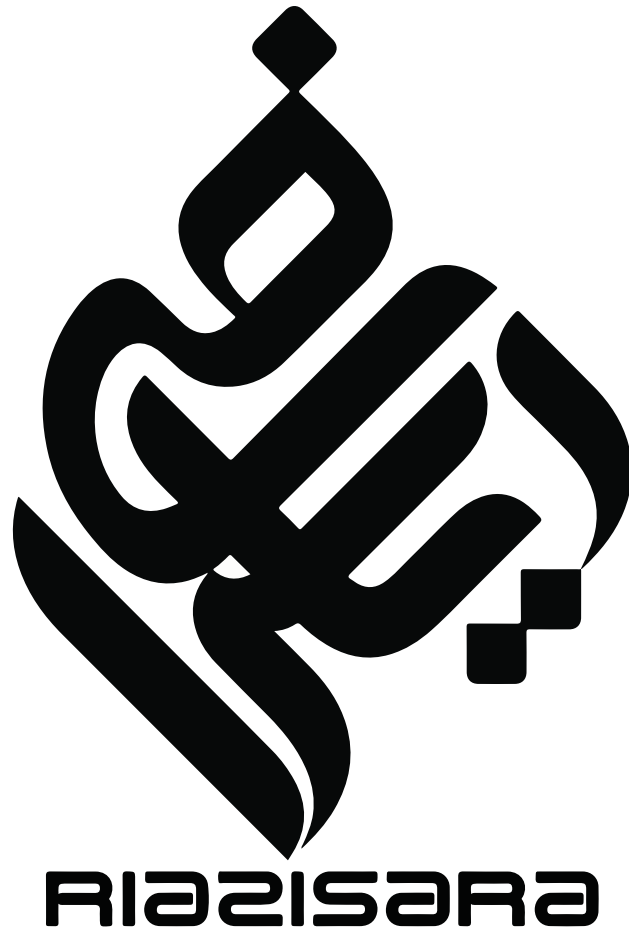




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

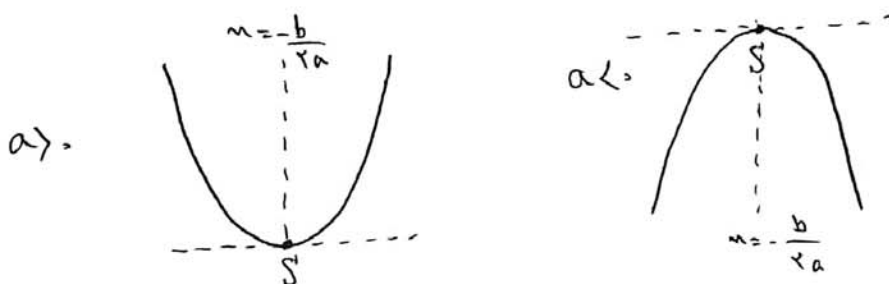


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

- تابع و معادلات درجه ۲
- ۱- تابع درجه ۲ و حل معادله آن
 - ۲- روابط بین ریشه ها و ضرایب
 - ۳- بحث در تعداد و علامت ریشه ها
 - ۴- تشکیل معادله درجه ۲
 - ۵- معادلات درجه ۲ در سجد وری

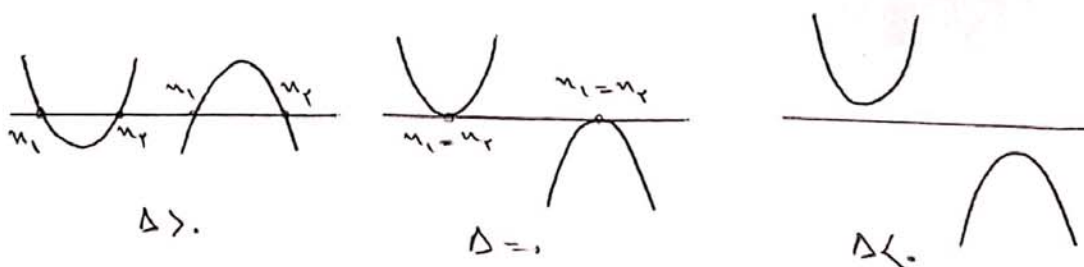
تابع به فرم $y = ax^2 + bx + c$ را تابع درجه دوم به بنظر داریم آن سهمی می گوئیم. علامت a تعیین می کند که دهانه سهمی رو به بالا باشد یا پایین.

رأس سهمی همان نقاط اکسترم (min یا max) سهمی است به مختصات آن $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$



ریشه های این معادله را همیشه می توان از روش دلتا یافت. داریم $\Delta = b^2 - 4ac$. برای دلتا می توان سه حالت پیش بیاید.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه دارد} & \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{معادله یک ریشه دارد} & \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \end{cases}$$



مثال) اگر man تابع $y = an^2 - 4n + 2a + 1$ برابر 3 باشد، a کدام است.

- ۱) ۲ ۲) -۱ ۳) -۱، ۲ ۴) ۱

مثال) برای کدام مقدار m تابع $y = (m-2)x^2 + m + 2$ بالایی محور x ها در آن مماس است.

- ۱) -۳ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

رابطین ریشه ها و ضرایب معادله درجه ۲

$$an^2 + bn + c = 0 \begin{cases} a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} \\ b = a + c \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

✓ ریشه ها قرینه میگردند هرگاه $b=0$ و $\frac{c}{a} < 0$ همچنین معکوس میگردند هرگاه $c=a$ و $c=-a$ و در آخر قرینه میگردند هرگاه $c=-a$

مثال) اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - (\sqrt{3} + 3)x + \sqrt{3} = 0$ باشد، حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است.

- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{4}{3}$

✓ در معادله درجه دوم هرگاه $c=0$ نمودار تابع لزوماً ریشه ها $\frac{c}{a}$ از هر چهار ناحیه مشخص میگذرد.

در معادله درجه ۲ اگر α, β ریشه‌ها باشند و مجموع ریشه‌ها S ، ضرب ریشه‌ها P ، آنگاه
 معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ تبدیل می‌شود.
 روابط مهم کاربردی

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}, \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P, \quad \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}, \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

مثال) اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ کدام است.

۷۶	۱۴	۶۴	۱۳	۵۲	۱۲	۴۲	۱۱
----	----	----	----	----	----	----	----

مثال) اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 - 12x + 4 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است.

