = a$ ، حاصل عبارت  $A = \frac{2\sin 72^\circ + \cos 108^\circ}{2\sin 288^\circ + \cos 72^\circ}$  بر حسب  $a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{2-a}{a+3}$

(۳)  $\frac{a+2}{a-3}$

(۲)  $\frac{2-a}{a-3}$

(۱)  $\frac{a-2}{a-3}$



تست ۲۵: حاصل عبارت  $A = \tan \frac{\pi}{11} + \tan \frac{2\pi}{11} + \tan \frac{4\pi}{11} + \tan \frac{8\pi}{11}$  کدام است؟

(۴)  $2(\tan \frac{\pi}{11} + \tan \frac{2\pi}{11})$

(۳)  $2 \tan \frac{3\pi}{11}$

(۲)  $2 \tan \frac{\pi}{11}$

(۱) صفر



تست ۲۶: اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط  $\sqrt{6}y - x = 2$  با جهت مثبت محور  $x$ ها تشکیل می‌دهد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{\sqrt{3} \sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{22\pi}{4}) - 3 \cos(\frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{\tan(\frac{45\pi}{2} - \alpha)}$$

(۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۳)  $\frac{6-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$

(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۱)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$



رابطه سینوس‌ها:

این رابطه برای محاسبه مساحت مثلث دلخواه و همچنین رابطه بین زاویه‌ها و اضلاع مثلث دلخواه می‌باشد. داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



۵. من راحتی و آسایش حقیقی و کامل را در بهشت قرار داده‌ام ولی مردم آن را در دنیا جستجو می‌کنند و هرگز نخواهند یافت.))

مساحت یک مثلث متساوی‌الساقین که طول ساق‌های آن برابر ۶ و زاویه بین آن‌ها برابر ۶۵ درجه است را بیابید.



چند مثلث با اضلاع  $a=1$  و  $b=2$  وجود دارد که مساحت آن‌ها  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  باشد؟



(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر



در مثلث  $ABC$  اگر  $\hat{A} = 60^\circ$ ،  $AB = 8$  و  $AC = 10$ ، مساحت چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟



(۴) ۴۰

(۳) ۲۴

(۲) ۲۰

(۱) ۱۲



یک بالن اطلاع‌رسانی مطابق شکل زیر توسط دو طناب به طول‌های ۳۴ و ۳۶ متر به زمین بسته شده است. مقدار سینوس زاویه  $\alpha$  تقریباً



کدام است؟ ( $\sqrt{3} = 1.7$ )

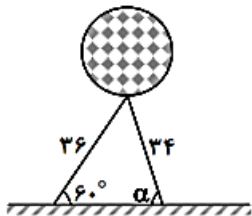


(۱) ۰/۸۵

(۲) ۰/۸۷

(۳) ۰/۸۸

(۴) ۰/۹



رابطه‌ی بین شیب خط و زاویه بین خط با محور طول‌ها:



شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ی باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:  $m = \tan \alpha$ .

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور  $x$ ها  $30^\circ$  است و از نقطه  $(-2, 1)$  می‌گذرد.



تست ۳۰: خط  $x - y = 2$  با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $\theta$  می‌سازد.  $\sin \theta$  کدام است؟

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



تست ۳۱: خطی که زاویه آن با جهت مثبت محور  $x$  ها  $45^\circ$  بوده و از نقطه  $(3, 2)$  عبور کند، محور  $y$  را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(۴) صفر

(۳) ۵

(۲) -۱

(۱) ۱



تست ۳۲: خط  $d$  با شیب مثبت، خط  $y = 1$  را در نقطه‌ای به طول  $\sqrt{3}$  قطع می‌کند. اگر زاویه بین این دو خط  $60^\circ$  باشد، معادله خط  $d$  کدام است؟

(۴)  $y = \sqrt{3}x - 2$

(۳)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}$

(۲)  $y = \sqrt{3}x$

(۱)  $y = \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$



تست ۳۳: اگر خط  $y = x + 1$  را حول محل تقاطع آن با محور طول ها  $15^\circ$  در جهت مثبت مثلثاتی دوران دهیم، معادله خط به دست آمده کدام است؟

(۴)  $y = \sqrt{3}x + 1$

(۳)  $3y = \sqrt{3}x + 1$

(۲)  $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(۱)  $3y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$



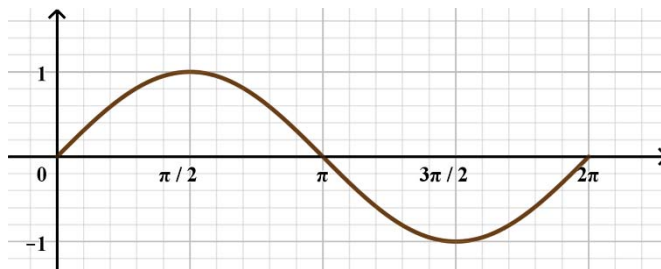


۱. رسم توابع سینوسی:

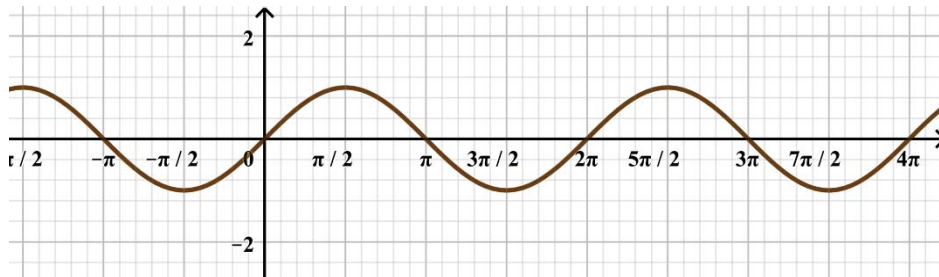
الف) رسم تابع  $y = \sin x$ : می‌دانیم جدول مقادیر مثلثاتی مربوط به تابع  $y = \sin x$  به صورت زیر است:

$\alpha$	$0^\circ = 0 \text{ (rad)}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ (rad)}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ (rad)}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
$\alpha$	$0^\circ = 0 \text{ (rad)}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$	$180^\circ = \pi \text{ (rad)}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ (rad)}$	$360^\circ = 2\pi \text{ (rad)}$
$\sin \alpha$	۰	۱	۰	-۱	۰

با توجه به این جدول، نمودار تابع  $y = \sin x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر است:



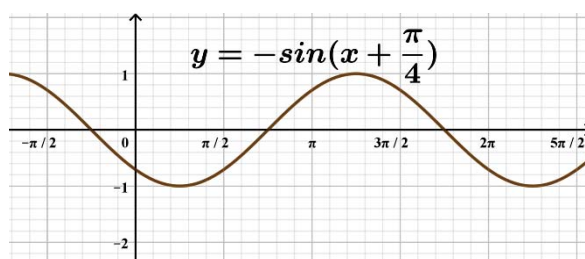
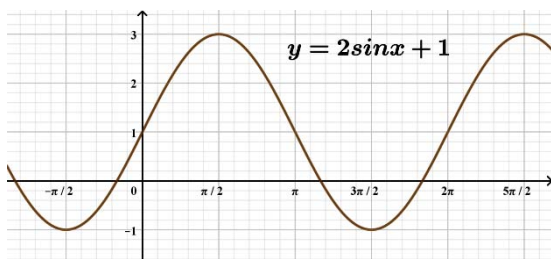
از طرفی در درس قبل دیدیم که:  $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ، و از همچنین می‌دانیم  $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ ، پس نمودار فوق به طور متناوب ادامه دارد.



نکته: داریم:  $R_{\sin x} = [-1, +1]$ ،  $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ .

ب) رسم تابع  $y = a \sin(x+b) + c$ : برای رسم این توابع، ابتدا تابع  $y = \sin x$  را رسم می‌کنیم، سپس عرض نقاط را در عدد  $a$  ضرب و با عدد  $c$  جمع می‌کنیم، سپس تابع را  $b$  واحد به چپ یا راست (برعکس علامت  $b$ ) جابجا می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع  $y = 2 \sin x + 1$ ،  $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  را رسم کنید.



«(امام رضا(ع): هر کس به خدا خوش گمان باشد، خداوند مطابق گمان او، با وی رفتار می‌کند.)»



نکته: اگر  $f(x) = a \sin(x+b) + c$ ، آنگاه  $\max(f) = |a| + c$ ،  $\min(f) = -|a| + c$ .

نتیجه: برای یافتن مقادیرهای  $a$  و  $c$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \max(f) = |a| + c \\ \min(f) = -|a| + c \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}(\max(f) - \min(f)) \quad , c = \frac{1}{2}(\max(f) + \min(f))$$

نمودار تابع  $f$  را روی محور  $y$ ها یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم و سپس آن را روی محور  $x$ ها به اندازه  $\frac{\pi}{3}$  به سمت چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه

تست ۱:

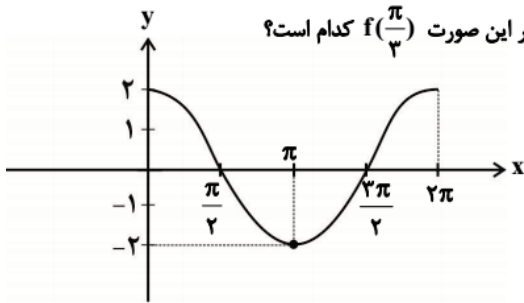
تابع در این صورت  $y = \sin x$  خواهد شد. مقدار  $f(\frac{\pi}{6})$  کدام است؟



- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

نمودار تابع  $f(x) = a \sin(x+b)$  به صورت زیر است. اگر  $-\pi \leq b \leq \pi$  باشد، در این صورت  $f(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

تست ۲:



- (۱) ۱  
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $-\frac{1}{2}$   
(۴)  $\sqrt{3}$

اگر کمترین و بیشترین مقدار تابع  $y = a + b \sin x$  به ترتیب برابر ۳ و ۷ باشند، حاصل  $2a + b$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

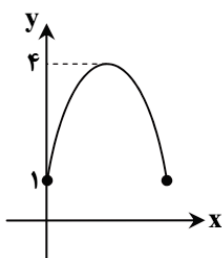
تست ۳:

- (۱) ۹      (۲) ۱۰      (۳) ۱۱      (۴) ۱۲



- نمودار تابع  $f(x) = a \sin x + b$  در بازه  $[0, \pi]$  به شکل مقابل است. مقدار  $a^2 + b^2$  کدام است؟

تست ۴:



- (۱) ۱۰      (۲) ۲  
(۳) ۵      (۴) ۱۳



تست ۵: حداقل مقدار تابع  $y = \sin x$  در نقاطی به طول  $x = \dots\dots\dots$  به دست می‌آید. ( $k \in Z$ )

- (۱)  $2k\pi$       (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$       (۳)  $2k\pi + \pi$       (۴)  $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

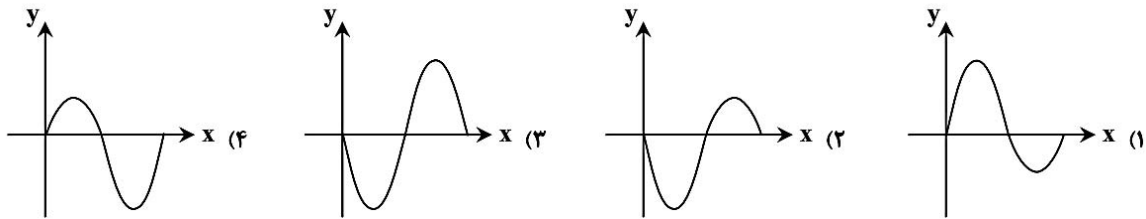
تست ۶: نمودار تابع  $y = \sin x$  بر نمودار کدام یک از توابع زیر منطبق است؟

- (۱)  $y = \sin(x - \pi)$       (۲)  $y = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$       (۳)  $y = -\sin(\frac{\pi}{2} - x)$       (۴)  $y = \cos(\pi - x)$

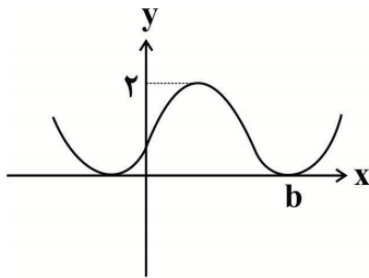
تست ۷: نمودار دو تابع  $f(x) = \sin x - 1$  و  $g(x) = -2$  در بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

تست ۸: نمودار تابع  $f(x) = \frac{3\sin x + |\sin x|}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به کدام شکل است؟



تست ۹: اگر بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$  به صورت زیر باشد،  $a, b$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$       (۲)  $\frac{3\pi}{2}$   
(۳)  $\frac{7\pi}{4}$       (۴)  $\frac{7\pi}{2}$

تست ۱۰: در تابع مثلثاتی  $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1$  در فاصله  $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$  کمترین مقدار تابع کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) -۳  
(۳) -۲      (۴) -۱

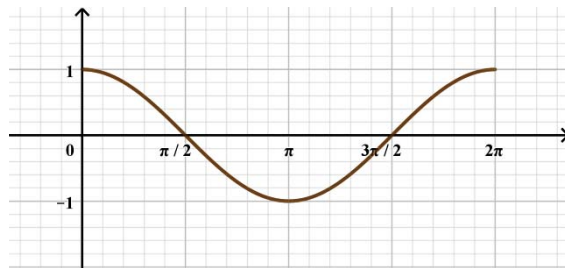


۳. رسم توابع کسینوسی:

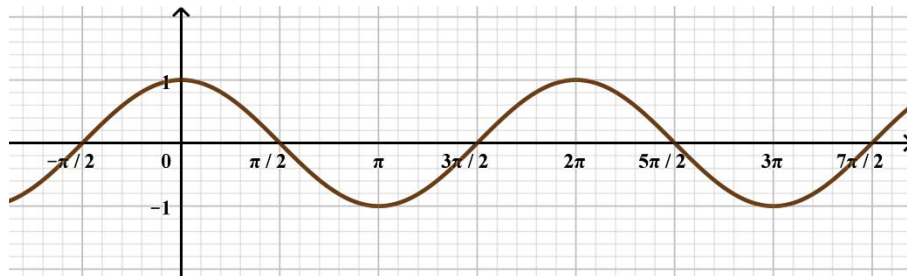
الف) رسم تابع  $y = \cos x$ : می‌دانیم جدول مقادیر مثلثاتی مربوط به تابع  $y = \cos x$  به صورت زیر است:

$\alpha$	$0^\circ = 0 \text{ (rad)}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ (rad)}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ (rad)}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
$\alpha$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$	$180^\circ = \pi \text{ (rad)}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ (rad)}$	$360^\circ = 2\pi \text{ (rad)}$	
$\cos \alpha$	۰	-۱	۰	۱	

با توجه به این جدول، نمودار تابع  $y = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر است:



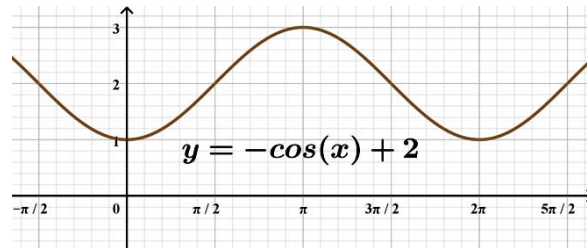
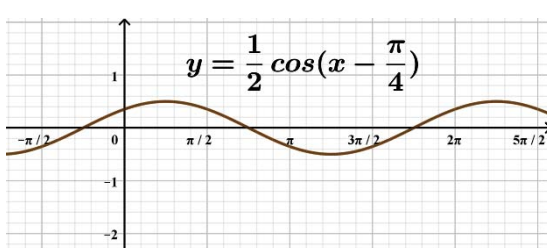
از طرفی در درس قبل دیدیم که:  $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ ، و از همچنین می‌دانیم  $D_{\cos x} = \mathbb{R}$ ، پس نمودار فوق به طور متناوب ادامه دارد.



نکته: داریم:  $D_{\cos x} = \mathbb{R}$ ،  $R_{\cos x} = [-1, +1]$

ب) رسم تابع  $y = a \cos(x+b) + c$ : برای رسم این توابع ابتدا تابع  $y = \cos x$  را رسم می‌کنیم، سپس عرض نقاط را در عدد  $a$  ضرب و با عدد  $c$  جمع می‌کنیم، سپس تابع را  $b$  واحد به چپ یا راست (برعکس علامت  $b$ ) جابجا می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع  $y = -\cos x + 2$ ،  $y = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  را رسم کنید.



«(امام رضا(ع): هیچ بندهای حقیقت ایمان را به کمال نمی‌رساند مگر این که در او سه خصلت باشد: دین‌شناسی، برنامه‌ریزی درست در زندگی، و شکیبایی در مصیبت‌ها.)»

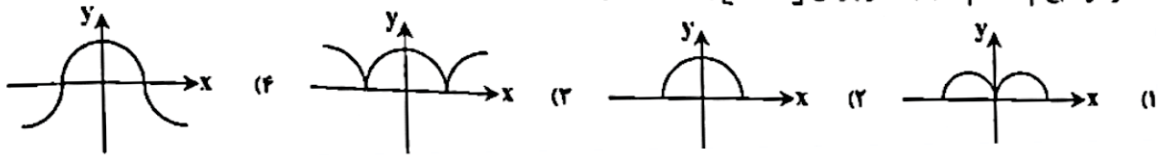


نکته: اگر  $f(x) = a \cos(x+b) + c$ ، آن‌گاه  $\max(f) = |a| + c$ ،  $\min(f) = -|a| + c$ .

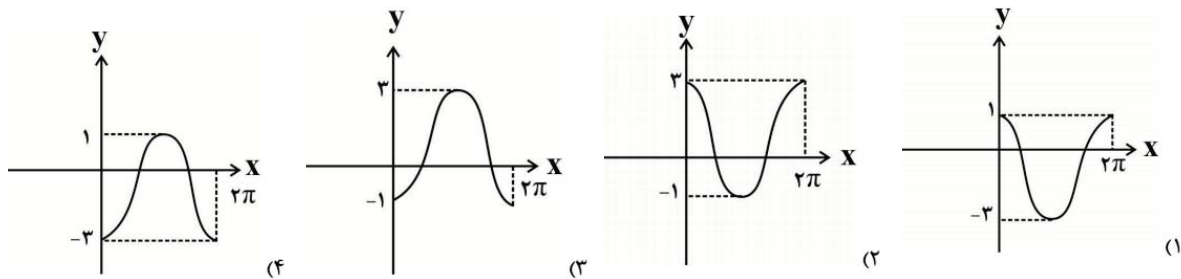
نتیجه: برای یافتن مقادیری‌های  $a$  و  $c$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \max(f) = |a| + c \\ \min(f) = -|a| + c \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}(\max(f) - \min(f)) \quad , c = \frac{1}{2}(\max(f) + \min(f))$$

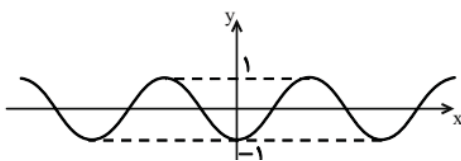
**تست ۱۳:** - نمودار تابع  $f(x) = |\cos x|$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  به کدام شکل است؟



**تست ۱۴:** - نمودار تابع  $y = -2 \cos x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



**تست ۱۵:** - کدام تابع با ضابطه زیر، نمایش نموداری شکل مقابل نیست؟



(۱)  $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$  (۳)  $y = \cos(2\pi + x)$   
 (۲)  $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$  (۴)  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{3} + x\right)$

**تست ۱۶:** تابع  $f(x) = a + b \cos x$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  دارای بیشترین مقدار  $\frac{3}{4}$  و دارای کمترین مقدار  $\frac{1}{4}$  است. در این صورت  $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

(( رمز موفقیت، پایبندی به هدف در زندگی است. ))

در تابع با ضابطه  $f(x) = a \cos x + b$ ، اختلاف حداکثر و حداقل تابع ۶ است و مقدار تابع  $f$  در بازه  $(\frac{\pi}{4}, 0)$  افزایش می‌یابد. اگر  $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$  باشد،

تست ۱۷:

b کدام است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

نمودار تابع  $y = 1 - \cos(x - \frac{\pi}{6})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند بار به محور xها برخورد می‌کند؟

تست ۱۸:

۳ (۴)

صفر (۳)

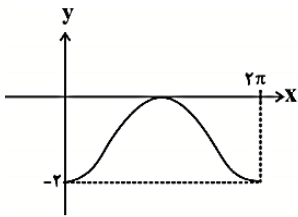
۱ (۲)

۲ (۱)

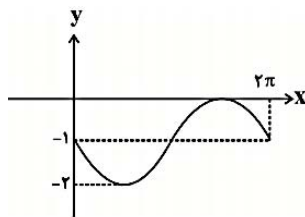


بخشی از نمودار تابع  $y = \sin(\frac{7\pi}{4} + x) - 1$  شبیه کدام است؟

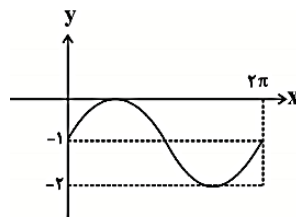
تست ۱۹:



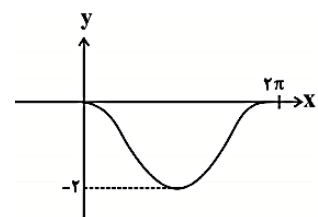
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

نمودار تابع  $y = a \cos(x - \frac{\pi}{3}) + b$  همواره زیر محور xها قرار دارد و بیش‌ترین مقدار تابع برابر با صفر است. اگر این نمودار از نقطه  $(\frac{5\pi}{3}, -1)$

تست ۲۰:

عبور کند، مقدار تابع به ازای  $x = -\pi$  کدام است؟ ( $a < 0$ )



-۱ (۲)

صفر (۱)

$-\frac{1}{4}$  (۴)

$-\frac{3}{2}$  (۳)



تعریف رابطه: به هر مجموعه از زوج‌های مرتب، يك رابطه می‌گوییم.

$$\text{EX) } R = \{(1, 2), (1, 5), (-2, 4)\}, R = \{(1, 2), (0, 6), (3, 6)\}$$

تعریف تابع: به هر رابطه‌ای که هیچ دو زوج آن مولفه‌ی اول برابری نداشته باشند، تابع می‌گوییم.

$$\text{EX) } f = \{(0, 2), (4, 2), (1, 2)\}, g = \{(-2, 6), (3, 7), (5, 5)\}$$

نکته: در هر تابع، مجموعه‌ی مولفه‌های اول دامنه و مجموعه‌ی مولفه‌های دوم برد تابع را تشکیل می‌دهند.

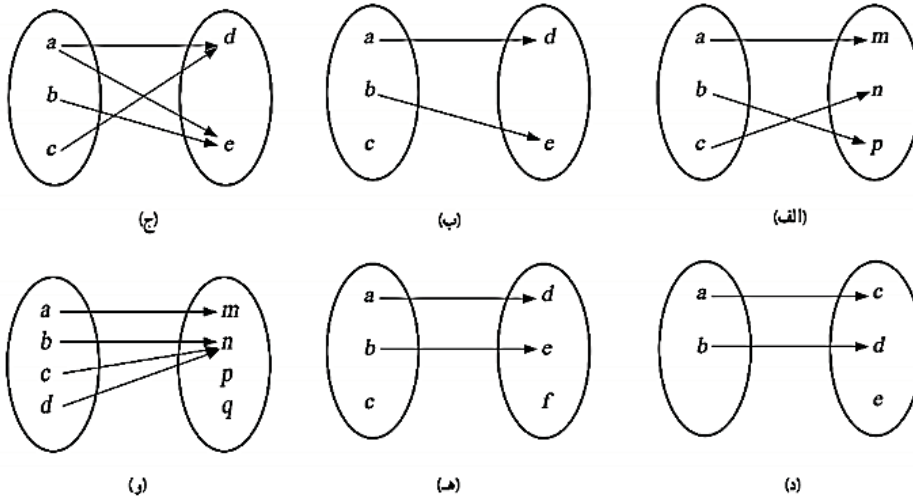
$$\text{EX) } D_f = \{0, 1, 4\}, R_f = \{2\}, D_g = \{-2, 3, 5\}, R_g = \{5, 6, 7\}$$

نکته: يك رابطه تابع است هرگاه در نمودار آن، از هر عضو از مجموعه اول دقیقاً يك فلش خارج شود.

نکته: يك رابطه تابع است هرگاه در نمودار آن، هر خطی که موازی محور  $y$  ها رسم شود، تابع را حداکثر در يك نقطه قطع کند.

نکته: تصویر تابع بر محور  $x$  ها دامنه تابع و تصویر تابع بر محور  $y$  ها برد تابع را تشکیل می‌دهد.

کدام یک تابع است؟



مثال:



کدام تابع وجود ندارد؟

تست:

- (۱) تابعی که دامنه و برد آن با هم برابر باشند.  
 (۲) تابعی که دامنه آن سه‌عضوی و برد آن دو‌عضوی باشد.  
 (۳) تابعی که دامنه آن دو‌عضوی و برد آن سه‌عضوی باشد.  
 (۴) تابعی که دامنه آن نامتناهی و برد آن متناهی باشد.



کدام یک از روابط زیر، یک تابع را مشخص می‌کند؟

تست:

- (۱) رابطه‌ای که به هر شرکت، کارمند آن شرکت را نسبت می‌دهد.  
 (۲) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، معلم او را نسبت می‌دهد.  
 (۳) رابطه‌ای که به هر پدر، فرزند او را نسبت می‌دهد.  
 (۴) رابطه‌ای که به هر ایرانی، کد ملی او را نسبت می‌دهد.



کدام یک از خطوط زیر یک تابع نیست؟

تست:

$$y = 2 \quad (4)$$

$$x = 2 \quad (3)$$

$$x = 2y - 1 \quad (2)$$

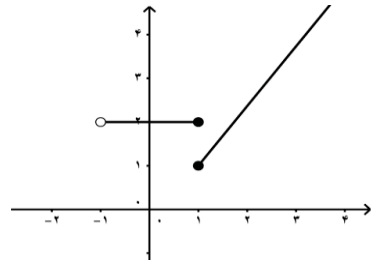
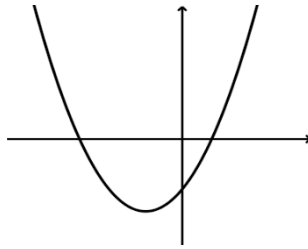
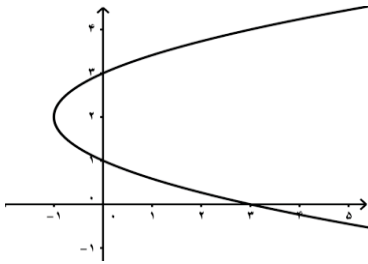
$$y = 2x + 1 \quad (1)$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

«(به یاد داشته باش که برای موفقیت، بیش از هر چیز به اراده و تصمیم نیاز داری.)»

شماره ۲: کدام یک تابع است؟



رابطه‌ی  $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، یک تابع است؟

(۴) هیچ مقدار  $m$

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) -۲



رابطه‌ی  $f = \{(0, 5), (5, m), (5, 0), (m^2 - 2m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، یک تابع است؟

(۴) هیچ مقدار  $m$

(۳)  $m = 0$

(۲)  $m = 2$

(۱)  $m = 1$



اگر رابطه‌ی  $f = \{(2, 3), (a, 5), (3, b)\}$  تابع نباشد، اعداد  $a$  و  $b$  کدام می‌توانند باشد؟

(۴)  $a = 1, b = 2$

(۳)  $a = 3, b = 6$

(۲)  $a = 1, b = 3$

(۱)  $a = 3, b = 5$



ضابطه‌ی تابع  $f$  با دامنه  $\mathbb{R}$  به صورت  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  است. حاصل ضرب صفرهای تابع  $y = f(x+3)$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{1}{2}$

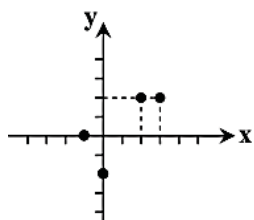
(۳) -۱

(۲) -۲

(۱) صفر



اگر نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل باشد، دامنه و برد  $f$  کدام است؟



(۱)  $R_f = \{-2, 0, 2\}$  ,  $D_f = \{-1, 0, 2, 3\}$

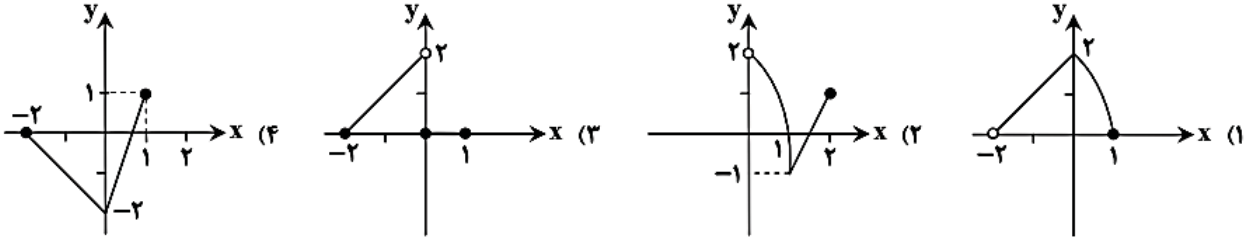
(۲)  $R_f = \{-1, 0, 2, 3\}$  ,  $D_f = \{-2, 0, 2\}$

(۳)  $R_f = \{0, -2, 2\}$  ,  $D_f = \{-1, -2, 2, 3\}$

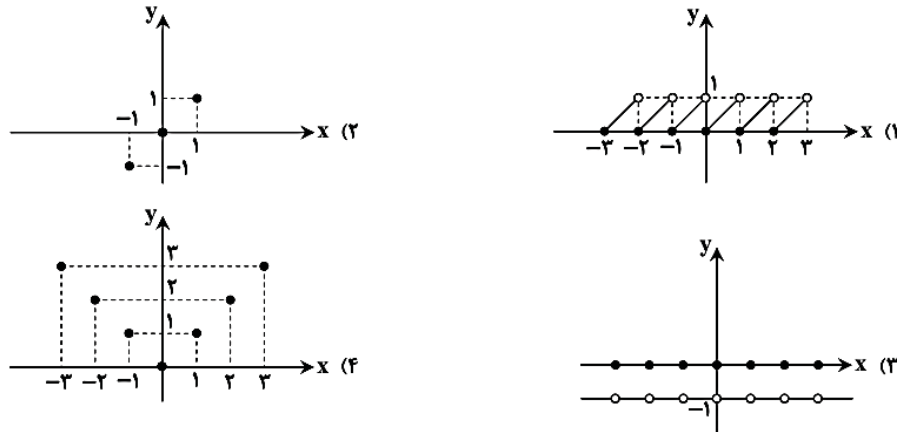
(۴)  $R_f = \{-1, -2, 2\}$  ,  $D_f = \{-1, 0, 2, 3\}$



تست ۹: در کدام یک از توابع زیر، دامنه برابر  $[-2, 1]$  و برد برابر  $[0, 2]$  است؟



تست ۱۰: در کدام گزینه، نمودار تابعی با دامنه نامتناهی و برد متناهی رسم شده است؟

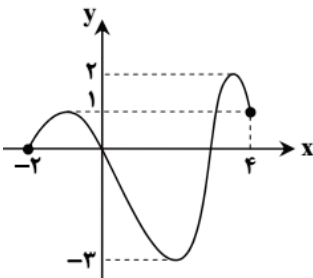


تست ۱۱: نمودار  $f(x)$  به شکل مقابل است. اگر دامنه تعریف تابع، مجموعه  $A$  و برد تابع، مجموعه  $B$  باشد،

$A \cap B$  شامل چند عدد صحیح است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)



تست ۱۲: اگر دامنه تابع  $f(x) = 2x + 7$  برابر  $[0, 2]$  باشد، برد آن کدام است؟



- $[7, 9]$  (۱)
- $[9, 11]$  (۳)
- $[7, 11]$  (۲)
- $[7, 9]$  (۴)

**نکته:** اگر  $y = f(x)$  یک تابع باشد، منظور از  $f(a)$ ، عبارتی است که از قرار دادن مقدار یا متغیر  $a$  بجای متغیر  $x$  در تابع به دست می‌آید.



$$\text{E}X) \quad f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1} \Rightarrow f(\cdot) = \frac{3(\cdot)^2 + 1}{(\cdot) - 1} = -1, \quad f(a+1) = \frac{3(a+1)^2 + 1}{(a+1) - 1}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳: اگر  $f(x) = 3x^2 - 1$  و  $g(x) = \frac{x^2 - 7}{3x}$ ، مطلوب است:

$f(0) =$  ،  $f(-1) =$

$g(-2) =$  ،  $g(\sqrt{2}) =$

$f(x-1) =$  ،  $g(a^2) =$



**نکته:** دو تابع  $f$  و  $g$  مساویند هرگاه: الف)  $D_f = D_g$  ب)  $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$

**مثال:** آیا توابع  $f(x) = 1$ ،  $g(x) = \frac{x}{x}$  مساوی‌اند؟

خیر زیرا:  $D_f = \mathbb{R}$ ،  $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$ .

**مثال:** آیا توابع  $f(x) = \frac{2x+4}{2}$ ،  $g(x) = x+2$  مساوی‌اند؟

بله. زیرا:  $f(x) = \frac{2x+4}{2} = \frac{2(x+2)}{2} = x+2 = g(x)$  ،  $D_f = \mathbb{R} = D_g$

مثال ۴: کدام دسته از توابع زیر مساویند؟

۱-  $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{4x - 2}{2} \end{cases}$

۲-  $\begin{cases} f(x) = x + 1 \\ g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{cases}$

۳-  $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} \end{cases}$

۴-  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1} \\ g(x) = \sqrt{x(x+1)} \end{cases}$

مثال ۳۴: دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > a \\ b & x < c \end{cases}$  و  $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$  برابرند. مقدار  $a+b+c$  کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱





تست ۱۴: - در کدام گزینه، توابع  $f$  و  $g$  برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x} \\ g(x) = \frac{x+1}{x} \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2(x-1)} \\ g(x) = |x|\sqrt{x-1} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = \frac{x^2-x}{x-1} \end{cases} \quad (۱)$$

تست ۱۵: در کدام گزینه دو تابع  $f$  و  $g$  با هم مساوی‌اند؟

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad (۲)$$

$$f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2 \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{3|x|}{x}, g(x) = \frac{3x}{|x|} \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}, g(x) = \sqrt{x} \quad (۳)$$

تست ۱۶: کدام دو تابع داده شده مساوی‌اند؟

$$g(x) = \frac{|x+1|}{x}, f(x) = \frac{x+1}{|x|} \quad (۲)$$

$$g(x) = x|x+1|, f(x) = x(x+1) \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, f(x) = 1 \quad (۴)$$

$$g(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}, f(x) = |x|-1 \quad (۳)$$

تست ۱۷: اگر دو تابع  $f(x) = 3x-1$  و  $g(x) = \begin{cases} 9x^2-1, & x \neq -\frac{1}{3} \\ 3x+1, & x = -\frac{1}{3} \end{cases}$  مساوی باشند، مقدار  $k$  کدام است؟

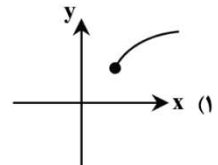
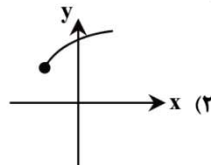
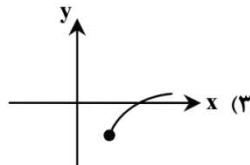
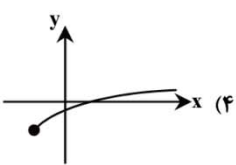
$$-\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (۳)$$

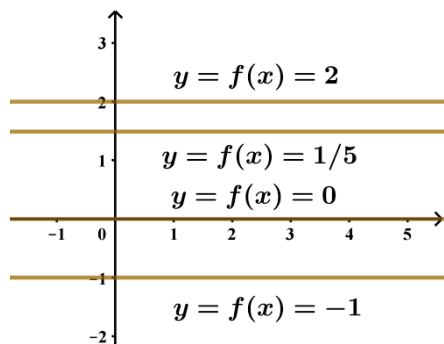
$$-\frac{7}{3} \quad (۲)$$

$$-1 \quad (۱)$$

تست ۱۸: اگر دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 25x^2-1, & x \neq \frac{1}{5} \\ \Delta x-1, & x = \frac{1}{5} \end{cases}$  و  $g(x) = \Delta x+1$  با هم مساوی باشند، نمودار تابع با ضابطه  $y = \sqrt{x+a} - a$  کدام است؟



انواع توابع:



$$f: A \rightarrow B$$

(۱) تابع ثابت: ضابطه‌ی توابع ثابت به صورت  $f(x) = a$  است

که در آن  $a \in \mathbb{R}$ . نمودار این توابع به صورت خط افقی است.

در حالت کلی داریم:  $D_f = \mathbb{R}, R_f = \{a\}$

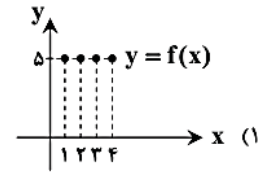
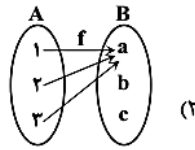
دانلود از سایت ریاضی سرا

((سه جمله برای دستیابی به موفقیت: ۱) بیشتر از دیگران بدان، ۲) بیشتر از دیگران کار کن، ۳) کمتر از دیگران توقع داشته باش.))

کدام گزینه یک تابع ثابت را مشخص نمی‌کند؟

۴)  $f = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

۳)  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 7 \end{cases}$



۲۰- اگر دامنه تابع  $f$ ، مجموعه اعداد صحیح و ضابطه آن به صورت  $f(x) = -3$  باشد، مقدار  $f(-1) - 3f(2)$  کدام است؟

۱) ۶      ۲) ۸      ۳) -۷      ۴) صفر

۲۱- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} (a-2)x+3 & x \geq 1 \\ b & x < 1 \end{cases}$  یک تابع ثابت باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۵

۲۲- تابع  $f$ ، تابعی ثابت با دامنه اعداد حقیقی است؛ به طوری که  $2f(x) + f(2) = 9$  حاصل  $f(1) + f(-1)$  کدام است؟

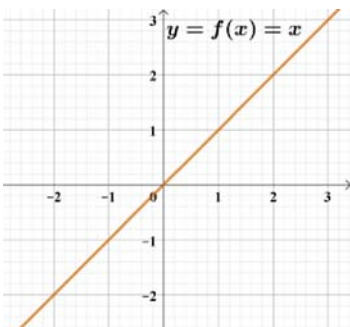
۱) صفر      ۲) ۶      ۳) ۳      ۴) ۹

۲۳- اگر  $f = \{(1, 2a-1), (a+2, b+1), (1, a+1)\}$  یک تابع ثابت باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

۱) ۱      ۲) ۲      ۳) -۲      ۴) ۴

۲۴- اگر برد تابع  $f(x) = x^2 - x - 1$  به صورت  $R_f = \{1\}$  باشد، نمایش زوج مرتبی تابع  $f$  کدام است؟


۱)  $f = \{(2,1), (-1,1)\}$       ۲)  $f = \{(-2,1), (1,1)\}$       ۳)  $f = \{(1,1)\}$       ۴)  $f = \{(-2,1)\}$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

۲) تابع همانی: ضابطه‌ی توابع همانی به صورت  $f(x) = x$  است.

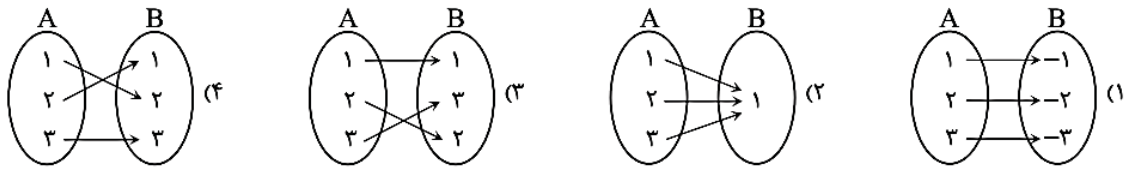
نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه محورهای مختصات را تشکیل می‌دهد. در حالت کلی داریم:  $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$ .



دانلود از سایت ریاضی سرا

«(امام رضا(ع): هر کس به خدا خوش گمان باشد، خداوند مطابق گمان او، با وی رفتار می‌کند.»

کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر، یک تابع همانی را معرفی می‌کند؟



اگر تابع  $f = \{(2, x+y), (x+4, y)\}$  تابع همانی باشد، حاصل  $2x+y$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

اگر  $f = \{(2, 3a+5), (a+b, 2b)\}$  تابعی همانی باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

تابع  $f$ ، تابعی ثابت و همانی است. دامنه‌ی این تابع کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $\mathbb{N}$  (۳)  $\{1\}$  (۴)  $\{-1, 0, 1\}$

زوج مرتب  $(1, n^2 + n - 1)$  روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرار دارد. مجموع مقادیر ممکن  $n$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

اگر  $f(x) = x$  تابعی همانی و  $g(x) = c$  تابعی ثابت باشد و:

(الف) اگر  $g(x)g(y) = g(xy)$  مقدار  $c$  را بیابید.

(ب) اگر  $f(x^2) = f(x) + f(5)$  مقدار  $x$  را بیابید.

«(موفقیت به سراغ کسانی می‌آید که آن قدر در تلاشند که وقت نمی‌کنند دنبال آن بروند.)»

تست ۳۰: اگر  $f$  تابعی ثابت و  $g$  تابعی همانی باشد؛ به طوری که  $3f(2) = g(4)$ ، مقدار  $g(5) + 9f(-1)$  کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۲ (۳)

۵ (۲)

۳۶ (۱)



تست ۳۱: اگر  $f = \{(a+b, 3), (5, 2a-b)\}$  یک تابع همانی و  $g(x) = (x+1)^2 - cx^2 + dx + a^2$  یک تابع ثابت باشد، حاصل  $ad + bc$  کدام است؟

-۵ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

۵ (۱)



۳) تابع چندجمله‌ای: توابعی را که نمایش جبری آن‌ها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

$$f(x) = 2x^2 + 5, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

نکته: دامنه توابع چندجمله‌ای، همی اعداد حقیقی است.

الف) توابع درجه اول (خطی): توابع چندجمله‌ای هستند که توان متغیر آن‌ها حداکثر یک باشد. نمودار این توابع به صورت یک خط راست است. این توابع به صورت کلی  $f(x) = ax + b$  هستند.

ب) توابع درجه دوم (سه‌می): توابع چندجمله‌ای هستند که توان متغیر آن‌ها دو باشد. این توابع معمولاً به صورت گسترده  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) یا استاندارد  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  به کار می‌روند.

نکته: راس سه‌می‌هایی که به شکل گسترده یعنی  $y = ax^2 + bx + c$  باشند، به صورت زیر است:

$$S = \left( -\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right) = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

نکته: خط  $x = -\frac{b}{2a}$  محور تقارن و  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  مقدار ماکزیمم و یا مینیمم سه‌می است.

نکته: اگر  $a > 0$  دهانه سه‌می به سمت بالا و اگر  $a < 0$  به سمت پایین باز می‌شود.

نکته: محل تقاطع سه‌می با محور  $y$  ها نقطه  $(0, c)$  است.

نکته: اگر  $A = (a, c)$ ,  $B = (b, c)$  دو نقطه از تابع باشند،  $x = \frac{b+a}{2}$  خط تقارن سه‌می خواهد بود.