۶	۱۴	۴	۱۳	۳	۱۲	۲	۱۱
---	----	---	----	---	----	---	----

۱- به ازای کدام مقادیر a ، معادله درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز است؟

- ۱) $a < 2$ یا $a > 4$ ۲) $a < 3$ یا $a > 4$ ۳) $2 < a < 4$ ۴) $3 < a < 4$

۲- به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ ، فاقد ریشه ی حقیقی است؟

- ۱) $-3 < m < 5$ ۲) $-3 < m < 4$ ۳) $-2 < m < 4$ ۴) $-1 < m < 5$

۹۹،

۳- به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه ی معادله درجه دوم $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ ، برابر ۲ است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۰،

۴- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $x^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟

- ۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) $1, -\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}, -1$

۱۰۱،

۵- اگر یکی از ریشه های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه ی دیگر آن کدام است؟

- ۱) -2 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

ت

۶- به ازای کدام مقدار m ، معادله $(m^2+1)x^2 + (m^2-1)x + m^3 + 3m - 2 = 0$ دارای ۲ ریشه ی حقیقی متمایز است؟

- ۱) ± 1 ۲) ۱، ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۷- به ازای کدام مقدار m ، ریشه های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس متبادله اند؟

- ۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۲،

۸- در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ ، یک ریشه از ۳ برابر ریشه ی دیگر ۳ واحد بزرگتر است. m کدام است؟

- ۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

بحث در مقدار علامت ریشه ها

$$\Delta > 0 \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه هم علامت} \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه +} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \text{دو ریشه -} \end{cases} \\ \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \text{یک ریشه صفر} \\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{دو ریشه مختلف علامت} \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \text{دو ریشه یکی صفر یکی دیگر منفی} \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

مثال) کدام یک از معادلات زیر دارای دو ریشه ی مثبت است .

$$1) x^2 - 4x - 2 = 0 \quad 2) x^2 - 4x + 2 = 0 \quad 3) x^2 - 2x + 4 = 0 \quad 4) x^2 - 2x - 4 = 0$$

مثال) به ازای کدام مقدار a ، معادله $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه ی مثبت است .

$$1) -3 < a < 2 \quad 2) 2 < a < 5 \quad 3) 2 < a < 14 \quad 4) 5 < a < 14$$

تفکیک معادله درجه ۲

روش اول) فرض کنید x_1, x_2 ریشه های معادله اولیه باشند، حاصل k ، p را بدست آورده و پس معادله $kx^2 + px + q = 0$ معادله جدید را بدست می آوریم و پس معادله جدید را به صورت $k'x^2 + p'x + q' = 0$ می نویسیم.

مثال) معادله درجه دوم که ریشه های آن مقلوب ریشه های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد، کدام است .

$$1) x^2 - 82x + 1 = 0 \quad 2) x^2 + 82x + 1 = 0 \quad 3) x^2 + 64x + 1 = 0 \quad 4) x^2 - 64x + 1 = 0$$

ریشه دوم) ریشه های معادله اولیه را n در ریشه های معادله جدید را A در نظر می گیریم. پس n را بر حسب A نوشته و در معادله اولیه قرار می دهیم.

مثال) معادله درجه دومی که ریشه های آن یک واحد کمتر از دو برابر ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد.

$$1) \quad x^2 + 5x - 2 = 0 \quad 2) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad 3) \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad 4) \quad x^2 - 4x - 1 = 0$$

✓ اگر ضرایب معادله درجه دومی همی گویا باشند یکی از ریشه های معادله $A + \sqrt{B}$ و $A - \sqrt{B}$ باشند آنگاه ریشه ی دیگر معادله $A - \sqrt{B}$ و $A + \sqrt{B}$ می باشد.

مثال) معادله درجه دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه هایش $3 - \sqrt{5}$ باشد کدام است.

$$1) \quad x^2 - 6x - 4 = 0 \quad 2) \quad x^2 - 6x + 4 = 0 \quad 3) \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad 4) \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

معادلات دو مجهولی $ax^2 + bx + c = 0$

از تغییر متغیر $x^2 = A$ استفاده می کنیم $aA^2 + bA + c = 0$

$$\Delta > 0 \quad \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{همه ریشه های حقیقی متناظر} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \text{ریشه های حقیقی ندارد} \end{cases} \\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{دو ریشه ی حقیقی دارد} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه ی حقیقی دارد} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

مثال) اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه ی حقیقی متناظر است. معادله m کدام صورت است. ۸۵.

$$1) \quad m < -4 \quad 2) \quad m > 4 \quad 3) \quad -4 < m < 4 \quad 4) \quad 4 < m < 9$$

معادلات گویا

برای حل معادله گویا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ از طرفین دسطن استقام می کنیم، در طرف معادله را در کوچکترین مضرب مشترک ضرب کرده، سپس معادله را حل می کنیم.

مثال ۱) معادله جواب های معادله $\frac{n-2}{n+2} + \frac{n}{n-2} = \frac{8}{n^2-4}$ کدام است .

۱۱ صفر ۱۲ ۱۳ ۲ ۱۴ ۳

معادلات رادیکالی (گت)

عبارت های رادیکالی را در یک طرف تساوی قرار می دهیم، سپس با توان رسانی طرفین معادله، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرده، سپس از حل معادله، جواب های معادله صدق می کند، قابل قبول هستند.

مثال ۱) معادله $\sqrt{4n-3} + 2n - 2 = 0$ از نظر تعداد جواب ها چگونه است .

۱) یک جواب ۲) در جواب هم علامت ۳) در جواب با علامت مختلف ۴) جواب ندارد

۱- معادله درجه دوم که ریشه هایش $2-\sqrt{4-a}$, $2+\sqrt{4-a}$ باشد کدام است ؟

(۱) $x^2-4x+a=0$ (۲) $x^2+4x-a=0$ (۳) $x^2+4x-a=0$ (۴) $x^2-4x+a=0$

۲- اگر α , β ریشه های معادله $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقادیر k ، جواب های معادله

$4x^2-kx+2=0$ به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است ؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۳- اگر α , β ریشه های معادله $x^2-3x-4=0$ باشند، جواب کدام معادله به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1 \right\}$ است ؟

(۱) $4x^2-5x+1=0$ (۲) $4x^2-3x+1=0$ (۳) $4x^2-5x-1=0$ (۴) $4x^2-3x-1=0$

۴- به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه های معادله درجه دوم $8x^2-mx-8=0$ توان سوم معادله

$x^2-x-2=0$ است ؟

(۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۵- ریشه های معادله $3x^2+ax+b=0$ از ریشه های معادله $3x^2-4x+5=0$ یک واحد بیشتر است. کدام است ؟

(۱) -۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۶- ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است ؟

(۱) $x^2-3x+1=0$ (۲) $x^2+3x+1=0$ (۳) $x^2-5x+2=0$ (۴) $x^2+5x+2=0$

۷- مجموع ریشه های حقیقی معادله $18(x^2+n)+7x^2=0$ کدام است ؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ در جواب ستانبر برای n حاصل می شود ؟

(۱) $m > 1$ (۲) $m < 2$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) هیچ مقدار m

تابع قدر مطلق

- ۱- تعریف در رشتی
- ۲- نمودار
- ۳- معادلات
- ۴- نامعادلات

قدر مطلق تابعی بر حسب n را به صورت $|f(n)|$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$|f(n)| = \begin{cases} f(n) & f(n) \geq 0 \\ -f(n) & f(n) < 0 \end{cases}$$

رابطه های قدر مطلق:

$$|u|^2 = u^2, \quad |u| = |v| \Rightarrow u = \pm v, \quad |u| = a \Rightarrow u = \pm a$$

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} u & \text{مفرد} \\ |u| & \text{زوج} \end{cases}, \quad |u+v| \leq |u| + |v|, \quad |u \cdot v| = |u| \cdot |v|$$

(شرط تساوی در صورت $\langle n \rangle$ زوج هم علامت)

$$u^2 \geq a^2 \Rightarrow |u| \geq a \Rightarrow u \geq a \text{ یا } u \leq -a$$

$$u^2 \leq a^2 \Rightarrow |u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$$

✓ به طور کلی در برخورد با قدر مطلق، باید داخل آن را مقیم علامت کنیم، ریشه های آن را یابیم تا قدر مطلق حذف شود.