مثال: برای سه‌می  $f(x) = x^2 + 4x - 1$  داریم:

$$S = \left( \frac{-4}{2} = -2, 4 - 4 - 1 \right) = (-2, -5), \quad \min(f) = -5$$

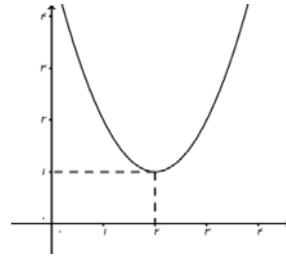


نکته: راس سهمی‌هایی که به شکل استاندارد یعنی  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  باشند، نقطه  $S = (\alpha, \beta)$  است.

مثال: نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  را رسم کنید.

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow S = \left(-\frac{b}{2a} = 2, -\frac{\Delta}{4a} = 1\right) \\ f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(x) = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow S = (2, 1) \end{cases}$$

$x$	۱	۲	۳
$f(x) = x^2 - 4x + 5$	۲	۱	۲



نکته: برای رسم  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ، کافی است ابتدا سهمی  $y = x^2$  را رسم کنیم و سپس آنرا به اندازه‌ی  $\alpha$  واحد به چپ یا راست و به اندازه‌ی  $\beta$  واحد به چپ یا راست منتقل کنیم.

مثال: برای رسم سهمی  $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ ، سهمی  $y = x^2$  را به نقطه‌ی  $(2, 1)$  منتقل می‌کنیم. (نمودار بالا)

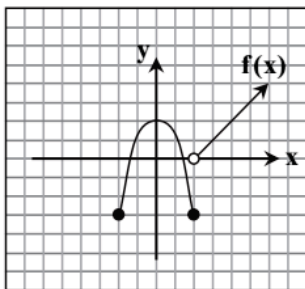
نکته: داریم:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow R_f = [\beta, +\infty) , \min(f) = \beta \\ a < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, \beta] , \max(f) = \beta \end{cases}$$

مثال: برای سهمی  $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$  داریم:

$$f(x) = -2(x - 3)^2 + 4 \Rightarrow S = (-(-3), 4) = (3, 4)$$

$$\xrightarrow{a < 0} \max(f) = 4 , R_f = (-\infty, 4]$$



شکل مقابل مربوط به کدام تابع قطعه‌ای است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases} \quad (۳) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 < x \leq 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & -2 < x \leq 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & -2 < x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases} \quad (۲)$$

اگر  $(-2, 5)$  و  $(0, 5)$  دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی کدام است؟

- $x = 0$  (۴)       $x = -1$  (۳)       $x = 2$  (۲)       $x = 1$  (۱)

شرح: نمودار توابع  $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 3$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $f(x) = -2(x-2)^2$  را رسم کنید.



شرح: توابع  $y = x^2 - 4x + 1$  و  $y = -x^2 - x + 2$  را در نظر بگیرید. کمترین یا بیشترین مقدار هر کدام را نیز بیابید.



تست ۳۴: رأس سهمی  $y = -7x^2 + 3x - 1$  در کدام ناحیه مختصات قرار دارد؟

(۴) چهارم

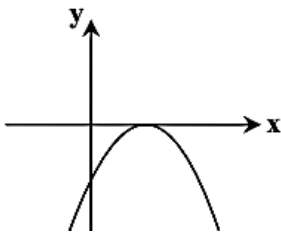
(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول



تست ۳۵: به ازای کدام مقدار  $a$ ، شکل مقابل نمودار تابع  $y = -x^2 + 4x + a$  است؟



(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴



تست ۳۶: اگر خط  $x = 2$  خط تقارن سهمی  $y = (m-1)x^2 + x + 3$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

(۴)  $\frac{5}{4}$

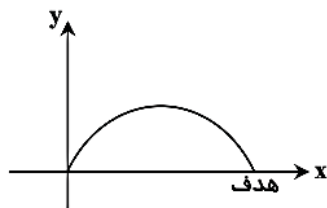
(۳)  $\frac{4}{5}$

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۱)  $\frac{4}{3}$



تست ۳۷: تویی را همانند شکل، به سمت هدفی پرتاب می‌کنیم. معادله حرکت توپ به شکل یک تابع درجه دو با ضابطه  $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$  است که  $x$  مسافت افقی طی شده (برحسب متر) و  $y$  ارتفاع توپ از سطح زمین (برحسب متر) می‌باشد. بیشترین ارتفاعی که توپ از سطح زمین دارد، چند متر است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۲۰

(۳) ۳۰

(۴) ۴۰



تست ۳۸: اگر  $y + 3x = 12$ ، بیشترین مقدار  $xy$  کدام است؟

- ۱۲ (۱)      ۲ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۴ (۴)

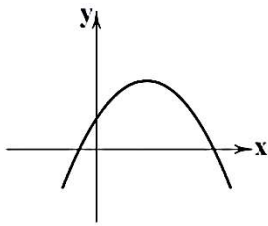


تست ۳۹: در یک سهمی به معادله‌ی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $a + b + c < 0$  است. اگر  $b^2 < 4ac$  باشد، علامت  $a$  و  $c$  چگونه است؟

- ۱)  $a > 0$  و  $c > 0$       ۲)  $a < 0$  و  $c < 0$       ۳)  $a > 0$  و  $c < 0$       ۴)  $a < 0$  و  $c > 0$



تست ۴۰: اگر سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت زیر باشد، علامت‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$  کدام است؟



- ۱)  $a < 0$ ،  $b > 0$ ،  $c < 0$



- ۲)  $a < 0$ ،  $b > 0$ ،  $c > 0$

- ۳)  $a < 0$ ،  $b < 0$ ،  $c > 0$

- ۴)  $a > 0$ ،  $b > 0$ ،  $c > 0$

تست ۴۱: خط تقارن سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  خط  $x = 1$  است و نمودار سهمی از نقطه‌ی  $(1, 1)$  می‌گذرد. مقدار  $c - a$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴



تست ۴۲: اگر نقطه‌ی  $S(n-1, 8)$  رأس سهمی  $y = 2x^2 - 12x + m - 1$  باشد، حاصل  $m - n$  کدام است؟

- ۱) ۲۳      ۲) -۲۳      ۳) ۲۷      ۴) -۲۷



تست ۴۳: یک سهمی از نقاط  $(1, -2)$  و  $(3, -2)$  می‌گذرد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض  $-4$  قطع می‌کند. برد این تابع کدام است؟

- ۱)  $[-4, +\infty)$       ۲)  $(-\infty, -3]$       ۳)  $(-\infty, -4]$       ۴)  $(-\infty, -\frac{4}{3}]$



تست ۴۴: یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه‌ی  $t$  ام از رابطه‌ی

$$h = -5t^2 + 18t + 13$$

محاسبه می‌شود. تا چند ثانیه پس از آغاز حرکت، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

- ۱)  $\frac{3}{2}$       ۲) ۲      ۳) ۳      ۴)  $\frac{3}{6}$



تست ۴۲:

- در سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  اگر  $f(1) = -2$  و  $f(3) = 1$ ، کدام گزینه در مورد معادله  $f(x) = 0$  درست است؟

(۱) قطعاً دو ریشه متمایز دارد.

(۲) ممکن است ریشه مضاعف داشته باشد.

(۳) می‌تواند ریشه نداشته باشد.



تست ۴۰:

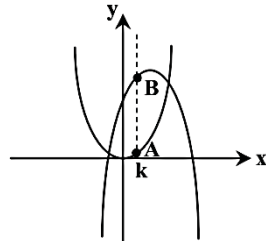
- مطابق شکل روبه‌رو، خط عمودی و دلخواه  $x = k$  سهمی  $y = x^2$  را در نقطه A و سهمی  $y = -x^2 + 2x + 4$  را در نقطه B قطع می‌کند. به ازای مقادیر مختلف  $k$ ، حداکثر مقدار  $y_B - y_A$  کدام است؟

(۱) ۵/۵

(۲) ۵

(۳) ۴/۵

(۴) ۴



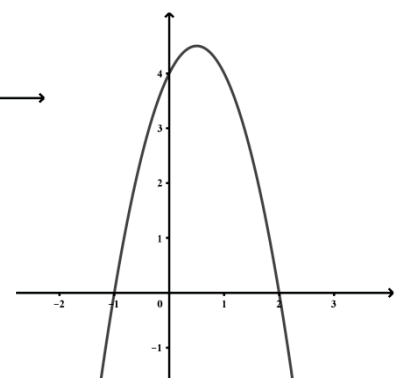
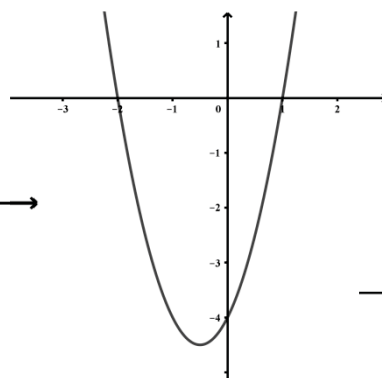
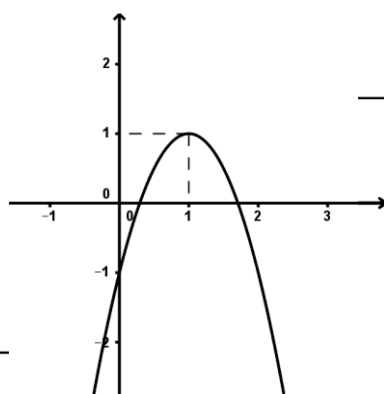
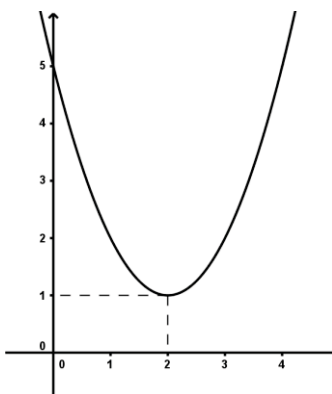
**نکته:** نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند  $f$  با محور  $x$  ها را صفرهای تابع می‌نامیم. پس صفرهای تابع ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

**مثال:** تابع  $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$  محور طول‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \xrightarrow{2+5-7=0} x = 1, x = \frac{-7}{2}$$

**نکته:** اگر صفرهای سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  برابر  $x_1$ ،  $x_2$  باشند، معادله آن را می‌توانیم به صورت  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  بنویسیم.

مثال ۸: معادله توابع زیر را بیابید.

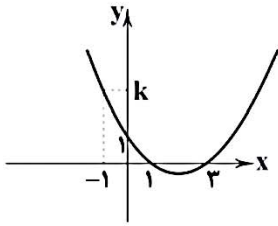




(( اما رضا (ع): هر که کاری را از راه درست دنبال کند نخواهد لغزید، و اگر هم بلغزد راه چاره بر او بسته نمی‌شود.))

اگر نمودار زیر یک سهمی باشد، مقدار  $k$  چقدر است؟

تست ۳۹



(۱)  $\frac{1}{3}$



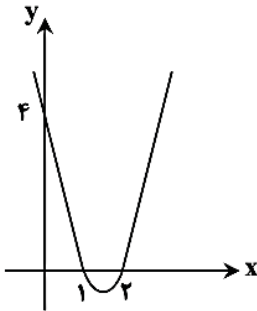
(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{1}{5}$

(۴)  $\frac{1}{7}$

شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. مقدار  $f(4)$  کدام است؟

تست ۳۹



(۱) ۶



(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

نمودار تابع با ضابطه  $y = x^2 - 3x - 10$  را، حداقل چند واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل

تست ۳۴

با محور  $x$  ها غیر منفی باشد؟ (تجربی خارج ۹۳)

(۴) ۳

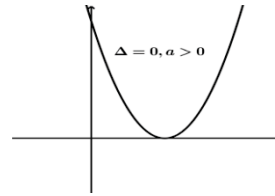
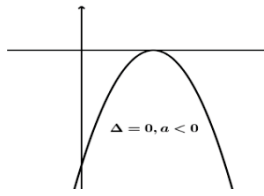
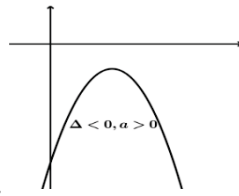
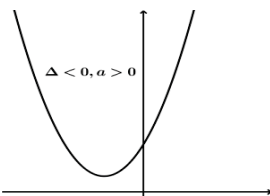
(۳) ۲

(۲) ۱,۵

(۱) ۱



**نکته:** اگر در توابع درجه دوم  $\Delta < 0, a > 0$ ، تابع همواره بالای محور  $x$  ها (مثبت) است، و اگر  $\Delta < 0, a < 0$ ، تابع همواره پایین محور  $x$  ها (منفی) است. همچنین اگر  $\Delta = 0$ ، تابع بر محور  $x$  ها مماس است.



محدوده  $a$  کدام باشد تا نمودار تابع  $y = x^2 + 2ax + 1$  بالای محور  $x$  ها قرار گیرد؟

تست ۴۲

(۴)  $-1 < a < 1$


(۳)  $a > 1$     $a < -1$

(۲)  $a < 1$


(۱)  $a > -1$




تست ۴۴: به ازای کدام مقادیر  $m$  نمودار تابع  $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$  همواره در زیر محور  $x$  ها است؟

- (ریاضی ۸۵) 
- (۱)  $m < -\frac{1}{2}$       (۲)  $-\frac{1}{2} < m < 1$       (۳)  $1 < m < \frac{3}{2}$       (۴)  $m > \frac{3}{2}$

تست ۴۷: به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = (m + 2)x^2 - 2mx + 1$  همواره در بالای محور  $x$  ها است؟

- (خارج ریاضی ۸۵) 
- (۱)  $m > -2$       (۲)  $-2 < m < -1$       (۳)  $-2 < m < 2$       (۴)  $-1 < m < 2$

تست ۴۸: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، هر نقطه از نمودار تابع  $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$  در بالای محور  $x$  ها است؟

- (خارج ریاضی ۸۹) 
- (۱)  $a < -1$       (۲)  $a > 1$       (۳)  $a > 2$       (۴)  $1 < a < 2$

تست ۴۹: اگر سهمی  $y = -x^2 + x - m$  همواره زیر خط  $y = 2$  واقع شود، حدود  $m$  کدام است؟

- 
- (۱)  $m > -2$       (۲)  $m > -1$       (۳)  $m > -\frac{9}{4}$       (۴)  $m > -\frac{7}{4}$

تست ۵۰: حاصل جمع مقادیر صحیح  $m$  که به ازای آن‌ها نامعادله  $\frac{(m - 2)x^2 - 2(m - 2)x + 3}{-x^2 + 2x - 4} \leq 0$  همواره برقرار باشد، کدام است؟

- 
- (۱) ۱۲      (۲) ۱۴      (۳) ۱۵      (۴) ۱۳

تست ۵۱:

اگر عبارت  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$  به ازای هر مقدار  $x$  منفی باشد،  $a$  به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱)  $\{a: 1 < a < 5\}$  (۲)  $\{a: a < 1\}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $\mathbb{R}$

(ریاضی ۹۱)

تست ۵۲:

۱- به ازای کدام مقادیر  $m$ ، عبارت  $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه  $x$  مثبت است؟

- (۱)  $m < -2$  (۲)  $m > 2/5$  (۳)  $1 < m < 2$  (۴)  $1 < m < 2/5$

(خارج ریاضی ۹۰)



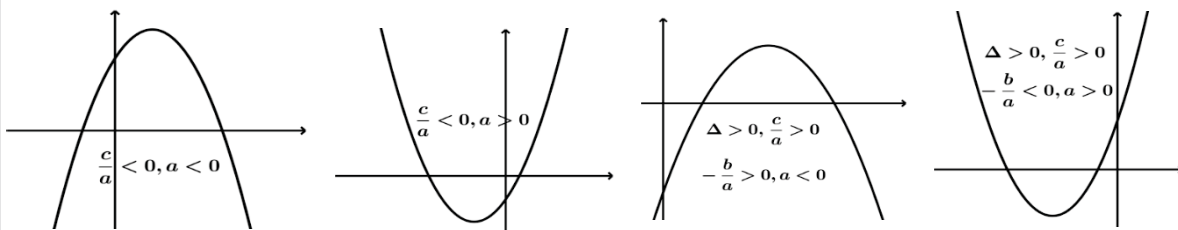
نکته: اگر در توابع درجه دوم  $\frac{c}{a} < 0$ ، معادله دو ریشه غیر هم‌علامت خواهد داشت و در نتیجه تابع از چهار ناحیه می‌گذرد.

نکته: اگر  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  (معادله دو ریشه هم‌علامت داشته باشد)، بسته به علامت  $a$  و علامت مجموع ریشه‌ها یعنی  $-\frac{b}{a}$ ، تابع فقط از یکی از ناحیه‌ها نمی‌گذرد.

نکته: به طور مثال اگر قرار باشد تابع فقط از ناحیه سوم نگذرد باید شروط زیر برقرار باشد:

$$\Delta > 0, a < 0, \frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} > 0$$

نکته: در هر مورد که صورت سوال با ریشه صفر مشکل نداشته باشد، بجای  $\frac{c}{a} > 0$  از  $\frac{c}{a} \geq 0$  استفاده می‌شود.



به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = (1-m)x^2 + x + m - 2$  از چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم

- (۱)  $m < 1$  (۲)  $m > 2$  (۳)  $1 < m < 2$  (۴)  $-1 < m < 2$

است؟



((اهاام رضا(ع): آن کسی که نفسش را محاسبه کند، سود برده است و آن کسی که از محاسبه نفس غافل بماند، زیان دیده است.))

**تست ۵۴:** اگر نمودار تابع  $y = x^2 + bx + c$  فقط از ناحیه چهارم بگذرد، آن گاه:

- (تجربی ۷۴) (۱)  $c \geq 0, b > 0$  (۲)  $c \leq 0, b > 0$  (۳)  $c \geq 0, b < 0$  (۴)  $c \leq 0, b < 0$



**تست ۵۵:** به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$  همواره در بالای محور  $x$  ها است؟

- (ریاضی خارج ۸۵) (۱)  $m > -2$  (۲)  $-2 < m < -1$  (۳)  $-2 < m < 2$  (۴)  $-1 < m < 2$



**تست ۵۶:** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$  محور  $x$  ها را در دو

نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

- (ریاضی ۹۵) (۱)  $m > 2$  (۲)  $-1 < m < 2$  (۳) هر مقدار  $m$  (۴) هیچ مقدار  $m$



**تست ۵۷:** به ازای کدام مقادیر  $a$  منحنی به معادله  $y = ax^2 - (a+2)x$  از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (ریاضی ۸۹) (۱)  $a < -2$  (۲)  $a > -2$  (۳)  $a > 0$  (۴)  $-2 < a < 0$



**تست ۵۸:** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (ریاضی ۹۲) (۱)  $a \leq 2$  (۲)  $0 < a \leq 2$  (۳)  $2 < a < 3$  (۴)  $0 < a < 3$



تست ۵۹:

۱- با کدام مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله‌ی  $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$  از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟

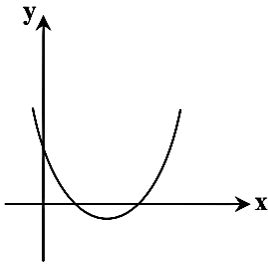
(ریاضی خارج ۸۷)

- (۱)  $m < -2$       (۲)  $m < -1$       (۳)  $-2 < m < -1$       (۴)  $-4 < m < -2$



تست ۶۰:

- اگر شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = x^2 - mx + m + \frac{5}{4}$  باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی  $m$  کدام است؟



(۱)  $m > 0$

(۲)  $-1 < m < 0$

(۳)  $m > 5$

(۴)  $m > -\frac{5}{4}$



تست ۶۱:

- به ازای کدام مقادیر مجموعه‌ی مقادیر  $a$  نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور  $x$ ها را دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

(خارج ریاضی ۹۲)

- (۱)  $a < -9$       (۲)  $a < -3$       (۳)  $a > -1$       (۴)  $-3 < a < 0$

تست ۶۲:

اگر منحنی به معادله  $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

(ریاضی ۸۷)

- (۱)  $m > 3$       (۲)  $3 < m < 4$       (۳)  $3 < m < 5$       (۴)  $4 < m < 5$

تست ۶۳:

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور  $x$ ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

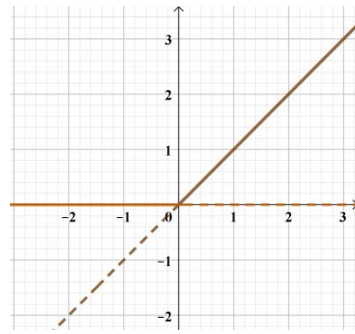
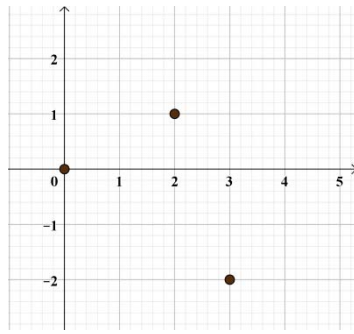
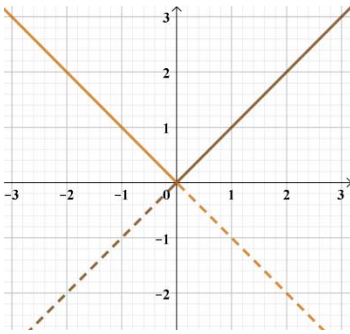
(خارج ۹۵)

- (۱)  $m > 1$  یا  $m < -2$       (۲)  $-2 < m < 1$       (۳) فقط  $m < -2$       (۴) فقط  $m > 1$



۵) تابع چندضابطه‌ای: توابعی هستند که برای قسمت‌های مختلف دامنه‌شان، ضوابط مختلفی دارند. به طور مثال همه توابع زیر چند ضابطه‌ای هستند:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ \cdot & , x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 2 \\ -2 & , x = 3 \\ \cdot & , x = 0 \end{cases}, h(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



نکته: دامنه این توابع با توجه به محدودی تعیین شده برای متغیر مستقل (x) و نمودار قابل تشخیص است.

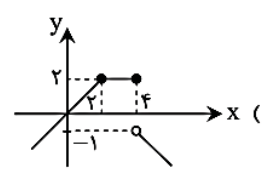
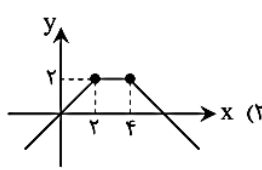
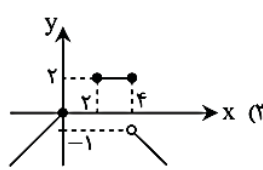
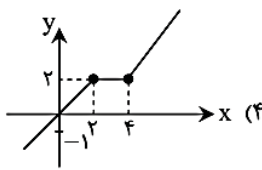
$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \{0, 2, 3\}, D_h = \mathbb{R}$$

نکته: برد این توابع با توجه به ضابطه‌ی تعیین شده برای متغیر وابسته (y) و نمودار قابل تشخیص است.

$$R_f = \mathbb{R}, R_g = \{-2, 0, 1\}, R_h = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$$

نمودار تابع چندضابطه‌ای  $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 4 \\ 3-x & x > 4 \end{cases}$  کدام است؟

توجه:



اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}+x & x < -1 \\ \sqrt{2}-x & x \geq -1 \end{cases}$  مقدار  $f(\sqrt{2}-1) + f(\sqrt{2}+1)$  کدام است؟

توجه:

۲√۲ - ۲ (۴)

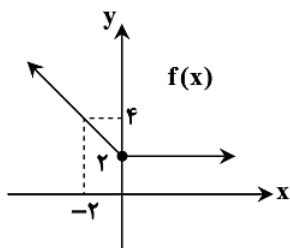
صفر (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۶) ضابطه‌ی تابع f(x) که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد، کدام است؟

توجه:



$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$  (۳)

$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$  (۱)

$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$  (۴)

$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$  (۲)

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & ; x < 0 \\ \frac{1}{8}x^2 & ; 0 < x < 4 \\ 4 & ; x \geq 4 \end{cases}$$

(۲)  $(-3, +\infty)$

(۱)  $(-\infty, -3) \cup (0, 4)$

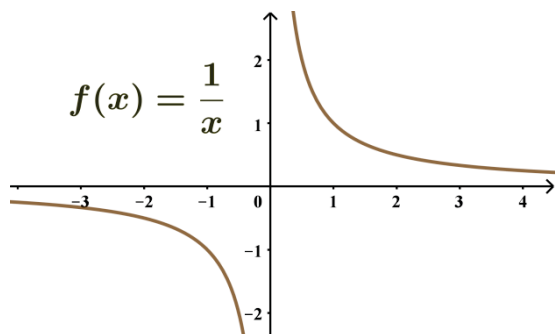
(۴)  $(-\infty, 2) \cup \{4\}$

(۳)  $(-\infty, 4]$

تست ۶۷: برد تابع چندضابطه‌ای زیر کدام است؟



۵) تابع گویا: هر تابع به صورت  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $Q(x) \neq 0$  را که در آن صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند را، یک تابع گویا می‌نامیم. دامنه این توابع شامل همه اعداد حقیقی بجز ریشه‌های مخرج است.



مثال: دامنه و برد تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را بیابید.

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

تست ۶۸: دامنه توابع زیر را بیابید.

a)  $y = \frac{x}{x - \sqrt{3}}$

b)  $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2 - 4x}$

c)  $y = \frac{1-x}{x^2 - 0.16}$

d)  $y = \frac{3}{x^2 - 7x + 6}$

تست ۶۸: دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 6x + a}$  برابر  $\mathbb{R} - \{b\}$  است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

تست ۶۹: اگر دامنه تابع  $y = \frac{1}{x^2 - ax + 2 + b}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{2\}$  باشد، حاصل  $a^2 + b^2 - ab$  کدام است؟

-۸ (۴)

۸ (۳)

-۱۲ (۲)

۱۲ (۱)

تست ۷۰: اگر دامنه‌ی تابع گویای  $f(x) = \frac{1}{2x^2 - mx - n}$  برابر  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$  باشد، مقدار  $n$  کدام است؟

۱۸ (۲)

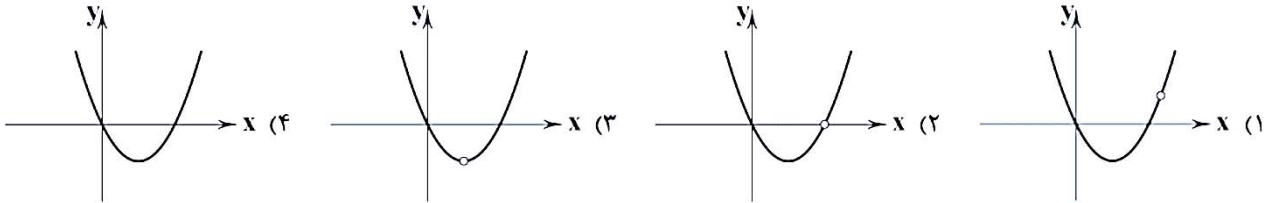
۱۲ (۱)

-۱۲ (۴)

-۱۸ (۳)



تست ۷۱: نمودار  $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-1}$  شبیه کدام است؟



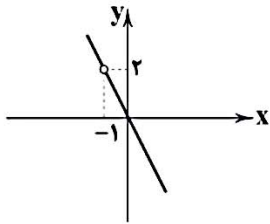
تست ۷۲: نمودار زیر مربوط به کدام تابع زیر است؟

۱)  $y = 2x$

۲)  $y = -2x$

۳)  $y = \frac{2x^2 + 2x}{x+1}$

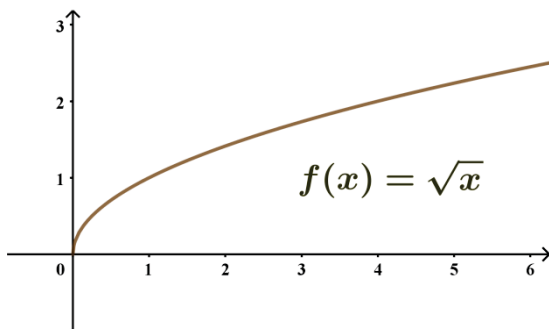
۴)  $y = \frac{2x^2 + 2x}{-x-1}$



۶) تابع رادیکالی: توابع رادیکالی به صورت  $f(x) = \sqrt{P(x)}$  هستند، که در آن عبارت زیر رادیکال یک عبارت گویا است. واضح است که برای محاسبه دامنه این توابع، کافی است شرط  $P(x) \geq 0$  را بررسی کنیم.



مثال: دامنه و برد تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را بیابید.



$D_f = [0, +\infty), R_f = [0, +\infty)$



((هیچ موفقیت حقیقی به دست نمی‌آید، مگر اینکه با ارزش‌های اساسی ما مطابقت داشته باشد.))

دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

سوال ۱۰:

a)  $y = \sqrt{x+6}$

b)  $y = \sqrt{x^2 + 5x}$

c)  $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

d)  $y = \sqrt{3x-2}$



سوال ۷۳: دامنه‌ی تابع  $f(x) = x + \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$  بازه  $[a, b]$  می‌باشد.  $b - a$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



سوال ۷۴: اگر معادله‌ی  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2+mx} + \sqrt{x^3-nx} = 0$  فقط یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، مقدار  $m+n$  چقدر است؟

-۹ (۴)

۹ (۳)

۳ (۲)

۱۲ (۱)



سوال ۷۵: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  با دامنه‌ی کدام تابع زیر برابر است؟

$h(x) = \sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$  (۲)

$g(x) = \sqrt{2-x} \times \sqrt{2+x}$  (۱)

$k(x) = \sqrt{2+x} - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$  (۴)

$m(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}$  (۳)



سوال ۷۶: اگر دامنه‌ی تابع  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+bx+c}$  به صورت  $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$  باشد، اشتراک دامنه و برد تابع  $g(x) = b - \sqrt{x+c}$  کدام است؟

$(-\infty, -10]$  (۴)

$[-25, -10]$  (۳)

$[-25, 10]$  (۲)

$[-25, +\infty)$  (۱)

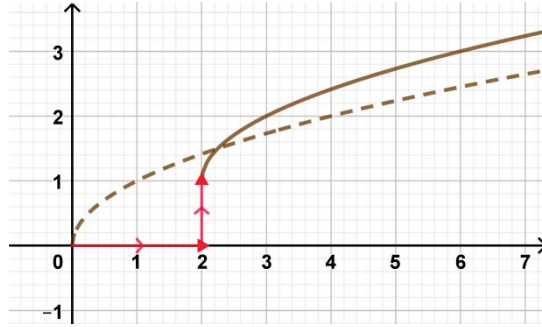




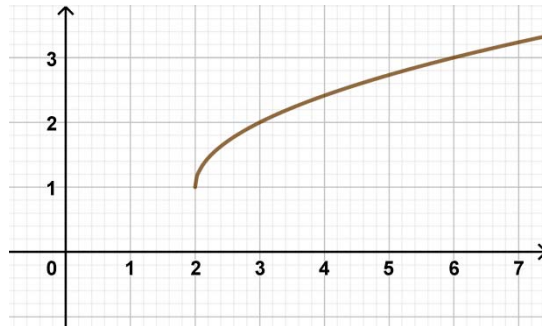
نکته: برای رسم توابع رادیکالی  $y = \sqrt{x - \alpha} + \beta$  ابتدا نقطه کافی است از نقطه  $(\alpha, \beta)$  و یک نقطه کمکی استفاده کنیم. و یا تابع  $y = \sqrt{x}$  را به اندازه‌ی  $\alpha$  واحد به چپ یا راست، و به اندازه‌ی  $\beta$  واحد به بالا یا پایین انتقال دهیم.

مثال: تابع  $y = \sqrt{x - 2} + 1$  را رسم کنید.

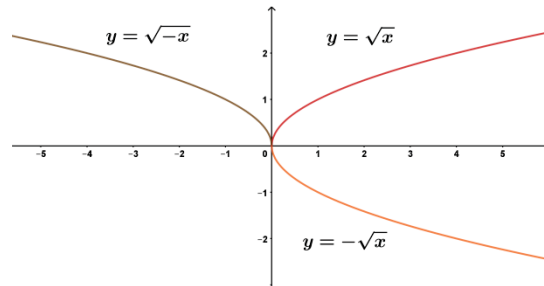
$$y = \sqrt{x - 2} + 1 \Rightarrow S = (2, 1)$$



x	۲	۳
$y = \sqrt{x - 2} + 1$	۱	۲



نکته: توابع  $y = \sqrt{-x}$  و  $y = -\sqrt{x}$  به ترتیب قرینه تابع  $y = \sqrt{x}$  نسبت محور عرض‌ها و طول‌ها هستند.



دامنه و برد توابع زیر را بیابید و هر کدام را رسم کنید.

شماره ۱۱

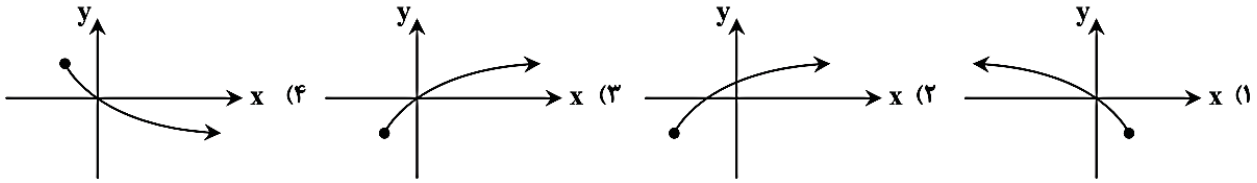
$$y = \sqrt{x+1} + 1$$

$$y = \sqrt{x} - 1$$

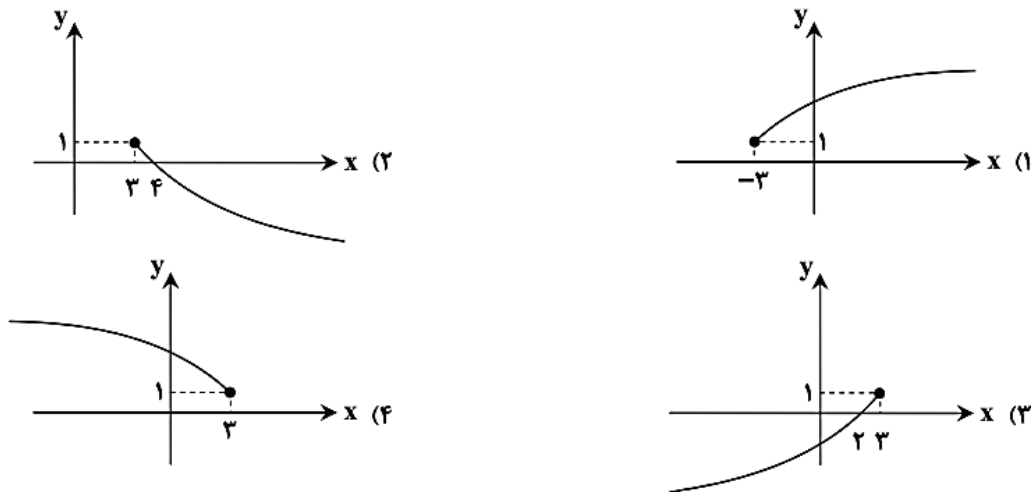
$$y = -\sqrt{x} + 2$$

$$y = \sqrt{-x+2}$$

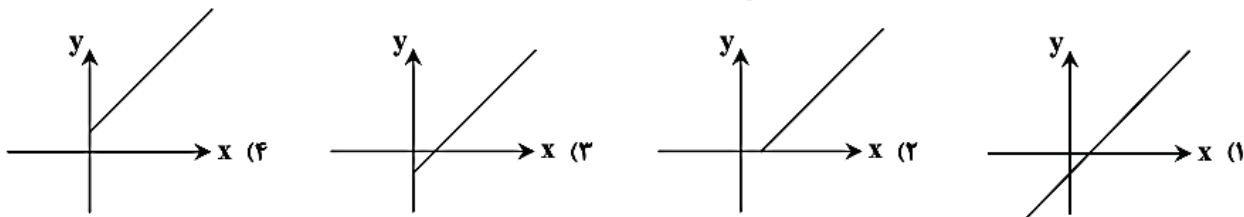
تست ۷۷: نمودار تابع  $f(x) = -2 + \sqrt{x+4}$  به صورت کدام یک از شکل‌های زیر است؟



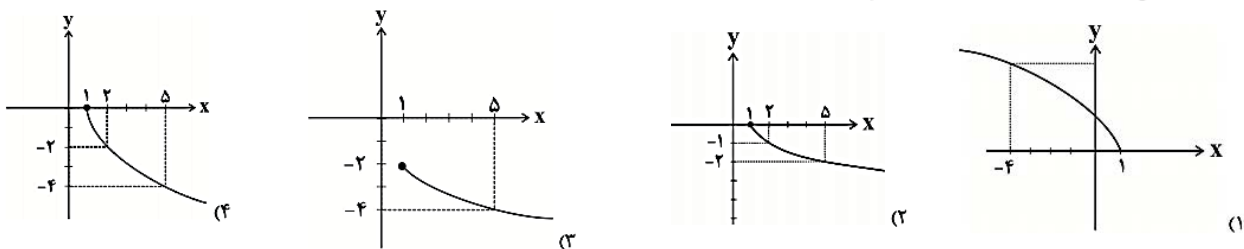
تست ۷۸: با توجه به نمودار  $y = \sqrt{x}$ ، نمودار  $y = 1 - \sqrt{x-3}$  کدام است؟



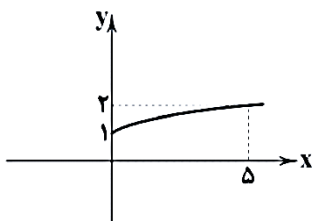
تست ۷۹: اگر  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x} - 1$ ، نمودار تابع  $y = f(x) \cdot g(x)$  کدام است؟



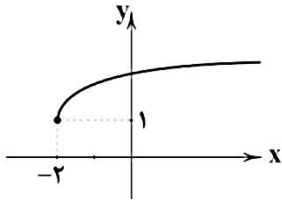
تست ۸۰: نمودار تابع  $f(x) = -2\sqrt{x-1}$  کدام است؟



تست ۸۱: اگر نمودار  $f(x) = \sqrt{ax+b}$  به صورت زیر باشد، کدام  $f(\frac{4}{9})$  است؟



- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)



نمودار زیر، مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟

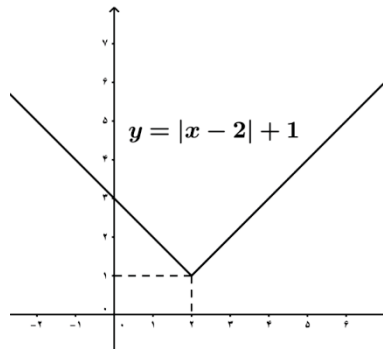
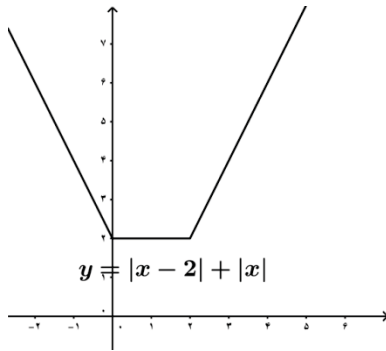
- (۱)  $\sqrt{x+2}$
- (۲)  $-\sqrt{x+2}$
- (۳)  $1-\sqrt{x+2}$
- (۴)  $1+\sqrt{x+2}$



(توابع قدر مطلق): برای عبارت جبری  $u$  تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

رسم توابع قدر مطلق درجه اول: توابع قدرمطلق در ریشه‌های داخل قدرمطلق شکستگی دارند. پس برای رسم آن‌ها کافی است از این نقاط شکستگی و چند نقطه کمکی استفاده کنیم.  
مثال: توابع  $y = |x-2|+1$ ,  $y = |x-2|+|x|$  را رسم کنید.



نکته: برای رسم تابع  $y = |x-\alpha| + \beta$  به روش انتقال، ابتدا تابع  $y = |x|$  را رسم می‌کنیم و سپس تابع را به اندازه  $\alpha$  واحد به سمت چپ یا راست (موافق علامت  $\alpha$ ) و به اندازه  $\beta$  واحد به سمت بالا یا پایین (موافق علامت  $\beta$ )، انتقال می‌دهیم.

شکل ۱۲: توابع  $y = |x+2|+1$  و  $y = |x|-2$  و  $y = -|x+1|$  و  $y = |x+1|+|x|$  و  $y = |2x|-|x-1|$  را رسم کنید.



شکل ۱۳: اگر دامنه تابع  $f(x) = |x-2|$  برابر با  $(-1, 7)$  باشد، برد آن کدام است؟

- (۱)  $(3, 5)$
- (۲)  $(0, 5)$
- (۳)  $(0, 5)$
- (۴)  $(1, 5)$



تست ۸۴:

نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا

نمودار تابع  $g$  حاصل شود. حاصل  $g(\sqrt{2}-1)$  کدام است؟

(۲)  $\sqrt{2}-2$

(۱)  $2-\sqrt{2}$

(۴)  $1-\sqrt{2}$

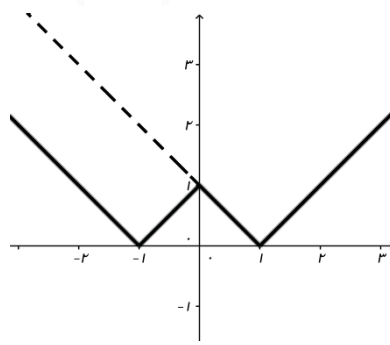
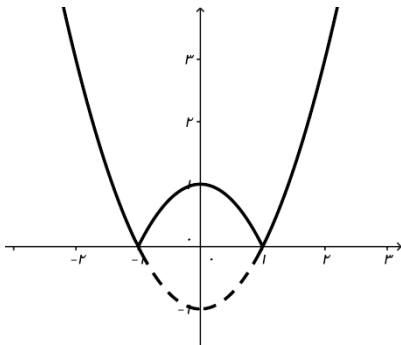
(۳)  $\sqrt{2}-1$



**نکته:** برای رسم تابع قدر مطلق  $y = |f(x)|$ ، ابتدا تابع  $f(x)$  را رسم کرده و سپس قرینه قسمتی از نمودار که در پایین محور طول‌ها است را رسم کرده و در نهایت قسمت پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم.

**نکته:** برای رسم تابع قدر مطلق  $y = f(|x|)$ ، ابتدا تابع  $f(x)$  را رسم کرده و سپس قسمت‌هایی از تابع که در سمت چپ محور عرض‌ها قرار گرفته است را حذف می‌کنیم. قسمت سمت راست نمودار اصلی، به همراه قرینه آن، نمودار تابع است.

**مثال:** نمودار توابع  $y = ||x| - 1|$ ،  $y = |x^2 - 1|$  را رسم کنید.



تست ۸۵: نمودار تابع  $y = |x+1| - 3$  را حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور طول‌ها غیرمنفی باشد؟

۴/۴

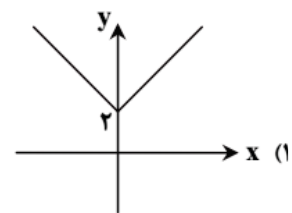
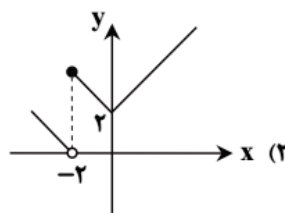
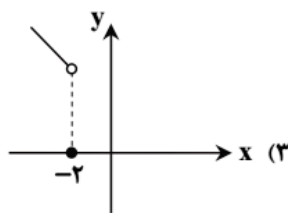
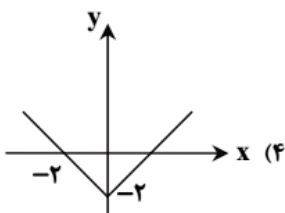
۳/۳

۲/۲

۱/۱



تست ۸۶: نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} |x| + 2 & x \geq -2 \\ |x - 2| & x < -2 \end{cases}$  کدام است؟



مثال ۱۳: توابع  $y = \left| (x-1)^2 - 1 \right|$  و  $y = \left| |x-1| - 2 \right|$  را رسم کنید.