مثال) حاصل عبارت $\sqrt{x^2+4} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4}$ وقتی $x < 0$ باشد کدام است.

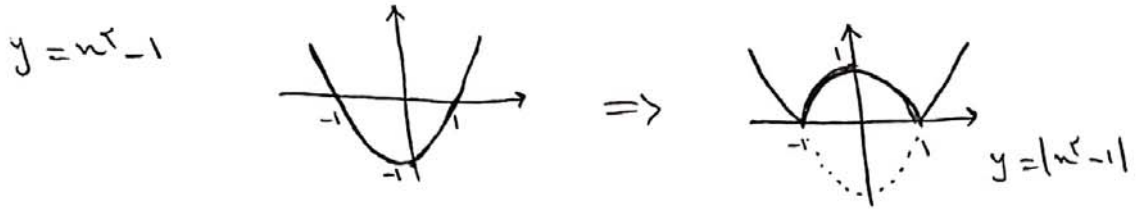
۱) $2x-2$ ۲) $-2x+2$ ۳) -2 ۴) 2

مثال) نامساوی $\frac{1}{x-2} < 1$ با نامساوی $A < B$ معادل است. $A+B$ کدام است.

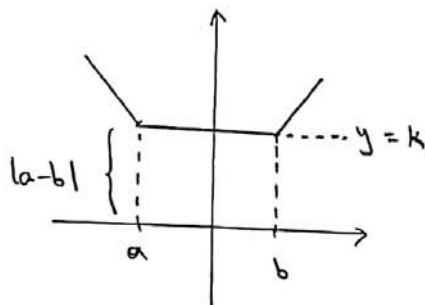
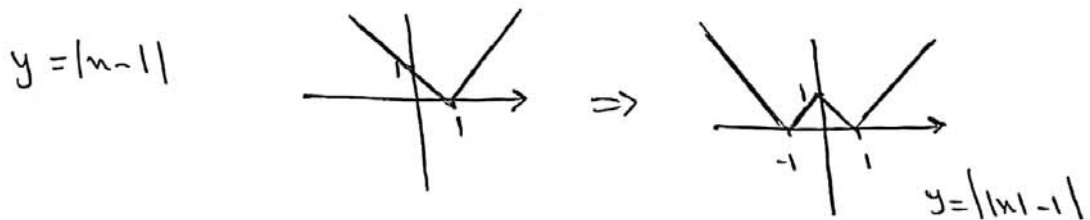
۱) 8 ۲) 7 ۳) 9 ۴) 6

نمودار توابع قدر مطلق:

۱- رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$: کافایت ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده، پس مستقیماً از نمودار تابع $f(x)$ که در زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و قرینه آنرا نسبت به محور x ها رسم کنیم.



۲- رسم نمودار $y = f(|x|)$: ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده، سپس مستقیماً از نمودار که درست چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و قرینه سمت راست نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.



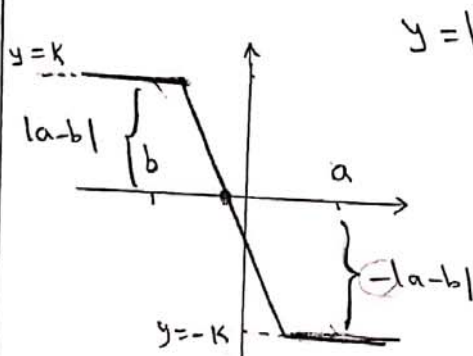
① گلدانی $y = |x - a| + |x - b|$

محور تقارن: $\frac{a+b}{2}$

$|a - b|$ کمترین مقدار تابع (نقطه گلدان)

$R: y \geq |a - b|$ (بردار)

۳- نمودار تابع اگر $y = k$ معادله بی شمار ریشه داشته باشد و اگر $y > k$ معادله دو ریشه داشته باشد و اگر $y < k$ معادله ریشه ندارد.



② سرسره ای (تپش‌ری) $y = |x - a| - |x - b|$

محور تقارن: $\frac{a+b}{2}$

$|a - b|$ بیشترین مقدار، $-|a - b|$ کمترین مقدار تابع

$R: -|a - b| < y < |a - b|$ (بردار)

$|K| \begin{cases} > |a - b| \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ = |a - b| \Rightarrow \text{بی شمار ریشه} \\ < |a - b| \Rightarrow \text{یک ریشه دارد} \end{cases}$

شماره $a > b$
(برای $a < b$ نمودار نسبت به محور y قرینه می‌شود)

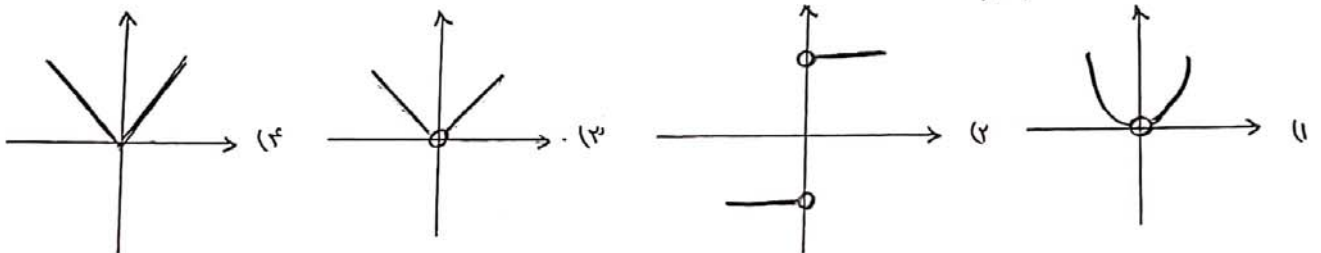
مثال معادله $|x| + |x-1| = 1$ چند ریشه دارد .

۱) ریشه ندارد ۲) یک ریشه دارد ۳) دو ریشه دارد ۴) بی شمار

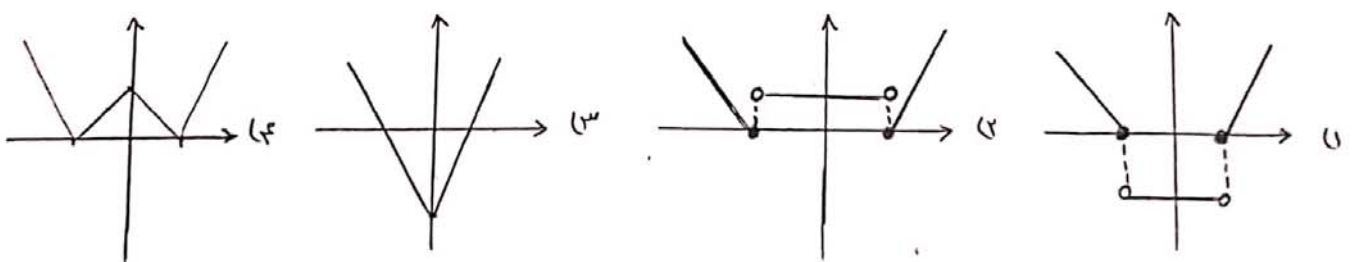
* مثال معادله $|x-1| - |x+2| = 1$ چند ریشه دارد .