تست ۸۷: اگر  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، تابع  $|(f(\sqrt{x}))^2 - f(x)|$  چگونه است؟

(ریاضی خارج ۹۱)

- (۱) ثابت  
(۲) همانی  
(۳) فرد  
(۴) یک به یک



تست ۸۸: ۱- نمودار تابع  $y = 4 - |x|$ ، در بازه‌ی  $(a, b)$  بالاتر از خط به معادله‌ی  $2y + x = 5$  قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار  $b - a$  کدام است!

(ریاضی خارج ۸۶)

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶



تست ۸۹: در کدام بازه از مقادیر  $x$  نمودار تابع  $f(x) = 5 - |x - 1|$  بالاتر از نمودار تابع  $g(x) = |2x|$  قرار دارد؟

(ریاضی خارج ۹۳)

- (۱)  $(-\frac{4}{3}, 1)$       (۲)  $(-\frac{2}{3}, 1)$       (۳)  $(-\frac{4}{3}, 2)$       (۴)  $(-\frac{2}{3}, 2)$



تست ۹۰: در بازه‌ی  $(a, b)$ ، نمودار تابع  $y = \sqrt{x+3}$ ، در بالای نمودار تابع  $f(x) = |x-1| - 2$  قرار دارد. بیشترین

مقدار  $(b - a)$  کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

- (۱) ۶      (۲) ۷      (۳) ۸      (۴) ۹





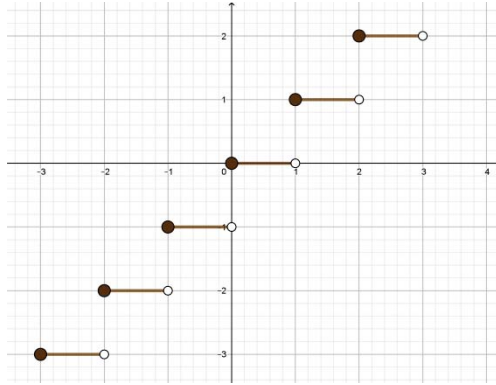
**(۷) توابع جزء صحیح:**

تابعی که به هر عدد حقیقی  $x$ ، اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود. تابع جزء صحیح به صورت  $f(x) = [x]$  نمایش داده می‌شود.

در مورد این تابع داریم:  $R_f = \mathbb{Z}$ ،  $D_f = \mathbb{R}$ .

نکته: تابع جزء صحیح، تابعی پله‌کمانی است و داریم:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \cdot & , -1 \leq x < 0 \\ \cdot & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ \cdot & \\ \cdot & \end{cases}$$



مثال:

$$[2] = 2, [2/5] = 0, [0/1] = 0, [\sqrt{3}] = 1, [-5] = -5, [-0/1] = 0, [-3/5] = -1$$

نکته: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، داریم:

$$\begin{aligned} [x] = a &\Rightarrow a \leq x < a+1 & \text{EX) } [x] = 5 &\Rightarrow 5 \leq x < 6 \\ [x+a] &= [x] + a & \text{EX) } [x+6] &= [x] + 6 \end{aligned}$$

نکته: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، در حالت کلی تساوی‌های زیر برقرار نیست:

$$[x+y] = [x] + [y], [x-y] = [x] - [y], [xy] = [x][y]$$

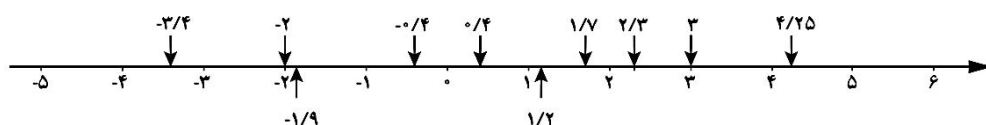
$$\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[x]}{[y]}, [ax] = a[x], \left[\frac{x}{a}\right] = \frac{[x]}{a}$$

$$\text{EX) } [0/9] + [0/8] = 0 \neq [0/9+0/8] = 1 \Rightarrow [x+y] \neq [x] + [y]$$

$$[0/4 \times 5] = [0] = 0 \neq [0/4][5] = 0 \times 5 = 0 \Rightarrow [xy] \neq [x][y]$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} \cdot & , x \in \mathbb{Z} \\ -1 & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{نکته: برای هر عدد حقیقی } x \text{ داریم:}$$

مثال ۱۴: با توجه به محور زیر، حاصل را بیابید.



$[-3/4] =$        $[-2] =$        $[-1/9] =$        $[0/4] =$        $[-0/4] =$   
 $[4/25] =$        $[3] =$        $[2/3] =$        $[1/7] =$        $[1/2] =$

مثال ۹۱: اگر  $-\frac{8}{3} \leq x < -\frac{7}{3}$ ، آنگاه حاصل  $[3x + 1]$  کدام است؟ ( [ ]، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۸      (۲) -۶      (۳) -۴      (۴) -۷

مثال ۹۲: اگر  $f(x) = \begin{cases} -2[x] & , x < -2 \\ 3 & , -2 \leq x \leq 1 \\ \text{sign}(x) & , x > 1 \end{cases}$  باشد، حاصل  $f(-\sqrt{5}) + f(\sqrt{5} - 1)$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۷      (۳)  $2\sqrt{5} + 1$       (۴) -۱

مثال ۹۳: اگر  $0 < x < 1$  باشد، حاصل عبارت  $A = [x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲) -۱      (۳) -۲      (۴) -۳

مثال ۹۴: مقدار تابع  $f(x) = [x] + [-x]$  به ازای  $x = -1/2$  کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) ۱      (۲) -۲      (۳) صفر      (۴) -۱

مثال ۹۵: حاصل  $[2] - [-\frac{\pi}{4}] - [-2/7]$  کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) ۱      (۲) -۳      (۳) ۳      (۴) -۱



(( هرچه صبر بیشتر باشد، دقت بیشتر است و هرچه دقت بیشتر باشد، موفقیت بیشتر است. ))

تست ۹۶: حاصل عبارت  $\left[ (\sqrt{3}-2)^{16} \right] + \left[ (1-\sqrt{2})^{17} \right] + \left[ (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{18} \right]$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) -۲



تست ۹۷: حاصل  $\left[ \left(-\frac{13}{51}\right)^5 \right] + \left[ \left(\frac{37}{41}\right)^3 \right]$  چقدر است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر



تست ۹۸: اگر  $f(x) = [2x] - [x]$ ، حاصل  $f\left(\frac{5}{3}\right) - f\left(\frac{2}{3}\right)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر



تست ۹۹: اگر  $x^2 < \frac{x}{3}$  باشد، مقدار  $\left[ \frac{-x}{5} \right] + \left[ \frac{x}{4} \right]$  چقدر است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲



تست ۱۰۰: مساحت محدود به نمودار تابع  $f(x) = 2[x] + 1$  و محور xها در بازه  $[-1, 2]$  چقدر است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۴



نکته: همانطور که در قبل گفته شد داریم:

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1, \quad [x+a] = [x] + a$$

از این دو نکته برای حل معادلات شامل جزء صحیح استفاده می‌کنیم.

مثال: معادله  $2[x] - 1 = 8$  را حل کنید.

$$2[x] - 1 = 8 \Rightarrow 2[x] = 9 \Rightarrow [x] = \frac{9}{2} = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$



«(( "ذهن" همه چیز است، به هر چیزی "فکر" کنید "همان" می شوید. ))»

شرح ۱۵: جواب معادلات زیر را بیابید.

$$[x+3]+1=4$$

$$, 3[x]-2=7$$



$$[-x]+2=6$$

$$, 2[2+x]+4=10$$

$$[x]^2-5[x]=0$$

$$, [x]^2+2[x]-3=0$$

تست ۱۰: جزء صحیح عدد  $x$  برابر ۳ شده است. محدوده  $x$  کدام است؟

$$2 \leq x < 3 \quad (4)$$

$$3 \leq x < 4 \quad (3)$$

$$2/9 \leq x < 3 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \quad (1)$$



تست ۱۰۲: تابع  $f(x)=[x]$  در محدوده  $-1 \leq x \leq 3$  چند مقدار مختلف دارد؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$4 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$



تست ۱۰۳: مجموعه جواب معادله  $[x+3]+[x-1]=10$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$[9,10) \quad (4)$$

$$[5,6) \quad (3)$$

$$[4,5) \quad (2)$$

$$[3,4) \quad (1)$$



تست ۱۰۴: اگر  $1 = \left[ \frac{x-3}{2} \right]$  باشد، حاصل  $\left[ \frac{x+1}{2} \right]$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



تست ۱۰۵: معادله  $x^2-[x]=0$  چند جواب دارد؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$4 \text{ بی شمار}$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$



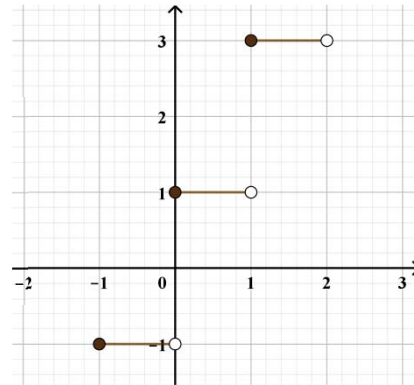
((شکست بیش از موفقیت آموزنده است؛ کسی که هیچ گاه اشتباه نمی‌کند، هرگز به جایی نمی‌رسد.))



**نکته:** برای رسم نمودار یک تابع شامل جزء صحیح، باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ی از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر  $0 \leq x < 1$ ، آنگاه  $[x] = 0$ ؛ پس مقدار تابع  $f(x) = [x]$  برای همگی اعداد عضو بازه  $[0, 1)$  برابر صفر می‌شود. پس برای رسم توابع جزء صحیح، ابتدا عبارت داخل کروشه را به بازه‌هایی به طول یک دستبندی می‌کنیم و بعد از یافتن مقدار عددی تابع و محدودهی  $x$ ، به رسم تابع می‌پردازیم.

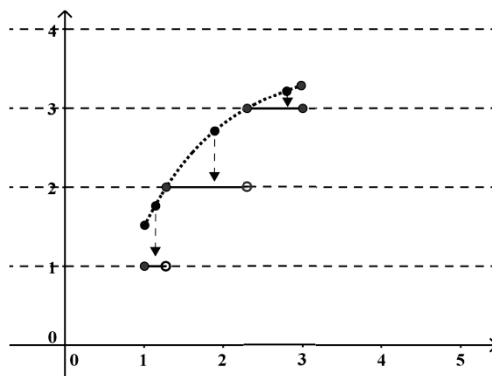
**مثال:** تابع  $f(x) = 2[x] + 1$  را در بازه‌ی  $[-1, 2)$  رسم کنید.

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = 2(-1) + 1 = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 2(0) + 1 = 1 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 2(1) + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



**نکته:** روش دیگر برای رسم توابع شامل جزء صحیح این است که بعد از رسم تابع بدون در نظر گرفتن جزء صحیح، تصویر هر قطعه از نمودار که بین دو مقدار از صحیح از برد قرار می‌گیرد را بر عدد صحیح قبل تصویر کنیم.

در نمودار زیر، نقطه چین تابع اصلی و خطوط افقی رسم شده، تابع جزء صحیح را نشان می‌دهد.



**نکته:** طول هر گام تابع  $y = [ax]$ ، برابر  $\frac{1}{a}$  است.

«(امام رضا(ع): هر کس به خدا خوش گمان باشد، خداوند مطابق گمان او، با وی رفتار می‌کند.)»

شماره ۱۶: توابع  $y = [x]$ ،  $y = [2x] + 1$ ،  $y = 2[x] + 1$ ،  $y = [x^2]$  و  $y = [\cos x]$  را رسم کنید.



تست ۱۰۶: مساحت بین نمودار تابع  $f(x) = 3[x] + 1$  و محور  $x$ ها در بازه  $[0, 2)$  چقدر است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



تست ۱۰۷: در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو (برحسب هزار تومان) پس از  $x$  ساعت، با رابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < 2 \\ 5 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$  محاسبه می‌شود. ضابطه



تابع هزینه پارکینگ به ازای  $0 \leq x < 3$  کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

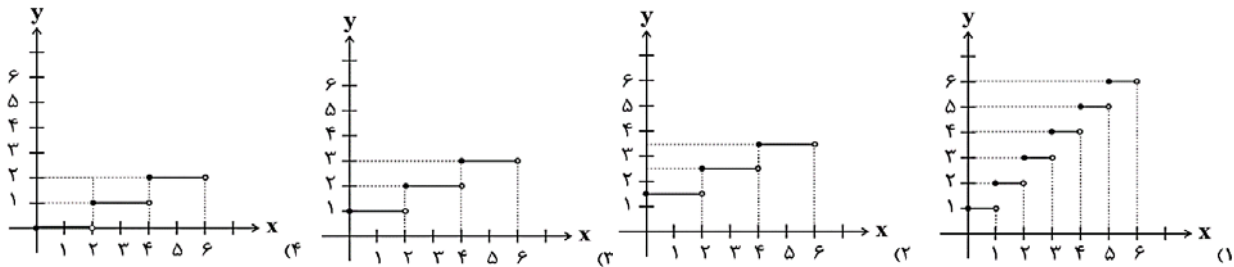
$f(x) = 3[x] + 1$  (۴)

$f(x) = [x] + 2$  (۳)

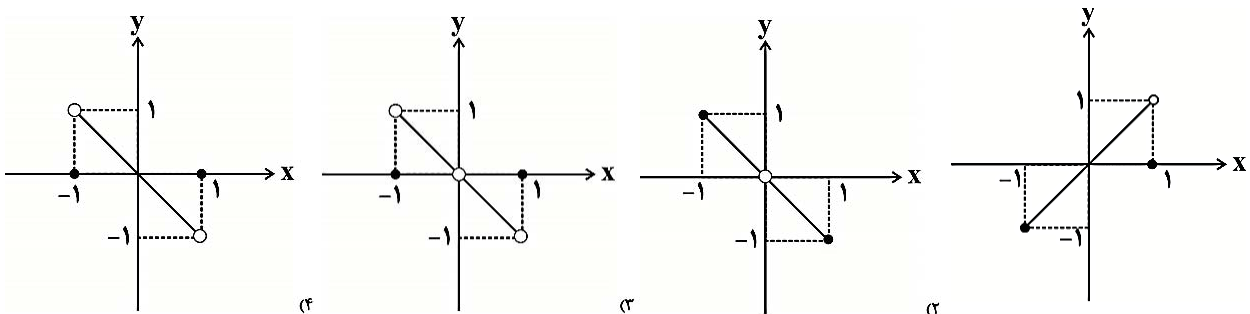
$f(x) = 2[x] + 1$  (۲)

$f(x) = [x] + 1$  (۱)

تست ۱۰۸: نمودار تابع  $g(x) = \left[ \frac{2+x}{2} \right]$  در بازه  $[0, 6)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)



تست ۱۰۸: نمودار تابع  $y = x([-x] + [x])$  با دامنه  $-1 \leq x \leq 1$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)





**وارون تابع:** با جابه جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب  $(a, b)$  میتوان زوج مرتب  $(b, a)$  را به دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع  $f$  را جابه جا کنیم، رابطی جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع  $f$  می‌گوییم و با  $f^{-1}$  نشان می‌دهیم.

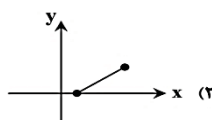
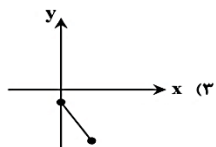
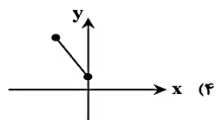
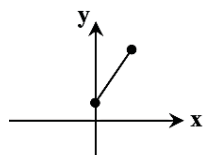
**نکته:** وارون یک تابع، خود می‌تواند یک تابع باشد یا نباشد.

**نکته:** برای رسم وارون تابع  $f$ ، کافی است وارون آن را نسبت به خط  $y = x$  یعنی نیم‌ساز ناحیه اول و سوم رسم کنیم.

**مثال ۱:** موارد زیر را بیابید.

$s = \{(4, 1), (1, 4), (3, 3), (2, 5)\}$        $s^{-1} =$

$t = \{(5, 1), (1, 4), (4, 3), (2, 3)\}$        $t^{-1} =$



- نمودار وارون تابع روبه‌رو، کدام است؟

**تست ۱:** در تابع خطی  $f(x) = (a+5)x + 2b$ ، اگر  $f^{-1}(7) = 2$  و  $f^{-1}(11) = 3$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) -۱      (۲) -۲      (۳) -۳      (۴) -۴

**تست ۲:** اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$  باشد، مقدار  $f^{-1}(2) + f^{-1}(-2)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{2}$       (۲) ۱      (۳) ۲      (۴)  $\frac{3}{2}$

**تست ۳:** اگر  $f(x) = \frac{2}{3}x + a$  باشد و نمودار  $f^{-1}$  از نقطه  $(2, 6)$  بگذرد، مقدار  $f^{-1}(0)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{14}{3}$       (۲) ۳      (۳) -۲      (۴) -۷



تابع یک به یک:

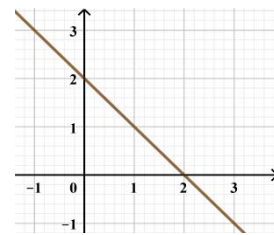
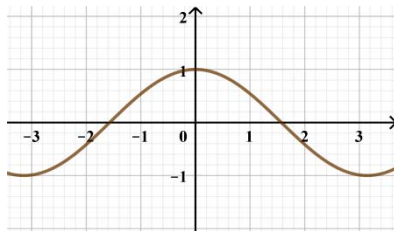
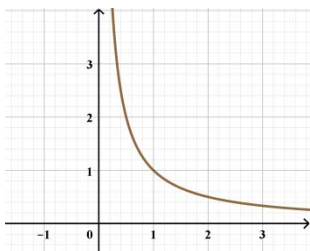
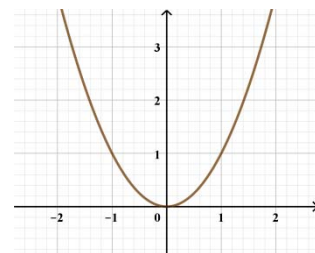
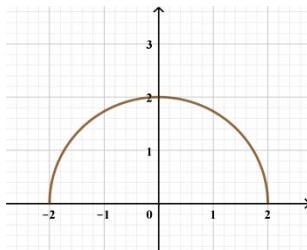
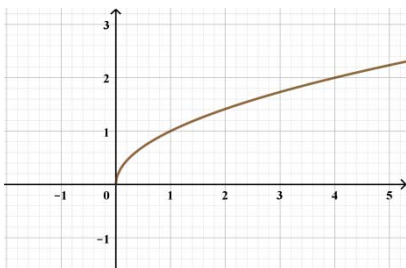
به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم.

نکته: تابع  $f$  یک به یک است هرگاه:  $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ .

نکته: اگر هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.

نکته: وارون یک تابع یک به یک، خود یک تابع است، یعنی هر تابع یک به یک وارون‌پذیر است.

**مثال ۳:** وارون هر یک از توابع زیر که یک به یک هستند، را رسم کنید.



**تست ۶:** اگر  $f = \{(a^2 + 1, 3), (-1, 7), (b + 1, 7), (5, 3), (3, 0), (3, a + 2)\}$  تابعی یک به یک باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) -۴

**تست ۷:** اگر تابع  $f = \{(1, a^2), (a^2 + 1, 3), (a^3, -a), (a - 1, 0), (5, 3)\}$  یک به یک باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\{2, -2\}$  (۲)  $\{2\}$  (۳)  $\{-2\}$  (۴)  $\emptyset$

**تست ۷:** تابع درجه دوم  $f(x) = 3x^2 + 12x + 13$  با کدام یک از شرط‌های زیر وارون‌پذیر می‌شود؟

- (۱)  $x \in (-\infty, 0]$  (۲)  $|x| \geq 2$  (۳)  $x + 3 \leq 0$  (۴)  $-3 \leq x \leq 3$

تست ۸: تابع  $f(x) = (x-2)(x-4) + 2x$  در کدام یک از بازه‌های زیر یک به یک است؟

- (۱)  $[0, 3]$  (۲)  $[-1, 2]$  (۳)  $[1, 5]$  (۴)  $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

تست ۹: اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x \geq 2 \\ x+a & , x < 2 \end{cases}$  وارون پذیر باشد، حدود  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a = 2$  (۲)  $a \geq 1$  (۳)  $a \leq 1$  (۴)  $a \geq 0$

تست ۱۰: وسیع ترین بازه‌ی  $a$  برای آن که تابع  $f(x) = \begin{cases} x+3 & , x \geq 2 \\ -x^2+a & , x < 0 \end{cases}$  وارون پذیر باشد، کدام است؟

- (۱)  $(5, +\infty)$  (۲)  $(5, +\infty)$  (۳)  $(-\infty, 5)$  (۴)  $(-\infty, 5]$



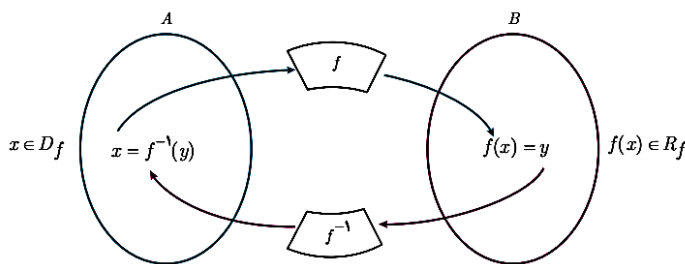
نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند  $f$ ، در معادله  $y = f(x)$  ابتدا متغیر  $x$  را بر حسب متغیر  $y$  محاسبه می‌کنیم. سپس تغییر نام متغیر  $y$  به متغیر  $x$  و برعکس، ضابطه تابع  $y = f^{-1}(x)$  را به دست می‌آوریم.

مثال: وارون تابع  $f(x) = 3x - 1$  را بیابید.

$$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow y = 3x - 1 \Rightarrow 3x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

نکته: داریم:  $D_f = R_{f^{-1}}$  ,  $R_f = D_{f^{-1}}$

نکته: نمودار زیر ارتباط بین تابع یک به یک  $f$  و  $f^{-1}$  را نشان می‌دهد.



(( کسی که می‌خواهد موفقیت بزرگی را به دست آورد، باید به میزان زیادی فداکاری کند. ))

تست ۱۱: ضابطه وارون تابع  $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$  کدام است؟

(۴)  $y = \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$

(۳)  $y = \frac{-5}{7}x + \frac{3}{7}$

(۲)  $y = \frac{5}{-7x+3}$

(۱)  $y = \frac{7x-3}{5}$



تست ۱۲: اگر  $f(x) = 3x - a$  و  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{b}$  مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۴) -۴

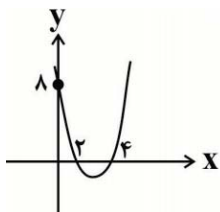
(۳) -۳

(۲) ۲

(۱) ۵



تست ۱۳: اگر وارون تابع  $g(x) = ax + b$  نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند، آن‌گاه جواب معادله  $g^{-1}(x) = g(x)$  کدام است؟



(۱)  $\frac{5}{3}$  (۳) ۱

(۲) ۲ (۴)  $\frac{10}{3}$



تست ۱۴: قرینه خط به معادله  $3y - 4x = 5$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، خط  $y = ax + b$  است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) ۰/۵

(۱) -۰/۵



نکته: وارون تابع خطی  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) به صورت  $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$  است. پس در مورد شیب

این توابع داریم:  $m \times m' = a \times \frac{1}{a} = 1$



تست ۱۵: اگر  $f$  تابعی خطی با شیب  $m$  باشد، به ازای کدام مقدار  $m$  شیب تابع  $f^{-1}$  برابر  $4m$  است؟ ( $m \neq 0$ )

(۲)  $\pm 2$

(۴)  $\pm \frac{1}{2}$

(۱) هیچ مقدار  $m$

(۳)  $\pm 1$







چهار عمل اصلی توابع: چهار عمل اصلی برای توابع دلخواه  $f$  و  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: اگر  $f(x) = x + 2$  و  $g(x) = x - 2$  باشد:

الف) حاصل  $f - g, f + g, g / f$  را بیابید.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 2) + (x - 2) = 2x$$

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) = (x - 2) - (x + 2) = -4$$

$$(g / f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x - 2}{x + 2}$$

ب) حاصل  $(gf)(2), (f + g)(2), (g - f)(3)$  را بیابید.

$$(gf)(2) = g(2)f(2) = (2 - 2)(2 + 2) = 0$$

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = (2 + 2) + (2 - 2) = 4$$

$$(g - f)(3) = g(3) - f(3) = (3 - 2) - (3 + 2) = -4$$

نکته: برای یافتن دامنه‌ی این توابع از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال: اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$  باشد:

الف) حاصل  $fg, f + g, f / g$  را بیابید.



ب) حاصل  $(gf)(6), (f + g)(4), (f / g)(0)$  را بیابید.

تست: اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $g(x) = x - 2$ ، دامنه‌ی تابع  $(\frac{f}{g})(x)$  کدام است؟

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \quad (4)$$

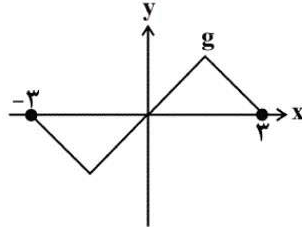
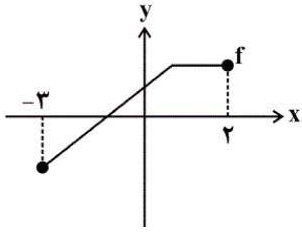
$$\mathbb{R} - \{2\} \quad (3)$$

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad (2)$$

$$\mathbb{R} \quad (1)$$



((هرکس خواهان موفقیت است باید یاد بگیرد که ناکامی جزء حتمی فرایند پیشرفت است.))



تست ۲: با توجه به نمودار تابع‌های  $f$  و  $g$ ، دامنه تابع  $\frac{2f^2}{g}$  کدام است؟

(۱)  $(0, 3)$  (۲)  $[0, 3)$

(۳)  $[-3, 2]$  (۴)  $(-3, 0) \cup (0, 2]$

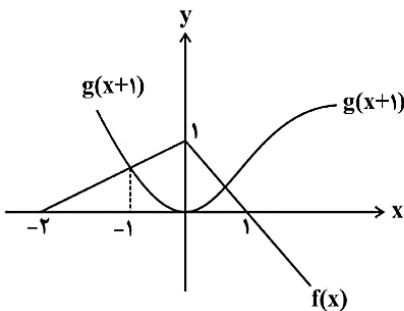
تست ۳: اگر  $f(x) = \begin{cases} x & , x < -3 \\ 2x^2 & , x > 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x & , |x| < 2 \\ \frac{1}{x} & , x < -5 \end{cases}$  باشد، تابع  $f \times g$  کدام است؟

(۱)  $\begin{cases} 1 & , 1 < x < 2 \\ 2x^3 & , x < -5 \end{cases}$  (۲)  $\begin{cases} x^2 & , -2 < x < 2 \\ 2x & , x < -5 \end{cases}$  (۳)  $\begin{cases} 2x^3 & , 1 < x < 2 \\ 1 & , x < -5 \end{cases}$  (۴)  $\begin{cases} 2x^3 & , 1 < x < 2 \\ 1 & , x < -3 \end{cases}$

تست ۴: اگر داشته باشیم  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه تابع  $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$  شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۵: نمودار توابع  $y_1 = f(x)$  و  $y_2 = g(x+1)$  به شکل زیر است. اگر  $h(x) = (f+g)(x)$  باشد، آنگاه حاصل  $h(0)$  کدام است؟



(۱) ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$

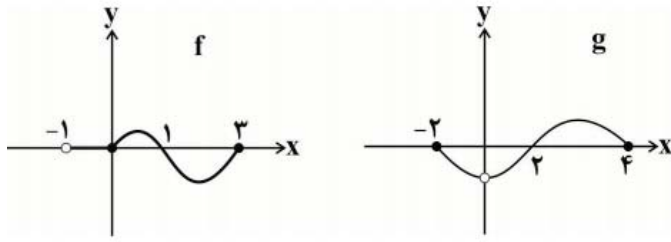
(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

تست ۶: اگر  $f$  و  $g$  دو تابع خطی باشند و  $(f+g)(x) = 3x+1$ ،  $(f-g)(x) = 2-x$  باشد، مقدار  $\left(\frac{f}{g}\right)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{9}{11}$  (۲)  $\frac{25}{18}$  (۳)  $\frac{17}{14}$  (۴)  $\frac{15}{23}$

«همه چیز به طرز برخورد و نگرش شما بستگی دارد، مسایل می‌توانند شما را با مشکل یا با موفقیت رو به رو سازند.»



تست ۷: با توجه به نمودار توابع  $f$  و  $g$ ، دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f}{g}}(x)$  کدام است؟

(۱)  $(1, 2) \cup (-1, 0) \cup \{3\}$

(۲)  $(-1, 3) - \{0\}$

(۳)  $(-1, 0)$

(۴)  $(-1, 0)$

تست ۸: اگر  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  و  $g(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$  باشند، دامنه تابع  $\frac{2f+g}{g^2}$  کدام است؟

(۱)  $\emptyset$

(۲)  $\mathbb{R} - \left\{2, 1, \frac{1}{2}\right\}$

(۳)  $\mathbb{R} - \{2\}$

(۴)  $\mathbb{R} - \{2, 0\}$

تست ۹: اگر  $f(x) = 2|x-1|$  و  $g(x) = -|x-3|$  و  $1 < a < 3$  و  $b < 1$  باشد، حاصل  $\frac{(f+g)(a)}{(f+g)(b)}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2a-5}{-b-1}$

(۲)  $\frac{2a+5}{b-1}$

(۳)  $\frac{a+1}{-b-1}$

(۴)  $\frac{2a+5}{b+1}$

تست ۱۰: اگر  $f(x) = x - \sqrt{x}$  و  $g(x) = 1 + \sqrt{x}$  باشد، برد تابع  $y = (f+g)(x)$  کدام است؟

(۱)  $\mathbb{R}$

(۲)  $[0, +\infty)$

(۳)  $(-\infty, -1]$

(۴)  $[1, +\infty)$

تست ۱۱: توابع  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  و  $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$  مفروض‌اند. برد تابع  $f-g$  کدام است؟

(۱)  $\mathbb{R} - \{0\}$

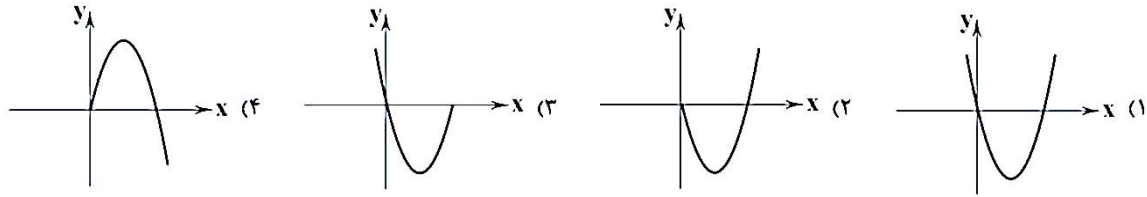
(۲)  $\mathbb{R} - \{1\}$

(۳)  $\mathbb{R} - \{-1\}$

(۴)  $\mathbb{R}$

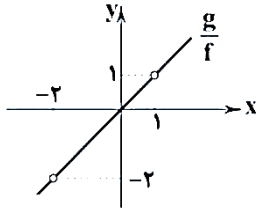
تست ۱۲:

اگر  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$  و  $g(x) = 4x + \sqrt{x}$  باشد، نمودار تابع  $(f-g)(x)$  کدام است؟



تست ۱۳:

اگر  $f(x) = x^2 + ax + b$  و نمودار  $\frac{g}{f}(x)$  به صورت زیر باشد، مقدار  $a^2 + b^2$  چقدر است؟



۴ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



تست ۱۴:

اگر  $f(x)$  تابعی خطی و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، در صورتی که نمودار  $(f+g)(x)$  یک سهمی که رأس آن روی محور  $y$ ها قرار داشته و هم‌چنین  $(f-2g)(2) = -20$  باشد، تابع  $f$  محور  $x$ ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۳ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

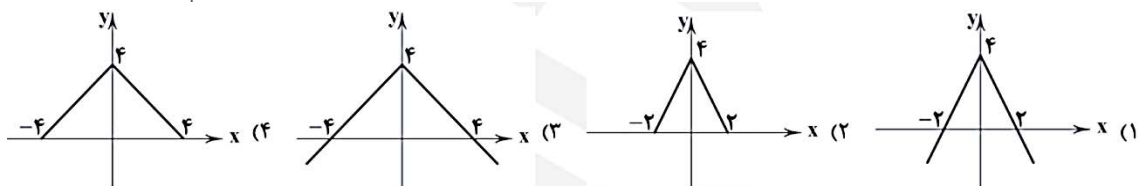
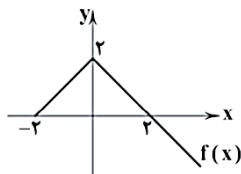
۲ (۲)

۱ (۱)



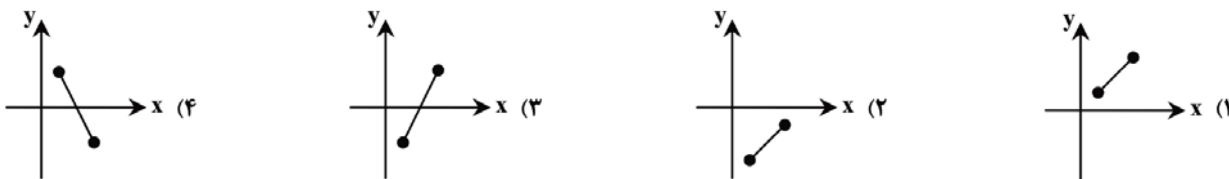
تست ۱۵:

اگر نمودار  $f(x)$  به صورت زیر باشد، نمودار  $f(x) + f(-x)$  چگونه است؟



تست ۱۶:

اگر  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ ، نمودار تابع  $y = f(x) \cdot g(x)$  کدام است؟





نکته: در مثال‌های عددی، ابتدا اشتراك دامنه‌ی توابع را می‌یابیم و سپس برای  $x$  های یکسان،  $y$  ها را جمع یا ... می‌کنیم.

مثال: اگر  $f = \{(2, 3), (3, -1), (5, -1)\}$  و  $g = \{(-1, 2), (2, 0), (3, 3)\}$  باشد، حاصل را بیابید:

$$1) D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2, 3\}$$

$$2) f + g = \{(2, 3+0), (3, -1+3)\} = \{(2, 3), (3, 2)\}$$

$$3) f / g = \left\{ \left( 2, \frac{3}{0} \right), \left( 3, \frac{-1}{3} \right) \right\} = \left\{ \left( 3, -\frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$4) gf = \{(2, 0 \times 3), (3, 3 \times -1)\} = \{(2, 0), (3, -3)\}$$

سوال ۲: اگر  $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$  و  $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$  باشد، حاصل را بیابید:

$f + g =$

$f \times g =$

$f - g =$

$g - f =$

$f / g =$

$g / f =$

سوال ۱۷: اگر  $f = \{(1, 2), (-2, 3), (\frac{1}{2}, 1)\}$  و  $g = \{(\frac{1}{2}, 3), (3, -2), (1, 5)\}$  مجموعه  $D_{f+g}$  کدام است؟

$\{\frac{1}{2}, 3\}$  (۴)

$\{3\}$  (۳)

$\{\frac{1}{2}, 1\}$  (۲)

$\{\frac{1}{2}, 3, 1, -2\}$  (۱)

سوال ۱۸: اگر  $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$  و  $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 0)\}$  دامنه تابع  $\frac{g}{f}$  کدام است؟

$\{-1\}$  (۴)

$\emptyset$  (۳)

$\{2, 3, 4, -1\}$  (۲)

$\{2, -1\}$  (۱)

سوال ۱۹: اگر  $f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$  و  $g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\}$  تابع  $f + g$  کدام است؟

$\{(2, 9), (3, 4), (0, 1)\}$  (۴)

$\{(2, 9), (3, 4)\}$  (۳)

$\{(2, 7), (3, 4)\}$  (۲)

$\{(2, 7), (3, 4), (0, -2)\}$  (۱)

«(علاقه، اندیشه و مطالعه چیزهایی هستند که شما را به سوی موفقیت سوق می‌دهند.»)

اگر  $f(x) = \frac{4-x}{\sqrt{1+x}}$  و  $g = \{(-1, 0), (2, 4), (3, 7), (5, 0)\}$  باشد، دامنه‌ی تابع  $\frac{g}{f}$  چند عضو دارد؟

۱ (۴)

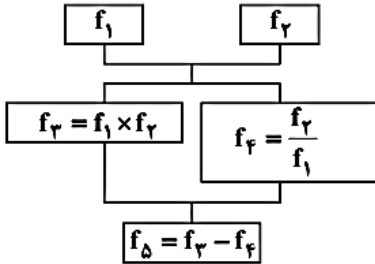
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



اگر  $f_1(x) = x-1$  و  $f_2(x) = x+1$ ، با توجه به درخت روبه‌رو، حاصل  $f_5(x)$  به‌ازای  $x=3$  کدام است؟



۸ (۱)



۲ (۲)

۶ (۳)

۴ (۴)

اگر  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2 \end{cases}$  و  $g = \{(3, -1), (-2, 2)\}$  تابع  $f-g$  کدام است؟

$\{(3, -3), (-2, 0)\}$  (۴)

$\{(3, 3), (-2, 0)\}$  (۳)

$\{(-1, 3), (4, 0)\}$  (۲)

$\{(-1, -1), (4, 2)\}$  (۱)



اگر  $f = \{(2, 3), (-1, 4), (1, 2)\}$ ،  $g = \{(2, a), (4, -1), (1, 2)\}$  و  $\frac{f}{g} = \{(1, 1)\}$ ، آنگاه مقدار  $a$  کدام است؟

صفر (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



اگر  $\frac{f}{f^2} = \{(0, 4), (-1, 1)\}$  باشد، آنگاه  $a^2 - b^2$  کدام است؟

-۴ (۲)

۴ (۱)



-۳ (۴)

۳ (۳)

اگر  $f+g = \{(2, 5), (4, 3)\}$  و  $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, 2)\}$  تابع  $f-g$  کدام است؟

$\{(2, 5), (4, 3)\}$  (۲)

$\{(2, -2), (4, -1)\}$  (۱)



$\{(2, 1), (4, 1)\}$  (۴)

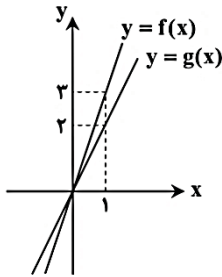
$\{(2, 1), (4, 1), (3, -1)\}$  (۳)

تست ۳۶: اگر  $f = \{(2, 4), (4, 6), (5, 0)\}$  و  $g = \{(5, -2), (7, 0), (6, 1), (2, 0)\}$  تابع  $f \times g$  کدام است؟


- (۱)  $\{(2, 4), (5, 0), (0, 5)\}$  
- (۲)  $\{(2, 2), (5, -2)\}$
- (۳)  $\{(2, 0), (5, 0)\}$
- (۴)  $\{(0, 2), (1, 5), (2, 6)\}$

تست ۳۷: اگر  $f = \{(3, -1), (2, 2), (-1, 0), (0, -5), (1, 5)\}$  و  $g = \{(-1, 2), (2, -1), (0, 3), (-2, 3), (1, -5)\}$  دامنه‌ی تابع  $\frac{f^{-1} + g}{f + g}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ 
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴



تست ۳۸: دو تابع خطی  $f(x)$  و  $g(x)$  به صورت زیر داده شده‌اند. ضابطه‌ی تابع  $y = (f + g)(x)$  کدام است؟

- (۱)  $y = \frac{3}{2}x$  
- (۲)  $y = 4x$
- (۳)  $y = 5x$
- (۴)  $y = \frac{5}{2}x$

تست ۳۹: اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 4x & x < 2 \\ 3x & x \geq 2 \end{cases}$  ضابطه‌ی تابع  $y = f(x) - g(x)$  کدام است؟

- (۱)  $y = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ -3x & 1 \leq x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$  
- (۲)  $y = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -3x & 1 \leq x < 2 \\ -2x & x \geq 2 \end{cases}$
- (۳)  $y = \begin{cases} 6x & x < 1 \\ 4x & x \geq 2 \end{cases}$
- (۴)  $y = \begin{cases} -2x & x < 1 \text{ یا } x \geq 2 \\ -3x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

سوال ۳: اگر  $f(x) = \text{sign}(x)$  و  $g(x) = x$  و  $h(x) = -x$  باشد، ضابطه‌ی توابع  $fg$ ,  $fh$ ,  $hg$  را بیابید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.



سوال ۴: اگر  $f(x) = \text{sign}(x)$  و  $g(x) = x^2$  و  $h(x) = -x^2$  باشد، ضابطه‌ی توابع  $fg$ ,  $fh$  را بیابید نمودار آن‌ها را رسم کنید.

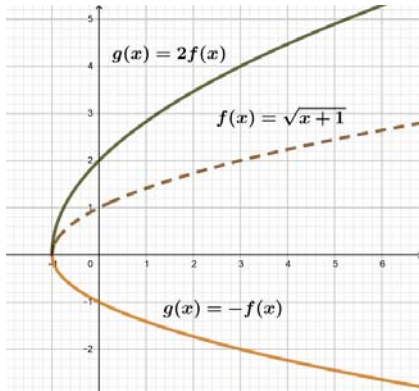


(( امام محمد باقر(ع): هیچ کس به مواهب و رحمت‌های الهی نمی‌رسد مگر با عمل.))



**نکته:** اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = kf(x)$  کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  را  $k$  برابر کنیم.

**نکته:** برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  کافی است قرینتی نمودار تابع ضابطه  $y = f(x)$  را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم.

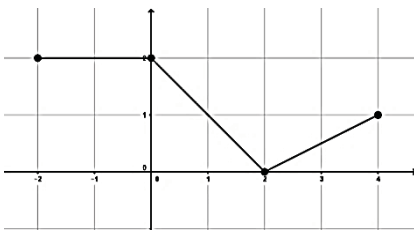


**مثال:** اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  باشد،

نمودار توابع  $h(x) = -f(x)$ ,  $g(x) = 2f(x)$  را رسم کنید.

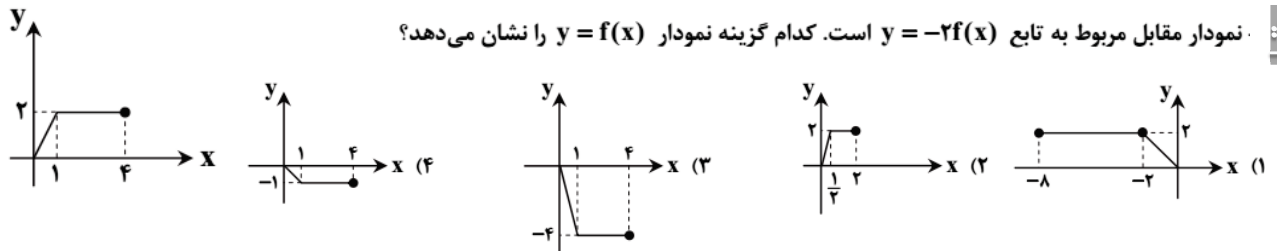
نمودار زیر مربوط به تابع  $f(x)$  است. توابع  $f(x+2)$ ,  $2f(x)$ ,  $-f(x)+2$ ,  $-2f(x-1)+2$  را رسم کنید.