۱) ریشه ندارد ۲) یک ریشه دارد ۳) دو ریشه دارد ۴) بی شمار

مثال نمودار تابع $y = \frac{x^2}{|x|}$ کدام است .



* مثال منحنی نمایش $f(x) = |x-2|$ کدام است .



برای حل معادلات نامعادلات قدرمطلق باید عبارت داخل قدرمطلق را قیاس علامت کرده و با حذف قدرمطلق، ریشه های آن را بیابیم.

❑ برای حل نامعادلات به صورت $|u| < v$ یا $|u| > v$ در طرف به توان ۲ رسانده و با حذف قدرمطلق، نامعادله را حل کنیم.

مثال) معادله $|u^2 - 2| = |u|$ چند ریشه دارد.

۱) ۲) ۳) ۴) ۵) ۶) ۷) ۸) ۹) ۱۰) ۱۱) ۱۲)

مثال) مجموع ریشه های معادله $|u-1| + 4 = |u-1|^2 - 5|u-1| + 4 = 0$ برابر است با

۱) ۲) ۳) ۴) ۵) ۶) ۷) ۸) ۹) ۱۰) ۱۱) ۱۲)

* مثال) مجموعه جواب نامعادله $|u-1| > 2u$ کدام است.

۱) $u > 7$ ۲) $u > 9$ ۳) $u < 1$ یا $u > 7$ ۴) $u < 1$ یا $u > 9$

تمرین) معادله و نامعادله زیر را حل کنید.

الف) $|u-5| - 1 = 4$ ب) $|12-u| - 4 \geq 2$

است؟

۱- در بازه‌ای مقادیر تابع با منابطه $y = x^2$ و کمتر از مقادیر تابع با منابطه $y = |x-2|$ است. آن بازه کدام

(-2, 1) (-1, 1) (-1, 0) (0, 1)

۲- مجموعه جواب نامعادله $| \frac{x-2}{x-3} | > 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

(1, $\frac{3}{2}$) ($\frac{3}{2}$, 1) ($\frac{3}{2}$, 1) $\cup$ ($\frac{3}{2}$, 1) ($\frac{3}{2}$, 1)

۳- مساحت ناحیه محدود به منادیه‌های در تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است.

$\frac{1}{3}$ 4 $\frac{16}{3}$ 6

۴- مجموعه جواب نامعادله $|x+1| > |x-2| + 1$ ، به صورت کدام بازه است.

(-2, 1) (-1, 2) (-1, 1) (1, 2)

۵- مساحت ناحیه محدود به منادیه $f(x) = |2x-1|$ و محور x ها، در دو خط $x=1$ ، $x=-1$ کدام است.

$\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3

۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است.

$x \geq 1$ $x \leq 1$ $x \geq -1$ $x \leq -1$

۷- اگر عبارت $\sqrt{\frac{x}{x^2-9}} + \sqrt{2x-x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است.

$[\frac{2}{3}, 2]$ $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ $(-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3})$ $(-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3})$

تابع جزء صحیح

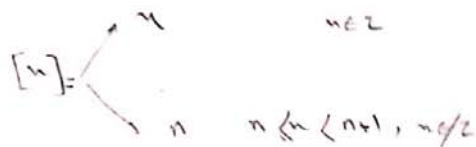
۱- تقریب دورتری

۲- رسم نمودار

۳- معادلات

۴- نامعادلات

تابع جزء صحیح: فرض کنید x یک عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان



می دهیم. به صورت زیر تقریب می کنیم.

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x \quad \text{و} \quad n \leq x < n+1, x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = n$$

($n, n+1$ در عدد صحیح متوالی)

به عنوان مثال $[2] = 2$, $[1.5] = 1$ یا $[-\frac{1}{2}] = -1$.

✓ اگر $[x] = n$, n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $n \leq x < n+1$ و برعکس

$$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$$

یعنی

مثال (مجموعه جواب معادله $[\frac{x+3}{5}] = 1$, بازه (a, b) است . $b - a$ کدام است .

$\frac{2}{5}$

۳

$\frac{3}{5}$

۴

✓ هواره فرضی جزء صحیح ، عدد صحیح خواهند شد . ($[x] = \frac{3}{2}$ غیر ممکن است .)

مثال (دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2[x]-3}$ به صورت $(a, +\infty)$ است . مقدار a کدام است .

$\frac{5}{2}$

$\frac{3}{2}$

۱

$\frac{1}{2}$

درستی ها:

① $[n \pm n] = [n] \pm n$

② $[n] + [-n] = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \\ -1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

③ $0 \leq n - [n] < 1$

④ $[-n] = \begin{cases} -[n] & n \in \mathbb{Z} \\ -[n] - 1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثال ۱) در تابع با مناسبت $f(n) = n^2 - 2[n]$ مقدار $f(-\frac{1}{4} + f(\sqrt{3}))$ کدام است.

۲,۷۵ ۴

۲,۵۳ ۳

۲,۲۵ ۵

۱,۷۵ ۱

مثال ۲) اگر $n^2 + n$ باشد، حاصل $[n] + [n^2] + [n^3] + [n^4]$ کدام است.

۱ ۴

۰ ۳

-۱ ۲

-۲ ۱

مثال ۳) اگر $[n] = f(n)$ ، معبره معادله $f(n) + (n - f(n))$ کدام است.

$\{-1, 0, 1\}$ ۴

$\{0, 1\}$ ۳

$\{1\}$ ۵

$\{0\}$ ۱۱

رسم نمودار $y = [f(x)]$

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده سپس خطوط افقی گذرنده از اعداد صحیح که نمودار را قطع

می کند رسم می کنیم. سپس سمت های از نمودار را که بین دو خط موازی قرار دارند را روی خط

پایین تصویر کرده. حل به جز در خطوط افقی با نمودار اولیه توپر و نظیر آن به حالی است.

مثال نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است.

۷

۶

۵

۴

✓ نمودار تابع $y = [mx]$ یک نمودار پله ای است. اگر $m > 0$ آنگاه نمودار به صورت  و اگر

$m < 0$ نمودار به صورت  می باشد. طول پله ها برابر $\frac{1}{|m|}$ و ارتفاع پله ها یک واحد می باشد.

رسم نمودار $y = f([x])$: برای رسم توابعی که درون آن ها جزء صحیح قرار گرفته، باید حاصله داده

را یکی یکی جدا کرده، مقدار جزء صحیح را بدست آورده، سپس نمودار بدست آمده را در فواصل مشخصی رسم کنیم.

مثال نمودار تابع با ضابطه $y = [x] - x$ ، از $x \in [-2, 3]$ پاره خط مساوی به اندازه ۱ تشکیل شده

است. در نای مرتب $(n, 1)$ کدام است.

۱) $(4, 1)$ ۲) $(4, \sqrt{2})$ ۳) $(5, 1)$ ۴) $(5, \sqrt{2})$

۱- اگر جزء صحیح $n^2 + n$ برابر ۱- باشد، آنگاه $[n^2]$ کدام است؟

۱- ۰ ۱ ۲

۲- اگر $198 = (1+\sqrt{2})^4 + (1-\sqrt{2})^4$ ، جزء صحیح عدد $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱۹۵ ۱۹۶ ۱۹۷ ۱۹۸

۳- اگر $f(n) = n - [n]$ ، برد تابع $g(n) = f(2n - 3) - 2f(n)$ کدام است؟

$[-1, 0]$ $[0, 1]$ $\{-1, 0\}$ $\{0, 1\}$

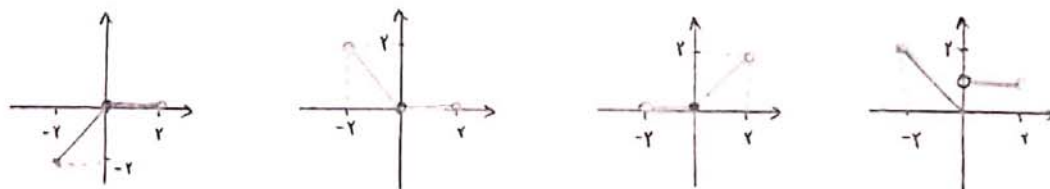
۴- در تابع با ضابطه $f(n) = [n] + [-n]$ ، $g(n) = n^2 + n - 2$ فرض شد. اگر $g(f(n)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر n کدام است؟

$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ $\emptyset$

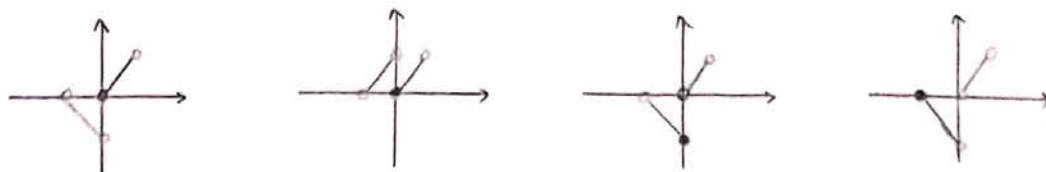
۵- مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = [\sqrt{x}]$ ، محور n ها در بازه $[4, 16]$ کدام است؟

۲۹ ۳۱ ۳۲ ۳۵

۶- نمودار تابع $y = n[\frac{n}{2}]$ در بازه $[-2, 2]$ به کدام صورت است؟



۷- تابعی هندسی تابع با ضابطه $f(n) = |n| + [n]$ در ناحیه $1 < n < 1$ کدام شکل است؟



در حل معادله وقت در دو تیرگی زیر اهمیت دارد. (یادآوری)

$$1) [n] + [-n] = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \\ -1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad 2) [-n] = \begin{cases} -[n] & n \in \mathbb{Z} \\ -[n] - 1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[n+y] = \begin{cases} [n] + [y] & \checkmark \text{ برای هر } n, y \in \mathbb{R} \text{ داریم:} \\ [n] + [y] + 1 & \text{(هرگاه مجموع قسمت‌های اعشاری } n \text{ و } y \text{ بیشتر یا مساوی یک شود)}$$

مثال) مجموعه جواب معادله $[n] + [3n] = 0$ ، بازه $[a, b)$ است. مقدار $b - a$ کدام است.

$\frac{2}{3}$
 6
 $\frac{1}{3}$
 3

مثال) معادله $[|n| - 1] + [n + 2] = n$ چند جواب دارد.

بی شمار
 2
 1
 6

مثال) معادله $[\frac{12}{n-8}] + [\frac{12}{5-n}] = 0$ ، چند ریشه در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

بی شمار
 6
 10
 12

مثال) معادله $[3n] - [2n] - [n] = 1$ چند جواب دارد.

بی شمار
 2
 1
 0

برای حل نامعادلات شامل جزء صحیح از دترهای زیر برای حذف [] استفاده می‌کنیم .

$$\begin{cases} [u] < n \Rightarrow u < n \\ [u] \leq n \Rightarrow u < n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} [u] > n \Rightarrow u \geq n+1 \\ [u] \geq n \Rightarrow u \geq n \end{cases}$$

مثال ۱ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2 - [x^2 + 2x]}$ کدام مجموعه است .

$$(-2, 0] \quad (-3, 1) \quad (-1, 4) \quad (0, 2)$$

مثال ۲ مجموعه جواب نامعادله $([n] - 3)([n] + 2) \leq 0$ کدام است .

$$(-\infty, 4] \quad (-\infty, 3] \quad (-\infty, 4) \quad (-\infty, 3)$$

$$[2n] = [n] + [n + \frac{1}{2}] \quad , \quad [3n] = [n] + [n + \frac{1}{3}] + [n + \frac{2}{3}] \quad \checkmark$$

مثال ۳ مجموعه جواب نامعادله $[2n] - [n] \geq \sqrt{3}$ کدام است .

$$n > 2 \quad n \geq \frac{3}{2} \quad n < 3 \quad \frac{3}{2} \leq n < \frac{5}{2}$$

۱- اگر $11 < 2n-3$ باشد، $\left[\frac{n}{3}\right]$ چند مقدار صحیح خواهد داشت؟

- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- مجموعه جواب معادله $\left[\frac{2n}{n+1}\right] = 0$ کدام است؟

- ۱) $[0, 1)$ ۲) $(-1, 0]$ ۳) $(-1, -\infty)$ ۴) $(1, +\infty)$

۳- دامنه تابع $f(n) = \frac{\sqrt{n-1}}{2[n]-3}$ به صورت $[a, +\infty)$ است. مقدار a کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴- مجموعه جواب معادله $[n+1] + 2[n] = 7$ کدام است؟

- ۱) $1 \leq n < 2$ ۲) $2 \leq n < 3$ ۳) $3 \leq n < 4$ ۴) $4 \leq n < 5$

۵- اگر n یک عدد حقیقی، $\langle n - n^2 \rangle$ باشد، حاصل $[n^2] + [-n] + [n]$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۶- دامنه تابع $f(n) = \frac{\sqrt{4-n^2}}{[n^2]-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷- برد تابع $f(n) = \sqrt{n - 4\left[\frac{n}{4}\right]}$ کدام است؟

- ۱) $[0, 1)$ ۲) $(0, 2]$ ۳) $[0, 2]$ ۴) $[-1, 1]$

۸- معادله $2n^2 + 3n = [n] + [-n]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

"تابع نمایی، نمایی"

دترت‌ها
معادلات و نامعادلات

تابع نمایی

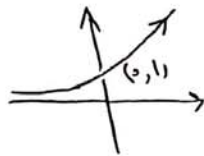
روابط
معادلات و نامعادلات

تابع نمایی

تابعی در به صورت $f(x) = b^x$ باشد را تابع نمایی می‌گویم. $b > 0$ و $b \neq 1$ و x یک عدد حقیقی است.

$$f(x) = b^x$$

$$b > 1$$



$$D: \mathbb{R}$$

$$R: (0, +\infty)$$

الیه صعودی $\Rightarrow$

$$0 < b < 1$$



$$D: \mathbb{R}$$

$$R: (0, +\infty)$$

الیه نزولی $\Rightarrow$

✓ تابع نمایی، تابعی یوسه، یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است.