**شماره ۵:**



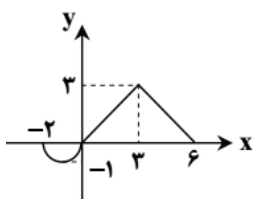
نمودار مقابل مربوط به تابع  $y = -2f(x)$  است. کدام گزینه نمودار  $y = f(x)$  را نشان می‌دهد؟

**شماره ۳:**



شکل مقابل نمودار تابع  $y = 3f(x+2)$  است. نمودار تابع  $y = f(x)$  در چند نقطه نمودار تابع  $y = 1$  را قطع می‌کند؟

**شماره ۳۱:**



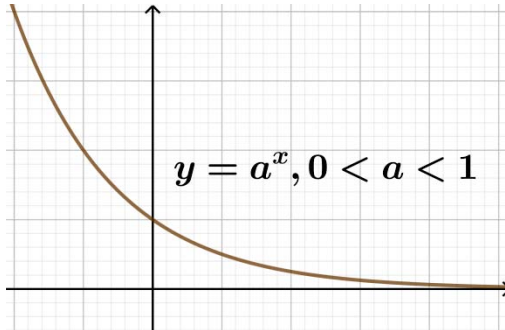
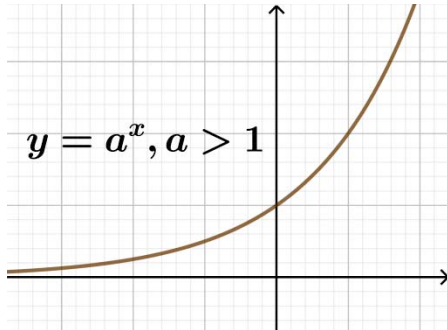
- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)



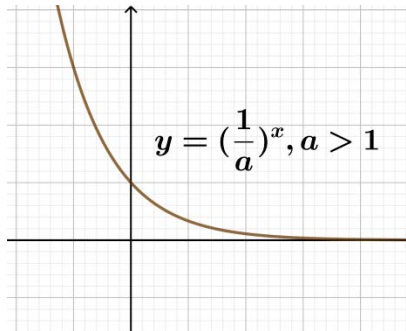
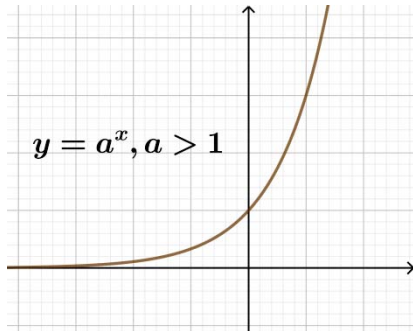




توابع نمایی: شکل کلی این توابع به صورت  $f(x) = a^{x+b} + c$  است که در آن  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است. در زیر نمودار تابع  $f(x) = a^x$  رسم شده است:



نکته: توابع  $y = a^x$  و  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$  نسبت به محور  $y$  ها قرینه هستند.



نکته: در توابع نمایی اگر  $a > 1$  این توابع صعودی و اگر  $0 < a < 1$  نزولی هستند.

نکته: دامنه و برد توابع  $f(x) = a^x$  به صورت مقابل است:  $D_f = \mathbb{R}, R_f = (0, +\infty)$ .

نکته: دامنه و برد توابع  $f(x) = a^{x+b} + c$  به صورت مقابل است:  $D_f = \mathbb{R}, R_f = (c, +\infty)$ .

کدامیک از توابع زیر نمایی هستند. دامنه و برد و صعودی یا نزولی بودن آن‌ها را مشخص کنید.

مشق:

a)  $f(x) = x^2 + x$

b)  $g(x) = 1 + 3^x$

c)  $h(x) = 2^{-x} - 3$

d)  $i(x) = 5^{x+3} + 4$

e)  $j(x) = (-2)^x$


f)  $k(x) = 4^{1-x}$



(( اما صادق (ع) : هر کس با این سه نفر کشمش کند خوار می‌گردد: پیر، سلطان حق و شخص بدهکار. ))

**نکته:** مقدار تابع نمایی  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  به ازای ..... با افزایش مقدار  $x$  رو به ..... است.

(۲)  $0 < a < 1$  - کاهش

(۱)  $a > 0$  - افزایش 

(۴)  $-1 < a < 0$  - کاهش

(۳)  $a > 1$  - کاهش

**نکته:** اگر نمودار دو تابع نمایی  $f(x) = (a+1)^x$  و  $g(x) = (3a-7)^{-x}$  نسبت به محور  $y$ ها قرینه یکدیگر باشند،  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۵ (۱) 

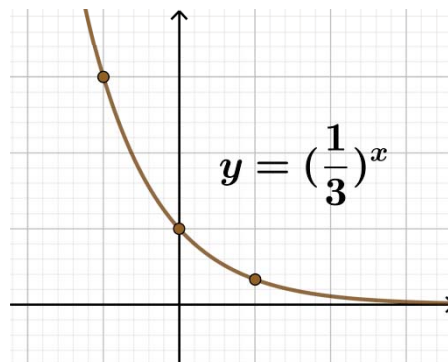
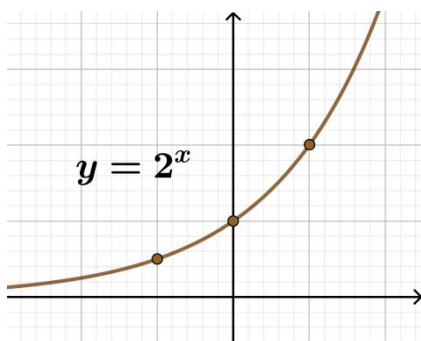
**رسم توابع نمایی:** برای رسم توابع نمایی از نقطه یابی با حداقل سه نقطه استفاده می‌کنیم. این سه نقطه را می‌توانیم برای تابع  $f(x) = a^x$  به صورت زیر تعیین کنیم:

$x$	-۱	۰	۱
$f(x) = a^x$	$\frac{1}{a}$	۱	$a$

**مثال:** توابع  $y = 2^x$ ،  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  را رسم کنید.

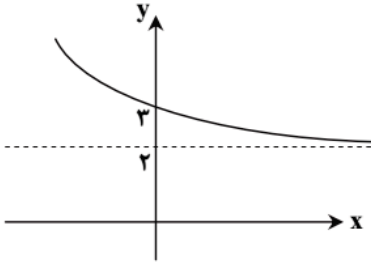
$x$	-۱	۰	۱
$y = 2^x$	$\frac{1}{2}$	۱	۲

$x$	-۱	۰	۱
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	۳	۱	$\frac{1}{3}$



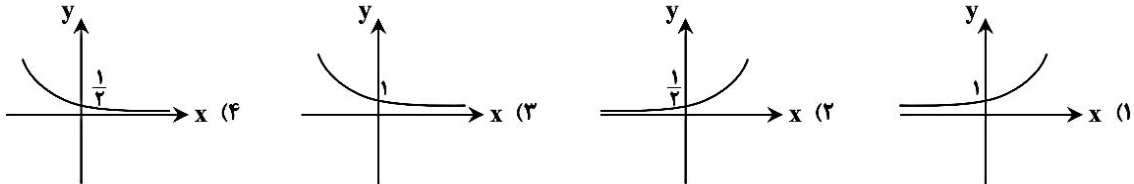
**نکته:** برای رسم توابع نمایی با ضابطه  $f(x) = a^{x+c} + b$  ابتدا تابع  $f(x) = a^x$  را رسم کرده و سپس نمودار تابع را به اندازه  $c$  واحد به سمت چپ یا راست (مخالف علامت  $c$ ) و  $b$  واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم.

تست ۳: در دستگاه مختصات روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = a + (\frac{1}{4})^{x-b}$  رسم شده است.  $ab$  کدام است؟

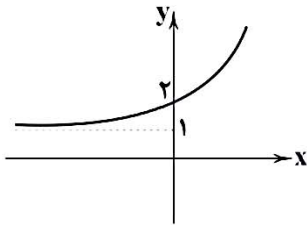


- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

تست ۴: به‌ازای تمام مقادیر حقیقی  $r$ ، نقطه  $(r+1, 2^r)$  را در دستگاه مختصات مشخص کرده‌ایم. نمودار به‌دست آمده، کدام است؟

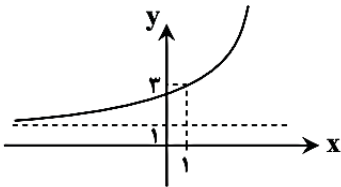


تست ۵: اگر نمودار تابع  $f(x) = a + 2^{x+k}$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه  $f(3) + 2^{-1}$  چقدر است؟



- ۱۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۹ (۳)
- ۸ (۴)

تست ۶: در دستگاه مختصات روبه‌رو، نمودار  $f(x) = a + 2^{x-b}$  رسم شده است. مقدار  $a+b$  کدام است؟



- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۳ (۳)
- ۲ (۴)

تست ۷: نمودار تابع  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = 2^x$  در چند نقطه متقاطع هستند؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

تست ۸: نمودارهای  $f(x) = (\frac{1}{2})^{ax-1}$  و  $g(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$  در نقطه‌ای به عرض  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  متقاطع‌اند. در این صورت  $a$  کدام است؟

- ۲۵ (۱)
- $\frac{7}{25}$  (۲)
- $\frac{14}{25}$  (۳)
- $\frac{7}{10}$  (۴)



نکته: در حالت کلی داریم:

$$(a > 1, a^x > a^y) \Leftrightarrow x > y \quad , \quad (0 < a < 1, a^x > a^y) \Leftrightarrow x < y$$

مثال: اگر  $3^x < 3^y$  آن‌گاه داریم:  $x < y$  و اگر  $(\frac{1}{3})^x < (\frac{1}{3})^y$  آن‌گاه داریم:  $x > y$ .

تست ۹: اگر  $x < y$ ، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۴)  $(\frac{2}{\sqrt{3}})^{2x} > (\frac{2}{\sqrt{3}})^{2y}$

(۳)  $5^{-x} > 5^{-y}$

(۲)  $3^{x-1} > 3^{y-1}$

(۱)  $2^{x+1} > 2^{y+1}$



تست ۱۰: اگر عدد  $(\frac{1}{2})^{a-1}$  کوچک‌تر از  $0/125$  باشد، محدوده  $a$  کدام است؟

(۴)  $a < 2$

(۳)  $a > 4$

(۲)  $a < 4$

(۱)  $a > 2$



تست ۱۱: کدام گزینه نادرست است؟

(۴)  $(\frac{1}{5})^{\sqrt{2}} > (\frac{1}{5})^{\sqrt{3}}$

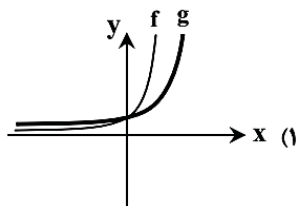
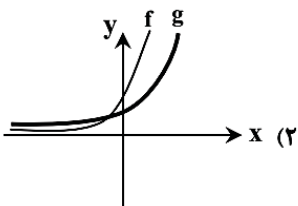
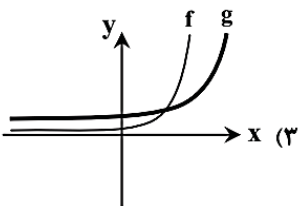
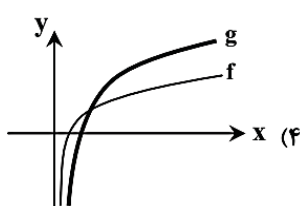
(۳)  $(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}} > (\frac{1}{2})^{\sqrt[3]{3}}$

(۲)  $(\frac{1}{3})^{\frac{2}{5}} = 3^{-0/4}$

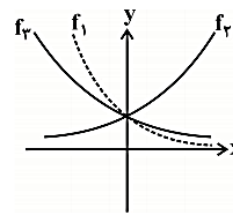
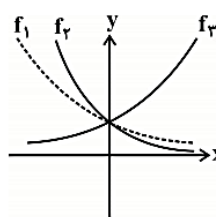
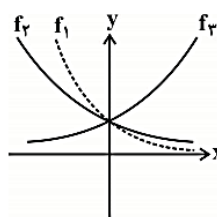
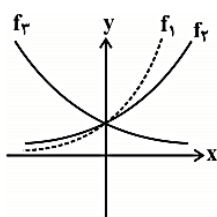
(۱)  $4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{6}}$



تست ۱۲: در کدام یک از موارد زیر نمودار دو تابع  $f(x) = 3^{x-2}$  و  $g(x) = 2^{x-2}$  نسبت به هم درست رسم شده است؟



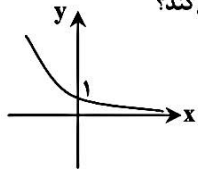
تست ۱۳: اگر  $f_1(x) = a^x$  و  $f_2(x) = b^x$  و  $f_3(x) = c^x$  و  $0 < a < b < 1 < c$  باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟



دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۱۴:

- نمودار تابع  $f(x) = (3-4m)^x$  به صورت روبه‌رو است. چند عدد طبیعی  $x$  در نامساوی  $(m + \frac{1}{4})^{3x-1} \leq (m + \frac{1}{4})^{x+8}$  صدق می‌کند؟



۵ (۲)

۱) بی‌شمار



۴ (۴)

۶ (۳)



**نکته:** توابع نمایی یک به یک هستند. یعنی به ازای هر  $y$  از برد آن‌ها، فقط یک  $x$  از دامنه یافت می‌شود.

**تعریف و نکته:** معادلاتی را که در آن‌ها متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامیم. با استفاده از

خاصیت یک به یک بودن توابع نمایی خواهیم داشت:

$$\left( a > 0, a^{x_1} = a^{x_2} \right) \Rightarrow x_1 = x_2$$

**مثال:** معادله‌های  $4^{x+3} = 16$ ,  $4^{3x-4} = 2^{x+5}$  را حل کنید.

۱)  $4^{x+3} = 16 \Rightarrow 4^{x+3} = 4^2 \Rightarrow x+3 = 2 \Rightarrow x = -1$

۲)  $4^{3x-4} = 2^{x+5} \Rightarrow 2^{2(3x-4)} = 2^{x+5}$

$$\Rightarrow 2^{6x-8} = 2^{x+5} \Rightarrow 6x-8 = x+5 \Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

**مثال ۲:** معادلات زیر را حل کنید.

$$3^{2x+7} = 81^x$$

$$5^{4-x} = 125^{x+2}$$



$$16^{2x+7} = 4^{3x}$$

$$\left( \frac{1}{2} \right)^{6x-1} = 32^{1+3x}$$

**تست ۱۵:** معادله  $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$  چند ریشه دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۲) صفر

۱) بیشمار



«( پیامبر اکرم(ص): در پی روزی و نیازها، سحر خیز باشید، چرا که حرکت در آغاز روز، [همایه] برکت و پیروزی است.))»

تست ۱۶: - معادله  $9^x = 3^{x^2 - 4x}$  چند ریشه دارد؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲)  ۳ (۳)  ۴ بی‌شمار

تست ۱۷: - اگر  $f(x) = 4^x + 2$  و  $f(-1) \cdot f(a) = \frac{297}{2}$  مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲)  ۳ (۳)  ۴ (۴)

تست ۱۸: در تابع با ضابطه  $f(x) = ab^x$ ;  $b > 0$  داریم  $f(0) = \frac{3}{4}$  و  $f(-2) = \frac{3}{32}$  مقدار  $f(\frac{3}{4})$  کدام است؟

- ۶ (۱)  ۸ (۲)  ۱۲ (۳)  ۲۴ (۴)

تست ۱۹: - در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = ab^x$ ,  $b > 0$  اگر  $f(0) = 4$  و  $f^{-1}(\frac{1}{16}) = 2$  آن‌گاه مقدار  $f(-1)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲)  ۳ (۳)  ۴ (۴)

تست ۲۰: از دستگاه  $\begin{cases} 4^x + 4^x = \sqrt{2} \\ 3^y + 3^y = 4x + 19 \end{cases}$  حاصل  $4x + y$  کدام است؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲)  ۳ (۳)  ۴ (۴)

تست ۲۱: اگر تابع  $f(x) = 3 \times 2^{ax+b}$  محور  $y$ ها را در ۲۴ قطع کند و  $f(-1) = \frac{3}{2}$  باشد، آن‌گاه جواب معادله‌ی  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}$  کدام است؟

- $\frac{7}{8}$  (۱)   $\frac{5}{8}$  (۲)   $-\frac{5}{8}$  (۳)   $-\frac{7}{8}$  (۴)

تست ۲۲: اگر  $10 \times 3^x + 9 = 3^{2x}$ ، آنگاه مقدار  $x^2 - 1$  کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۸۰ (۵) ۴ (۶) صفر (۷)

تست ۲۳: اگر  $\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8$  و  $\frac{27^{x+y}}{3^{5y}} = 243$ ، مقدار  $xy$  کدام است؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶ (۶) ۱۲ (۷) ۴ (۸)

یک کاربرد از توابع نمایی: توابعی به صورت  $f(x) = ka^x$ ، ( $a > 0$ ،  $a \neq 1$ ) مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و ... ظاهر می‌شود.



**نکته:** اشریشیاکلی (*E. coli*) نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. سرعت تکثیر این باکتری از رابطه  $f(x) = 100 \times 2^{2t}$  ( $0 \leq t \leq 16$ ) بدست می‌آید که در آن  $t$  بر حسب ساعت است.

مثال ۳: نسبت تعداد باکتری موجود در یک توده‌ی اشریشیاکلی حاصل از ۱۰۰ باکتری اولیه را، بعد از نیم ساعت و بعد از یک و نیم ساعت را با

یکدیگر مقایسه کنید. 

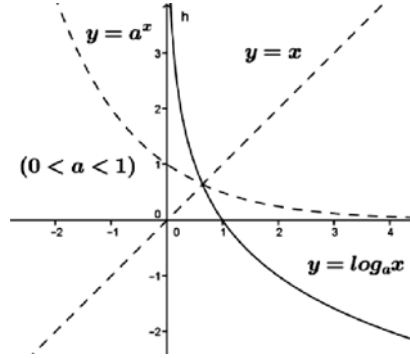
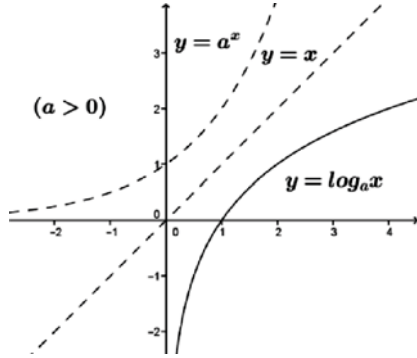
تست ۲۴: باکتری E.Coli با رابطه‌ی  $P(t) = 100 \times 2^{2t}$  در دستگاه گوارش زندگی و رشد می‌کند ( $t$  بر حسب ساعت و  $0 \leq t \leq 16$  است). چند ساعت پس از شروع رشد، تعداد این باکتری ۱۶ برابر می‌شود؟

- ۱ (۱)  ۲ (۲) ۳ (۳) ۰/۵ (۴) ۳ (۵)



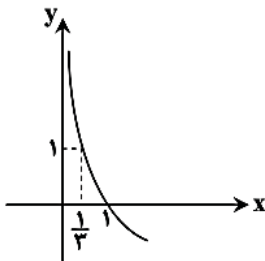
تابع لگاریتم: وارون تابع نمایی با ضابطه  $f(x) = a^x$  را به صورت  $f^{-1}(x) = \log_a x$  نشان می‌دهیم و آنرا لگاریتم  $x$  در پایه  $a$  می‌نامیم.

نکته: در حالت کلی داریم:



یعنی تابع  $f(x) = \log_a x$  در صورتی که  $a > 1$  صعودی و در حالت  $0 < a < 1$  نزولی است.

نکته: واضح است که توابع لگاریتمی نیز مانند توابع نمایی یک به یک هستند.



ضابطه تابع مقابل کدام می‌تواند باشد؟

(۱)  $y = (\frac{1}{3})^x$

(۲)  $y = 3^x$

(۳)  $y = \log_3 x$

(۴)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

نمودار توابع  $y = 2^{-x}$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  نسبت به ..... قرینه‌اند.

(۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

(۳) نیمساز ربع اول و سوم

(۲) محور عرض‌ها

(۱) محور طول‌ها





تبدیل عبارات نمایی به لگاریتمی و برعکس:

با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توانیم عبارات نمایی و لگاریتمی را به یکدیگر تبدیل کنیم:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

نکته: برای محاسبه مقادیر توابع لگاریتمی از رابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم.

مثال: مقدار عددی عبارت‌های  $\log_{10} 1000$ ،  $\log_5 25$ ،  $\log_2 \sqrt{2}$  را بیابید.

$$\log_5 25 = x \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2, \log_{10} 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow x = 3$$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

نکته: لگاریتم در پایه‌ی عدد ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم و در این حالت پایه را نمی‌نویسیم. یعنی:

$$\log_{10} x = \log x$$

مثال ۱: به صورت لگاریتمی یا نمایی تبدیل کنید.

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$6^2 = 36$$

$$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$\log_3 3^{-2} = -2$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{1/5} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

$$5^3 = 125$$

مثال ۲: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\log_2 4 =$$

$$\log_3 \sqrt{27} =$$

$$\log 10 =$$

$$\log_3 1 =$$

$$\log_3 243 =$$

$$\log_6 \frac{1}{6} =$$

$$\log_{1/5} 8 =$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} =$$

تست ۳: نمودار تابع  $y = \log_a(x-2)$  از نقطه  $(\frac{17}{4}, -2)$  عبور می‌کند. مقدار  $a$  کدام است؟

$\frac{3}{4}$  (۴)

۳ (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)



تست ۴: جواب کامل نامعادله‌ی  $2^x > \log_7 x$  کدام است؟

$x > 2$  (۴)

$x \in \mathbb{R}$  (۳)

$x > -1$  (۲)

$x > 0$  (۱)



تست ۵: حاصل  $[\log_{5/6} 60]$  چقدر است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۵ (۴)

-۵ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)



تست ۶: اگر  $f(x) = a - 2 \log_4(\frac{x}{2} - 5)$  و  $f^{-1}(-1) = 42$  باشد،  $f(10 + 2\sqrt{2})$  چقدر است؟

$\frac{9}{2}$  (۴)

$\frac{7}{2}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{5}{2}$  (۱)



تست ۷: تعداد رادیکال‌ها در معادله‌ی  $\log_7 \log_7 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}} = -8$  چقدر است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



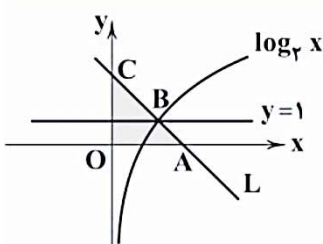
تست ۸: اگر مثلث رنگی، متساوی‌الساقین باشد، مساحت آن چقدر است؟

$\frac{4}{5}$  (۱)

$\frac{3}{5}$  (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)





نکته: واضح است که داریم:

$$f(x) = a^x \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (0, +\infty) \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x \Rightarrow \begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = \mathbb{R} \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

مثال: دامنه‌ی تابع  $y = \log_8(4 - x^2)$  را بیابید.

$$f(x) = \log_8(4 - x^2) \Rightarrow 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ \Rightarrow D_f = (-2, 2)$$

مثال ۳: دامنه‌ی توابع  $h(x) = \sqrt{1 - \log(8 - x)}$ ,  $g(x) = \log_x(1 - x)$ ,  $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 3x}$  را بیابید.



تست ۹: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$  به کدام صورت بازه‌ها است؟

(۱)  $[-2, 0) \cup (3, 5]$  (۲)  $[-2, 0] \cup (3, 5)$  (۳)  $[-2, 3)$  (۴)  $(0, 5]$  (ریاضی ۹۵)



تست ۱۰: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{\log \frac{x-3}{4}}$  کدام است؟

(۱)  $(3, +\infty)$  (۲)  $(3, +\infty)$  (۳)  $(3, 4]$  (۴)  $[3, 4]$



تست ۱۱: برد کدام یک از توابع زیر برابر  $\mathbb{R}$  است؟

(۱)  $f(x) = x^2$  (۲)  $g(x) = 2^{-x}$  (۳)  $h(x) = \log_{./\cdot} x$  (۴)  $k(x) = \sin x$



((اهام علی(ع): بدترین مردم کسی است که خود را بهتر از دیگران بداند.))



قوانین لگاریتم:

$$۱) \log_a x^n = n \log_a x \quad , ۲) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$۳) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad , ۴) \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$$

$$۵) \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x \quad , ۶) a^{\log_a x} = x \quad , ۷) \log_a a = 1$$

$$۸) \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , ۹) \log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y} \quad , ۱۰) \log \frac{1}{x} = -\log x$$

$$EX) \log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4 \times 1 = 4$$

$$\log \sqrt{0.01} = \frac{1}{2} \log 0.01 = \frac{1}{2} \log 10^{-2} = \frac{-2}{2} \log 10 = \frac{-2}{2}$$

$$\frac{1}{\log_7 \sqrt[3]{49}} = \log_{\sqrt[3]{49}} 7 = \log_{7^{\frac{2}{3}}} 7^1 = \frac{1}{\frac{2}{3}} \log_7 7 = \frac{3}{2}$$

نکته: داریم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \Rightarrow \begin{cases} \log 5 = 1 - \log 2 \\ \log 2 = 1 - \log 5 \end{cases}$$

**مثال ۴:** اگر  $\log 2 = 0.3$  و  $\log 3 = 0.5$  باشد، حاصل را بیابید.



$$\log \frac{\sqrt{15}}{9} =$$

$$, \log \sqrt{6} =$$

$$\log_5 \frac{\sqrt{18}}{4} =$$

$$, \log \frac{5\sqrt[3]{9}}{\sqrt{8}} =$$

$$\log \frac{0.25}{6} =$$

$$, \log 5\sqrt{2700} =$$

تست ۱۲: اگر  $\log 5 = 3k$ ، آنگاه  $\log \sqrt[3]{1/6}$  کدام است؟

- (۱)  $1 - 4k$  (۲)  $2 - 5k$  (۳)  $1 - 2k$  (۴)  $1 - k$



تست ۱۳: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$ ، حاصل  $\log \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}}$  برحسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $1 - 3b - \frac{4a}{3}$  (۲)  $1 - 4b - \frac{3a}{2}$  (۳)  $1 - 2b - \frac{4a}{3}$  (۴)  $1 - 4a - \frac{3b}{2}$



تست ۱۴: اگر  $x = \sqrt{85}$  باشد، مقدار  $A = \left[ \log_{\frac{1}{7}} x \right]$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



تست ۱۵: اگر  $2 = (x-1)^{\sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{x-1}$  کدام است؟ ( $x > 1$ )

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{12}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



تست ۱۶: کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

- (۱)  $2 < \log_2 7 < 3$  (۲)  $-1 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$   
 (۳)  $2 < \log_{\sqrt{2}} 2/5 < 3$  (۴)  $-3 < \log_{0.5} 2 < -2$



تست ۱۷: اگر  $\log 20 = a$  و  $\log 30 = b$ ، مقدار  $\log 15$  برحسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $2a - b + 2$  (۲)  $a + b + 1$  (۳)  $2a - b - 1$  (۴)  $b - a + 1$



((اشاره علی(ع): صبر، کلید رسیدن است و کامیابی سرانجام کسی است که شکیبایی می‌ورزد.))

تست ۱۸: عدد  $\log_{5/8} 1/5$  در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) (۰, ۱) (۲) (۱, ۲) (۳) (-۱, ۰) (۴) (-۲, -۱)



تست ۱۹: حاصل عبارت  $\sqrt{2^3 + \log_2 6}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{3}$  (۳) ۶ (۴)  $4\sqrt{3}$



تست ۲۰: اگر  $\log_2 a = \log_3^2$  باشد، آن‌گاه حاصل  $\log_3^{18}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{a}{2-a}$  (۲)  $\frac{a}{1-a}$  (۳)  $\frac{1-a}{2-a}$  (۴)  $\frac{2-a}{1-a}$



تست ۲۱: اگر ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 5x - 2 = 0$  برابر  $1 + \log_p A$  و  $2 + \log_p B$  باشد، آن‌گاه مجموع ریشه‌های معادله‌ی

$$x^2 - (\log_{\sqrt{p}}(AB + 12))x = 1$$

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) -۸



تست ۲۲: اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $3^{2x} - 13 \times 3^x + 36 = 0$  برابر  $\log_p A$  باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۲ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶



تست ۲۳: حاصل عبارت  $4\sqrt{2} + \log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{16} + \log_p 4 = A$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۴



تست ۲۴: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$ ، حاصل  $\log_{27} \sqrt{40}$  بر حسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

(۴)  $\frac{2a+1}{3b}$

(۳)  $\frac{2a+1}{6b}$

(۲)  $\frac{a+1}{3b}$

(۱)  $\frac{a+1}{6b}$



تست ۲۵: مقدار عددی  $A = (3^{\log_5 7})^{\log_3 5}$  کدام است؟

(۴) ۳۵

(۳) ۲۱

(۲) ۱۵

(۱) ۷



تست ۲۶: اگر  $a, b$  و  $m$  اعدادی مثبت و مخالف یک باشند، ساده‌شده عبارت  $A = \frac{\log_a m \times \log_b m}{\log_a m + \log_b m}$  کدام است؟

(۴)  $\log_m(a+b)$

(۳)  $\log(a+b) m$

(۲)  $\log_m ab$

(۱)  $\log_{ab} m$



تست ۲۷: اگر  $a = \log_{48} 6$ ، حاصل  $\log_{48} 4$  بر حسب  $a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{2(1+a)}{3}$

(۳)  $\frac{2(1-a)}{3}$

(۲)  $\frac{2a+1}{3}$

(۱)  $\frac{1-2a}{3}$



نکته: داریم:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$\Rightarrow \log_{a_1} a_1 \times \log_{a_2} a_2 \times \log_{a_3} a_3 \times \dots \times \log_{a_n} a_{n-1} = \log_{a_n} a_1$$



تست ۲۸: اگر  $A = \log \frac{4}{5} + \log \frac{5}{6} + \log \frac{6}{7} + \dots + \log \frac{399}{400}$  و  $B = (\log_{15} 16)(\log_{14} 15) \dots (\log_2 3)$ ، حاصل  $\frac{A}{B}$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{1}{8}$

(۳)  $-\frac{1}{4}$

(۲) -۱

(۱)  $-\frac{1}{2}$





معادلات لگاریتمی:

چون تابع لگاریتم یک تابع یک به یک است، پس داریم:  $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

EX)  $\log(x-1) + \log(x+1) = \log 8$

$$\Rightarrow \log(x-1)(x+1) = \log 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ok} \\ x = -3 \times \end{cases}$$

**مثال ۵:** معادلات زیر را حل کنید.



$$\log_8 x = 3$$

$$\log_7(2x+1) = 3$$

$$\log_7(x+1) + \log_7(x+4) = 2$$

$$\log_7 243 = 2x+1$$

$$\log_7(x-1) = 4$$

$$\log(2x) - \log(x-3) = 1$$

$$2 \log_7(x-1) = 3$$

$$3 \log_7 x = -\log_7 27$$

$$\log(x+1) - \log(x-3) = 3$$



سؤال ۲۹: از معادله لگاریتمی  $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$  مقدار لگاریتم  $(2x - 1)$  در پایه ۸، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$       (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{2}{3}$

(تجربی ۹۵)



سؤال ۳۰: از دو معادله‌ی  $\log(y + 2) = 1$  و  $\log(y - x) + \log(4x + y) = 2$  مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

(خارج ۸۷)



سؤال ۳۱: از معادله لگاریتمی  $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$  مقدار لگاریتم  $\sqrt{x + 1}$  در پایه ۴، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴) ۱

(خارج تجربی ۹۵)



سؤال ۳۲: از تساوی  $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۴، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲

(خارج تجربی ۹۳)



سؤال ۳۳: از تساوی  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۲، کدام است؟

- (۱) -۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲

(تجربی ۹۳)



((اشاره علی(ع): هر کس به خدا توکل کند، دشواری‌ها برای او آسان می‌شود و اسباب برایش فراهم می‌گردد.))

تست ۳۴: - مجموع ریشه‌های معادله  $\log_3 81 = \log_3 x + 3 \log_x 2$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴ (۴)

تست ۳۵: - مجموع ریشه‌های معادله  $(4^x - 5^{\log_5 3})(4^x - 3^{\log_3 5}) = 0$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\log_2 10$  (۲)  $\log_2 5\sqrt{3}$  (۳)  $\log_2 5\sqrt{2}$  (۴)  $\log_2 3\sqrt{2}$

تست ۳۶: - نمودار توابع  $f(x) = \log_3(x+1)$  و  $g(x) = x-1$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۳۷: - ریشه معادله  $\log_{\frac{1}{5}} \log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -1$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $1/92$  (۲)  $1/94$  (۳)  $1/96$  (۴)  $1/98$

تست ۳۸: - اگر  $\log_3(x+1) + \log_3 x = 2$  باشد، حاصل  $\log_{(x^2+x-7)}(x^2+x+7)$  چقدر است؟

- ۱ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۱

تست ۳۹: - اگر  $\log_2(x+5) + \log_2(x-1) - \log_2(x+2) = 3$ ، آنگاه کدام گزینه از همه بزرگ‌تر است؟

- ۱ (۱)  $x^{-2}$  (۲)  $\frac{1}{x^3}$  (۳)  $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$  (۴)  $(\frac{1}{x})^{\frac{5}{2}}$

تست ۴۰: حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $(\log x)^2 + \log x^2 = 7$  کدام است؟

۰/۰۱ (۴)

۰/۱ (۳)

۱۰ (۲)

۱ (۱)



تست ۴۱: اگر  $\log_3(2x) - \log_3(x-3) = 1$ ، آنگاه حاصل  $\sqrt[5]{\log_5 x} - \log_9 \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

$\frac{26}{3}$  (۴)

$\frac{5}{3}$  (۳)

$\frac{8}{3}$  (۲)

$\frac{25}{3}$  (۱)



رسم توابع لگاریتمی:



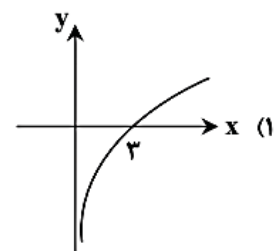
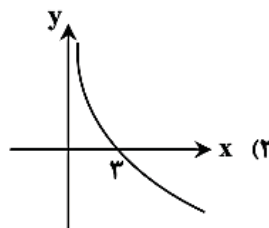
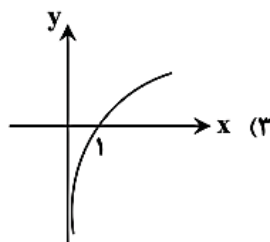
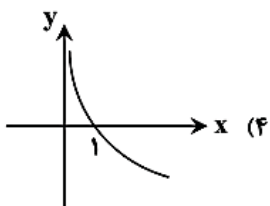
برای رسم توابع لگاریتمی، ابتدا باید حداقل سه نقطه از تابع را مشخص کنیم. این سه نقطه را می‌توانیم برای تابع  $f(x) = \log_a x$  به صورت زیر تعیین کنیم:

$x$	$\frac{1}{a}$	۱	$a$
$f(x) = \log_a x$	-۱	۰	۱

تست ۴۲: توابع  $y = 2 \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)$  و  $y = -\log_3 x$ ،  $y = 1 + \log_2 x$  را رسم کنید.



تست ۴۳: نمودار تابع  $f(x) = 1 - \log_3 \frac{9}{x}$  به کدام صورت است؟





نکته:

برای رسم توابع لگاریتمی با ضابطه  $f(x) = \log_a(x - b)$  می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

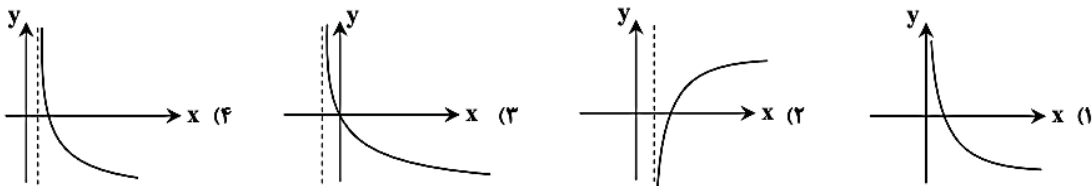
$x$	$\frac{1}{a} + b$	$1 + b$	$a + b$
$f(x) = \log_a(x - b)$	$-1$	$\cdot$	$1$

و یا ابتدا تابع  $f(x) = \log_a x$  را رسم کرده و سپس نمودار تابع را به اندازه‌ی  $b$  واحد به سمت چپ یا راست منتقل کنیم.

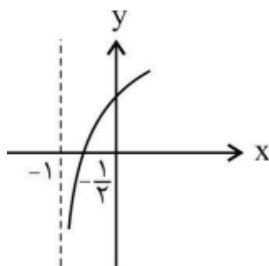
مثال ۷: توابع  $y = \log_2(x - 2)$ ,  $y = \log_3(x + 1)$ , و  $y = 1 + \log_3\left(\frac{1}{x - 2}\right)$  را رسم کنید.



سؤال ۴۳: نمودار تابع  $f(x) = -\log_2(x - 1)$  به کدام شکل است؟



سؤال ۴۴: نمودار تابع  $f(x) = a + \log_2(x + b)$  به صورت زیر است.  $a + b$  کدام است؟

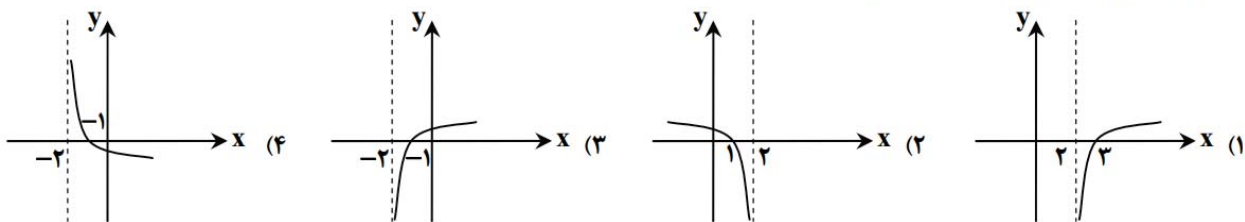


(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۳/۲ (۴) ۱/۲



سؤال ۴۵: نمودار تابع  $y = -\log_2(x + 2)$  کدام است؟



((امام علی(ع): آن‌که در گناهان، بسیار اندیشه کند، (این کار) او را به گناه می‌کشاند.))

با توجه به شکل زیر، مقدار  $d$  چقدر است؟

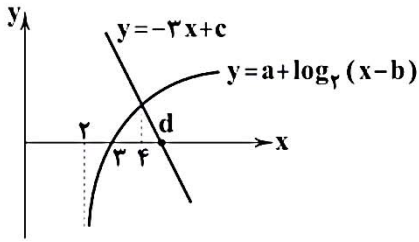
تستی:

(۱)  $\frac{14}{3}$

(۲)  $\frac{13}{3}$

(۳)  $\frac{15}{3}$

(۴)  $\frac{16}{3}$



کاربردی از توابع لگاریتمی:



برای محاسبه قدرت یک زمین لرزه بر حسب ریشتر از رابطه  $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{11/8}}$  استفاده می‌کنیم که در آن  $E$  نشان دهنده میزان انرژی حاصل از زمین لرزه بر حسب واحد ارگ است.

نکته: داریم:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{11/8}} \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log \frac{E}{10^{11/8}} \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log E - \log 10^{11/8}$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 M$$

یادآوری: توابعی به صورت  $f(x) = ka^x$ , ( $a > 0, a \neq 1$ ) مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و ... ظاهر می‌شود.

مثال ۸: اگر قدرت یک زلزله ۶ ریشتر باشد، میزان انرژی آزاد شده از آن را بیابید.

مثال ۸:



مثال ۹: انرژی آزاد شده توسط یک زلزله ۷ ریشتری، چند برابر یک زلزله ۵ ریشتری است.

مثال ۹:



مثال ۱۰: انرژی آزاد شده توسط یک زلزله ۴ ریشتری ۱۰ برابر پس لرزه آن بوده است. قدرت پس لرزه را بیابید.

مثال ۱۰:



تست ۴۷: اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن برابر  $E$  در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5M$  به دست می‌آید. اگر یک زلزله ۸ ریشتری رخ دهد، مقدار انرژی آزادشده در آن چند ارگ است؟

- (۱)  $10^{23}/8$  (۲)  $10^{24}/8$  (۳)  $10^{25}/8$  (۴)  $10^{22}/8$

تست ۴۸: انرژی آزاد شده (به واحد Erg) از زلزله‌ای به بزرگی  $M$  ریشتر از رابطه  $\log E = 12 + 1/5M$  به دست می‌آید. اگر انرژی آزاد شده  $10^{24} \times 10^{18}$  Erg باشد، بزرگی این زلزله چند ریشتر بوده است؟ ( $\log 2 = 0/3$ )

- (۱)  $5/6$  (۲)  $5$  (۳)  $6/6$  (۴)  $6$

تست ۴۹: اختلاف شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر برابر  $1/4$  است. انرژی زلزله قوی‌تر چند برابر دیگری است؟ ( $\log E = 11/8 + 1/5M, \log 5 = 0/7$ )

- (۱)  $5$  (۲)  $25$  (۳)  $125$  (۴)  $625$

تست ۵۰: یک زلزله‌ی ۵ ریشتری،  $10^k$  ارگ انرژی آزاد می‌کند.  $k$  چقدر است؟

- (۱)  $19/3$  (۲)  $19/7$  (۳)  $20$  (۴)  $20/3$

تست ۵۱: نوعی باکتری به صورت نمایی تکثیر می‌شود. این باکتری در مدت نیم‌ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اگر این باکتری با تعداد ۲۰۰ عدد شروع به تکثیر کند، پس از چند ساعت تعداد باکتری‌ها به ۱۲۰۰ عدد می‌رسد؟

- (۱)  $2(1 + \log_3 2)$  (۲)  $\frac{1}{2}(1 + \log_3 2)$  (۳)  $2(1 + \log_2 3)$  (۴)  $\frac{1}{2}(1 + \log_2 3)$

تست ۵۲: اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله ( $E$ ) در واحد ارگ از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5M$  به دست می‌آید. در منطقه‌ای دو زلزله می‌آید. انرژی آزادشده در زلزله دوم، ۱۰ برابر انرژی آزادشده در زلزله اول است. بزرگی زلزله دوم چند ریشتر بیشتر از بزرگی زلزله اول است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $1/5$



**همسایگی يك نقطه و حد تابع :**

هر بازه به صورت  $(a - \alpha, a + \alpha)$  را که در آن  $a$  يك عدد حقیقی و  $\alpha$  يك حقیقی مثبت است را يك همسایگی متقارن برای  $x = a$  می‌نامیم. همچنین بازه  $(a - \alpha, a + \alpha) - \{a\}$  يك همسایگی متقارن محذوف برای  $x = a$  نامیده می‌شود.



**نکته:** به بازه‌ی نظیر  $(a, a + \alpha)$  يك همسایگی راست و به بازه‌ی نظیر  $(a - \alpha, a)$  يك همسایگی چپ نقطه  $a$  می‌گوییم.

**تعریف:** اگر تابع  $f$  با نزدیک شدن  $x$  به نقطه  $x = a$  از سمت مقدار های کمتر از آن و نزدیک به آن، به عددی مانند  $l$  نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ تابع در نقطه  $x = a$  برابر  $l$  می‌باشد. و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

**تعریف:** اگر تابع  $f$  با نزدیک شدن  $x$  به نقطه  $x = a$  از سمت مقدار های بیشتر از آن و نزدیک به آن، به عددی مانند  $l$  نزدیک شود، می‌گوییم حد راست تابع در نقطه  $x = a$  برابر  $l$  می‌باشد. و می‌نویسیم:

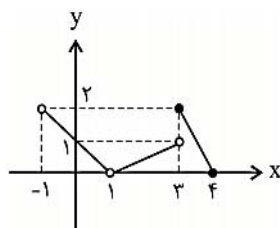
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

**تعریف:** تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  حد دارد هرگاه حد راست و چپ تابع در نقطه مذکور موجود و برابر یکدیگر باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**مثال:** حد تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 3 & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  را بیابید.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$



با توجه به شکل زیر کدام گزینه صحیح است؟

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$  (۳)

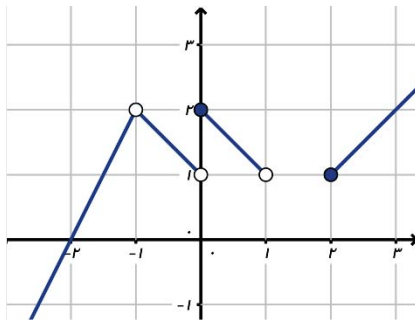
$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$  (۱)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  (۴)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  وجود ندارد.

«(تعداد انسان‌های موفق به یک نتیجه رسیده‌اند که باید قدر ارزش‌های خود را بدانند.))»

با توجه به نمودار، موارد خواسته شده را بیابید.



$$f(-1) = \quad , f(0) = \quad , f(1) = \quad , f(2) = \quad$$

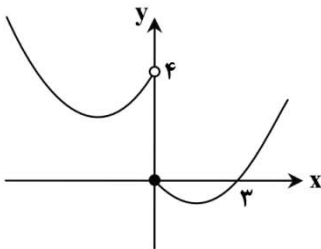
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \quad$$

شکل مقابل، نمودار تابع  $y = f(x)$  است. کدام گزینه نادرست است؟



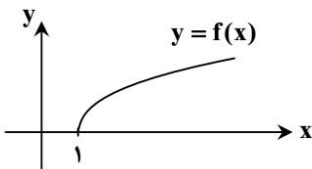
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4 \quad (4)$$

شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  است. کدام یک از موارد زیر درست است؟



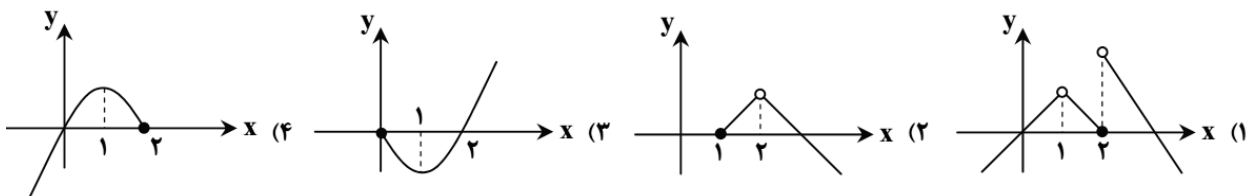
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \quad (2)$$

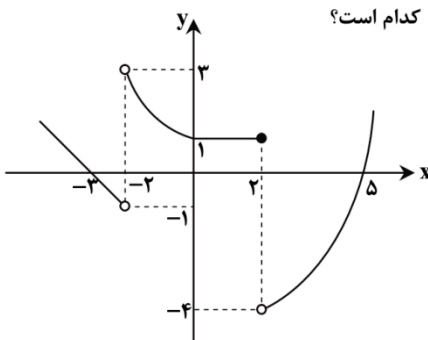
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad (4)$$

تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $x = 1$  حد ندارد؛ ولی در نقطه  $x = 2$  حد دارد. کدام شکل می‌تواند نمودار این تابع باشد؟



نمودار تابع  $f(x)$  به صورت روبه‌رو است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$  کدام است؟



( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$-5 \quad (1)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$-4 \quad (4)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا



تست ۶: اگر در تابع  $f$  داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ ، کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۲)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$

(۱)  $f(2) = 3$

(۴)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(۳)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

تست ۷: در تابع با ضابطه  $f(x) = (x+a)[x]$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$  باشد، عدد حقیقی  $a$  کدام است؟ (تجربی ۸۷)

(۴) صفر

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

تست ۸: اگر تابع  $y = a[x+2] + x[x] - 2$  در  $x=2$  حد داشته باشد، حد این تابع در  $x=\sqrt{2}$  چقدر است؟

(۴)  $2\sqrt{2} + 8$

(۳)  $\sqrt{2} - 8$

(۲)  $2\sqrt{2} - 8$

(۱)  $\sqrt{2} + 8$

تست ۹: اگر  $f(x)$  یک تابع خطی باشد،  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 4$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 5} (2f(x) + 1)$  کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۹

(۲) ۷

(۱) ۱۱

تست ۱۰: اگر  $f(x) = \frac{x^2 - a}{x + 2}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{5}{4}$

(۳)  $\frac{4}{5}$

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۱)  $\frac{4}{3}$

تست ۱۱: اگر  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 6x & x < -2 \\ b+1 & x = -2 \\ 2x & x > -2 \end{cases}$  در  $x = -2$  حد داشته باشد،  $a$  و  $b$  کدام است؟

(۴)  $\begin{cases} a = \frac{2}{4} \\ b = -7 \end{cases}$

(۳)  $\begin{cases} a = \frac{4}{2} \\ b = -7 \end{cases}$

(۲)  $\begin{cases} a = \frac{4}{2} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$

(۱)  $\begin{cases} a = \frac{2}{4} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$



نکته: اگر تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \neq a \\ h(x) & , x = a \end{cases}$  تعریف شود، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

نکته: اگر تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x > a \\ h(x) & , x < a \end{cases}$  تعریف شود، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$$

**تست ۱۲:** اگر  $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$  کدام است؟

- ۱) ۵  ۲) ۷  ۳) ۳  ۴) ۹

**تست ۱۳:** اگر  $f(x) = \begin{cases} ax-1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱) -۴  ۲) -۳  ۳) -۲  ۴) -۱

**تست ۱۴:** در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & ; x \leq 0 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$  کدام است؟

- ۱) -۱  ۲) ۱  ۳) صفر  ۴) موجود نیست.

**تست ۱۵:** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} (|x|-a)^2 - 3 & x < 0 \\ x + 2a & x > 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  حد داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر  $a$  کدام است؟

- ۱)  $\{-1\}$   ۲)  $\{-1, 3\}$   ۳)  $\{1, -3\}$   ۴)  $\emptyset$

(( اهامر علی(ع): بدترین مردم کسی است که خود را بهتر از دیگران بداند. ))

**تست ۱۶:** اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 2 \\ a + x & x > 2 \end{cases}$  در  $x=2$  حد داشته باشد، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{a} + \frac{4}{x})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $-\frac{5}{2}$  (۳) ۲ (۴) -۲

**تست ۱۷:** اگر  $f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} -1 & , x > 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$  کدامیک در  $x=0$  حد ندارد؟

(۱)  $f+g$  (۲)  $f-g$  (۳)  $fg$  (۴)  $\frac{f}{g}$

**شماره ۲:** مقدار  $a$  را چنان بیابید که تابع در نقطه مورد نظر حد داشته باشد.

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4ax + 2 & x \geq 1 \\ x - 3a & x < 1 \end{cases}, x=1$  ,  $f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x \leq 2 \\ a \sin(x-2) + bx & x > 2 \end{cases}, x=2$

**نکته:** تابع  $f(x) = \sqrt{x-a}$  در  $x=a$  دارای حد نمی‌باشد. زیرا در این نقطه حد چپ ندارد.

**تست ۱۸:** تابع  $f(x) = \sqrt{x-3} + 2b$  در  $x=a$  حد ندارد، ولی  $f(a) = 2-b$ . مقدار  $2a + 3b$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) ۴

**تست ۱۹:** تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  با دامنه‌ی  $D_f = [0, +\infty)$  مفروض است. این تابع در کدام نقطه از دامنه‌ی خود حد ندارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**تست ۲۰:** کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

(۱)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x-6} = 0$  (۲)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$  (۳)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} ([x] + 1) = 3$  (۴)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{5-x} = 0$



**قضایای حد توابع:**

اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  حد داشته باشند آن‌گاه توابع:  $f \pm g$  و  $f \times g$  در نقطه  $x = a$  دارای حد می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{، داریم:}$$

نکته: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L} (L \neq 0) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad (L > 0 \quad \forall n = 2k+1)$$

نکته: اگر  $f$  یک تابع چندجمله‌ای باشد داریم:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**تست ۲۲:** اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{g(x)}$  کدام است؟

- ۱) -۲  ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

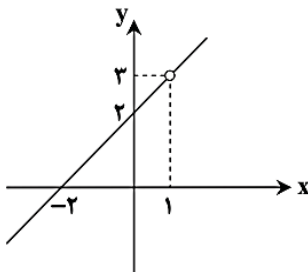
**تست ۲۳:** اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x = 1$  حد داشته باشد و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1$ ، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟

- ۱) -۳  ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

**تست ۲۴:** اگر  $f(x)$  در  $x = 2$  حد داشته باشد و داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+f(x)+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+x} = 2$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+f(x)}{1+f(x)}$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{6}{5}$   ۲)  $\frac{6}{5}$  ۳)  $\frac{5}{6}$  ۴)  $-\frac{5}{6}$

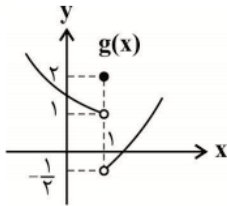
(( اماه علی(ع): شایسته است که دانش مرد از سخنش بیشتر، و خردش غالب بر زبانش باشد. ))



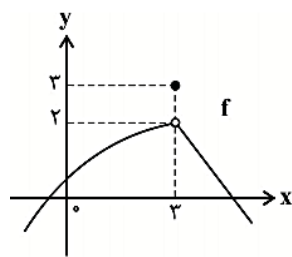
سؤال ۲۴: شکل مقابل، نمودار تابع خطی  $y = f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+5)f(x)}{x^2 - 4}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{6}{5}$   
 (۲)  $\frac{5}{2}$   
 (۳)  $-\frac{3}{4}$   
 (۴) صفر

سؤال ۲۵: هرگاه  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2f(x) + 1) = 5$  باشد، با توجه به نمودار تابع  $g$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(f^3 - 2g)(x)}}{(f \cdot g)(x) + 3}$  کدام است؟



- (۱)  $0/5$   
 (۲)  $1/5$   
 (۳)  $-2$   
 (۴)  $2$



سؤال ۲۶: با توجه به نمودار تابع  $f$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^3(x) - 8}{|f(x) - 2|}$  کدام است؟

- (۱)  $12$   
 (۲)  $-4$   
 (۳)  $-12$   
 (۴)  $4$

سؤال ۲۷: اگر  $f(x) = x + 1 + \sqrt{x + 1}$  و  $g(x) = 2x - \sqrt{x + 1}$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow -1} (f + g)(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} (f \times g)(x)$  به ترتیب کدام است؟

- (۱)  $24, -2$   
 (۲) ندارد،  $24$   
 (۳)  $16, -2$   
 (۴) ندارد، ندارد

سؤال ۲۸: توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در نقطه  $x = 1$  حد دارند. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 3g(x)) = 7$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} ((3x - 1)g(x))$  کدام است؟

- (۱)  $-2$   
 (۲)  $2$   
 (۳)  $-\frac{4}{3}$   
 (۴)  $\frac{4}{3}$



**نکته:**

تابع جزء صحیح  $f(x) = [x]$ ، در اعداد صحیح حد ندارد. زیرا برای این توابع، حدهای چپ و راست در این نقاط با یکدیگر برابر نیستند.

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left( \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a - 1 \right)$$

**نکته:**

تابع  $f(x) = (x - a)[x]$ ، در عدد صحیح  $x = a$  حد دارد. زیرا در این نقطه داریم:

$$\left( \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)[x] = 0 \cdot a = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} (x - a)[x] = 0 \cdot (a - 1) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (x - a)[x] = 0$$

**تست ۲۹:** اگر  $f(x) = [x] + 3m$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$  و  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$\frac{1}{3}$  (۴)

۳ (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)



**تست ۳۰:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[x] - \sin^2 x}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + x)}$  کدام است؟ ( [ ]، علامت جزء صحیح است.)

-۱ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**مثال ۳:** تابع  $f(x) = (x^2 - 5x + 6)[x]$  در چند عدد صحیح از بازه‌ی  $(-4, 4)$  ناپیوسته است؟



**تست ۳۱:** تابع  $f(x) = [x]$  را در نظر بگیرید. کدام یک از توابع زیر در  $x = 5$  حد دارد؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$y = f(x - 1)$  (۴)

$y = f(x) - 5$  (۳)

$y = (x - 5)f(x)$  (۲)

$y = xf(x)$  (۱)



**تست ۳۲:** کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$\lim_{x \rightarrow 2} [x] = 2$  (۴)

$\lim_{x \rightarrow 1/5} [x] = 1$  (۳)

$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{2x - 6} = 2$  (۲)

$\lim_{x \rightarrow 4} (-2) = -2$  (۱)



تست ۳۳: تابع  $f(x) = [x]$  در نقطه  $x = \sqrt{a}$  حد ندارد. مقدار  $a$  کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱۳ (۴)

۹ (۳)

۱۵ (۲)

۱۱ (۱)



تست ۳۴: حد عبارت  $\sin \frac{x}{2} \left[ \cos \frac{x}{2} \right] - \cos x [\sin 2x]$  وقتی  $x \rightarrow \pi$ ، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۴ (۴) حد ندارد.

۱ (۳)

۲ (۲) صفر

۱ (۱)

(ریاضی خارج ۹۵)



تست ۳۵: حد عبارت  $[\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x]$  وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ ، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۴ (۴) حد ندارد.

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(ریاضی ۹۵)



### نکته:

الف: به عدد • صفر مطلق و به نمادهای  $^+$ ،  $^-$ ، • صفرهای حدی می‌گوییم.

ب: در محاسبه حد، اگر حالت  $\frac{0}{0}$  اتفاق بیافتد (که عبارت معنی خاصی ندارد)، ابهام گفته می‌شود.

### محاسبه حد

برای محاسبه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، بعد از محاسبه  $f(a)$  دو حالت به وجود می‌آید که عبارتند از:

الف) ابهام وجود ندارد: در این حالت برای محاسبه حد تابع کافیهست  $f(a)$  را محاسبه کنیم.



مثال ۴: حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 3x + 1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x (\sin x + \cos x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-4x}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{[x^2] + \sin \frac{\pi}{2} x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{36}{1+4x} \right] =$$



تست ۳۶: اگر  $f(x) = \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 - 2x - 3}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ ، آنگاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟

(۴) وجود ندارد.

(۳) -۸

(۲) -۲

(۱)  $-\frac{5}{4}$



(ب) ابهام وجود دارد: باید رفع ابهام انجام شود. یعنی عامل  $(x - a)$  از صورت و مخرج عبارت حذف شود. در این حالت صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و بعد از ساده کردن عامل ابهام، حاصل حد را می‌یابیم. مثال: حاصل‌دهای زیر را بیابید.



$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{9}{3} = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{8x^3 + 1}{4x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)}{2x(2x+1)} = \frac{1+1+1}{-1} = -3$$

تست ۳۵: حاصل‌دهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]x^2 - 9}{2x - 6}$$

تست ۳۷: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin^2 x}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

تست ۳۸: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x} + \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{[x] - 1}$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۴) صفر

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۱)  $-\frac{1}{2}$



«(امام رضا(ع): علم گنجینه‌های کمال است و کلیدهای آن گنجینه‌ها، پرسش کردن است.)»

**تست ۳۹:** اگر تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  حدی مخالف صفر داشته باشد،  $f(1)$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-3x+a}, & x > 1 \\ a+b, & x = 1 \\ \frac{b(x-1)}{|x-1|}, & x < 1 \end{cases}$$

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------

**تست ۴۰:** حاصل  $A = \lim_{x \rightarrow \pi} \left( \frac{1 + \cos^3 x}{1 + \sin(\frac{\pi}{2} + x)} + \frac{|\cos x|}{\sin(x - \frac{3\pi}{2})} \right)$  کدام است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------

۴ وجود ندارد.

۳ صفر

**تست ۴۱:** حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sin(\frac{\pi}{2} + x)}{\sin^2(x + \pi)}$  کدام است؟

۴ وجود ندارد

۳ صفر

۲ (۲)

۱ (۱)



**نکته:**

چون  $f(x) = |u| = \begin{cases} u, & u > 0 \\ -u, & u \leq 0 \end{cases}$  پس  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a|}{x-a}$  وجود ندارد. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{x-a} = +1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x-a|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x-a)}{x-a} = -1$$

**نکته:** داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)|x-a|}{x-a} = 0$$

**تست ۴۲:** کدام یک از موارد زیر در مورد تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  درست است؟

۴  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

۳  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  وجود ندارد.

۲  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  وجود ندارد.

۱  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

تست ۴۳: تابع  $f(x) = \frac{(x+a)|x-4|}{x-4}$  در نقطه  $x=4$  حد دارد. مقدار  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

-۸ (۲)

-۴ (۱)



نکته: در برخی مسائل حدی از قوانین معمولی حدها نظیر مخرج مشترک و ... تست را حل می‌کنیم.



تست ۴۴: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$  کدام است؟

(تجربی ۸۵)

$\frac{1}{16}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{3}{16}$  (۲)

$\frac{3}{8}$  (۱)



تست ۴۵: حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3}{2x^2+5x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$  ، کدام است؟

(تجربی ۹۳)

$\frac{7}{12}$  (۴)

$\frac{5}{12}$  (۳)

$-\frac{5}{12}$  (۲)

$-\frac{7}{12}$  (۱)



تست ۴۶: حد عبارت  $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$  ، وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(تجربی خارج ۹۲)

$+\infty$  (۴)

۱ (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\infty$  (۱)





**پیوستگی توابع:**

می‌گوییم تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوسته است هرگاه:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**تعریف:** تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوستگی راست دارد، هرگاه حد  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

**تعریف:** تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوستگی چپ دارد، هرگاه حد  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

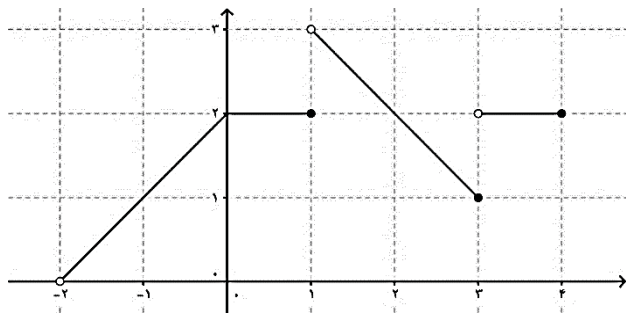
**نتیجه:** تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته است، اگر در این نقطه پیوستگی چپ و راست داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

**مثال:** مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ a \sin(x - 2) + bx & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a[2^-] - 1 = a - 1 \\ f(2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a(\cdot) + 2b = 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1 \\ 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$



**مثال:** پیوستگی تابع را در نقاط  $4, 3, 1, 0, -2$  بررسی کنید.



**مثال:** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x + 9} & , x \neq 3 \\ m & , x = 3 \end{cases}$  در نقطه  $x = 3$  پیوستگی چپ داشته باشد،  $m$  کدام است؟



-2 (4)

2 (3)

-1 (2)

1 (1)

مثال ۲: پیوستگی توابع زیر را در نقاط خواسته شده تعیین کنید.



$$1) f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x > 3 \\ 10 & x = 3, x = 3 \\ x^2 + x - 2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \sqrt{4-x}, x = 4, x = 0$$

$$5) f(x) = \sqrt[3]{x-5}, x = 5$$

$$6) f(x) = [x], \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$7) f(x) = [\sin x], x = 0, x = \pi$$

مثال ۲: تابع  $f(x) = \begin{cases} x+a & x > 2 \\ 3x & x \leq 2 \end{cases}$  در  $x = 2$  پیوسته است.  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال ۲: مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع  $f$  را در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x]-1 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ a \sin(x-2) + bx & x > 2 \end{cases}$$



مثال ۲: اگر تابع  $g(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x > 1 \\ x^2 + 2x & x = 1 \\ 2b + \cos(x-1) & x < 1 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = 1$  پیوسته باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟


-۲ (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$-\frac{2}{3}$  (۲)

$-\frac{4}{3}$  (۱)




تست ۴: 

ریاضیات پایه رشته‌ی علوم تجربی (دهم و یازدهم)

توابع زیر در نقطه  $x = -3$  پیوسته باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x > -3 \\ a & x = -3 \\ [x] + b & x < -3 \end{cases}$$

۴ (۴)                      ۵ (۳)                      ۲ (۲)                      ۶ (۱)

تست ۵: 


چه تعداد از توابع زیر در  $x = 1$  ناپیوسته‌اند؟

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \text{ (پ)} \\ 2-x & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \text{ (ب)}$$

$$f(x) = (x-2)^2 \text{ (الف)}$$

۴ (صفر)                      ۳ (۳)                      ۲ (۲)                      ۱ (۱)

تست ۶: 

توابع زیر در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد، حاصل  $m + n$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + mx & x > 2 \\ x + n & x = 2 \\ [-x] + 4x & x < 2 \end{cases}$$

۵ (۴)                      ۶ (۳)                      ۴ (۲)                      ۸ (۱)

**پیوستگی توابع روی بازه:**

تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  پیوسته است هرگاه  $f$ :

(۱) روی بازه  $(a, b)$  پیوسته باشد.

(۲) در  $x = a$  پیوستگی چپ داشته باشد. (۳) در  $x = b$  پیوستگی راست داشته باشد.

نکته: تابع  $f$  تابعی پیوسته است، هرگاه در همی نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

مثال: تابع  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ ، بر بازه  $[2, +\infty)$  پیوسته است. زیرا:

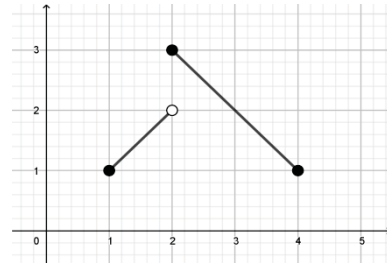
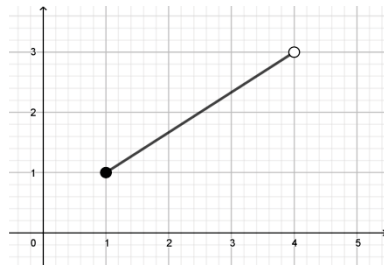
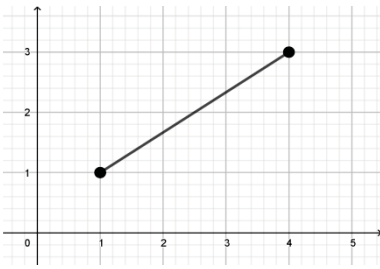
$$a \in (2, +\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$$

مثال: تابع  $f(x) = 2x + 1$ ، بر مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. زیرا:

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



مثال ۴: پیوستگی تابع  $f$  را روی بازه‌ی  $[1, 4]$  بررسی کنید.



مثال ۵: تابعی رسم کنید که:

(الف) در  $x = 1$  حد داشته باشد ولی پیوسته نباشد.

(ب) در  $x = 0$  فقط پیوسته چپ باشد.

۷- کدام تابع در  $\mathbb{R}$  پیوسته نیست؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۴)  $f(x) = (x^2 + 1)(1 - 5x^2)$

(۳)  $f(x) = 2^x$

(۲)  $f(x) = \sin x$

(۱)  $f(x) = [x]$

۸- تابع  $f(x) = \sin x$  در چند نقطه از بازه  $[0, 2\pi]$  ناپیوسته است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۹- تابع  $f(x) = x[x]$  در بازه  $(-1, k)$  پیوسته است، حداکثر مقدار  $k$  کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

(۴) ۱

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲) صفر

(۱)  $-\frac{1}{2}$

۱۰- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & ; x > 0 \\ a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & ; x \leq 0 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار  $a$  در  $x = 0$  پیوسته است؟ (تجربی ۸۶)

(۴) هر مقدار  $a$

(۳) هیچ مقدار  $a$

(۲) ۴

(۱) ۲

(( امام علی(ع): ایمان، صبوری در سختی و گرفتاری است و شکرگزاری در آسایش و نعمت. ))

تست ۱۱: تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 1 & ; x > 1 \\ x - 1 & ; x \leq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، در نقطه‌ی  $x = 1$  پیوسته است؟ (تجربی خارج ۸۶)

- (۱) فقط  $\frac{1}{2}$  (۲) فقط ۲ (۳) هیچ مقدار  $a$  (۴) هر مقدار  $a$

تست ۱۲: در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه  $x = 2$  پیوسته است؟ (تجربی ۸۷)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴) ۱

تست ۱۳: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & , x \geq -1 \\ x^2 + ax & , x < -1 \end{cases}$  در  $x = -1$  پیوسته است؟ (تجربی خارج ۸۷)

- (۱)  $\{1, \sqrt{2}\}$  (۲)  $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$  (۳)  $\phi$  (۴)  $\mathbb{R}$

تست ۱۴: به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  روی بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  پیوسته است؟ (تجربی خارج ۸۸)

- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) هیچ مقدار  $a$

تست ۱۵: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{4} < x \leq 2\pi \end{cases}$  با شرط  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  پیوسته است. (تجربی ۸۹)

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) ۵

«(هرجا موفقیت بزرگی ببینید، انبوهی از ناکامی‌ها را در مسیر آن مشاهده می‌کنید.))»

**تست ۱۶:** تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱) هر مقدار  $a$  (۲)  $-3$  (۳)  $3$  (۴) هیچ مقدار  $a$



**تست ۱۷:** تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$  در  $x = \frac{3\pi}{4}$  پیوسته است. مقدار  $a$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

- (۱)  $-1$  (۲) صفر (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $1$



**تست ۱۸:** به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & ; x > 2 \\ ax - 1 & ; x \leq 2 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (تجربی ۹۱)

- (۱) هر مقدار حقیقی  $a$  (۲) هیچ مقدار  $a$  (۳) فقط  $a = -2$  (۴) فقط  $a = 2$



**تست ۱۹:** تابع  $f(x) = 3x + [x]$  در کدام یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱)  $(-1, 1)$  (۲)  $[1, 2)$  (۳)  $(2, 3]$  (۴)  $[0, 1]$



**تست ۲۰:** اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & ; x < 2 \end{cases}$  با شرط  $f(2) = 5$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد،  $a$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

- (۱)  $-1$  (۲)  $1$  (۳)  $2$  (۴)  $3$





تست ۲۱:

تجربی (۹۲) به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = 2$  پیوسته است؟

(۴) هیچ مقدار  $a$

(۳) ۵

(۲) ۴/۵

(۱) ۴



تست ۲۲:

تجربی (۹۴) به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$  بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است؟

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $-\frac{1}{4}$

(۱)  $-\frac{1}{2}$



تست ۲۳:

ریاضی خارج (۹۵) به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & ; x \geq a \end{cases}$  همواره پیوسته است؟

(۴) هیچ مقدار  $a$

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



تست ۲۴:

چه تعداد از توابع زیر روی دامنه‌ی خود پیوسته‌اند؟

(ج)  $h(x) = \sqrt{x+2}$

(ب)  $g(x) = [x]$

(الف)  $f(x) = \log_p x$

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر



تست ۲۵:

اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & ; x \neq 2 \\ k & ; x = 2 \end{cases}$  در  $x = 2$  پیوسته باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

(۴) ۵

(۳) -۵

(۲) -۱

(۱) ۱





**تعریف آمار:** آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.  
**تعریف علم آمار:** علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.



**تعریف جامعه و جمعیت:** به مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که درباری یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شوند و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامیم.  
**نکته:** به تعداد اعضای جامعه، اندازه یا حجم جامعه می‌گوییم.  
**تعریف نمونه:** به بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه می‌گوییم و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه می‌گوییم.  
**نکته:** به تعداد اعضای نمونه، اندازه یا حجم نمونه می‌گوییم.

**تست:** با توجه به جمله "کیفیت مرکبات مازندران، درجه یک است" کدام گزینه درست است؟

۱. جامعه: مرکبات ایرانی ۲. نمونه: مردم مازندران ۳. متغیر: مرکبات مازندران ۴. مقدار متغیر: درجه یک
- جواب: در این بررسی، جامعه آماری مرکبات مازندران، نمونه بخشی از مرکبات مازندران است. همچنین متغیر مورد بررسی کیفیت مرکبات است و مقدار متغیر درجه یک است. پس گزینه ۴ صحیح است.

تست:

برای بررسی موضوع زیر ۱۰۰ دانش‌آموز سال دهم رشته انسانی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

«دانش‌آموزان سال دهم انسانی چرا در درس ریاضی ضعف دارند»



در این بررسی جامعه آماری و نمونه آماری به ترتیب کدام است؟

(۱) ۱۰۰ دانش‌آموز مورد مطالعه - حداقل ۲۰ دانش‌آموز از ۱۰۰ دانش‌آموز به‌عنوان نمونه باید انتخاب شوند.

(۲) کل دانش‌آموزان رشته انسانی در تمام پایه‌ها - ۱۰۰ دانش‌آموز مورد مطالعه

(۳) کل دانش‌آموزان پایه دهم در تمام رشته‌ها (ریاضی، تجربی، انسانی) - ۱۰۰ دانش‌آموز مورد مطالعه

(۴) کل دانش‌آموزان پایه دهم انسانی - ۱۰۰ دانش‌آموز مورد مطالعه

تست:

- می‌خواهیم در شهر A نسبت افرادی را که دارای گروه خونی O هستند، به افرادی که دارای گروه خونی دیگری هستند به‌دست آوریم. برای این منظور، کل افراد ساکن در محله B از این شهر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این تحقیق، جامعه آماری و نمونه به ترتیب کدام است؟



(۱) کل افرادی که در شهر A دارای گروه خونی O هستند - افراد محله B

(۲) کل افراد شهر A - افرادی در محله B که دارای گروه خونی O هستند.

(۳) کل افراد شهر A - کل افراد محله B

(۴) کل افرادی که در شهر A دارای گروه خونی O هستند - کل افرادی که در محله B دارای گروه خونی O هستند.

«(امام صادق (ع): از تنبلی و بی‌حوصلگی بپرهیز، زیرا که این دو خصلت تو را از بهره دنیا و آخرت باز می‌دارند.))»

کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

تست ۳



(۱) اندازه جامعه همواره از حجم جامعه کوچک‌تر است.

(۲) اندازه نمونه همواره از اندازه جامعه کم‌تر است.

(۳) مجموعه تمام افرادی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد را نمونه گویند.

(۴) اولین قدم در «علم آمار» جمع‌آوری داده‌ها است.

در رابطه با موضوع زمان تأخیر دانش‌آموزان یک دبیرستان، زمان تأخیر ۳۰ دانش‌آموز را بررسی کردند. در

تست ۴



این موضوع جامعه‌ی آماری، متغیر و نمونه به ترتیب کدام‌اند؟

(۱) کل دانش‌آموزان دبیرستان - فاصله‌ی منزل تا دبیرستان - دانش‌آموزان یک کلاس

(۲) ۳۰ دانش‌آموز موردنظر - زمان تأخیر دانش‌آموزان - کل دانش‌آموزان دبیرستان

(۳) دانش‌آموزان یک کلاس - فاصله‌ی منزل تا دبیرستان - کل دانش‌آموزان دبیرستان

(۴) کل دانش‌آموزان دبیرستان - زمان تأخیر دانش‌آموزان - ۳۰ دانش‌آموز موردنظر

در یک کارخانه‌ی تولیدی کل قطعات تولید شده در یک ماه ده‌هزار قطعه است. برای بررسی کیفیت قطعات

تست ۵



ماه اردیبهشت ۲۰۰ قطعه از قطعات تولیدی آن ماه به تصادف انتخاب کرده‌ایم. به ترتیب اندازه‌ی نمونه کدام

است و چند درصد از حجم جامعه در نمونه بررسی شده است؟

(۱) ۱۰۰۰۰ و ۲۰ (۲) ۲۰۰ و ۲۰ (۳) ۱۰۰۰۰ و ۲ (۴) ۲۰۰ و ۲

برای بررسی قد دانش‌آموزان یک کلاس، نیازمند انتخاب نمونه‌ی تصادفی از این کلاس هستیم. کدام یک از

تست ۶



گزینه‌های زیر نمونه‌ی مناسب برای جامعه‌ی آماری در نظر گرفته شده نیست؟

(۱) از هر نیمکت یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم. (۲) ۱۰ نفر اول کلاس از نظر معدل را انتخاب کنیم.

(۳) دانش‌آموزان ردیف آخر کلاس را انتخاب کنیم. (۴) ۱۵ نفر انتهایی لیست را انتخاب کنیم.

مراحل علم آمار به ترتیب به صورت زیر است. جاهای خالی کدام است؟

تست ۷



«جمع‌آوری - ..... - تحلیل و تفسیر - .....»

(۱) سازمان‌دهی و نمایش - نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی (۲) سازمان‌دهی - نمایش

(۳) قضاوت و پیش‌بینی - سازمان‌دهی و نمایش (۴) نمایش داده‌ها - پیش‌بینی



شاخص توده‌ی بدنی (شاخص سلامت یا نماتوپ): شاخصی است جهت تعیین نرمال بودن وزن افراد نسبت به قد آن‌ها.

نکته: برای تعیین کردن شاخص توده‌ی بدنی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شاخص توده‌ی بدنی} = \frac{\text{وزن (کیلوگرم)}}{\text{مجدور قد (متر)}}$$

نکته: در جدول زیر شاخص توده‌ی مطلوب آمده است:

گروه سنی	۱۹ - ۲۴	۲۵ - ۳۴	۳۵ - ۴۴	۴۵ - ۵۴	۵۵ - ۶۴	بیشتر از ۶۵
شاخص سلامت نرمال	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷

سؤال ۸: یک فرد ۴۸ ساله با قد ۲۰۰ سانتی متر، چه وزنی باید داشته باشد، تا شاخص سلامت او برابر مقدار مطلوب باشد؟

- ۱) ۸۰ kg      ۲) ۹۰ kg      ۳) ۱۰۰ kg      ۴) ۱۱۰ kg



سؤال ۹: اگر شاخص توده‌ی بدنی (نماتوپ) فردی برابر ۲۶ و وزن او تقریباً ۵۸/۵ کیلوگرم باشد، قد این شخص چند سانتی متر است؟

- ۱) ۱۴۵      ۲) ۱۵۰      ۳) ۱۶۵      ۴) ۱۷۰



سؤال ۱۰: فردی ۱۶ ساله، دارای نماتوپ ۲۲ و قد ۱۵۰ سانتی متر می‌باشد. وزن او چند کیلوگرم است؟

- ۱) ۴۹      ۲) ۴۹/۵      ۳) ۵۰      ۴) ۵۰/۵



سؤال ۱۱: شاخص توده‌ی بدنی شخصی برابر ۳۰ است. اگر قد این شخص ۱۵۰ سانتی متر باشد، وزن او چند کیلوگرم است؟

- ۱) ۶۵/۷      ۲) ۶۷/۵      ۳) ۷۶/۵      ۴) ۷۵/۶



تست ۱۲: اگر قد شخصی  $1/7$  متر و شاخص توده‌ی بدن او  $20$  باشد، نسبت وزن به قد این شخص چقدر است؟

۴۳ (۴)

۳۴ (۳)

$21/7$  (۲)

۲۰ (۱)



تست ۱۳: اگر شاخص توده‌ی بدن یک شخص با قد  $190$  سانتی‌متر برابر  $30$  باشد، وزنش چند کیلوگرم است؟

$110/3$  (۴)

$105/3$  (۳)

$107/5$  (۲)

$108/3$  (۱)



تست ۱۴: کدام یک از جملات زیر نادرست است؟

(۱) اولین قدم در استفاده از علم آمار، جمع‌آوری داده‌هاست.

(۲) جمع‌آوری افراد چاق یک شهر کار آسانی نیست و این اندازه‌گیری نیاز به نمونه‌گیری دارد.

(۳) در بررسی قد دانش‌آموزان یک مدرسه‌ی  $210$  نفره، حجم جامعه می‌تواند  $200$  باشد.

(۴) اگر شاخص توده‌ی بدنی شخصی برابر  $36$  باشد، چاقی درجه دو دارد.



تست ۱۵: علی و حسن، هم‌قد هستند. اگر وزن علی یک و نیم برابر وزن حسن باشد، آن‌گاه شاخص توده‌ی بدن علی چند برابر شاخص توده‌ی بدن

حسن است؟

$1/25$  (۴)

$\frac{4}{9}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$1/5$  (۱)





**تعریف متغیر:** هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود، متغیر نامیده می‌شود.

**مثال:** در بررسی وزن یا سن یا معدل دانش‌آموزان یک کلاس، ویژگی‌های وزن یا سن یا معدل متغیر مساله هستند.

### انواع متغیرها:

**۱. متغیرهای کمی:** متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند و مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است را متغیرهای کمی می‌نامیم. دو نوع متغیر کمی داریم:

**الف) متغیر کمی پیوسته:** متغیری که اگر دو مقدار و را بتواند اختیار کند، آنگاه هر مقداری بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. مانند وزن و سن افراد.

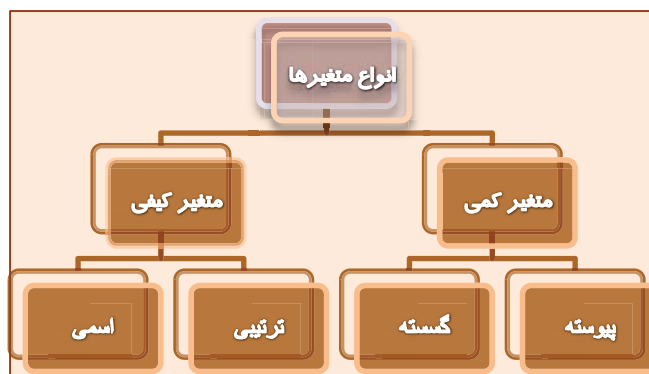
**ب) متغیر کمی گسسته:** متغیری که اگر دو مقدار و را بتواند اختیار کند، مقداری بین آنها وجود دارد که نمی‌تواند اختیار کند. مانند تعداد طبقات ساختمان یا تعداد بردهای یک تیم.

**مثال:** سرعت و میزان مصرف بنزین هر خودرو یک متغیر کمی پیوسته است. ولی تعداد سرنشینان مجاز یا تعداد دربه‌های آن، متغیر کمی گسسته است.

**۱) متغیر کیفی:** متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند و صرفاً برای دستبندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌رود و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرد را متغیرهای کیفی می‌نامیم. دو نوع متغیر کیفی داریم:

**الف) متغیر کیفی اسمی:** در این نوع متغیرها هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد، وجود ندارد. مانند گروه خونی افراد، جنسیت افراد و نوع آلاینده‌های هوا.

**ب) متغیر کیفی ترتیبی:** این متغیرها قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها، یا امکان‌پذیر نیست یا بی‌معناست. مانند مراتب تحصیلی، مدارج نظامی و وضعیت هوا.



**توجه:** هر یک از مقادیر «۵۰ سانتی‌متر، قرمز، درجه ۲، متوسط» به ترتیب از راست به چپ مربوط به چه نوع

متغیری می‌تواند باشد؟



۱) کمی گسسته، کیفی اسمی، کمی گسسته، کیفی ترتیبی

۲) کمی پیوسته، کیفی اسمی، کمی گسسته، کیفی اسمی

۳) کمی گسسته، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی، کیفی اسمی

۴) کمی پیوسته، کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی

دانلود از سایت ریاضی سرا

«هیچ وقت به گمان این‌که وقت دارید ننشینید، زیرا در عمل خواهید دید که همیشه وقت کم و کوتاه است.»

متغیرهای «شاخص توده بدن افراد»، «درجه‌های افراد در یک ارگان نظامی»، «جنسیت افراد» و «تعداد

تست ۱۷

فارغ‌التحصیلان سالانه یک دانشگاه» به ترتیب از راست به چپ چه نوع کمیت‌هایی هستند؟



- (۱) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کمی گسسته
- (۲) کمی گسسته - کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کمی پیوسته
- (۳) کمی پیوسته - کمی گسسته - کیفی ترتیبی - کمی گسسته
- (۴) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کمی پیوسته

نوع کدام متغیر با بقیه متفاوت است؟

تست ۱۸

- (۱) موضوع کتاب‌های درسی (ریاضی - فیزیک - ...)
- (۲) حروف الفبای فارسی (آ - ب - پ - ...)
- (۳) مراحل زندگی (نوزادی - کودکی - ...)
- (۴) روزهای هفته (شنبه - یکشنبه - ...)



چه تعداد از متغیرهای زیر کمی گسسته هستند؟

تست ۱۹

الف: گروه خونی افراد



ب: باقیمانده تقسیم اعداد طبیعی در تقسیم بر ۱۰۰

ج: سرعت اتومبیل

د: معدل دانش‌آموزان دبیرستان

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

کیفیت سؤالات آزمون‌های گاج (متوسط - خوب - عالی) چه نوع متغیری است؟

تست ۲۰

- (۱) کیفی - ترتیبی (۲) کیفی - اسمی (۳) کمی - پیوسته (۴) کمی - گسسته



کدام یک از گزینه‌های زیر، متغیر کمی است؟

تست ۲۱

- (۱) اقوام ایرانی (۲) انواع هواپیما  
(۳) رنگ چشم (۴) تعداد مسافران یک قطار



متغیری که اگر مقادیر a و b را اختیار کند اما الزاماً نتواند هر مقدار بین آن‌ها را اختیار کند، چه نوع متغیری است؟

تست ۲۲

- (۱) کمی - پیوسته (۲) کمی - گسسته (۳) کیفی - پیوسته (۴) کیفی - گسسته



نوع بارندگی، متغیر کیفی ..... و نژاد افراد یک جامعه، متغیر کیفی ..... است.

تست ۲۳

- (۱) ترتیبی - ترتیبی (۲) اسمی - ترتیبی (۳) ترتیبی - اسمی (۴) اسمی - اسمی



«تعداد گلبرگ‌های موجود در انواع گل» چه نوع متغیری است؟

تست ۲۴

- (۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی



کدام یک از متغیرهای زیر کیفی ترتیبی است؟

تست ۲۵

- (۱) تعداد تصادفات در شبانه‌روز (۲) میزان علاقه افراد به خورش قیمه (۳) میزان بارندگی برحسب میلی‌متر (۴) رنگ مورد علاقه افراد





### آمار توصیفی:

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می‌پردازد. آمار توصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

معیارهای گرایش به مرکز: اعدادی هستند که می‌توانیم آن‌ها را به عنوان نماینده و معیاری برای همه داده‌های موجود در مساله در نظر بگیریم. این شاخص‌ها اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند.

**الف) میانگین:** با نماد  $\bar{x}$  نشان داده می‌شود و از تقسیم مجموع همه داده‌ها بر تعداد آن‌ها به دست می‌آید:

**ب) میانه:** پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با  $M$  نمایش می‌دهیم.

**نکته:** اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه همان داده‌ی وسط است و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه از میانگین دو داده وسط به دست می‌آید.