✓ اگر در تابع نمایی، پایه را عدد نپیر $(e \approx 2.718)$ قرار دهیم، به آن تابع نمایی طبیعی می‌گویم.

چون e بزرگتر از یک است بنابراین تابع $f(x) = b^x$ ساده‌حالت اول می‌باشد.

برای حل معادلات نمایی، معادله را به صورت $b^u = b^v$ درآورده، باطل معادله $u = v$ ، جواب معادله

رای می‌یابیم. در حل معادلات نمایی از دو روش استفاده می‌کنیم. الف) برابر کردن پایه‌ها ب) امانت‌ورگیری

مثال) مقدار n از معادله $9^{n+1} = 27 \times 3^{n+2}$ کدام است.

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

مثال) مقدار n از معادله $3^{n+3} + 3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n = 34$ کدام است.

$$4 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

برای حل نامعادلات نمایی، ابتدا پایه‌های دو طرف نامعادله را با هم یکی کنیم و سپس

$$b > 1 \Rightarrow b^a > b^c \Rightarrow a < c \quad , \quad 0 < b < 1 \Rightarrow b^a > b^c \Rightarrow a > c$$

مثال) مجموعه جواب نامعادله $3^{x-1} \leq 9^{-x+4}$ بازه $(-\infty, a]$ است. a کدام است.

۱- ۱۴

۲- ۳

۳- ۲

۴- ۱۱

مثال) اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{x f(x)}$ کدام بازه است؟

۱- $(0, +\infty)$

۲- $(-\infty, +\infty)$

۳- $(-\infty, 0)$

۴- $[-1, 1]$

رسم نمودار

توابعی با منادیه $f(x) = a \times b^x + c$ رفتار تابع نمایی دارند که رسم این توابع به کمک انتقال رقرینه انجام پذیر است. توجه شود که خط $y = 0$ باید به اندازه c واحد به سمت بالا (+) یا پایین (-) انتقال پیدا کند و نمودار به خط $y = c$ نزدیک شود.

یادآوری:

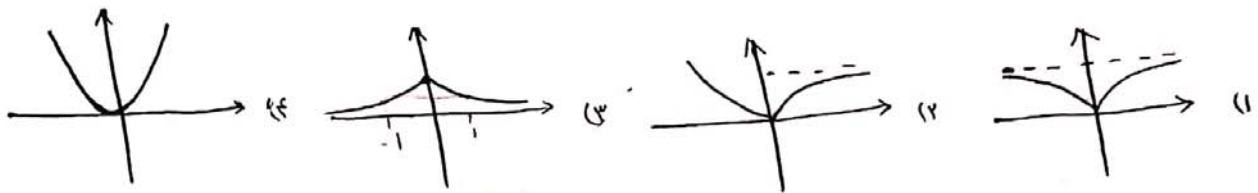
$y = f(x) \pm a$: یعنی نمودار $f(x)$ را a واحد به سمت بالا (+) یا پایین (-) انتقال دهیم.

$y = f(x \pm a)$: یعنی نمودار $f(x)$ را a واحد به سمت چپ (+) یا راست (-) انتقال دهیم.

$y = |f(x)|$: سمت‌های از $f(x)$ را که پایین محور x هستند را نسبت به محور x ها زنی کنیم.

$y = f(|x|)$: سمت‌های از نمودار $f(x)$ را که سمت راست محور y هستند را نسبت به محور y ها زنی کنیم.

مثال) نمودار تابع $y = |2^{-x} - 1|$ به کدام صورت است .



مثال

مثال) شش متقابل نمودار کدام تابع است .



$y = |2^x|$ ۱)
 $y = 2^x$ ۲)
 $y = 2^{-x}$ ۳)
 $y = |2^{-x}|$ ۴)

مثال) نمودارهای دو تابع $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$, $y = 3^x + \frac{1}{3}$ ، نقطه A متقاطع اند . فاصله نقطه A از نقطه $(-1, 1)$ کدام است -

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

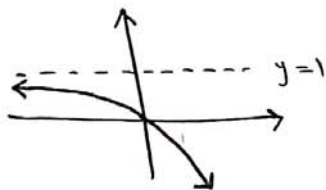
۱- نمودار تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^x$ در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A از نقطه $(-1, -2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{10}$

۲- ریشه ی معادله $\frac{3^{-x} \times (\sqrt[3]{3})^{x+1}}{81} = (\frac{1}{9})^{2x}$ کدام است؟

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۳- ضابطه تابع با نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y = -(\frac{1}{2})^x - 1$

۲) $y = (\frac{1}{2})^x + 1$

۳) $y = 1 - (\frac{1}{2})^{-x}$

۴) $y = -1 + (\frac{1}{2})^{-x}$

۴- فاصله نقطه تلاقی درستی به معادلات $y=2^x$ ، $y=(\sqrt{2})^{x+1}$ ، نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵- در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ ، $f(-2) = \frac{3}{32}$ ، معادله $f(\frac{3}{2}) = 1$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

تابع گسسته

دارد تابع نمایی $y = b^x$ را به صورت $y = \log_b x$ نشان می دهیم که در آن $b > 0, b \neq 1$

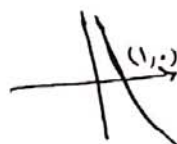
$$y = \log_b x \begin{cases} b > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$$



$$D: (0, +\infty)$$

$$R: (-\infty, +\infty)$$

ایدا صعودی $\Rightarrow$



$$D: (0, +\infty)$$

$$R: (-\infty, +\infty)$$

ایدا نزولی $\Rightarrow$

✓ نگاریم در مبای ۱۰ را نگاریم اعشاری می نامیم که معمولا عدد مبنا نوشته نمی شود. $(\log_{10} 3 = \log 3)$

✓ اگر مبای نگاریم بزرگتر از یک باشد، نگاریم اعداد بزرگتر از یک مقدار مثبت، نگاریم اعداد کوچکتر از یک مقدار منفی است $\Leftarrow \log_4 3 < 0, \log_4 5 > 0$

✓ اگر مبای نگاریم کوچکتر از یک (بین ۰ و ۱) باشد، نگاریم اعداد بزرگتر از یک مقدار منفی، نگاریم اعداد کوچکتر از یک مقدار مثبت است $\Leftarrow \log_{1/2} 3 < 0, \log_{1/2} 5 > 0$

ویژگی های نگاریم :

$$1) \log_b a = c \Rightarrow a = b^c$$

$$2) \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$3) a^{\log_a b} = b$$

$$4) \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$5) \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$6) \log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

$$7) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

سؤال) اگر $\log_2 a = a^2$ باشد، عدد a^2 کدام است.

۱۸ ۱۴

۹ ۱۳

۶ ۱۲

۹ ۱۱

مسئله (1) تابع با رابطه $f(n) = a + \log_2(bn - 4)$ از نقطه $(2, 4)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است.