**مثال ۱:** میانه و میانگین داده‌های ۵، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۸ را بیابید.



**مثال ۲:** در داده آماری مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها متوجه شدیم که به جای داده ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است. با رفع اشتباه میانگین واقعی، کدام است؟

(انسانی خارج ۹۴)

۱۱۱۹ (۱)      ۱۱۲۰ (۲)      ۱۱۲۱ (۳)      ۱۱۲۲ (۴)



**مثال ۳:** اگر میانگین اعداد  $x, y, z$  برابر ۴ و میانگین اعداد  $2x, 2y, 2z$  و ۸ برابر ۱۰ باشد، میانگین اعداد  $x-1, x-2, x$  چقدر است؟

۸ (۱)      ۱۶ (۲)      ۹ (۳)      ۱۰ (۴)



**مثال ۴:** نمرات دانش‌آموزی به صورت جدول زیر است (ضریب هر درس در زیر نمره آن نوشته شده است). معدل دانش‌آموز تقریباً برابر است با:

نمره	۱۷/۵	۱۸	۱۹	۲۰	۱۸
ضریب	۲	۴	۱	۳	۳

۱۹/۳۲ (۱)

۱۸/۴۶ (۲)

۱۷/۵ (۳)

۱۸/۹۵ (۴)





سؤال ۲۹: نمرات ۷ دانش‌آموز از دو کلاس A و B به صورت مقابل است. اختلاف میانگین‌های نمرات در دو کلاس کدام است؟

کلاس A : ۱۱, ۱۷, ۱۳, ۱۵, ۲۰, ۷, ۱۳

کلاس B : ۱۰, ۱۸, ۱۱, ۱۴, ۱۹, ۲۰, ۱۸

۵ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



سؤال ۳۰: در داده‌های مرتب‌شده ۱۹, ۱۷, ۱۰, a, ۷, ۳, ۲ اگر دامنه میان‌چارکی، دو برابر میانگین باشد، a کدام است؟

۴ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)



سؤال ۳۱: اگر میانگین داده‌های ۱, ۱۷, ۲۰, ۵, a, ۸, ۱۱ برابر ۸ باشد، a کدام عدد می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۹ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)



سؤال ۳۲: با توجه به جدول زیر اختلاف میانگین و میانگین داده‌ها کدام است؟

داده	۹	۱۱	۱۳	۱۵
فراوانی مطلق	۳	۱	۴	۴

۰/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

۱ (۴)

صفر (۳)



سؤال ۳۳: اگر مد منحصر به فرد داده‌های ۱۳, ۱۴, ۶, ۷, ۲, a - b, a - ۱۳, ۱۲ برابر ۱۲ باشد، میانگین داده‌های ۶, a, b, ۷, ۱۰ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)



سؤال ۳۴: در داده‌های ۷, ۸, ۱۱, ۱۰, ۶, ۹, ۸, ۵, ۷, ۴, ۳ کدام گزینه صحیح است؟

(۲) میانگین < مد < میانگین

(۱) میانگین = مد = میانگین

(۴) مد > میانگین > میانگین

(۳) میانگین > مد > میانگین



سؤال ۳۵: با توجه به جدول مقابل، اگر میانگین داده‌ها برابر ۱۰ باشد، میانگین کدام است؟

داده‌ها	۳	۱۰	k + ۱
فراوانی‌ها	۴	۲	۵

۱۵/۶ (۱)

۱۰ (۲)

۹/۶ (۳)

۱۴ (۴)



))) امام علی(ع): چقدر فاصله بین دو عمل دور است، عملی که لذتش می‌رود و کيفر آن می‌ماند و عملی که رنج آن می‌گذرد و پاداش آن ماندگار

است.)))

تست ۳۶:

میانگین، میانه و مد اعداد  $x, 60, 80, 110$  و  $70$  یک عدد یکسان است.  $x$  کدام است؟

- (۱)  $70$  (۲)  $60$  (۳)  $80$  (۴)  $90$



تست ۳۷:

اگر میانگین داده‌های  $9 + x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$  برابر با میانگین داده‌های  $9 - x_1 - x_2 - \dots - x_{10}$  باشد، در این صورت میانگین

داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{9}{2}$  (۲)  $9$

- (۳)  $45$  (۴) صفر

تست ۳۸:

میانگین داده‌های  $y, 12, 15, x, 43$  و  $22$  برابر با تفاضل میانه‌ی داده‌های  $17, 7, 9, 11, 21, 13, 31$  و  $25$  از  $2$  برابر

میانگین آن‌هاست. حاصل  $x + y$  کدام است؟

- (۱)  $22$  (۲)  $20$  (۳)  $19$  (۴)  $21$



تست ۳۹:

اگر میانگین داده‌های  $3 + x_4 + x_3 + 1 + x_2 + x_1$  برابر  $\bar{x}$  باشد، میانگین داده‌های  $3 + 2x_4 + 2x_3 + 1 + 2x_2 + 2x_1$  کدام

است؟



- (۱)  $2\bar{x}$  (۲)  $2\bar{x} - 1$  (۳)  $2\bar{x} - \frac{3}{2}$  (۴)  $2\bar{x} + \frac{1}{2}$

تست ۴۰:

اگر میانگین موزون داده‌های آماری جدول زیر برابر  $6$  باشد،  $a$  کدام است؟

داده‌ها	$4/5$	$5$	$8$
وزن (ضریب)	$2$	$a+1$	$a$

- (۱)  $3$  (۲)  $4$

- (۳)  $5$  (۴)  $6$



**نکته:** اگر در داده‌ها، داده‌هایی خیلی بزرگ یا کوچک موجود باشد، میانه نسبت به میانگین شاخص مرکزی بهتری است.



میانه و میانگین داده‌های  $1, 2, 3, 4, 100$  را بیابید. کدام شاخص معیار بهتری برای این داده‌ها است.

تست ۴۱:





**نکته:** اگر همگی داده‌ها در عددی ضرب شود و یا با عددی جمع شود، میانگین و میانه و میانگین هم در همان عدد ضرب و جمع می‌شود.

$$\left(x \xrightarrow[+b]{\times a} ax + b\right) \Rightarrow \left(\bar{X}' = a\bar{X} + b\right)$$

در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده زیر، اگر به تمام داده‌ها  $1/5$  واحد اضافه شود، میانگین داده‌های جدید، برابر  $10$  می‌شود.

تست ۴۱:

فراوانی دسته‌ی سوم کدام است؟

داده‌ها	۳	۷	۱۱	۱۵
فراوانی	۴	۵	a	۳



۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

در داده‌های مرتب شده  $a+4, a+3, a+2, a+1, a$  و اگر داده وسط را دو برابر کنیم، میانه و میانگین چگونه تغییر می‌کنند؟ ( $a > 0$ )

تست ۴۲:

می‌کنند؟ ( $a > 0$ )



(۱) میانه یک واحد افزایش و میانگین  $1/2$  واحد افزایش پیدا می‌کند. (۳) میانه یک واحد افزایش و میانگین  $1/2$  برابر می‌شود.

(۲) میانه یک واحد کاهش و میانگین  $1/2$  واحد افزایش پیدا می‌کند. (۴) میانه یک واحد کاهش و میانگین  $1/2$  برابر می‌شود.

اگر میانه داده‌های  $-2x_1 + 1, -2x_2 + 1, -2x_3 + 1, \dots, -2x_n + 1$  برابر  $18$  باشد، میانه داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کدام است؟

تست ۴۳:

$-8/5$  (۴)

$8/5$  (۳)

$-9/5$  (۲)

$9/5$  (۱)



**معیارهای پراکندگی:** این معیارها، نحوه و میزان پراکندگی داده‌ها را مشخص می‌کند.

**الف) دامنه تغییرات:** دامنه تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد  $R$  نمایش می‌دهیم.

**نکته:** از آنجایی که دامنه تغییرات تنها به بزرگترین و کوچکترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

«(برای رسیدن به هر موفقیت فردی، ابتدا باید تغییری در باورهای خود ایجاد کرد.)»

شماره ۳: دامنه‌ی تغییرات داده‌های زیر را بیابید.

۱) ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۲۰، ۵۰

۲) ۵، ۱۰، ۲۵، ۲۷، ۳۰، ۳۱



$$\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}}$$

شماره ۴۴: انحراف معیار داده‌های ۳، ۲، ۱، ۰، ۱، -۲، -۳ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (صفر)



شماره ۴۵: انحراف معیار داده‌های ۳ و ۴ و ۷ و ۹ و ۳ و ۱ و ۱ کدام است؟

$3\sqrt{\frac{7}{6}}$  (۴)

$3\sqrt{\frac{6}{7}}$  (۳)

$\sqrt{\frac{7}{6}}$  (۲)

$\sqrt{\frac{6}{7}}$  (۱)



سؤال ۴۶: در یک سری از داده‌های آماری، تفاضل داده‌ها از میانگین عبارتند از: ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۷- و ۶- انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

- (۱)  $16/5$  (۲)  $17/5$  (۳)  $\sqrt{16/5}$  (۴)  $\sqrt{17/5}$

سؤال ۴۷: در داده‌های مقابل، انحراف معیار داده‌های کمتر از میانگین چقدر است؟

داده	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی	۱	۲	۳	۲	۱

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

سؤال ۴۸: اگر میانگین داده‌های  $2a$ ،  $2a+1$  و  $a$  برابر ۱۲ باشد، واریانس آن‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{40}{3}$  (۲) ۱۲ (۳)  $\frac{38}{3}$  (۴)  $\frac{35}{3}$

سؤال ۴۹: واریانس  $n$  داده آماری برابر ۵ و میانگین آن‌ها برابر ۱۰ است. اگر سه داده ۱۲ و ۱۰ و ۸ به آن‌ها اضافه شود، واریانس برابر ۴ می‌شود.  $n$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴

سؤال ۵۰: در داده‌های آماری دسته‌بندی شده‌ی زیر مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۱	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۳	۶	۴	۲	۱

- (۱) ۴ (۲)  $4/5$  (۳) ۵ (۴)  $5/5$

سؤال ۵۱: واریانس ۵ داده‌ی آماری برابر صفر است. اگر یکی از داده‌ها برابر ۱۲ باشد و دو داده‌ی دیگر ۱۰ و ۱۴ را به این داده‌ها اضافه کنیم، واریانس ۷ داده‌ی جدید کدام است؟

- (۱)  $\frac{8}{7}$  (۲) صفر (۳)  $\frac{6}{7}$  (۴)  $\frac{3}{7}$

(( باور ما در مورد آنچه که هستیم و آنچه که می‌توانیم باشیم، به درستی مشخص کننده‌ی آینده‌ی ما است. ))

در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناچور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده‌های باقیمانده، کدام است؟

تست ۵۲:  
(تجربی ۹۳)

- ۱) ۱۴٫۷۲ (۲) ۱۴٫۸۱ (۳) ۱۵٫۳۳ (۴) ۱۶٫۶۶

میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

تست ۵۳:  
(تجربی خارج ۹۳)

- ۱) ۹٫۲۵ (۲) ۹٫۳۶ (۳) ۹٫۵۲ (۴) ۹٫۶۳

میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده آماری به ترتیب ۱۶ و ۲ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۷ و ۲۰ و ۱۱ به آنان افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده حاصل، کدام است؟

تست ۵۴:  


- ۱) ۴٫۸ (۲) ۴٫۹ (۳) ۵٫۱ (۴) ۵٫۲

انحراف معیار داده‌های جدول زیر کدام است؟

تست ۵۵:  


$x_i$	۲	۳	۴	۵
$f_i$	۱	۳	۱	۵

- ۱)  $\sqrt{1/2}$  (۲)  $\sqrt{3}$   
۳)  $1/2$  (۴) ۲

نکته: مجموع انحراف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.



$$(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_n - \bar{X}) = 0$$

در یک بررسی آماری، اگر انحراف از میانگین داده‌ها برابر با ۱، ۳، -۱، -۲، a باشد، انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

تست ۵۶:  


- ۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3/2}$  (۳)  $\sqrt{3/4}$  (۴)  $\sqrt{3/6}$

«(آنچه سرنوشت ما را تعیین می‌کند، شرایط زندگی‌مان نیست بلکه تصمیم‌های ماست.)»

تست ۵۷: در داده‌های آماری ۱۱، ۲، ۸، ۲۱، ۱۷، ۱۵، ۳، مجموع انحراف داده‌ها از میانگین کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر



نکته: اگر همگی داده‌ها (که همگی صفر نیستند) برابر باشند، انحراف معیار صفر است و برعکس.

نکته: واریانس ۷ عدد صحیح متوالی، همواره برابر عدد ۴ است.

نکته: واریانس ۵ عدد صحیح متوالی، همواره برابر عدد ۲ است.

نکته: نسبت انحراف معیار به میانگین، ضریب تغییرات گفته می‌شود.

تست ۵۸: چنانچه داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار داده‌ها برابر با کدام گزینه خواهد بود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) -۱ ۴ (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.



تست ۵۹: اختلاف مقادیر ۷ داده از میانگین آن‌ها اعداد صحیح متمایز و متوالی هستند، انحراف معیار داده‌ها چه قدر است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{2}$  ۲ (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{2}$  ۴ (۴)



تست ۶۰: در ۵ داده‌ی آماری زیر، اختلاف میانگین از واریانس کدام است؟

۰، ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



د ضریب تغییرات: نسبت انحراف معیار به میانگین ضریب تغییرات نامیده می‌شود و با نماد CV نشان داده

$$\text{می‌شود. پس داریم: } CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

نکته: مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. بنابراین اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا با واحدهایی که نمی‌شناسیم بیان شده باشند، می‌توانیم برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از این ضریب استفاده کرد.



تستی: میانگین و واریانس داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_6$  به ترتیب ۱۵ و ۵ می‌باشد. اگر به این داده‌ها دو عدد ۱۰ و ۲۰ را اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود؟

$\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۴)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)       $\sqrt{2}$  (۲)       $\frac{3}{2}$  (۱)

تستی: قدرمطلق اختلاف از میانگین شش داده، برابر ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ است. اگر مجموع این داده‌ها ۱۸ باشد، ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟

$\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۲)       $\sqrt{\frac{3}{2}}$  (۱)  
 $\sqrt{\frac{2}{3}}$  (۴)       $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۳)

تستی: در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات،

کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

$0,275$  (۴)       $0,225$  (۳)       $0,275$  (۲)       $0,225$  (۱)

تستی: میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آنها ۶۵/۴۴ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع

این مربع‌ها، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

$0,25$  (۴)       $0,2$  (۳)       $0,15$  (۲)       $0,12$  (۱)

تستی: میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰,۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها،

کدام است؟

(تجربی ۹۵)

$236$  (۴)       $234$  (۳)       $232$  (۲)       $229$  (۱)



«(امام صادق (ع): از تنبلی و بی حوصلگی بپرهیز، زیرا که این دو خصلت تو را از بهره دنیا و آخرت باز می‌دارند.)»

میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها کدام است؟

۰/۳۳ (۴)

۰/۲۸ (۳)

۰/۲۷ (۲)

۰/۲۵ (۱)

(تجربی خارج ۹۲)



در داده‌های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۹، ۸، ۸، ۶، ۶، ۴، ۳ و ۳ داده‌های کمتر از چارک اول و بیش‌تر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب

تغییرات باقیمانده‌ی داده‌ها کدام است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۲۱ (۳)

۰/۱۷ (۲)

۰/۱۵ (۱)



اگر واریانس داده‌های مثبت  $a, a, a, 3a, 3a, 3a$  برابر ۱۶ باشد، در این صورت نسبت انحراف معیار به میانگین داده‌ها کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{4}{3}$  (۱)

$\frac{4}{9}$  (۳)



ضریب تغییرات در داده‌های آماری،  $80\%$  محاسبه شده است، اگر به هر داده مفروض ۵ واحد اضافه شود ضریب تغییرات حاصل

$75\%$  خواهد شد، میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۴ (۲)

۵۶ (۱)



در ۵۰ داده آماری، مجموع اختلافات داده‌ها از عدد ۱۲ برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده‌ها از

عدد ۱۲ برابر ۴۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها، کدام است؟

۰/۳۵ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۲۵ (۲)

۰/۲ (۱)



اگر واریانس داده‌های  $a, b+1, c+2, d+3, 10$  برابر صفر باشد، ضریب تغییرات داده‌های

تست ۷۱:

$a, b, c, d, 6$  کدام است؟



(۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

در ۶۰ داده‌ی آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار  $\frac{1}{2}$  محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

تست ۷۲:

(تجربی ۸۵)

(۱)  $0.1$       (۲)  $0.2$       (۳)  $0.3$       (۴)  $0.4$



در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم، تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

تست ۷۳:

(تجربی ۹۲)

(۱)  $\frac{7}{9}$       (۲)  $\frac{5}{6}$       (۳)  $\frac{7}{8}$       (۴)  $\frac{8}{9}$

در داده‌های آماری با میانگین  $\bar{x}$  و انحراف معیار  $\delta$  اگر به هر یک از داده‌ها، مقدار  $\bar{x}$  را اضافه کنیم تا داده‌های جدید حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات در داده‌های قبلی است؟

تست ۷۴:

(تجربی ۸۶)

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $1$       (۴)  $2$



اگر واحد اندازه‌گیری را از متر به سانتی‌متر تبدیل کنیم، انحراف معیار چه تغییری می‌کند؟

تست ۷۵:



(۱) ۱۰ برابر      (۲) ۱۰۰ برابر      (۳) ۱۰۰۰ برابر      (۴) تغییر نمی‌کند

در ۱۰۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۸ و انحراف معیار ۲، تمام داده‌ها را در  $\frac{1}{5}$  ضرب می‌کنیم، واریانس داده‌های جدید کدام است؟

تست ۷۶:



(۱) ۴      (۲) ۶      (۳) ۹      (۴)  $\frac{6}{25}$

تست ۷۷:

اگر انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  و  $x_1$  برابر ۳ باشد، واریانس داده‌های

$$2 + 2x_1, 2x_2 + 2, 2x_3 + 2, \dots, 2x_5 + 2$$



۱۸ (۲)

۹ (۱)

۳۶ (۴)

۲۵ (۳)

تست ۷۸:

ضریب تغییرات داده‌های آماری  $1/35$  می‌باشد. به ۲ برابر این داده‌های آماری، عدد  $\frac{1}{4}$  میانگین آنها افزوده

شده است. ضریب تغییرات داده‌های جدید، کدام است؟



$1/2$  (۴)

$1/15$  (۳)

$1/8$  (۲)

$0/96$  (۱)

تست ۷۹:

اگر انحراف معیار داده‌های  $3x_1, 3x_2, \dots, 3x_n$  برابر ۶ باشد، واریانس داده‌های  $2x_1 + 5, 2x_2 + 5, \dots, 2x_n + 5$  کدام است؟



۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

تست ۸۰:

اگر واریانس داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر ۲۰ و میانگین برابر ۴۰ باشد، ضریب تغییرات داده‌های  $\frac{x_1}{2} - 1, \frac{x_2}{2} - 1, \dots, \frac{x_n}{2} - 1$

کدام است؟



۲ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{19}$  (۳)

$\frac{19}{5}$  (۲)

$\frac{5}{19}$  (۱)

تست ۸۱:

در یک گروه از داده‌های آماری با میانگین  $\bar{x}$ ،  $k$  واحد به داده‌ها اضافه نموده‌ایم، در این صورت ضریب تغییرات دو برابر شده است.

مجموع  $\bar{x}$  و  $k$  چقدر است؟



صفر (۴)

۱ (۳)

$-k$  (۲)

$k$  (۱)

تست ۸۲:

۸۰ داده آماری با میانگین ۱۳ و واریانس ۲ را با ۲۰ داده آماری با میانگین ۱۳ و واریانس  $0/45$  با هم در نظر می‌گیریم. ضریب تغییرات تمامی داده‌ها کدام است؟

$0/169$  (۴)

$0/15$  (۳)

$0/13$  (۲)

$0/1$  (۱)





سؤال ۸۷: دامنهٔ میان‌چارکی (IQR) داده‌های ۱۲، ۴۰، ۲۸، ۳۲، ۳۰، ۲۲، ۲۵ کدام است؟

۱۰ (۴)

۱۳ (۳)

۱۵ (۲)

۱۸ (۱)



سؤال ۸۸: اگر به داده‌های آماری ۸، ۱۱، ۲۰، ۸، ۴ و ۳، سه داده‌ی ۱۲، ۸ و ۵ را اضافه کنیم، چارک سوم چه تغییری می‌کند؟

(۱) یک واحد اضافه می‌شود. (۲) یک واحد کم می‌شود. (۳) نیم واحد اضافه می‌شود. (۴) نیم واحد کم می‌شود.





m

m+n

n

$$2+3=5$$

n

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120, \quad 10! = 10 \times 9!, \quad 13! = 13 \times 12 \times 11!$$

$$0! = 1$$

m

n

n × m

$$\boxed{4} \times \boxed{3} = 12$$

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60$$

n!

n

(n-1)!

n

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

$$(12-1)! = 11!$$

**توضیح:** با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۹ و بدون تکرار ارقام الف) چند عدد سه رقمی ب) چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ پ) با

این اعداد چند کد سه رقمی می‌توان ساخت؟

**تست:** در یک منطقه آموزش و پرورش، ۳ ناحیه و در هریک از این ناحیه‌ها، ۸ مدرسه دوره دوم متوسطه و در هریک از این مدارس، ۶ کلاس دهم وجود دارد. در این منطقه چند کلاس دهم وجود دارد؟

۴۸ (۴)

۹۶ (۳)

۷۲ (۲)

۱۴۴ (۱)

«آچه را می‌شنویم، فراموش می‌کنیم، آنچه را می‌بینیم، به خاطر می‌سپاریم، آنچه را انجام می‌دهیم، درک می‌کنیم.»

با ارقام یک تا پنج، چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که در آن اعداد فرد کنار هم باشند؟

- ۱) ۱۲ (۱)      ۲) ۲۴ (۲)      ۳) ۳۶ (۳)      ۴) ۴۸ (۴)

چهار کتاب ریاضی و سه کتاب فیزیک را به چند طریق می‌توان کنار هم چید، به طوری که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند؟

- ۱) ۲!۴!۳! (۱)      ۲) ۴!۳! (۲)      ۳) ۴!۴! (۳)      ۴)  $\frac{۷!}{۴!۳!}$  (۴)

چهار کتاب ریاضی و سه فیزیک را به چند طریق می‌توان کنار هم چید به طوری که کتاب‌های ریاضی یکی در میان باشند؟

- ۱) ۱۲۰ (۱)      ۲) ۱۴۴ (۲)      ۳) ۳۴۲ (۳)      ۴) ۵۷۶ (۴)

۵ کتاب مختلف با موضوع زیست را به چند طریق می‌توان همراه با ۶ کتاب ریاضی متمایز در یک قفسه در کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب‌های زیست حتماً کنار هم باشند؟

- ۱) ۵!×۶! (۱)      ۲) ۲×۵!×۶! (۲)      ۳) ۵!×۷! (۳)      ۴) ۶!×۷! (۴)

یک سالن آمفی‌تئاتر ۱۰ در دارد. به چند طریق می‌توان از یک در وارد سالن شد و از در دیگر خارج شد؟

- ۱) ۱۰۰ (۱)      ۲) ۹۰ (۲)      ۳) ۹ (۳)      ۴) ۱۰ (۴)

با حروف کلمه «پردیس» چند کلمه ۳ حرفی با حروف غیرتکراری می‌توان نوشت؟

- ۱) ۴<sup>۳</sup> (۱)      ۲) ۳<sup>۴</sup> (۲)      ۳) ۲<sup>۴</sup> (۳)      ۴) ۶۰ (۴)

یک اتوبوس با ۱۰ مسافر در ۱۲ ایستگاه توقف می‌کند و همه مسافران در این ایستگاه‌ها از اتوبوس پیاده می‌شوند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- ۱) ۱۲۰ (۱)      ۲) ۱۰<sup>۱۲</sup> (۲)      ۳) ۱۲<sup>۱۰</sup> (۳)      ۴) ۱۴۴ (۴)

تست ۹: - به چند طریق می‌توان رئوس یک چهارضلعی را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۳۶ (۱)



تست ۱۰: - به چند طریق ۴ دانش‌آموز و ۳ معلم می‌توانند برای گرفتن عکس یادگاری کنار هم بایستند، به طوری که معلم‌ها کنار هم باشند؟

۲!×۴!×۳! (۴)

۷!×۳! (۳)

۳!×۵! (۲)

۴!×۴! (۱)



تست ۱۱: - با استفاده از ۴ رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی به چند طریق می‌توان پنج خانه کنار هم را که در یک ردیف قرار گرفته‌اند، رنگ کرد؛ به طوری که خانه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند؟

۲۴۳ (۴)

۱۰۲۴ (۳)

۳۲۴ (۲)

۵۷۶ (۱)



تست ۱۲: - به چند طریق می‌توان یک رمز ۳ رقمی با ارقام ۱ تا ۹ ساخت به طوری که ارقام یکی در میان زوج و فرد باشند؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۲۵۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۴۰ (۱)



تست ۱۳: - کدام گزینه نادرست است؟

$$0! = 1! \quad (۲)$$

$$۲! \times ۲! \times ۳! = ۴! \quad (۴)$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n \quad (n > 2) \quad (۱)$$

$$۴! \times ۲ = ۸! \quad (۳)$$



تست ۱۴: - ساده‌شده عبارت  $\frac{11 \times (12! + 11!)}{12! - 11!}$  کدام است؟

۱۱×۱۳! (۴)

۱۱×۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۱۳ (۱)



تست ۱۵: - با حروف کلمه «ماسوله» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که بخشی از آن کلمه «سلام» باشد؟

۴×۳! (۴)

۳×۳ (۳)

۲×۳! (۲)

۳! (۱)



تست ۱۶: - با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهاررقمی زوج بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۶۰ (۴)

۴۸ (۳)

۷۲ (۲)

۹۶ (۱)





(( داشتن فکر و اندیشه مثبت به تنهایی کافی نیست، هر موفقیت بزرگ با عمل به دست می‌آید. ))

تست ۱۷: محمد و علی به همراه ۳ دوست دیگرشان در صف نانوایی ایستاده‌اند. علی به رسم ادب هیچ‌گاه جلوتر از محمد نان نمی‌خرد. این افراد به چند طریق می‌توانند در صف نانوایی پشت‌سرهم بایستند؟

۱۵ (۱)      ۳۰ (۲)      ۶۰ (۳)      ۱۲۰ (۴)

تست ۱۸: ۱۰ نفر به ترتیب سوار اتوبوس می‌شوند. اگر علی قبل از نوید سوار اتوبوس شود، چند حالت برای سوار شدن این ۱۰ نفر وجود دارد؟

۱۰! (۱)      ۵! (۲)       $2 \times 10!$  (۳)       $\frac{10!}{2}$  (۴)

تست ۱۹: یک آزمون تستی شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۳ سؤال ۲ گزینه‌ای است. اگر فردی بخواهد به‌طور تصادفی به همه سؤالات پاسخ بدهد، به چند روش می‌تواند این کار را انجام بدهد؟ (امکان پاسخ ندادن به هیچ سؤالی وجود ندارد.)

$10^4 \times 2^3$  (۱)       $4^{10} \times 2^3$  (۲)       $10^4 \times 2^3$  (۳)       $4^{10} \times 2^2$  (۴)

تست ۲۰: با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که حتماً شامل ۲ باشد؟

۵۲ (۱)      ۴۸ (۲)      ۴۴ (۳)      ۳۶ (۴)

تست ۲۱: پنج پسر به همراه پدرشان به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که هر فرد بخواهد کنار پدرش باشد؟

۵! (۱)       $32 \times 5!$  (۲)      ۱۰! (۳)       $32 \times 10!$  (۴)

تست ۲۲: از شهر A تا شهر B، ۴ راه و از شهر B تا شهر C، ۳ راه و از شهر C تا شهر D، ۲ راه وجود دارد. به

چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت و دوباره به شهر A برگشت به طوری که از هر مسیر حداکثر

یک بار عبور کنیم و از تمام شهرها عبور کنیم؟

۹۶ (۱)      ۱۰۴ (۲)      ۱۴۴ (۳)      ۱۴۲ (۴)

تست ۲۳: چند عدد پنج‌رقمی طبیعی بدون ارقام تکراری وجود دارد که رقم سمت چپ آن‌ها فرد و هم‌چنین ارقام آن یکی‌درمیان زوج و فرد باشد؟

۱۴۰۰ (۱)      ۱۳۰۰ (۲)      ۱۲۰۰ (۳)      ۱۱۰۰ (۴)

تست ۲۴: چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵ وجود دارد که رقم یکان و صدگان آن با هم برابر باشند؟

۵۰ (۱)      ۲۵۰ (۲)      ۱۰ (۳)      ۲۰ (۴)

تست ۲۵: چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت که ارقام آن‌ها اعداد اول باشند؟

۳۶ (۴)

۳۴ (۳)

۱۶ (۲)

۳۸ (۱)



تست ۲۶: چند عدد سه‌رقمی با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که بر ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۴۸ (۲)

۱۰ (۱)



تست ۲۷: چند عدد طبیعی با ارقام متمایز وجود دارد که تمامی ارقام آن عدد اول باشد؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۳۶ (۲)

۳۳ (۱)



$n$   $r$   $r$   $n$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

a)  $P(12, 3) = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320$

b)  $\boxed{12} \times \boxed{11} \times \boxed{10} = 1320$

$n!$   $n$

$\boxed{7} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 140$  ,  $7! = 5040$

$r_2$   $r_1$   $n$

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots}$$

a)  $\frac{7!}{2!2!}$

b)  $\frac{8!}{3!2!}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۲۸: اگر  $p(n, 4) = 4 \cdot p(n-1, 2)$  باشد،  $n$  کدام است؟

- ۳ (۱)  ۵ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

تست ۲۹: اگر  $P(6, 4) = P(4, 2) + P(5, 2) + n$ ، آن‌گاه  $P(n, n-1)$  کدام است؟

- ۳۲۸ (۱)   $328 \times 327$  (۳)  $\frac{328!}{2!}$  (۴)


تست ۳۰: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟

- ۱۲۰ (۱) (تجربی خارج ۹۲)  ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

تست ۳۱: با حروف I, R, A, N, O, H, M چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که با O آغاز و به M ختم شود؟

- ۳ (۱)  ۲ (۲)  $P(5, 3)$  (۳)  $P(5, 5)$  (۴)

تست ۳۲: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب متمایز را بین ۵ نفر تقسیم کرد، به طوری که به هر نفر بیش از یک کتاب نرسد؟

- ۳۵ (۱)   $5^3$  (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

تست ۳۳: تعدادی دبیر ریاضی داریم که تمام آن‌ها توانایی تدریس درس‌های آمار، ریاضی و هندسه را دارند. اگر معاون یک مدرسه بخواهد برای انتخاب دبیر دروس آمار، ریاضی و هندسه از بین این دبیران، برای هر درس دبیر متفاوت انتخاب کند، ۱۲۰ حالت دارد. تعداد این دبیران چند نفر است؟

- ۷ (۱)  ۵ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)

تست ۳۴: با حروف کلمه‌ی «SIROUS»، چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که R قبل از O و O قبل از U بیاید؟

- ۵۶ (۱)  ۶۴ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

«(دو مورد از بدترین اشتباهات قربانی کردن اهداف توسط افکار دیگران و فکر کردن به محدودیت‌ها قبل از اقدام به عمل است.))»  
 می‌خواهیم از بین تعدادی کتاب مختلف، ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد همه حالت‌های مختلف برای این کار برابر

تست ۳۵:

۲۱۰ باشد، تعداد کتاب‌ها کدام است؟



۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

تست ۳۶: به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

تست ۳۶:

۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۰ (۲)

۵۴ (۱)



نکته: تعداد جایگشت‌های  $n-1$  تایی از  $n$  شی با جایگشت‌های  $n$  تایی از آن برابرند.



مثال ۲: تعداد جایگشت‌های چهار رقمی که با ارقام ۲, ۳, ۱, ۲, ۵ می‌توان نوشت را بیابید.

مثال ۲:



مثال ۳: الف) تعداد اعداد پنج رقمی که می‌توان با ارقام ۲, ۰, ۰, ۰, ۳ ساخت را بیابید.

مثال ۳:

ب) تعداد اعداد چهار رقمی که می‌توان با ارقام ۲, ۰, ۰, ۰, ۳ ساخت را بیابید.

ج) تعداد اعداد سه رقمی که می‌توان با ارقام ۲, ۰, ۰, ۰, ۳ ساخت را بیابید.



مثال ۴: تعداد اعداد پنج رقمی فرد که می‌توان با ارقام ۱, ۲, ۳, ۲, ۲ ساخت را بیابید.

مثال ۴:





$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}, \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r(r-1)\dots 1}$$

$$\binom{5}{5} = \binom{5}{0} = 1, \quad \binom{8}{1} = \binom{8}{7} = 8, \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35, \quad \binom{9}{2} + \binom{9}{1} = \binom{10}{2}$$

تست ۳۷: حاصل  $\binom{25}{10} + \binom{25}{9}$  کدام است؟ (۱)  $\binom{26}{10}$  (۲)  $\binom{25}{11}$  (۳)  $\binom{26}{11}$  (۴)  $\binom{50}{19}$

تست ۳۸: حاصل عبارت  $\binom{22}{16} + \binom{22}{8} - \binom{22}{14} - \binom{22}{6}$  کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۷۳۱۵ (۳) ۴۶۲ (۴) صفر

مشق ۵: تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را بیابید.

مشق ۶: به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر سه نفر را انتخاب کرد؟

**سوال ۷:** کیسه ای شامل ۶ مهره‌ی سیاه، ۵ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی آبی است. ۳ مهره از آن خارج می‌کنیم. مطلوب است تعداد حالت ممکن که در آن: الف) سه مهره سبز باشند. ب) هر سه غیر هم‌رنگ باشند. پ) ۲ سبز و یک سیاه باشد. ت) هر سه هم‌رنگ باشند. ث) لااقل دو تا سیاه باشد. ج) حداکثر دو آبی باشد.



**سوال ۳۹:** با نقطه‌ی A, B, C, D, E, F و G روی محیط یک دایره چند مثلث مختلف می‌توان ساخت که رئوس آن‌ها از این ۷ نقطه انتخاب شده باشد؟

۲۱۰ (۱)      ۱۵ (۲)      ۱۰۵ (۳)      ۳۵ (۴)



**سوال ۴۰:** در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز متمایز و ۳ مهره آبی متمایز موجود است. اگر به تصادف از این جعبه ۴ مهره خارج کنیم، پیشامد آنکه «۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی باشد» چند عضو دارد؟

۱۲ (۱)      ۱۸ (۲)      ۷ (۳)      ۴ (۴)



**سوال ۴۱:** گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل متفاوت می‌تواند درست کند؟

۵۸۲ (۱)      ۷۳۰ (۲)      ۴۸۲ (۳)      ۳۷۸ (۴)



**سوال ۴۲:** چه تعداد از زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{a, b, c, d, e\}$  دارای ۲ عضو  $a$  و  $b$  هستند؟

۸ (۱)      ۲ (۲)      ۱۶ (۳)      ۴ (۴)



**سوال ۴۳:** مجموعه  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که شامل عضوهای  $a_1$  و  $a_2$ ، ولی فاقد عضوهای  $a_9$  و  $a_{10}$  باشد؟

۲۰ (۱)      ۸ (۲)      ۵۶ (۳)      ۱۲۰ (۴)



**سوال ۴۴:** تعداد زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی مجموعه‌ی  $\{a, b, c, 1, d, f\}$  که شامل عضو  $f$  باشد و عدد ۱ نباشد، چندتاست؟

۱۲ (۱)      ۱۰ (۲)      ۵ (۳)      ۳۵ (۴)



تست ۴۵:

یک نقاش قوطی‌هایی از ۶ رنگ مختلف دارد. او با ترکیب ۳ یا تعداد بیش‌تر از رنگ‌های اولیه می‌تواند یک رنگ جدید به‌دست آورد. اگر او در رنگ‌آمیزی تابلوی نقاشی خود ۳ رنگ از رنگ‌های جدید ایجاد شده را استفاده کند، به چند طریق می‌تواند رنگ‌های خود را انتخاب کند؟



- (۱) ۱۲۶۴۰  
(۲) ۱۵۶۰۰  
(۳) ۱۱۴۸۰  
(۴) ۱۰۶۰۰

تست ۴۶:

اگر در یک کیسه ۲ مهرهٔ زرد، ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز داشته باشیم و بخواهیم ۴ مهره به تصادف انتخاب کنیم، تعداد حالات ممکن برای آن که حداقل یک مهرهٔ زرد و دقیقاً یک مهرهٔ سبز انتخاب شوند، کدام است؟



- (۱) ۱۴۰  
(۲) ۱۲۵  
(۳) ۱۰۵  
(۴) ۷۵

تست ۴۷:

از بین ۷ نفر ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم. به چند طریق این انتخاب صورت می‌گیرد به شرطی که دو فرد مشخصی با هم انتخاب نشوند؟



- (۱) ۲۰  
(۲) ۱۱  
(۳) ۲۱  
(۴) ۱۰

تست ۴۸:

یک آشپز هشت نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر سه تا از این ادویه‌ها، یک طعم مخصوص درست می‌کند. اگر بدانیم که دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند، تعداد طعم‌هایی که او می‌تواند درست کند، چند تا است؟



- (۱) ۲۰  
(۲) ۳۰  
(۳) ۴۰  
(۴) ۵۰

تست ۴۹:

از میان ۵ مرد و ۳ زن، به چند روش می‌توان یک گروه آموزشی پنج نفره تشکیل داد، به شرطی که در گروه، حتماً زن حضور داشته باشد؟



- (۱) ۵۶  
(۲) ۵۵  
(۳) ۵۰  
(۴) ۴۵

تست ۵۰:

از میان ۸ دبیر ریاضی، ۴ دبیر فیزیک و ۲ دبیر شیمی می‌خواهیم یک کمیته‌ی ۵ نفری تشکیل دهیم که حداقل نیمی از دبیران ریاضی انتخاب شوند. این عمل به چند طریق صورت می‌گیرد؟



- (۱) ۴۲۰  
(۲) ۴۵۶  
(۳) ۴۷۶  
(۴) ۵۶

تست ۵۱: - سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. به چند طریق حداقل در ۲ پرتاب «رو» ظاهر می‌شود؟

۱۰۱۴ (۴)

۱۰۱۳ (۳)

۱۰۱۲ (۲)

۱۰۱۱ (۱)



تست ۵۲: - از هریک از ۵ قاره جهان، ۵ کشور داوطلب شرکت در فعالیتی بین‌المللی هستند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها، ۳ کشور را انتخاب کرد، به طوری که آن ۳ کشور از ۳ قاره مختلف باشند؟

۷۵۰۰ (۴)

۳۷۵۰ (۳)

۲۵۰۰ (۲)

۱۲۵۰ (۱)



نکته: در بعضی مسایل ترکیبی از جابجاست و ترکیب را داریم.



تست ۵۳: با حروف کلمه computer چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حتماً **r, u** بکار رفته باشد؟

۲۴۰۰ (۴)

۱۲۰۰ (۳)

۶۰۰ (۲)

۳۶۰ (۱)



تست ۵۴: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از بین ۶ کتاب سال دوم را یکی در میان کنار هم چید؟

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3! \times 2 \quad (۴)$$

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3! \quad (۳)$$

$$\binom{11}{7} 4! 3! \times 2 \times 2 \quad (۲)$$

$$\binom{11}{7} 4! 3! \quad (۱)$$



تست ۵۵: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از بین ۶ کتاب سال دوم کنار هم چید به طوری که کتاب‌های سال اول کنار هم و کتاب‌های سال دوم کنار هم باشند؟

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3! \times 2 \quad (۴)$$

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3! \quad (۳)$$

$$\binom{11}{7} 4! 3! \times 2 \times 2 \quad (۲)$$

$$\binom{11}{7} 4! 3! \quad (۱)$$



تست ۵۶: تعداد جابجاست‌های ۹ حرفی که با حروف AAAAABBCCC می‌توان نوشت که در آن‌ها هیچ دو حرف A کنار هم نباشد کدام است؟ (۱)  $3! 4! 5!$  (۲)  $\binom{5}{4} 3! 4! 5!$  (۳)  $\binom{6}{4} \frac{4! 5!}{2! 3!}$  (۴)  $\binom{6}{4} \frac{5!}{2! 3!}$

$$\binom{6}{4} \frac{5!}{2! 3!} \quad (۴)$$

$$\binom{6}{4} \frac{4! 5!}{2! 3!} \quad (۳)$$

$$\binom{5}{4} 3! 4! 5! \quad (۲)$$

$$\binom{6}{4} 3! 4! 5! \quad (۱)$$





تست ۵۷: ۵ توپ قرمز یکسان و ۳ توپ آبی متفاوت را به چند طریق می‌توان کنار هم چید به طوری که هیچ کدام از توپ‌های آبی کنار هم نباشند؟ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۱۲۰



تست ۵۸: با حروف کلمه RANGIN چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت؟

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۶



تست ۵۹: ۵ حرف از ۸ حرف کلمه BUSINESS را کنار هم چیده‌ایم، در چند مورد سه حرف S حضور دارند؟

(۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۴۰



تست ۶۰: از هر یک از مدارس A, B, C, D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز

(تجربی ۹۲) که دوه‌دو غیر هم مدرسه باشند را انتخاب کرد؟ (۱) ۱۶۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۶۴۰



تست ۶۱: ۶ نفر به نام‌های a, b, c, d, e, f را به چند طریق می‌توان در یک صف قرار داد به طوری که a و b بعد از

e و f در صف قرار بگیرند؟ (a و b الزاماً بلافاصله بعد از e و f نیستند.)

(۱) ۳۶۰ (۲) ۲۴۰

(۳) ۱۲۰ (۴) ۱۸۰



تست ۶۲: با حروف کلمه "logarithm" و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت که شامل دو حرف "a" و "r" بوده و بین این دو حرف دقیقاً یک حرف قرار داشته باشد؟

(۱)  $15 \times 7 \times 5!$  (۲)  $14 \times 15 \times 5!$  (۳)  $15 \times 3! \times 5!$  (۴)  $7 \times 3! \times 5!$



تست ۶۳: به چند طریق می‌توان از بین ۴ جفت کفش: الف) ۳ لنگه کفش انتخاب کنیم؟ ب) ۳ لنگه کفش که دو تا جفت باشند انتخاب کنیم؟



تست ۶۳: با اعداد مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که رقم صدگان آن بزرگ‌ترین رقم باشد؟

۱۷ (۴)

۲۰ (۳)

۱۴ (۲)

۱۰ (۱)



احتمال:

الف. پدیده‌ی تصادفی: به يك پدیده طبیعی یا آزمایشی که نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نباشد، پدیده‌ی تصادفی گوییم.

ب. فضای نمونه‌ای: به تعداد کل حالت هایی که برای يك پدیده تصادفی ممکن است رخ دهد، فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با حرف نشان می‌دهیم.

مشکل ۹: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه را بنویسید.

مشکل ۱۰: فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه را بنویسید.

مشکل ۱۱: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه و یک تاس چند عضو دارد؟

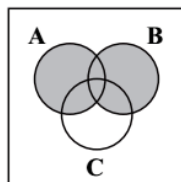
مشکل ۱۲: فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۴ فرزند چند عضو دارد؟

مشکل ۱۳: فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس چند عضو دارد؟

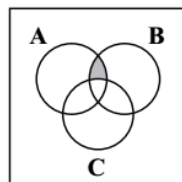


پ. پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از يك فضای نمونه‌ای يك پدیده‌ی تصادفی را پیشامد تصادفی می‌گوییم.

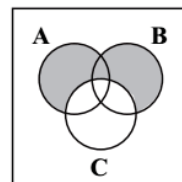
تست ۶۴: فرض کنید A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند. پیشامد آنکه A و B رخ دهد، ولی C رخ ندهد کدام است؟



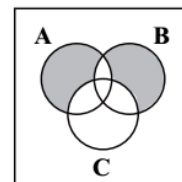
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)



مشکل ۱۴: تمام اعداد دو رقمی که می‌توان با ارقام ۰ و ۱ و ۷ و ۹ را روی کارت‌های مجزا می‌نویسیم. یک کارت را به تصادف خارج می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید. ب) پیشامد آن که عدد کمتر از ۴۰ باشد را بنویسید. پ) پیشامد اول بودن عدد را بنویسید.

«همه چیز بسیار آسان است تنها زمانی کاری سخت می‌شود که شما از انجام آن اکراه دارید.»



ت. تعریف احتمال: احتمال وقوع پیشامد  $A$  را با  $P(A)$  نشان می‌دهیم. این احتمال از تقسیم تعداد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

حالات ممکن وقوع این پیشامد بر تعداد کل اعضای فضای نمونه‌ی حاصل می‌شود.

**مثال ۱۵:** دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) یکی از اعداد رو شده دو برابر دیگری باشد.

ب) مجموع اعداد رو شده برابر ۶ باشد.

پ) مجموع اعداد رو شده بر سه بخش پذیر باشد.

**مثال ۱۶:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره ی سفید، ۶ مهره ی سبز و ۵ مهره ی قرمز است. ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) هر سه هم‌رنگ باشند. ب) دقیقاً دو مهره سفید باشند.

پ) دقیقاً دو مهره هم‌رنگ باشند. ت) هیچ کدام هم‌رنگ نباشند.

ث) حداکثر یکی قرمز باشد. ج) لااقل دو تا سبز باشد.

**تمرین ۱:** - از میان ۶ جفت جوراب متمایز، دو لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این دو لنگه جفت یکدیگر باشند کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$     
  (۲)  $\frac{1}{13}$     
  (۳)  $\frac{3}{11}$     
  (۴)  $\frac{1}{11}$

**تمرین ۲:** - به تصادف یک عدد از بین اعداد زوج طبیعی کمتر از ۲۵ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد نه مضرب ۳ باشد و نه مضرب ۴، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{22}$     
  (۲)  $\frac{7}{12}$     
  (۳)  $\frac{2}{3}$     
  (۴)  $\frac{1}{3}$

تست ۶۷: احتمال آنکه در یک خانواده با ۴ فرزند، فرزند اول و آخر دارای یک جنسیت باشند کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{16}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

تست ۶۸: در پرتاب دو تاس، احتمال آنکه مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{18}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{5}{18}$

تست ۶۹: با ارقام ۲، ۳، ۵، ۷، ۹ یک عدد چهاررقمی کم‌تر از ۶۰۰۰ و بدون تکرار ارقام ساخته‌ایم. احتمال آن‌که این عدد زوج باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

تست ۷۰: در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است، اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

- (۱)  $\frac{10}{21}$  (۲)  $\frac{4}{7}$  (۳)  $\frac{5}{7}$  (۴)  $\frac{16}{21}$

تست ۷۱: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به‌طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟

- (۱)  $\frac{2}{7}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

تست ۷۲: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

- (۱)  $\frac{2}{9}$  (۲)  $\frac{5}{18}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{5}{12}$

در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

تست ۷۳  
تجربی ۹۲

- (۱)  $0/1$  (۲)  $0/15$  (۳)  $0/2$  (۴)  $0/25$



هریک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

تست ۷۴  
تجربی ۹۵

- (۱)  $0/3$  (۲)  $0/4$  (۳)  $0/5$  (۴)  $0/6$



چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

تست ۷۵  
تجربی خارج ۸۹

- (۱)  $1/3$  (۲)  $5/12$  (۳)  $4/9$  (۴)  $5/9$



در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

تست ۷۶  
تجربی خارج ۹۱

- (۱)  $1/12$  (۲)  $1/6$  (۳)  $1/4$  (۴)  $1/3$



در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

تست ۷۷  
تجربی خارج ۹۲

- (۱)  $1/6$  (۲)  $3/14$  (۳)  $2/9$  (۴)  $5/14$



در جعبه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

تست ۷۸  
تجربی خارج ۹۴

- (۱)  $35/91$  (۲)  $25/77$  (۳)  $45/143$  (۴)  $55/143$



«(بهترین زمان برای تربیت اراده، ایام جوانی است.)»

دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

تست ۷۹:

تجربی خارج ۹۵

(۱)  $\frac{2}{9}$  (۲)  $\frac{5}{18}$  (۳)  $\frac{7}{18}$  (۴)  $\frac{4}{9}$



در یک تیم ۷ نفره، احتمال آن که فقط روز تولد دو نفر از آن‌ها در هفته یکی باشد، کدام است؟

تست ۸۰:

(۱)  $\frac{\binom{7}{2} \times 6!}{7^6}$  (۲)  $\frac{\binom{7}{2} \times 5!}{7^7}$  (۳)  $\frac{\binom{7}{2} \times 6!}{7^7}$  (۴)  $\frac{\binom{7}{2} \times 7!}{7^6}$



تمام اعداد سه‌رقمی زوج را روی تعدادی کارت نوشته‌ایم (هر عدد روی یک کارت). کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه همه ارقام عدد روی

تست ۸۱:

این کارت زوج باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{20}$  (۲)  $\frac{1}{10}$  (۳)  $\frac{2}{9}$  (۴)  $\frac{5}{18}$



خانواده‌ای دارای ۵ فرزند به نام‌های «آزاده»، «علی»، «ایمان»، «نرگس» و «امین» است. می‌دانیم ایمان از علی بزرگ‌تر است. احتمال آنکه علی کوچک‌ترین فرزند خانواده باشد، کدام است؟

تست ۸۲:

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{5}{12}$  (۴)  $\frac{25}{48}$



در جبهه‌ای ۴ مهره آبی و تعدادی مهره قرمز وجود دارد. از این جعبه ۲ مهره به تصادف و با هم خارج می‌کنیم؛ احتمال آنکه حداقل یکی از مهره‌ها آبی

تست ۸۳:

باشد، برابر  $\frac{6}{7}$  است. اگر از این جعبه ۱ مهره خارج کنیم، چقدر احتمال دارد، این مهره آبی باشد؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{7}$  (۳)  $\frac{4}{7}$  (۴)  $\frac{1}{2}$



B A

S

B A

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A'

A

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

A

$$P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$$



**مثال ۱۷:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و داشته باشیم  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{5}$  و احتمال وقوع لاقبل یکی از آن‌ها رخ دهد برابر  $\frac{3}{4}$  باشد، احتمال وقوع همزمان هر دو را بیابید.

**تست ۸۴:** در یک عدد سه رقمی بدون صفر، احتمال این‌که لاقبل دو رقم یکسان باشند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{81}$  (۲)  $\frac{11}{27}$  (۳)  $\frac{17}{36}$  (۴)  $\frac{49}{81}$

**تست ۸۵:** در جعبه‌ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

- (۱)  $\frac{28}{45}$  (۲)  $\frac{29}{45}$  (۳)  $\frac{21}{45}$  (۴)  $\frac{22}{45}$

**تست ۸۶:** در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موشی سیاه موجود است، به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لاقبل یکی از موش‌ها سفید است؟

- (۱)  $\frac{8}{11}$  (۲)  $\frac{9}{11}$  (۳)  $\frac{28}{33}$  (۴)  $\frac{29}{33}$

**تست ۸۷:** در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی، خارج می‌شود؟

- (۱)  $\frac{31}{42}$  (۲)  $\frac{37}{42}$  (۳)  $\frac{67}{84}$  (۴)  $\frac{73}{84}$

**تست ۸۸:** در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

- (۱)  $\frac{8}{21}$  (۲)  $\frac{17}{42}$  (۳)  $\frac{10}{21}$  (۴)  $\frac{9}{14}$

**نکته:** احتمال آن‌که در یک خانواده  $n$  نفری،  $k$  فرزند پسر (دختر) باشند برابر  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$  است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

«(امام علی(ع): هر که بر خدا توکل کند، دشواری‌ها برایش آسان شده و اسباب برایش فراهم گردد.)»

شرح ۱۸: در یک خانواده با چهار فرزند احتمال آن‌را بیابید که:

- الف) دقیقاً سه پسر باشند.      ب) حداقل سه پسر باشند.
- پ) دو پسر و دو دختر داشته باشد.      ت) تعداد دختران بیشتر باشد.
- ث) دو فرزند اول پسر باشند.      ج) فقط دو فرزند اول پسر باشند.

تجربه ۸۹: - در یک خانواده‌ی ۴ فرزند با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

- تجربی ۹۰: (۱)  $\frac{3}{8}$       (۲)  $\frac{9}{16}$       (۳)  $\frac{5}{8}$       (۴)  $\frac{3}{4}$

S
B A

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

S
B A

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

B' A', B, A
B A



تجربه ۹۰: - در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد «رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۴» باشد، آنگاه پیشامد B را کدام گزینه در نظر بگیریم تا A و B دو پیشامد ناسازگار باشند؟

- (۱) رو شدن عدد زوج      (۲) رو شدن عدد اول      (۳) رو شدن عدد کوچک‌تر از ۵      (۴) رو شدن عدد مضرب ۳

تجربه ۹۱: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $P(A \cup B)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{12}$       (۲)  $\frac{5}{12}$       (۳)  $\frac{6}{12}$       (۴)  $\frac{7}{12}$



تست ۹۲: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل ناتهی باشند و  $P(A \cap B) = [P(A)]^2$  باشد،  $P(A')$  کدام است؟

- (۱)  $P(A)$   
 (۲)  $P(A) \times P(B)$   
 (۳)  $1 - P(A) \times P(B)$   
 (۴)  $1 - P(B)$

تست ۹۳: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از هم باشند و داشته باشیم  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ، آن‌گاه  $P(B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{4}$   
 (۳)  $\frac{2}{3}$   
 (۴)  $\frac{1}{2}$

تست ۹۴: اگر  $P(A) = \frac{1}{4}$ ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $A$  و  $B$  مستقل باشند،  $P(A \cup B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{2}{3}$   
 (۴)  $\frac{5}{6}$

تست ۹۵: اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل از هم و  $P(B) = 2P(A)$  و  $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$  باشد، آن‌گاه  $P(B)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{5}{2}$   
 (۴)  $\frac{5}{4}$

تست ۹۶: اگر  $P(A) = 0.3$ ،  $P(B) = 0.8$  و  $P(A \cup B) = 0.86$  باشد، آن‌گاه دو پیشامد  $A$  و  $B$  نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

- (۱) ناسازگار  
 (۲)  $A \subset B$   
 (۳) متمم  
 (۴) مستقل

تست ۹۷: در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

- (۱)  $0.7$   
 (۲)  $0.75$   
 (۳)  $0.8$   
 (۴)  $0.85$

تست ۹۸: دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد روبرو زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟

- (۱)  $\frac{27}{64}$   
 (۲)  $\frac{37}{64}$   
 (۳)  $\frac{19}{32}$   
 (۴)  $\frac{39}{64}$

تست ۹۹:

احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر  $\frac{۵}{۹}$  و برای شخص B برابر  $\frac{۵}{۸}$  است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

تجربی ۹۵

 $\frac{۵}{۹۸}$  (۴) $\frac{۵}{۹۶}$  (۳) $\frac{۵}{۹۴}$  (۲) $\frac{۵}{۹۲}$  (۱)

تست ۱۰۰:

چهار دانش‌آموز یک کلاس بر یک نیمکت نشسته‌اند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

تجربی خارج ۹۲

 $\frac{۵۵}{۹۶}$  (۴) $\frac{۲۳}{۴۸}$  (۳) $\frac{۴۱}{۹۶}$  (۲) $\frac{۱۹}{۴۸}$  (۱)

شماره ۱۹: احمد به احتمال  $\frac{۷}{۱۰}$  در تیم کوه‌نوردی مدرسه‌شان و به احتمال  $\frac{۸}{۱۰}$  در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر

را محاسبه کنید.

(الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

(ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

(پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

(ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

(ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.



نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند احتمال وقوع اینکه A اتفاق بیافتد و B اتفاق نیافتد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$



تست ۱۰۱: احتمال این که شخصی گروه خونی O داشته باشد ۶۵ درصد و احتمال این که اضافه وزن داشته باشد ۶۰ درصد است. با کدام احتمال شخص گروه خونی O دارد

ولی اضافه وزن ندارد؟



۳۹ درصد (۲)

۲۵ درصد (۱)

۲۶ درصد (۴)

۴۰ درصد (۳)

تست ۱۰۲: احمد به احتمال  $\frac{۶}{۱۰}$  در تیم والیبال مدرسه و به احتمال  $\frac{۷}{۱۰}$  در گروه سرود مدرسه انتخاب می‌شود. احتمال آنکه فقط در گروه سرود مدرسه انتخاب شود، چقدر است؟

 $\frac{۱۱}{۱۸}$  (۴) $\frac{۵}{۱۸}$  (۳) $\frac{۴}{۲۲}$  (۲) $\frac{۲}{۲۸}$  (۱)



ج. احتمال شرطی:

اگر و دو پیشامد از فضای نمونه‌ی باشند ( )، در این صورت احتمال وقوع به شرطی که بدانیم پیشامد نیز رخ داده است از رابطه مقابل محاسبه می‌شود

نتیجه:

مثال ۲۰: اگر  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$  و  $P(B') = \frac{1}{3}$  باشد،  $P(A | B)$  را بیابید.



مثال ۲۱: اگر  $P(A) = \frac{1}{2}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $P(A | B') = \frac{1}{4}$  باشند، حاصل  $P(A \cap B)$  کدام است؟



$\frac{1}{6}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{8}$  (۱)

مثال ۲۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند، حاصل  $P((A - B) | A)$  کدام است؟



$1 - P(B)$  (۴)

$1 - P(A)$  (۳)

$P(B)$  (۲)

$P(A)$  (۱)

مثال ۲۳: فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلیتترین رقیبش را ببرد  $\frac{1}{6}$  باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر  $\frac{1}{4}$  و در صورتی

که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به  $\frac{1}{3}$  افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق «قهرمان شدن» یا بردن اصلیتترین

رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟



شماره: ۲۲

ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد  $A$  و  $B$  هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده  $A$ ،  $\frac{1}{5}$  و احتمال واکنش نشان دادن ماده  $B$ ،  $\frac{1}{4}$  است. اگر ماده  $A$  واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده  $B$ ،  $\frac{1}{4}$  خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد  $A$  یا  $B$  واکنش نشان خواهد داد؟



شماره: ۲۳

کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. دو مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره اول سفید است، احتمال سبز بودن مهره دیگر را بیابید.



شماره: ۲۴

کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. سه مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره اول سفید است، الف) احتمال سبز بودن دو مهره دیگر ب) احتمال سفید بودن دو مهره دیگر را بیابید.



شماره: ۱۰۵

از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

تجربی ۹۱

$$\frac{2}{7} \quad (۱) \qquad \frac{5}{14} \quad (۲) \qquad \frac{3}{7} \quad (۳) \qquad \frac{4}{7} \quad (۴)$$



شماره: ۱۰۶

در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟

(تمرین کتاب درس)

$$\frac{1}{7} \quad (۱) \qquad \frac{1}{14} \quad (۲) \qquad \frac{1}{21} \quad (۳) \qquad \frac{3}{14} \quad (۴)$$

شماره: ۱۰۷

در یک مسابقه اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر  $\frac{7}{15}$  است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی شود، برابر  $\frac{1}{15}$  است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان می‌رسد؟

$$\frac{16}{17} \quad (۱) \qquad \frac{15}{17} \quad (۲) \qquad \frac{14}{17} \quad (۳) \qquad \frac{7}{17} \quad (۴)$$





(( امام علی(ع): توکل بر خداوند، مایه نجات از هر بدی و محفوظ بودن از هر دشمنی است. ))

شماره ۳۰: در یک خانواده سه فرزندی احتمال دختر بودن فرزند سوم یک خانواده چیست، در صورتی که بدانیم دو فرزند اول پسرند؟



تست ۱۱۱: در یک خانواده‌ی دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

تجربی خارج ۸۵



تست ۱۱۲: یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

$$\frac{4}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

تجربی خارج ۸۷



تست ۱۱۳: در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

$$\frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

تجربی خارج ۸۹



تست ۱۱۴: از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

تجربی ۹۱

$$\frac{4}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{14} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{7} \quad (۱)$$



تست ۱۱۵: تاسی را ۴ بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب‌های اول و دوم برابر ۸ باشد، احتمال آنکه مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب‌های سوم و چهارم برابر ۶ باشد، چقدر است؟



$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{31}{216} \quad (۱)$$



**نکته:** اگر در مسالهای به احتمال به وقوع پیوستن يك پيشامد توجه نشود، بدون توجه به آن مساله را حل می‌کنیم.

**تجربہ ۹۲:** - در جعبه‌ای ۶ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج شده سفید است؟

تجربہ ۹۲

(۱)  $\frac{5}{14}$       (۲)  $\frac{3}{7}$       (۳)  $\frac{2}{5}$       (۴)  $\frac{3}{5}$

**تجربہ ۸۸:** - در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش را از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش، سفید و سومین موش، سیاه است؟

تجربہ ۸۸

(۱)  $\frac{11}{56}$       (۲)  $\frac{17}{56}$       (۳)  $\frac{13}{56}$       (۴)  $\frac{15}{56}$



معادله خط:

الف) معادله گسترده: معادله گسترده خط به صورت  $ax + by + c = 0$  است. در این حالت شیب خط از رابطه‌ی  $-\frac{a}{b}$  و عرض از مبدا خط از رابطه‌ی  $-\frac{c}{b}$  به دست می‌آید.

الف) معادله استاندارد: معادله استاندارد خط به صورت  $y = mx + b$  است که در آن  $m$  شیب خط و  $b$  عرض از مبدا آن را نشان می‌دهد. خط‌های  $x = a$  خط‌های عمودی با شیب تعریف نشده و خط‌های  $y = a$  افقی با شیب صفر هستند.

مثال: شیب و عرض از مبدا خط‌های زیر را بیابید و سپس آن‌ها را رسم کنید.

$$4x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 4x - 2$$

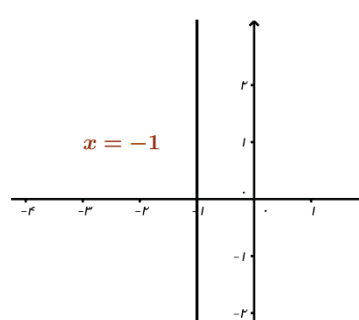
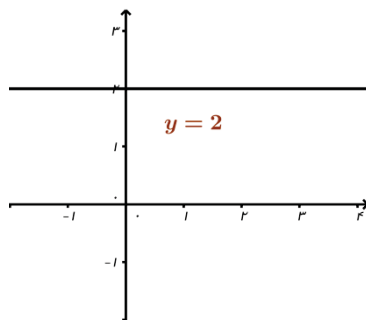
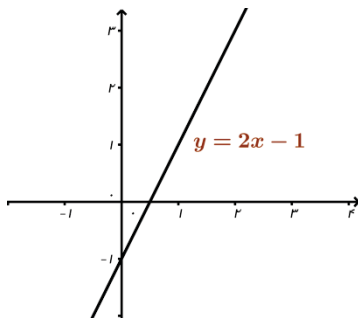
$$y = 2$$

$$x = -1$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \times \\ b = \times \end{cases}$$



نکته: اگر  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  دو نقطه از خط باشند، شیب خط از رابطه  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  بدست می‌آید.

نکته: معادله خطی که از دو نقطه  $A = (x_1, y_1)$  و  $B = (x_2, y_2)$  می‌گذرد به صورت

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ است که در آن } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکته: هر دو خط موازی، شیب برابری دارند و هر دو خط عمود، شیب‌شان عکس و قرینه یکدیگر است. اگر این دو حالت اتفاق نیافتد، دو خط متقاطع خواهند بود.

مثال: معادله خطی را بیابید که از  $A(2, 0)$  بگذرد و بر خط  $2y = 3x - 1$  عمود باشد.

$$2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow m' = -\frac{2}{3} \xrightarrow{A(2,0)} y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$



(( حضرت علی(ع): عادت بد، دشمنی است که با قدرت بر صاحبش حکومت می‌کند. )))

تست ۱: اگر دو خط  $y = mx + 5$  و  $2y - 3x = 1$  با هم موازی باشند، مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$      
  (۲)  $\frac{3}{2}$      
  (۳) ۳     
  (۴) -۳



تست ۲: اگر خط گذرنده از دو نقطه  $A(m-1, 2)$  و  $B(1, 4)$  بر خط  $2y + 3x = 1$  عمود باشد،  $m$  کدام است؟

- (۱) ۱     
  (۲) ۲     
  (۳) -۱     
  (۴) -۲



تست ۳: از نقطه  $A(3, 2)$  خطی موازی خط  $3x + 2y = 1$  رسم کرده‌ایم. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

- (۱) ۱۱     
  (۲)  $\frac{6}{5}$      
  (۳) ۸     
  (۴)  $\frac{7}{5}$



تست ۴: به ازای کدام مقادیر  $a$ ، نقاط  $(a, 3)$  و  $(6, 4a + 1)$  و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

- (۱)  $2, \frac{9}{4}$  (تجربی خارج ۸۵)     
  (۲)  $-\frac{3}{4}, 2$      
  (۳)  $2, -\frac{3}{4}$      
  (۴)  $2, -\frac{9}{4}$



تست ۵: اگر سه نقطه متمایز  $A(4, 1)$ ،  $B(a+1, 2a-2)$  و  $C(a+3, 2a-5)$  در یک امتداد باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲     
  (۲)  $\frac{15}{7}$      
  (۳)  $\frac{16}{7}$      
  (۴)  $\frac{17}{7}$



تست ۶: اگر خط  $y = nx + 4$  بر دو خط  $y = (m-5)x + 7$  و  $y = (7-m)x - 1$  عمود باشد، حاصل  $m - n$  کدام است؟

- (۱) ۲     
  (۲) ۵     
  (۳) ۷     
  (۴) صفر



تست ۷

عرض از مبدأ خط گذرا بر نقطه  $(-1, 5)$  و عمود بر خط  $y = 2x + 1$  کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

(انسانی ۹۵)

تست ۸

به ازای کدام مقادیر  $m$  خط به معادله  $y = mx + m - 3$  از ناحیهٔ دوّم محورهای مختصات، نمی‌گذرد؟

هیچ مقدار  $m$  (۴)

$m \leq 0$  (۳)

$m \geq 2$  (۲)

$0 \leq m \leq 2$  (۱)

(انسانی ۹۴)

تست ۹

خط گذرنده از دو نقطه  $(2, 5)$  و  $(-1, 3)$ ، خط به معادله  $y + x + 3 = 0$  را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(انسانی ۹۲)

تست ۱۰

فاصله نقطه  $A(1, 0)$  از نقطه تلاقی دو خط به معادلات  $y = 2x + 3$  و  $x + y = 0$  کدام است؟

$2\sqrt{2}$  (د)

$\sqrt{5}$  (ج)

۲ (ب)

$\sqrt{2}$  (الف)

(انسانی ۸۳)

تست ۱۱

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، خط به معادله  $y = (m - 1)x + 2 - m$  از ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات،

نمی‌گذرد؟

(انسانی خارج ۹۴)

هیچ مقدار  $m$  (۴)

هر مقدار  $m$  (۳)

$1 < m < 2$  (۲)

$m > 1$  (۱)



طول پاره‌خط و نقطه‌ی وسط آن:

الف) فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1)$ ,  $A(x_2, y_2)$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

نکته: اگر دو نقطه هم عرض باشند، فاصله آن‌ها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

نکته: اگر دو نقطه هم طول باشند، فاصله آن‌ها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

ب) نقطه وسط دو نقطه  $A(x_1, y_1)$ ,  $A(x_2, y_2)$  از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

**مثال ۱:** فاصله دو نقطه  $A = (1, 0)$ ,  $B = (-2, 4)$  و همچنین نقطه وسط آن‌ها را بیابید.

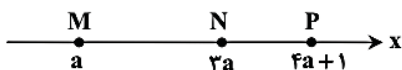


**مثال ۲:** اگر دو نقطه  $A = (m - 4n, m - n)$  و  $B = (2m + n - 3, m + n + 2)$  به ترتیب روی قسمت مثبت محور  $x$  و  $y$  ها باشند، طول پاره‌خط  $AB$  کدام است؟

- ۲ (۱)       $2\sqrt{2}$  (۲)      ۵ (۳)      ۴ (۴)



**مثال ۳:** در شکل مقابل داریم:  $2MN + MP = 22$ . اندازه پاره‌خط  $NP$  کدام است؟



- ۶ (۱)  
۵ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴)



**مثال ۴:** قرینه نقطه  $A(a - 1, b - 5)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$ ، نقطه  $B(2b + 5, 2a + 1)$  می‌باشد.  $ab$  کدام است؟

- ۸۰ (۴)      ۸۰ (۳)      -۴۰ (۲)      ۴۰ (۱)



تست‌ها: در مثلثی با رئوس  $A(2,5)$ ،  $B(3,7)$  و  $C(-1,5)$  معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  کدام است؟

$x + 2y = 12$  (۴)

$y - x = 3$  (۳)

$x + y = 7$  (۲)

$2x + y = 9$  (۱)



تست‌ها: نقاط  $A(7,5)$  و  $C(3,9)$  دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

۲۴ (۴)

$4\sqrt{10}$  (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)



تست‌ها: اگر نقاط  $A(2,1)$ ،  $B(4,-2)$ ،  $C(6,5)$  و  $D(a,b)$  مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  باشند، حاصل  $ab$  کدام است؟

صفر (۴)

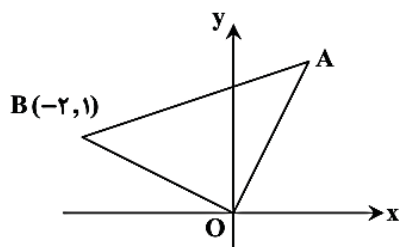
۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۰۸ (۱)



تست‌ها: نقطه  $A$  در ناحیه اول دستگاه مختصات و روی خط  $y = 2x$  قرار دارد. اگر مثلث  $OAB$  در رأس  $O$  متساوی‌الساقین باشد، عرض نقطه  $A$  چقدر است؟



چقدر است؟

۶ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۴)



مثال ۲: مثلث  $ABC$  با رئوس  $A = (0, 2)$ ،  $B = (2, -2)$ ،  $C = (-3, 1)$  را در نظر بگیرید. طول و معادله میانه‌ی وارد بر ضلع  $BC$  و محیط مثلث را بیابید.



تست ۱۹: - چهارضلعی ABCD یک لوزی است که در آن مختصات رأس A به شکل  $A(3, -2)$  است و قطر BC روی خط  $y = 2x + 1$  قرار دارد. مختصات نقطه D کدام است؟

(۴)  $(-3, 3)$

(۳)  $(-3, 5)$

(۲)  $(-4, 3)$

(۱)  $(-5, 1)$



فاصله نقطه از خط:



فاصله نقطه  $A = (x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

نکته: فاصله خط  $ax + by + c = 0$  از مبدا مختصات از رابطه  $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

نکته: فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از رابطه  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

مثال ۳: فاصله خطوط  $3x - 2y = 1$  و  $4x - 1 = y$  از نقطه  $A = (1, -2)$  و از مبدا مختصات بیاید.



تست ۲۰: فاصله دو خط  $y = 2x + 11$  و  $y = 2x - 4$  از یکدیگر چند برابر  $\sqrt{5}$  است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



تست ۲۱: - دو ضلع یک مربع بر دو خط موازی  $x + 2y = 4$  و  $mx - 4y = 8$  منطبق هستند. مساحت این مربع کدام است؟

(۴)  $12/8$

(۳)  $6/4$

(۲)  $14/4$

(۱)  $7/2$



تست ۲۲: - مجموع طول و عرض نقطه‌ای واقع بر خط  $y - x = 2$  که از خط  $3x - 4y = 5$  به فاصله ۳ است، کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۵۴

(۳) -۲

(۲) -۶

(۱) -۵۴



مثال ۴: مثلث  $ABC$  با رئوس‌های  $A = (0, 3)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $C = (1, -1)$  را در نظر بگیرید. معادله ارتفاع وارد بر ضلع  $AB$  و طول آن را بیابید.



سوال ۲۳: یکی از اضلاع مربعی بر خط  $L: y = 2x - 1$  واقع است. اگر  $A(3, 0)$  یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن چقدر است؟

- ۴ (۴)                      ۳ (۳)                      ۵ (۲)                      ۶ (۱)



سوال ۲۴: فاصله‌ی بین دو خط به معادلات  $y = x\sqrt{3} + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟

- $2 + \sqrt{3}$  (۴)                       $\sqrt{3} + 1$  (۳)                       $\sqrt{3} - 1$  (۲)                       $2 - \sqrt{3}$  (۱)

خارج ۸۸

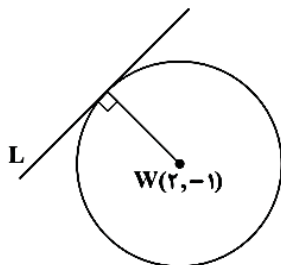


سوال ۲۵: معادله‌ی چهار ضلع یک مستطیل به صورت  $2x + y = 5$ ,  $2x + y = 3$ ,  $x - 2y = 14$  و  $x + ay = 6$  می‌باشد. محیط این مستطیل کدام است؟

- $8\sqrt{5}$  (۴)                       $4\sqrt{5}$  (۳)                       $12\sqrt{5}$  (۲)                       $2\sqrt{5}$  (۱)



سوال ۲۶: خط  $L: 3x - 4y = 0$  بر دایره‌ای به مرکز  $W(2, -1)$  مماس است. شعاع دایره چقدر است؟



- $\frac{2}{5}$  (۱)



- ۲ (۲)

- ۳ (۳)

- $\frac{3}{5}$  (۴)

سوال ۲۷: دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  واقع بر خط به معادله‌ی  $2x - y = 0$  از خط به معادله‌ی  $3x = 4y + 5$  به فاصله‌ی ۲ قرار دارند. طول پاره‌خط  $AB$  کدام است؟

- $4\sqrt{2}$  (۴)                       $3\sqrt{2}$  (۳)                       $4\sqrt{5}$  (۲)                       $2\sqrt{5}$  (۱)



((اهام هادی(ع): نارضایتی پدر و مادر، کمرتوانی را به دنبال دارد و آدمی را به ذلت می‌کشاند.)))

تست ۲۸: دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- تجربی ۹۲
- (۱)  $\frac{9}{8}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{25}{8}$  (۴)  $\frac{25}{4}$



تست ۲۹: نقطه  $A(3, -1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  است. مساحت این مربع کدام است؟

- خارج ۹۳
- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰



تست ۳۰: نقاط  $M(4, 2)$ ،  $N(7, 6)$  و  $P(0, 5)$  رئوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

- (۱)  $11/5$  (۲) ۱۲ (۳)  $12/5$  (۴) ۱۳



تست ۳۱: نقطه  $O'(3, 2)$  مرکز لوزی ABCD است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط  $6x + y = 8$  معادله یکی از اضلاع این لوزی باشد، محیط لوزی چقدر است؟

- (۱)  $8\sqrt{37}$  (۲) ۴۸ (۳)  $10\sqrt{24}$  (۴)  $4\sqrt{68}$



تست ۳۲: از نقطه  $A(3, 2)$  خط  $y = 2x - 4$  را مماس بر دایره‌ای به مرکز  $W(-1, 2)$  رسم کرده‌ایم. فاصله A تا نقطه تماس چند برابر  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴



تست ۳۳: اگر داشته باشیم  $A(6, 5)$ ،  $B(4, 1)$  و  $C(-2, -1)$ ، فاصله نقطه  $A$  از عمود منصف پاره خط  $BC$  چند برابر  $\sqrt{10}$  است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

$\frac{9}{5}$  (۴)

$\frac{9}{10}$  (۳)

تست ۳۴: یکی از اضلاع مربعی بر خط  $y = 2x + 1$  واقع است. اگر  $A(-1, 2)$  یکی از رئوس این مربع باشد، اندازه قطر مربع کدام است؟

$\frac{5}{9}$  (۴)

$\frac{5\sqrt{10}}{3}$  (۳)

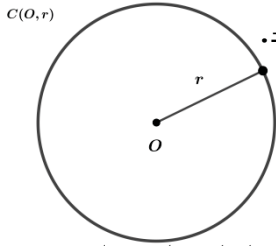
$\frac{9}{5}$  (۲)

$\frac{3\sqrt{10}}{5}$  (۱)

شرح ۵: مثلث  $ABC$  با رئوسهای  $A = (0, 4)$ ،  $B = (-3, 7)$ ،  $C = (2, 5)$  را در نظر بگیرید. فاصله پای ارتفاع و میانه وارد بر ضلع  $AC$

را از یکدیگر بیابید.





دایره: دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$ ، یا به عبارتی  $C(O, r)$ ، را در نظر بگیرید.

الف) همی نقاط واقع بر دایره، به فاصله  $r$  از مرکز آن قرار دارند.

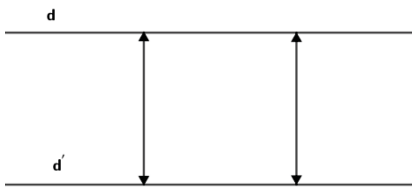
ب) هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از مرکز دایره برابر  $r$  باشد، بر روی دایره قرار دارد.

نتیجه: دایره مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت یک فاصله ثابتی دارد و هر

نقطه از صفحه که این ویژگی را داشته باشد نیز، روی محیط دایره قرار دارد.

خطوط موازی: خط  $d$  موازی خط  $d'$  است، هرگاه فاصله آنها

از یکدیگر، برابر یک عدد ثابت باشد.



**تست ۱:** فاصله نقطه  $A$  از خط  $d$ ، برابر ۱ سانتی‌متر است. چند نقطه روی خط  $d$  وجود دارد که فاصله‌اش از نقطه  $A$ ، برابر ۲ سانتی‌متر باشد؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱



**تست ۲:** فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  از یکدیگر برابر ۵ است. به مرکز  $A$  و به شعاع ۴ یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز  $B$  به شعاع ۳ کمانی دیگر رسم می‌کنیم. اگر دو کمان یکدیگر را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کنند، محیط چهارضلعی  $AMBN$  چقدر است؟

۴) ۱۲

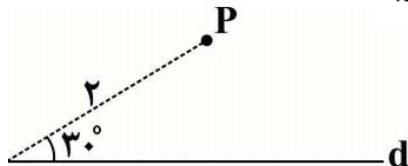
۳) ۱۴

۲) ۱۶

۱) ۱۹



**تست ۳:** با توجه به شکل زیر، چند نقطه وجود دارد که از نقطه  $P$  به فاصله ۲ و از خط  $d$  به فاصله ۱ باشد؟



۱) صفر ۳) ۳

۲) ۲ ۴) ۴



«(( اندیشیدن به سرانجام هر کار باعث رستگاری است. ))»

تست ۴- اگر فاصله دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر ۶ باشد، در این صورت کدام گزینه نشانگر همه نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۲ باشد؟

- (۱) یک خط موازی با  $d$  و  $d'$  و بین این دو  
 (۲) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  و بین این دو  
 (۳) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  و خارج این دو  
 (۴) چهار خط موازی  $d$  و  $d'$

تست ۵- چند مثلث متمایز با طول اضلاع  $AB = ۵$ ،  $BC = ۶$  و به مساحت ۲۱ وجود دارد؟

- (۱) صفر  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

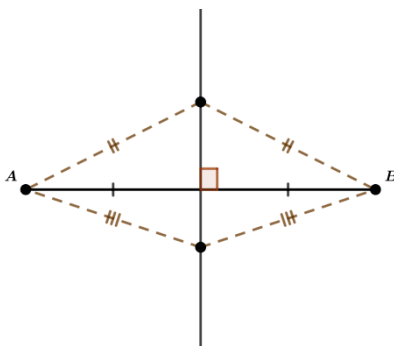
تست ۶- ۱- پاره خط  $AB = ۱۰$  مفروض است. اگر دو نقطه وجود داشته باشد که از  $A$  به فاصله ۶ و از  $B$  به فاصله  $۲x - ۱$  باشد، کمترین مقدار صحیح برای  $x$  کدام است؟

- (۱) ۵  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴



### عمود منصف:

تعریف: عمود منصف هر پاره خط، خطی است که آنرا نصف کند و بر آن عمود باشد.

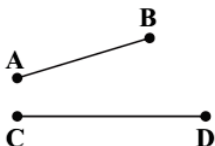


### قضیه:

- (الف) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله قرار دارد.  
 (ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

نتیجه: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله قرار دارد و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

تست ۷- دو پاره خط  $AB$  و  $CD$  در شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. چند نقطه مانند  $O$  روی صفحه وجود دارد که تساوی‌های  $OC = OD$  و  $OA = OB$  برقرار باشند؟



- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) صفر  
 (۴) بی‌شمار

دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۸: دو نقطه  $A$  و  $B$  به فاصله ۶ از یکدیگر قرار دارند. از  $A$  و  $B$  کمان‌هایی به شعاع  $x$  رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط  $P$  و  $Q$  قطع کنند. خطی که از  $P$  و  $Q$  می‌گذرد، عمودمنصف  $AB$  است. مقدار  $x$  کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۹: محل برخورد قطرهای یک مربع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مربع ۸ واحد باشد، دایره و مربع در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۱۰: دو پاره‌خط  $AB$  و  $CD$  را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. نقطه‌ای را که از دو نقطه  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشد و از دو نقطه  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد،  $O$  می‌نامیم. اگر نقطه  $O$  روی عمودمنصف  $BC$  باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟



- ۱)  $AC$  و  $BD$  بر یکدیگر عمودند.  
 ۲) نقطه  $O$  از دو پاره‌خط  $AB$  و  $CD$  به یک فاصله است.  
 ۳) نقاط  $A, B, C, D$  روی یک دایره واقع‌اند.  
 ۴) نقطه  $O$  از دو پاره‌خط  $AD$  و  $BC$  به یک فاصله است.

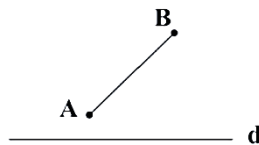
تست ۱۱: اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

- ۱) درون مثلث  
 ۲) روی رأس بزرگ‌ترین زاویه  
 ۳) بیرون مثلث  
 ۴) روی بزرگ‌ترین ضلع

تست ۱۲: همواره چند نقطه در صفحه می‌تواند وجود داشته باشد به طوری که فاصله آنها از نقاط متمایز  $A, B, C, D$  در همان صفحه به یک اندازه باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) بی‌نهایت  
 ۴ (۴) صفر یا یک

تست ۱۳: خط  $d$  و پاره‌خط  $AB$  غیرموازی با  $d$  طبق شکل در صفحه رسم شده است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط  $d$  به فاصله‌ی ۴ واحد و از دو سر پاره‌خط  $AB$ ، فاصله‌ی یکسانی داشته باشد؟



- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر  
 ۴ (۴) ۳



رسم عمود منصف:

برای رسم عمود منصف پاره خط  $AB$  مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:  
 الف) دهانه پرگار را بیش از نصف طول  $AB$  باز کنید و یک بار به مرکز نقطه  $A$  و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز  $B$  کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند  $P$  و  $Q$  قطع کنند.  
 ب) نقاط  $P$  و  $Q$  متعلق به عمود منصف  $AB$  هستند، چون از دو سر پاره خط به یک فاصله هستند.  
 پ) از متصل کردن این نقاط و امتداد دادن آن‌ها، عمود منصف پاره خط  $AB$  بدست می‌آید.

تست ۱۴: اگر طول پاره خط  $MN$  برابر ۷ واحد باشد، آن‌گاه چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از  $M$  به فاصله ۵ واحد و از  $N$  به فاصله ۴ واحد باشد؟

- ۱ (۲)
- ۲ (۴) بی‌شمار

- ۱ (هیچ)
- ۲ (۳)

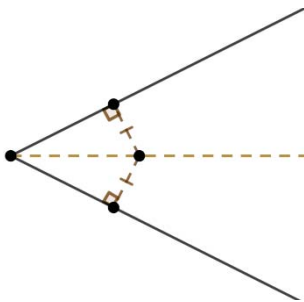


نیم‌ساز:

تعریف: نیم‌ساز یک زاویه نیم‌خطی است که آن زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

قضیه:

الف) هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله قرار دارد.  
 ب) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد.



نتیجه: نیم‌ساز مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله قرار دارد و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد.

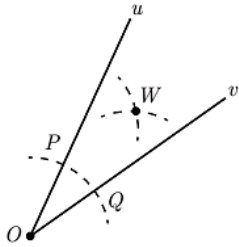
تست‌ها: - نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  رأس‌های مثلث دلخواه  $ABC$  هستند. محل تلاقی نیم‌سازهای زاویه‌های  $A$  و  $B$  را  $O$  می‌نامیم. فاصله این نقطه را از اضلاع مثلث،  $h_1$ ،  $h_2$  و  $h_3$  می‌نامیم. کدام گزینه در مورد این فاصله‌ها درست است؟

$h_1 = h_2 = h_3$  (۴)     
  $h_1 h_2 h_3 = 1$  (۳)     
  $\frac{h_1 + h_2}{h_3} = 3$  (۲)     
  $h_1 + h_2 + h_3 = 1$  (۱)



رسم نیم‌ساز:

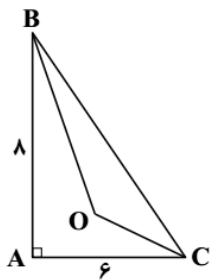
الف) زاویه  $\hat{O}v$  را در نظر بگیرید. به مرکز  $O$  و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خطهای  $Ou$  و  $Ov$  را در نقاطی مانند  $P$  و  $Q$  قطع کند. واضح است که  $OP = OQ$ .



ب) دهانه پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط  $PQ$  باز کنید و یک بار به مرکز  $P$  و بار دیگر به مرکز  $Q$  کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌های مانند  $W$  قطع کنند. واضح است که  $PW = QW$ .

پ) نیم خط رسم شده از نقاط  $O$  و  $W$  نیم‌ساز زاویه  $\hat{O}v$  است. زیرا دو مثلث  $OPW$  و  $OQW$  به حالت سه ضلع هم‌نهشت هستند و در نتیجه  $\hat{W}Ov = \hat{W}Ou$ .

تست ۱۷: در شکل روبه‌رو، مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه است ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). اگر نیمسازهای دو زاویه  $B$  و  $C$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند، فاصله  $O$  از وتر

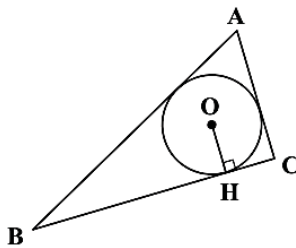


مثلث  $ABC$  چقدر است؟



- (۱)  $\frac{3}{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴)  $\frac{5}{2}$

تست ۱۷: در شکل روبه‌رو، دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $OH$  بر هر سه ضلع مثلث  $ABC$  مماس است. نقطه  $O$  محل تقاطع ..... در مثلث  $ABC$  است.



(۱) نیمسازها

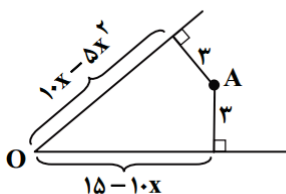


(۲) میانه‌ها

(۳) عمودمنصف‌ها

(۴) ارتفاع‌ها

تست ۱۸: در شکل روبه‌رو فاصله نقطه  $O$  تا نقطه  $A$  کدام است؟



- (۱) ۵
- (۲)  $\sqrt{34}$
- (۳) ۶
- (۴)  $\sqrt{35}$

تست ۱۹: - چه تعداد از موارد زیر نادرست است؟

- الف) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.  
 ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصله یکسان باشد، بر روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.  
 پ) مثلثی وجود دارد که طول ضلع‌های آن ۳، ۴ و ۸ است.