۶ ۴

۵ ۳

۴ ۲

۳ ۱

مسئله (2) از سری $\log_n(n^2 + 4) = 1 + \log_n 5$ مقدار n را بیاب. n در مبای ۲ کدام است.

۲ ۱۴

$\frac{3}{2}$ ۳

$\frac{1}{2}$ ۲

-۱ ۱

مسئله (3) دامنه تابع $f(n) = \log_3(2 - \sqrt{n+1})$ کدام است.

$\mathbb{R}$ ۴

$[-1, +\infty)$ ۳

$(-\infty, 3)$ ۲

$[-1, 3)$ ۱

دریختی های تباریم *

۱- نزدیک تابع نمایی $y = \left(\frac{a+2}{1-a}\right)^x$ در درایع مقوس خود را قطع می کند. حدود a کدام است.

$$a < 0 \quad -1 < a < 1 \quad -2 < a < 1 \quad -2 < a < -\frac{1}{2}$$

۲- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \log_{\frac{1}{3}} x$ کدام است.

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad [1, 2) \quad (0, 1] \quad [-1, 1]$$

۳- حاصل عبارت $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ کدام است.

$$\frac{19}{6} \quad \frac{17}{6} \quad \frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6}$$

۴- اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، آنگاه تباریم $(4a+1)$ در پایه ۴ کدام است.

$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \frac{3}{2}$$

۵- اگر $n = 8 \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ باشد، تباریم عدد $4(n+3)$ در پایه n کدام است.

$$\frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad 3$$

۶- اگر $\log(81)^k = \log \sqrt[3]{3} + \log^3$ ، آنگاه تباریم $\frac{5}{k}$ در پایه ۲ کدام است.

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

۷- اگر a, b ، ریشه های معادله $x^2 - 10x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\log^a + \log^b - \log(a+b)$ کدام است.

۲ -۱ ۰ ۱

۸- اگر $x^a = A$ باشد، $\log_{\frac{A}{x}} 9A^2$ کدام است.

$2+2a$ $3+a^2$ $3+2a$ $3+a^2$

۹- اگر $\log^2 = k$ باشد، حاصل $\log(4-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$ کدام است.

$2+4k$ $1+k$ $4k$ $2k$

۱۰- اگر $\log^5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{16}$ کدام است.

$1-k$ $1-2k$ $2-5k$ $1-4k$

حل معادلات نمائشی، ابتدا دامنه را بدست آورده و سپس معادله را به در صورت زیر حل می کنیم. پاسخی درست خواهد بود که در معادله صدق کند.

⑤ $\log_b f(n) = \log_b g(n) \Rightarrow f(n) = g(n)$ ⑥ $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$

مثال (از در معادله $4^x + 2^x = 72$ ، $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ ، مقدار کدام است ؟)

۱ ۶ ۲ ۷ ۳ ۸ ۴ ۹

مثال (از در معادله $\log(y+2) = 1$ ، $\log(y-x) + \log(x+y) = 2$ ، مقدار کدام است ؟)

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

حل نامعادلات نمائشی: ابتدا دامنه را بدست آورده، سپس از ویژگی های زیر استفاده می کنیم.

$b > 1 \Rightarrow \log_b^u < \log_b^v \Rightarrow u < v$, $\log_b^a \leq c \Rightarrow a \leq b^c$
 $0 < b < 1 \Rightarrow \log_b^u < \log_b^v \Rightarrow u > v$, $\log_b^a \leq c \Rightarrow a \geq b^c$

مثال (مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{x+4}{2}} \leq -1$ کدام است ؟)

۱ $-\frac{4}{3} < x \leq -\frac{1}{2}$ ۲ $x \leq -\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{2}$ ۴ $x < -\frac{4}{3}$

مثال (دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است ؟)

۱ $(1, 2]$ ۲ $[2, 10]$ ۳ $[1, 11]$ ۴ $(1, 11]$

معادلات، نامعادلات گسسته

۱- از تساوی $\log 3 = \log n^2 + \frac{1}{4} \log (n-1) + \frac{1}{3} \log n$ مقدار n را بیابید. در مبانی ۴ کدام است.

$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3}$$

۲- از معادله تارنیتی $\log (n + \frac{1}{2}) = 1 + \log n$ مقدار $\log (n+1)$ کدام است.

$$-1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2$$

۳- از معادله تارنیتی $\log (n-4) - \log (n^2 - n - 6) = \log (n+1)$ مقدار n را بیابید. در مبانی ۴ کدام است.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad 1$$

۴- تارنیتی عددی از تارنیتی علی جذور آن در پایه ۹ به اندازه ۴ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است.

$$81 \quad 36 \quad 27 \quad 18$$

۵- از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 44$ تارنیتی $x+y$ در پایه ۴ کدام است. ب

$$1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3$$

۶- از معادله تارنیتی $\log_3 (n+2) - \log_3 (n^2+1) = 1$ مقدار n را بیابید. در پایه ۸ کدام است. ب

$$-\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}$$

۷- از دو معادله دو مجهولی $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار x کدام است. ب

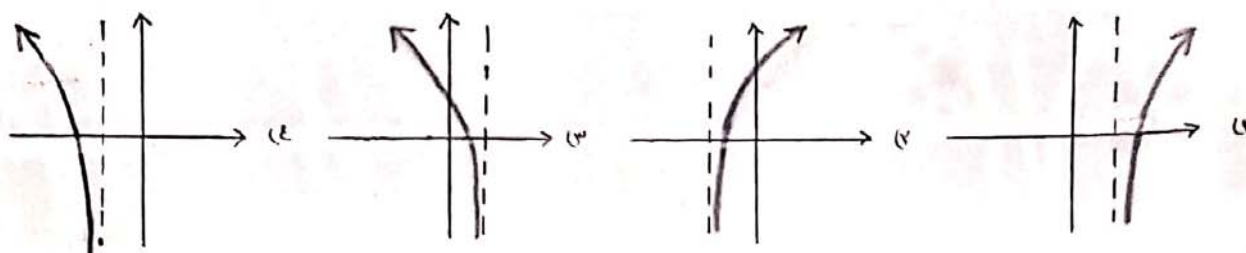
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

۸- از دو معادله دو مجهولی $3^{x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log (x+y) = 1 + \log x$ مقدار x کدام است. ب

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}$$

برای رسم نمودار تابع $f(x)$ ، ماسد نجات ذکر شده در صفحات قبل عمل می‌کنیم.