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) صفر

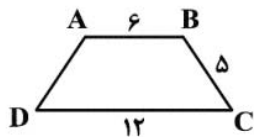
تست ۲۰: - پاره‌خط  $AB = 10$  مفروض است. اگر دو نقطه وجود داشته باشد که از  $A$  به فاصله ۶ و از  $B$  به فاصله  $2x - 1$  باشد، کمترین مقدار صحیح برای  $x$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

تست ۲۱: - در مثلث  $ABC$  طول دو ضلع  $AB$  و  $AC$  به ترتیب ۴ و ۶ سانتی‌متر و مقدار مساحت برابر ۱۰ سانتی‌مترمربع است. اگر نیمساز داخلی  $\hat{A}$ ، ضلع  $BC$  را در نقطه  $D$  قطع کند، فاصله نقطه  $D$  از ضلع  $AB$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)  $\frac{3}{2}$

تست ۲۲: در دوزنقه متساوی‌الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویه  $B$  و  $C$  هم‌دیگر را در نقطه  $O$  قطع می‌کنند. فاصله  $O$  از ضلع  $BC$  کدام است؟




۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)  $\frac{2}{5}$

تست ۲۳: چند نقطه روی یک دایره وجود دارد که از دو خط متقاطع  $d_1$  و  $d_2$  به یک فاصله باشد؟


۱ (۱) حداکثر ۲      ۲ (۲) حداقل ۲  
 ۳ (۳) حداکثر ۴      ۴ (۴) حداقل ۴

((تنها خوبی موجود در جهان، شناخت و دانش و تنها شر و زشتی نادانی است.))

۲۴: داخل مثلث  $ABC$  دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن مماس باشد. اگر  $O$  مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

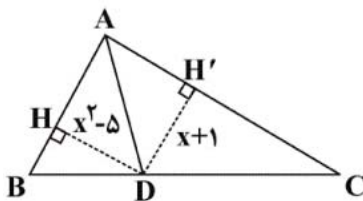
- (۱) قطر دایره برابر ضلع کوچکتر مثلث است. 
- (۲) نقطه‌ی  $O$  محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.
- (۳) قطر دایره برابر ضلع بزرگ‌تر مثلث است.
- (۴) نقطه‌ی  $O$  محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.


۲۵: به مرکز  $O$  کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه  $xOy$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند. حال به مراکز  $A$  و  $B$  کمان‌هایی به طول شعاع  $\frac{3}{4}AB$

رسم می‌کنیم تا این دو کمان همدیگر را در نقطه  $C$  درون زاویه قطع کنند. در این صورت کدام گزینه لزوماً درست نیست؟ 


- (۱)  $OC$  از وسط  $AB$  می‌گذرد.
- (۲) مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است.
- (۳)  $OC$  نیمساز زاویه  $xOy$  است.
- (۴)  $OC$  عمود بر یا، ه‌خط  $AB$  است.

۲۶: در شکل زیر، اگر  $AC = x + 3$ ،  $AB = x + 2$  و  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  باشد، نسبت  $\frac{AC}{AB}$  کدام است؟ 



- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  
- (۲)  $\frac{6}{5}$  (۴)  $\frac{7}{6}$

۲۷: مثلثی به اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  مفروض است. اگر فاصله‌ی محل برخورد نیمسازها از ضلع  $a$  برابر  $x^2 + 6x - 5$  و از ضلع  $b$  برابر  $x^2 + 2x + 7$

باشد، فاصله‌ی محل برخورد نیمسازها تا ضلع  $c$  چقدر است؟ 

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵



نسبت و تناسب:

هر دو نسبت مساوی یک تناسب را تشکیل می‌دهند. در زیر تعدادی از خواص مهم در تناسب را بررسی می‌کنیم:

a)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$  طرفین وسطین      b)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  معکوس کردن طرفین

c)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$  ،  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  تعویض جای طرفین با وسطین

d)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  ،  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$  ترکیب نسبت در صورت و مخرج

e)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  ،  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$  تفضیل نسبت در صورت و مخرج

f)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  ،  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

EX)  $\frac{5}{3} = \frac{20}{12} \Rightarrow \frac{5+3}{3} = \frac{20+12}{12}$  ،  $\frac{5-3}{3} = \frac{20-12}{12}$  ،  $\frac{5}{3} = \frac{5+20}{3+12}$

توجه: اگر  $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4} = \frac{e}{5}$  ، آن‌گاه حاصل عبارت  $\frac{b+c+d+e}{a} - \frac{a+b+d+e}{c}$  کدام است؟

۱۰ (۴)                      ۹ (۳)                      ۸ (۲)                      ۷ (۱)



استدلال استقرایی:

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود، استدلال استقرایی نامیده می‌شود. پس در حالت کلی می‌توان گفت در این استدلال از جزء به کل می‌رسیم.

استدلال استنتاجی:

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه‌ی واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفتیم، بیان می‌شود.

نکته: استدلال استقرایی، استدلال دقیقی نیست ولی برای رسیدن به یک فرضیه مناسب است. اما استدلال استنتاجی کاملاً دقیق است.

نکته: برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند. مانند قضیه فیثاغوث، قضیه تالس.



استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم، نامیده می‌شود.

(۴) استدلال استقرایی

(۳) برهان خلف

(۲) قضیه

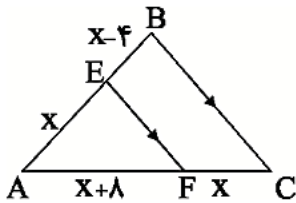
(۱) استدلال استنتاجی



قضیه تالس:

اگر در مثلث  $ABC$ ، خطی موازی ضلع  $BC$  رسم کنیم به طوری که اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط

$$D \text{ و } E \text{ قطع کند، آن‌گاه خواهیم داشت: } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



باتوجه به شکل مقابل، مقدار  $x$  کدام است؟ ( $EF \parallel BC$ )

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲



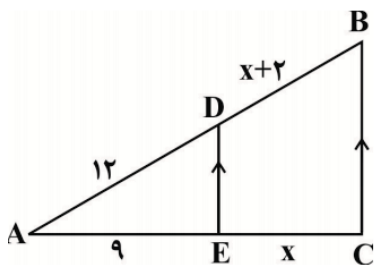
مطابق شکل، اگر  $DE \parallel BC$  باشد، اندازه  $EC$  کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲



تعمیم قضیه تالس:

اگر در مثلث  $ABC$ ، خطی موازی ضلع  $BC$  رسم کنیم به طوری که اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب

$$\text{در نقاط } D \text{ و } E \text{ قطع کند، آن‌گاه خواهیم داشت: } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



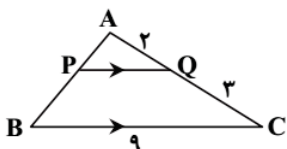
- در شکل روبه‌رو،  $PQ \parallel BC$ . طول پاره‌خط  $PQ$  کدام است؟

(۱) ۳/۶

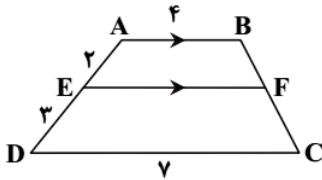
(۲) ۴/۲

(۳) ۴/۵

(۴) ۶



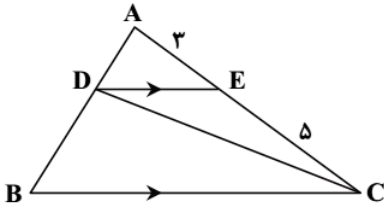
تست ۷: - اگر در ذوزنقه  $ABCD$  داشته باشیم  $EF \parallel AB$ ، طول  $EF$  چقدر است؟



- (۱) ۵
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳)  $\frac{5}{3}$
- (۴)  $\frac{5}{4}$



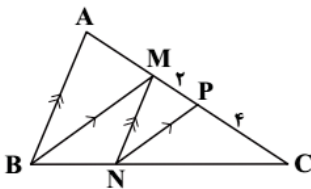
تست ۷: - در شکل روبه‌رو،  $CD$  نیمساز زاویه  $C$  است. اگر  $DE \parallel BC$ ، حاصل  $\angle DE + \angle BC$  چقدر است؟



- (۱) ۴۰
- (۲) ۴۵
- (۳) ۵۰
- (۴) ۵۵



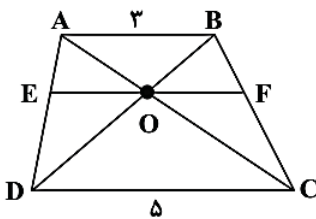
تست ۸: - در مثلث  $ABC$ ، داریم  $NP \parallel MB$  و  $MN \parallel AB$ . طول  $AM$  چقدر است؟



- (۱)  $\frac{7}{2}$
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳) ۳
- (۴) ۴



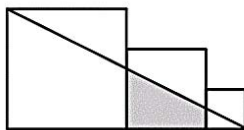
تست ۹: - در ذوزنقه  $ABCD$  شکل زیر داریم:  $EF \parallel AB$ . حاصل  $\frac{OE}{OF}$  کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{3}{8}$
- (۳)  $\frac{3}{5}$
- (۴)  $\frac{5}{8}$



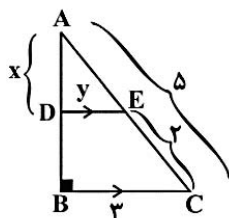
تست ۱۰: - در شکل زیر، سه مربع به طول اضلاع ۴، ۲ و ۱ واحد کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت ذوزنقه سایه زده شده کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲)  $\frac{15}{7}$
- (۳)  $\frac{16}{7}$
- (۴)  $\frac{17}{7}$



تست ۱۱: - در شکل زیر،  $x + y$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{4}{1}$
- (۲)  $\frac{4}{2}$
- (۳)  $\frac{5}{2}$
- (۴)  $\frac{5}{4}$

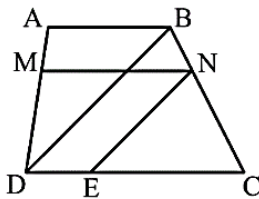


تست ۱۲: در مثلث  $ABC$ ،  $AM$  میانه‌ی نظیر رأس  $A$  است و نیمسازهای دو زاویه‌ی  $AMB$  و  $AMC$ ، اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $P$  و  $Q$  قطع می‌کنند. اگر  $AM = 6$  و  $BC = 10$  باشد، آن‌گاه طول  $PQ$  کدام است؟

۶ (۱)  $\frac{60}{11}$  (۲)

۵ (۴)  $\frac{50}{11}$  (۳)

تست ۱۳: در دوزنقه زیر،  $MN \parallel AB \parallel CD$  و  $NE \parallel BD$ . اگر  $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{7}$  و  $CD = 15$  باشد، آن‌گاه تفاضل طول‌های دو پاره خط  $DE$  و  $CE$  کدام است؟



کدام است؟

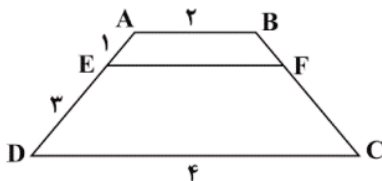
۶/۵ (۱)

۶ (۲)

۵/۵ (۳)

۵ (۴)

تست ۱۴: دوزنقه متساوی‌الساقین  $ABCD$  مفروض است. طول پاره خط  $EF$  که موازی دو قاعده رسم می‌شود، کدام است؟



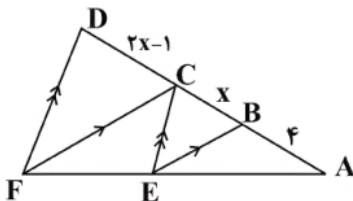
۱/۵ (۱)

۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

تست ۱۵: در شکل زیر، اندازه پاره خط  $AD$  کدام است؟ ( $BE \parallel CF, EC \parallel FD$ )



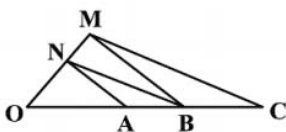
۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

تست ۱۶: در شکل زیر،  $NA \parallel MB$  و  $NB \parallel MC$  می‌باشد. اگر  $OA = 2x - 8$  و  $OB = x$  و  $OC = x + 3$  باشد، اندازه پاره خط  $AB$  چقدر است؟



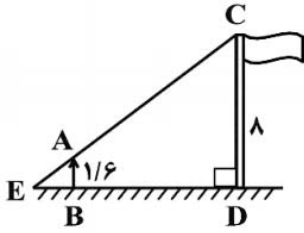
۲ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

۳ (۳)

تست ۱۷: در شکل زیر پاره خط  $AB$  شخصی است که در فاصله‌ی ۴ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر اندازه‌ی قد شخص  $1/6$  متر باشد، طول



کابل  $EC$  چند متر است؟

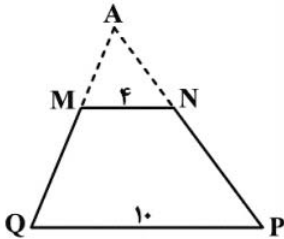
$\sqrt{89}$  (۲)

$\sqrt{91}$  (۱)

۹ (۴)

۱۱ (۳)

تست ۱۸: در شکل زیر محیط دوزنقه  $MNPQ$  برابر ۲۳ است. امتداد ساق‌های این دوزنقه در  $A$  متقاطع‌اند. محیط مثلث  $AMN$  کدام است؟



۱۴ (۱)

۱۲ (۲)

۱۰ (۳)

۱۸ (۴)

تست ۱۹: در مربع  $ABCD$  ضلع  $CD$  را از طرف  $C$  به اندازه‌ی ضلع مربع تا نقطه‌ی  $E$  امتداد می‌دهیم، به طوری که  $AE$  ضلع  $BC$  را در  $F$  قطع کند.

مساحت چهار ضلعی  $AFCD$  چند برابر مساحت مربع است؟

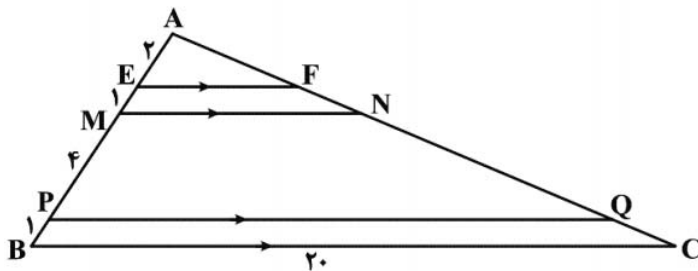
$\frac{4}{7}$  (۴)

$\frac{2}{4}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{4}{5}$  (۱)

تست ۲۰: در شکل مقابل، حاصل  $EF + MN + PQ$  کدام است؟



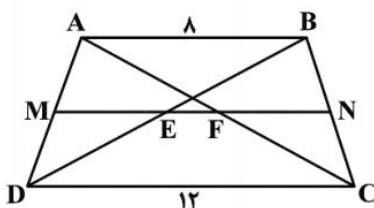
۲۸ (۱)

۳۰ (۲)

۳۲ (۳)

$\frac{61}{2}$  (۴)

تست ۲۱: در شکل زیر،  $ABCD$  دوزنقه و  $M$  و  $N$  وسط دو ساق است. طول  $EF$  کدام است؟



۲ (۱)

$1/5$  (۲)

۱ (۳)

$\frac{3}{4}$  (۴)

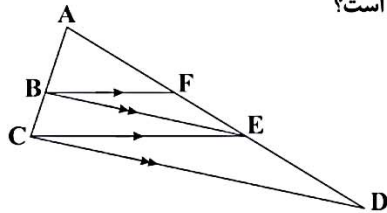
تست ۲۲: در مربعی به ضلع  $2\sqrt{2}$  واحد، فاصله‌ی وسط یک ضلع از قطر مربع کدام است؟

$2\sqrt{2}$  (۴)

$\sqrt{2}$  (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



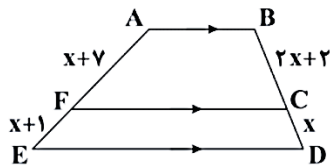
تست ۲۳: در شکل زیر،  $BE \parallel DC$  و  $BF \parallel CE$  است. اگر  $AF=4$  و  $FD=7$  باشد، مقدار  $AE$  چقدر است؟

$\sqrt{11}$  (۱)

$2\sqrt{11}$  (۲)

$2\sqrt{7}$  (۳)

$2\sqrt{13}$  (۴)



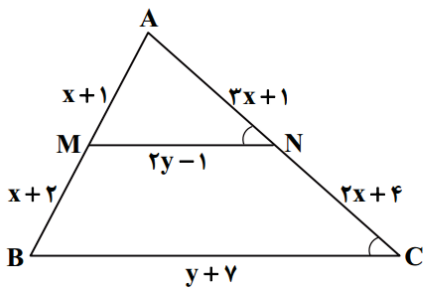
تست ۲۴: در شکل زیر  $AB \parallel FC \parallel ED$  است. اندازه‌ی  $BD$  چقدر است؟

۵ فقط (۱)

۸ فقط (۲)

۸ یا ۵ (۳)

۴ (۴)



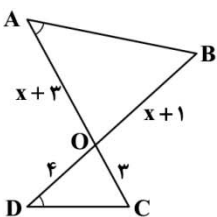
تست ۲۵: در شکل روبه‌رو  $\hat{N} = \hat{C}$ . مقدار  $x+y$  کدام است؟

$\frac{27}{8}$  (۱)

$\frac{19}{8}$  (۲)

$\frac{39}{11}$  (۳)

$\frac{27}{11}$  (۴)



تست ۲۶: در شکل روبه‌رو اگر  $\hat{A} = \hat{D}$ ، مساحت مثلث ODC چند برابر مساحت مثلث OAB است؟

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{4}{25}$  (۱)

$\frac{1}{9}$  (۳)



**عکس قضیه:** اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه ایجاد می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

))) آنان که می‌خواهند خوب زندگی کنند باید به حقیقت نزدیک بشوند، زیرا پس از نیل به مقام حقیقت‌یابی است که از غر و اندوه دنیا دست

برهی‌دارند.)))

**شرح:** عکس قضایای زیر را بنویسید.

**الف)** اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

**ب)** اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

### عکس قضیه تالس:

اگر در مثلث  $ABC$ ، داشته باشیم  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، آن‌گاه  $DE \parallel BC$ .



### قضیه دو شرطی:

فرض کنیم عکس یک قضیه درست باشد. اگر قضیه و عکس آن را در غالب یک جمله بیان کنیم، قضیه حاصل، قضیه دو شرطی نامیده می‌شود. در این صورت می‌گوییم (فرض) اگر و تنها اگر (حکم) و یا اگر (فرض) آن‌گاه (حکم) و برعکس.



**شرح ۲:** الف) قضیه تالس را به صورت دو شرطی بیان کنید.

ب) قضیه فیثاغورس را به صورت دو شرطی بیان کنید.

**تذکره ۳:** کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است.
- ۲) اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، به آن «قضیه دو شرطی» می‌گوییم.
- ۳) در برهان خلف، فرض را نادرست در نظر می‌گیریم و به نادرست بودن حکم می‌رسیم.
- ۴) عکس یک قضیه، ممکن است درست یا نادرست باشد.

### برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

**نکته:** به کمک برهان خلف بسیاری از قضایا و مسایل به سادگی قابل حل هستند. به همین دلیل این نوع استدلال در ریاضی کاربرد زیادی دارد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

**شکل ۳:** به برهان خلف نشان دهید که اگر  $x^2$  عددی زوج باشد، آن گاه  $x$  نیز عددی زوج است.



**شکل ۴:** به برهان خلف نشان دهید که اگر  $x^2$  عددی فرد باشد، آن گاه  $x$  نیز عددی فرد است.



**شکل ۵:** اگر فرض کنیم  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  از مثلث  $ABC$  و  $BD \neq DC$  باشد، آنگاه  $AB \neq AC$ .



**تست ۲۸:** می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم که اگر  $n$  عضو اعداد طبیعی باشد و  $n^2$  عددی فرد باشد، آن گاه  $n$  نیز عددی فرد است، در این صورت کدام گزینه

برای اثبات این مطلب با برهان خلف صحیح است؟



- (۱) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی فرد است و سپس نشان می‌دهیم  $n^2$  نیز فرد است.
- (۲) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی زوج است و سپس نشان می‌دهیم که  $n^2$  فرد خواهد بود.
- (۳) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی زوج است و سپس نشان می‌دهیم که  $n^2$  زوج خواهد بود.
- (۴) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی فرد است و سپس نشان می‌دهیم  $n^2$  زوج خواهد بود.

**مثال نقض:** اگر برای رد حکم از یک مثال استفاده کنیم، به این مثال، مثال نقض می‌گوییم.

**نکته:** برای رد یک حکم، آوردن یک مثال نقض کافی است ولی بیان هر تعداد مثال حکمی را اثبات نمی‌کند.



دانلود از سایت ریاضی سرا

«(موفقیت این نیست که هیچ وقت اشتباه نکنی، بلکه هیچ وقت یک اشتباه را دو بار مرتکب نشی.))»

شرح: با یک مثال نقض، حکم‌هایی زیر را رد کنید.

الف) همه اعداد اول، زوج هستند.

ب) اگر  $(a-1)(b-1) = 0$ ، آن‌گاه  $a = 0$ ،  $b = 0$ .

پ) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

تست ۲۹: کدام یک از حکم‌های کلی زیر، درست است؟

۲) به‌ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، مقدار  $n^2 + n + 41$ ، عددی اول است.  
۴) همه اعداد اول، فرد هستند.

۱) اگر مربع عددی فرد باشد، خود آن عدد زوج است.  
۳) در هر مستطیل، اندازه قطر‌ها با هم برابر است.

تست ۳۰: چه تعداد از موارد زیر را می‌توان به‌صورت قضیه‌ای دوشروطی بیان کرد؟

الف) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.  
ب) اگر  $x = y$ ، آنگاه  $x^2 = y^2$ .

پ) اگر  $n$  عددی زوج باشد، آنگاه  $n^2$  نیز عددی زوج است.

۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) صفر

تست ۳۱: کدام حکم زیر مثال نقض ندارد؟

۱) هر عدد اولی فرد است.  
۲) مقدار  $n^2 + n + 41$  برای هر  $n$  طبیعی اول است.  
۳) همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، متشابه‌اند.  
۴) چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

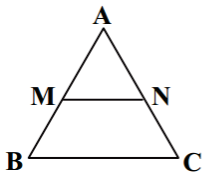
تست ۳۲: ۱- اثبات کدام گزینه به برهان خلف نیاز ندارد؟

۱) اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $n^2$  عددی فرد باشد، آنگاه  $n$  نیز عددی فرد است.

۲) در شکل روبه‌رو اگر  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، آنگاه:  $MN \parallel BC$

۳) از یک نقطه غیرواقع بر یک خط نمی‌توان دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، آنگاه زوایای روبه‌رو با هم برابرند.

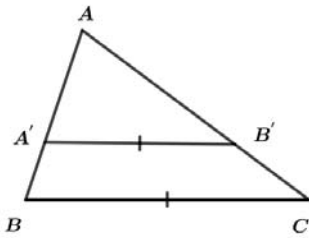
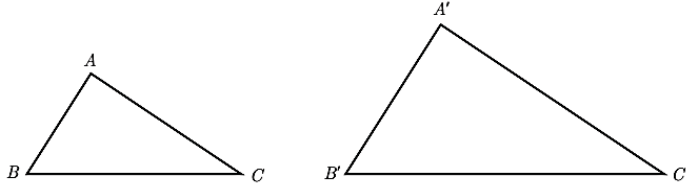






تشابه مثلث‌ها: دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  مشابه هستند هرگاه زوایه‌هایشان برابر و اضلاعشان

متناسب باشند. یعنی: (الف)  $\hat{A} = \hat{A}' = \hat{B} = \hat{B}' = \hat{C} = \hat{C}'$  (ب)  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$



قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها:

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

چند مقدار برای  $a$  وجود دارد که دو مثلث با ابعاد  $\{a, 2, 3\}$  و  $\{4, 5, 8\}$  با هم متشابه باشند؟

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) هیچ

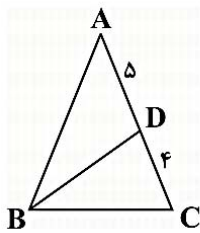


قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

نکته: مثلث حاصل از اتصال وسط اضلاع هر مثلث، با مثلث اولیه مشابه است.



در مثلث زیر  $AB = AC$  و  $BD = BC$  می‌باشد. محیط مثلث  $BDC$  کدام است؟



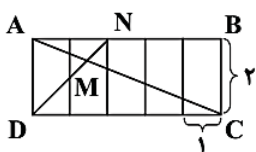
(۱) ۱۰

(۲) ۱۶

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰

در شکل زیر، پنج مستطیل  $2 \times 1$  در کنار یکدیگر مستطیل  $ABCD$  را تشکیل داده‌اند. اندازه پاره خط  $MN$  چند برابر  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  است؟

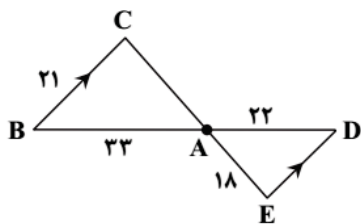


(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴



تست ۴: با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل  $AC + DE$  کدام است؟

۴۱ (۱)

۴۲ (۲)

۴۳ (۳)

۴۴ (۴)



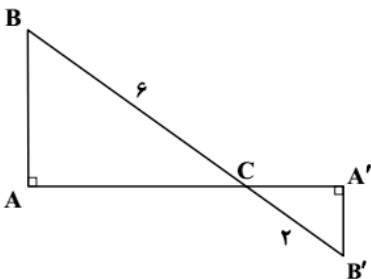
تست ۵: با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث  $ABC$  چند برابر مساحت مثلث  $A'B'C$  است؟

۱۲ (۱)

۹ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



تست ۶: به ازای کدام مقدار  $y$ ، دو مثلث شکل زیر متشابه‌اند؟ ( $AB$  و  $CD$  موازی نیستند.)

۴ (۱)

۳ (۲)

$\frac{4}{5}$  (۳)

۶ (۴)



تست ۷: در شکل زیر  $AB = AC$  و  $BC = DC$ ، حاصل عبارت  $DC^2$  کدام است؟

۴۹ (۱)

۱۴ (۲)

۱۰ (۳)

۳۵ (۴)



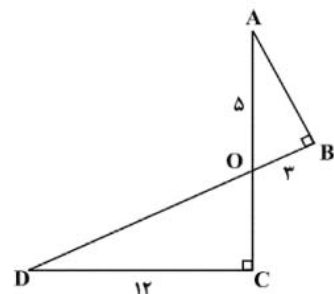
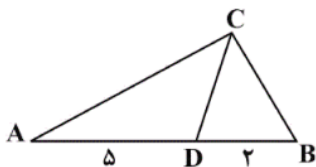
تست ۸: در شکل زیر مساحت مثلث  $COD$  چند برابر مساحت مثلث  $AOB$  است؟

۳ (۱)

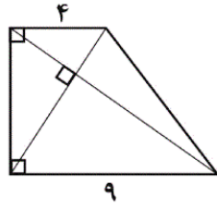
۴ (۲)

۹ (۳)

۱۶ (۴)



((همان دانستن و دریافت کردن فاصله زیادی است، دانستن دشوار نیست اما دریافت کردن دشوار است.))

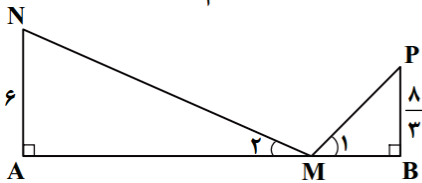


در دوزنقه قائم الزاویه مقابل، اندازه ساق قائم کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)



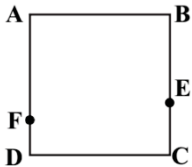
۱- در شکل روبه‌رو اگر طول پاره خط  $AB$  برابر  $10$  و زوایای  $M_1$  و  $M_2$  متمم باشند، آنگاه مساحت مثلث  $AMN$  کدام است؟



- ۱۲ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۹ (۳)
- ۲۱ (۴)



۲- در مربع  $ABCD$  به طول ضلع  $8$ ، نقاط  $E$  و  $F$  به ترتیب روی اضلاع  $BC$  و  $AD$  به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که  $BE = 5$  و  $FD = 2$ . اگر امتداد  $AE$  و  $CF$  یکدیگر را در نقطه  $M$  قطع کنند، مساحت مثلث  $AMF$  کدام است؟



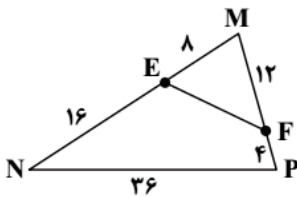
- ۳۶ (۱)
- ۴۰ (۲)
- ۴۶ (۳)
- ۴۸ (۴)



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



۳- در شکل زیر، محیط مثلث  $MEF$  چقدر است؟

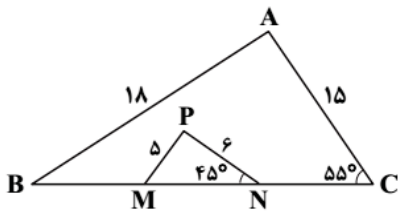


- ۳۸ (۱)
- ۳۲ (۲)
- ۳۴ (۳)
- ۳۶ (۴)



قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.





تست ۱۳: در شکل روبه‌رو،  $BM = MN = NC$ . اندازه زاویه  $\angle MPN$  چقدر است؟

(۱)  $70^\circ$



(۲)  $75^\circ$

(۳)  $80^\circ$

(۴)  $85^\circ$

قضیه: اگر  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  و داشته باشیم:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ ، آنگاه در

مورد محیط‌ها، نیم‌سازها، میانها، ارتفاع‌ها و مساحت‌های این دو مثلث خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{A'M'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{P}{P'} = k, \quad \frac{S}{S'} = k^2$$



تست ۱۴: نسبت مساحت دو مثلث متشابه  $ABC$  و  $A'B'C'$  به صورت  $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{9}{16}$  است. اگر بزرگ‌ترین ضلع مثلث  $ABC$  ۷ واحد و نسبت

کوچک‌ترین ضلع به بزرگ‌ترین ضلع در مثلث  $A'B'C'$ ،  $\frac{2}{3}$  باشد، اندازه ضلع کوچک‌تر در مثلث  $A'B'C'$  چند واحد است؟

(۲)  $\frac{14}{3}$

(۱)  $\frac{7}{3}$

(۴)  $\frac{28}{9}$

(۳)  $\frac{56}{9}$

تست ۱۵: نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر  $\frac{2}{5}$  و محیط مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد بیشتر از محیط مثلث کوچک‌تر است. مجموع محیط‌های دو مثلث چند

واحد است؟

(۴) ۳۵

(۳) ۲۷

(۲) ۲۵

(۱) ۲۰

تست ۱۶: اگر مساحت‌های دو مثلث متشابه را به ترتیب با  $S_1$  و  $S_2$  و محیط‌های آن‌ها را به ترتیب با  $P_1$  و  $P_2$  نشان دهیم،

کدام رابطه همواره درست است؟

(۲)  $P_1 S_1 = P_2 S_2$

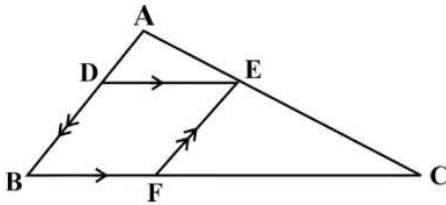
(۱)  $S_1 \sqrt{P_1} = S_2 \sqrt{P_2}$

(۴)  $S_1 P_2^2 = S_2 P_1^2$

(۳)  $P_1 S_2^2 = P_2 S_1^2$

((همه چیز در زندگی نشانه است، جهان به زبانی ساخته شده که همه می‌توانند بشنوند، اما آن را فراموش کرده‌اند.))

در مثلث  $ABC$  در شکل زیر،  $DE \parallel BC$  و  $EF \parallel AB$  می‌باشد. اگر داشته باشیم  $BC = 2AB = \frac{4}{3}AC = 4DE = 12$ ، نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع  $BDEF$  به مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{8}$

(۲)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{8}$

تست ۱۷



در شکل مقابل  $OA = OH = \sqrt{33}$  و  $CD = 14$  می‌باشد. اندازه ضلع  $AC$  کدام است؟

تست ۱۸

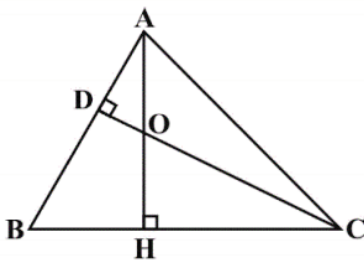


(۱)  $2\sqrt{55}$

(۲)  $2\sqrt{57}$

(۳)  $2\sqrt{51}$

(۴)  $2\sqrt{53}$



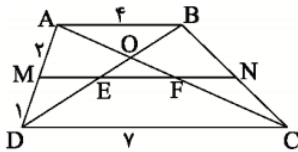
در دوزنقه‌ی  $ABCD$ ،  $MN \parallel DC$  است. نسبت محیط  $\triangle OEF$  به محیط  $\triangle OAB$  کدام است؟

تست ۱۹



(۱)  $\frac{4}{7}$  (۳)  $\frac{5}{6}$

(۲)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{5}{12}$



در دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه، وتر یکی ۴ برابر وتر دیگری است. اگر مساحت مثلث کوچکتر برابر ۵ باشد، واسطه هندسی مثبت اضلاع قائمه در مثلث بزرگتر کدام است؟

تست ۲۰



(۴)  $8\sqrt{5}$

(۳)  $4\sqrt{10}$

(۲)  $4\sqrt{5}$

(۱)  $16\sqrt{5}$

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، ارتفاع  $AH$  رسم شده است. اگر مساحت مثلث  $ABC$  برابر مساحت مثلث  $ABH$  باشد. نسبت فواصل پای ارتفاع وارد بر وتر از دو ضلع قائمه مثلث  $ABC$  چقدر است؟

تست ۲۱



(۴)  $\frac{5}{4}$

(۳)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۲)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(۱)  $\frac{2}{3}$

تست ۲۲: اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC، ۴، ۷/۵ و ۸/۵ و بلندترین ارتفاع آن ۷/۵ می‌باشد. مجموع اندازه‌های دو ارتفاع دیگر کدام است؟

۴/۵ (۴)

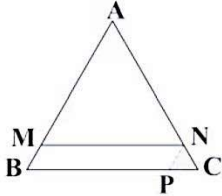
۶۶/۱۷ (۳)

۱۲۸/۱۷ (۲)

۵۳/۱۷ (۱)



تست ۲۳: در شکل زیر،  $MN \parallel BC$  و  $NP \parallel MB$  است. اگر  $AM = 5MB$  باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث NPC است؟



۱۸ (۱)

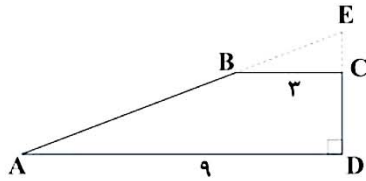
۲۰ (۲)

۲۴ (۳)

۳۶ (۴)



تست ۲۴: در دوزنقه‌ی شکل زیر، امتداد AB و CD هم‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع کرده‌اند. اگر محیط دوزنقه‌ی ABCD، ۲۰ واحد باشد، آن‌گاه محیط مثلث EBC کدام است؟



۵ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)



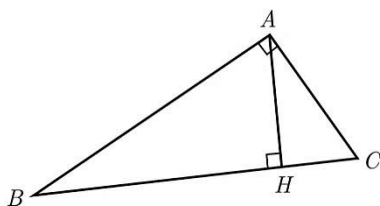
تست ۲۵: در مثلث ABC اندازه‌ی سه ارتفاع ۳، ۴ و ۵ است. اگر ضلع بزرگ‌تر ۱۵ باشد، ضلع کوچک‌تر چقدر است؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

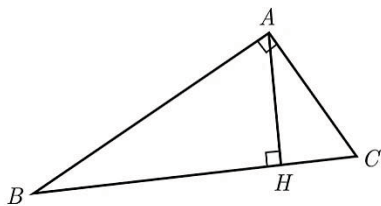
۹ (۱)



قضیه: فرض کنید مثلث  $ABC$  یک مثلث قائم‌الزاویه و  $AH$  ارتفاع

وارد بر وتر آن باشد، در آن صورت:

$$ABC \sim A'B'C' \sim A''B''C''$$



قضیه: فرض کنید مثلث  $ABC$  یک مثلث قائم‌الزاویه و  $AH$  ارتفاع

وارد بر وتر آن باشد، در آن صورت داریم:

a)  $AB^2 = BH \times BC$

b)  $AC^2 = CH \times BC$

c)  $AH^2 = BH \times HC$

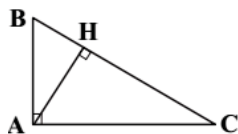
d)  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

e)  $AB \times AC = AH \times BC$



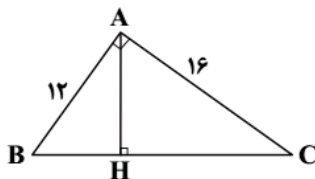
«(هر چیز در زندگی بهایی دارد، این آن چیزی است که مبارزین می‌کوشند بیاموزند.)»

تست ۲۸: در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، اگر  $AC = 12$  و  $AB = 4$ ، حاصل  $\frac{CH}{BH}$  کدام است؟



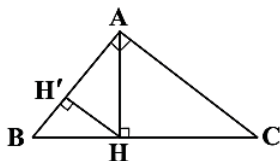
- تست ۲۸:  (۱) ۸  
 (۲) ۹  
 (۳) ۳  
 (۴)  $\sqrt{3}$

تست ۲۷: در شکل زیر، طول ارتفاع  $AH$  چقدر است؟



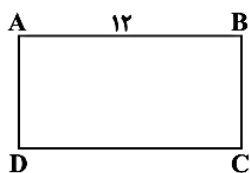
- تست ۲۷:  (۱)  $4/8$   
 (۲)  $9/6$   
 (۳) ۱۰  
 (۴)  $10/4$

تست ۲۸: در شکل زیر داریم  $AC = 8$  و  $AB = 6$ . مقدار  $BH'$  چقدر است؟



- تست ۲۸:  (۱)  $3/6$   
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴)  $2/16$

تست ۲۹: شکل روبه‌رو مستطیلی به طول ۱۲ است. از نقطه  $A$  عمودی بر قطر  $BD$  رسم می‌کنیم و پای این عمود را  $H$  می‌نامیم. اگر طول  $BH$  برابر ۱۱



باشد، اندازه  $DH$  چقدر است؟

- تست ۲۹:  (۱)  $20/11$   
 (۲) ۲  
 (۳)  $21/11$   
 (۴)  $23/11$

تست ۳۰: در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه وتر و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب از راست به چپ ۴ و ۱ سانتی‌متر است. طول پاره‌خط بزرگتری که ارتفاع روی وتر جدا می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

- تست ۳۰:  (۱)  $2 - \sqrt{3}$   
 (۲)  $2 + \sqrt{3}$   
 (۳)  $3 - \sqrt{2}$   
 (۴)  $3 + \sqrt{2}$

تست ۳۱: از رأس A در مستطیل ABCD، عمود AH را بر قطر BD رسم می‌کنیم. اگر  $AD=12$  و  $AB=5$  باشد، نسبت مساحت مستطیل به

مساحت  $\triangle ABH$  چقدر است؟

۱۳/۵۳ (۴)

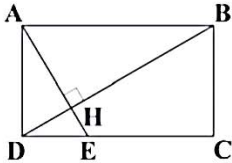
۱۳/۵۱ (۳)

۱۳/۵۲ (۲)

۱۳/۵ (۱)

تست ۳۲: ابعاد مستطیل ABCD،  $2\sqrt{3}$  و ۲ است. اگر از A به قطر BD عمود کنیم و امتداد دهیم، ضلع DC را در E قطع می‌کند. اندازه‌ی HE

چقدر است؟



$\sqrt{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

$\sqrt{3}$  (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)

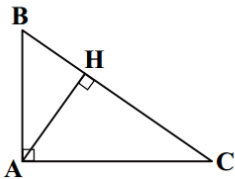
تست ۳۳: در شکل روبه‌رو اگر  $CH = 4BH$  و مساحت مثلث ACH برابر ۳۶ باشد،  $AB^2$  کدام است؟

۴۸ (۱)

۵۴ (۲)

۴۵ (۳)

۳۶ (۴)



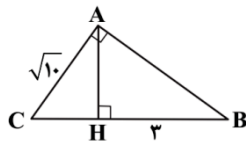
تست ۳۴: با توجه به شکل روبه‌رو، طول AH کدام است؟

$\sqrt{6}$  (۲)

$\sqrt{8}$  (۴)

$\sqrt{5}$  (۱)

$\sqrt{7}$  (۳)





۱. اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد، حاصل  $(\sqrt{1+\tan^2 x} \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$  کدام است؟

- (۱)  $\sin x$  (۲)  $\cos x$  (۳)  $-\sin x$  (۴)  $-\cos x$

۲. سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد  $100^\circ$  متر در دقیقه است. این قایق فاصله  $1200^\circ$  متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۳. مجموعه جواب نامعادله  $3 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$ ، به کدام صورت است؟

- (۱)  $R - [-6, 4]$  (۲)  $R - [-4, 6]$  (۳)  $x > 4$  (۴)  $x < -6$

۴. گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۵۴ (۴) ۱۶۸

۵. اگر  $2 = \sqrt{a^2 + 2a} + 3a$  باشد، عدد  $\frac{a+1}{a}$ ، کدام است؟

- (۱)  $1/5$  (۲)  $2/5$  (۳)  $3/5$  (۴)  $4/5$

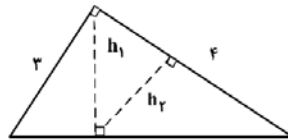
۶. در یک دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه، کدام است؟

- (۱)  $1/6$  (۲)  $1/5$  (۳)  $1/4$  (۴)  $2/5$

۷. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اضلاع قائم  $AB = 3\sqrt{5}$  و  $AC = 6$  ارتفاع AH و میانم AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH، است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۸. در شکل زیر،  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت  $\frac{h_2}{h_1}$  کدام است؟

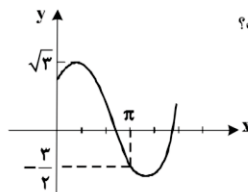


- (۱)  $5/3$  (۲)  $4/5$   
(۳)  $3/4$  (۴)  $3/5$

۹. حاصل عبارت  $\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4})\sin(\frac{-11\pi}{6})$ ، کدام است؟

- (۱)  $-1/4$  (۲)  $-1/2$  (۳)  $1/4$  (۴)  $1/2$

۱۰. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است. کدام است b؟

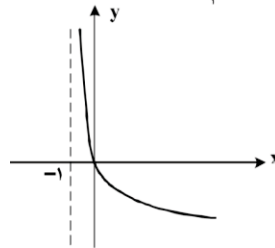


- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$   
(۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۲

۱۱. اگر  $125^x = (\frac{5}{8})^{x-1}$  باشد،  $\log_8(9x+1)$ ، کدام است؟

- (۱)  $2/3$  (۲)  $3/4$  (۳)  $4/3$  (۴)  $3/2$

۱۲. شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = \log_7 U(x)$  است. کدام است U(x)؟



- (۱)  $x+1$  (۲)  $(x+1)^{-1}$   
(۳)  $x-1$  (۴)  $1-x$

۱۳. به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{a+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ ، در نقطه  $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۴. احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول  $7/10$  و در آزمون دوم  $6/10$  است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم  $8/10$  است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

- (۱)  $0.74$  (۲)  $0.76$  (۳)  $0.82$  (۴)  $0.84$

۱۵. در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

- (۱) گروه اول (۲) گروه دوم (۳) یکسان (۴) اظهار نظر نمی‌توان کرد.