مثال ۱ نمودار تابع $f(x) = 1 + \log(x+1)$ به کدام صورت است ؟



مثال ۲ نمودار تابع $f(x) = \log \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log x$ نسبت به هم چگونه اند ؟
 ۱ $f(x)$ بالاتر ۲ $g(x)$ بالاتر ۳ منطبق ۴ فقط در نقطه متقاطع

مثال ۳ نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ ، محور x ها را در نقطه a به طول ۱- و شیب a ناحیه چهارم را در

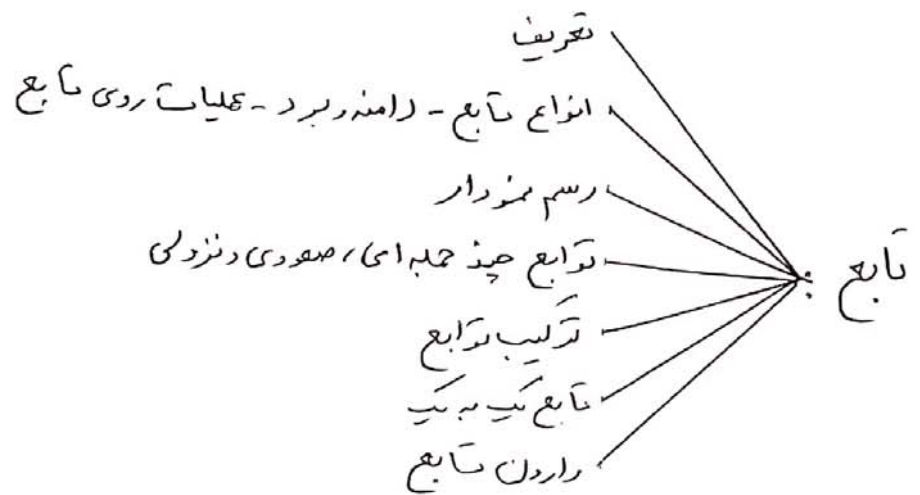
نقطه a به عرض ۱- قطع کرده است . a کدام است ؟ ۹۴

۱ $\frac{3}{2}$ ۲ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ ۳

✓ اگر بزرگی زلزله ای برابر ۸ در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد 10^6 است.
 که از رابطه $\log E = 11.8 + 1.5M$ بدست می‌آید.

مثال ۴ اگر بزرگی زمین لرزه ای ۶.۸ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده چند برابر است ؟

۱ $10^{21.6}$ ۲ 10^{22} ۳ $10^{23.4}$ ۴ $10^{24.6}$



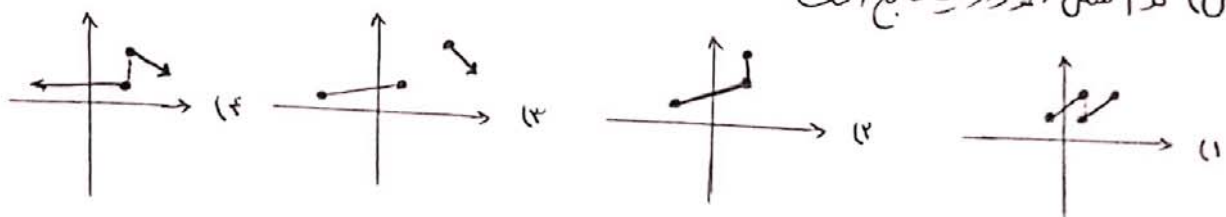
تعریف تابع :

از لحاظ زوج و فرد : رابطه‌ای که در آن هیچ زوج مرتب سهمیزی دارای مولفه اول یکسان نباشد .
 مثال : رابطه‌ای $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است .

۱ ۲ -۲ -۱ ۳ ۲ ۴ هیچ مقدار m

از لحاظ نمودار : هر خط به موازات محور y ها، نمودار واحد اکثرند یک نقطه قطع کند .

مثال : کدام شکل نمودار یک تابع است .



از لحاظ ضابطه : $m_1 = m_2 \Rightarrow f(m_1) = f(m_2)$

مثال : کدام یک از روابط زیر یک تابع است .

۱ ۲ ۳ ۴ $y = \sqrt{x+1}$ $x^2 + y^2 = 4$ $y^2 = x$ $|y| = x$

۱- در تابع f و g به صورت مجموعه زوج های مرتب بیان شده اند در حالت کلی کدام رابطه من است تابع نباشد؟

$g-f$ ۴ $f-g$ ۳ $f \cap g$ ۲ $f \cup g$ ۱

۲- اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است . ۱۸

۱۱ تعریف شده ۱ ۶ ۲ ۸ ۳ ۱۲ ۴

۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است . ۹

۹ ۴ ۸ ۳ ۷ ۲ ۶ ۱

۴- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است . ۱۵

$4x^2$ ۴ $2x^2$ ۳ $4x$ ۲ ۰ ۱

۵- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد آنگاه $f(1-x)$ کدام است . ۹

$x^2 - 4x + 5$ ۴ $x^2 + 4x + 5$ ۳ $x^2 + 3$ ۲ $x^2 + 1$ ۱

۶- اگر $f(x-1) + f(3) = x^2 - x$ باشد مقدار $f(-3)$ کدام است .

-۷ ۴ ۳ ۳ ۱ ۲ -۵ ۱

در تابع در صورتی با هم برابرند که ۱- دامنه آن ها با هم برابر باشند. ۲- ضابطه برابر باشند.

مثال ۱ در تابع f در g موزن اند. در کدام فرضیه در تابع مساوی اند؟ ۱۹

$$f(n) = \frac{\sqrt{n^2}}{|n|}, \quad g(n) = 1 \quad (۲) \quad f(n) = 2 \log n, \quad g(n) = \log n^2 \quad (۱)$$

$$f(n) = \frac{n}{|n|}, \quad g(n) = \frac{|n|}{n} \quad (۴) \quad f(n) = (\sqrt{n})^2, \quad g(n) = n \quad (۳)$$

ست؟

مثال ۱ اگر در تابع f با ضابطه های $n \neq \frac{1}{2}$ $f(n) = \begin{cases} \frac{4n^2-1}{2n-1} & n \neq \frac{1}{2} \\ 4n+K & n = \frac{1}{2} \end{cases}$ با هم برابر باشد کدام $g(n) = 2n+1$ است؟

۱ (۴)

۰ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

خطی: به صورت $y = ax + b$ است.

ثابت: $f(n) = K, K \in \mathbb{R}$ تابعی که بردشها شامل یک عضو است.

همانی: اگر هر عضو از دامنه به همان عضو در برد تابع نظیر شود. $f(n) = n$

چند ضابطه ای: به صورت $f(n) = \begin{cases} f_1(n) & n \in D_1 \\ f_2(n) & n \in D_2 \end{cases} \Leftrightarrow D_f = D_1 \cup D_2, R_f = R_1 \cup R_2$

تغییر: اگر $f(n)$ و $g(n)$ هر دو چند جمله ای باشند. $y = \frac{f(n)}{g(n)}$ مثال $y = \frac{1}{n}$

مثال ۱ اگر f تابع هانی و g یک تابع ثابت با فرض $g(-1) = 3$ و باشد، حاصل $\frac{f(1)+g(1)}{2f(2)-g(-4)}$ کدام است.

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

دامنه‌ی توابع :

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + c'} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{ \text{ریشه‌های خروج} \}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$$

$$f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) > 0 & (1) \\ h(x) > 0 & (2) \\ h(x) \neq 1 & (3) \end{cases} \Rightarrow D_f = (1) \cap (2) \cap (3)$$

✓ دامنه‌ی توابع $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ، $f(x) = [g(x)]$ ، $f(x) = |g(x)|$ برابر با دامنه $g(x)$ است.

$$f(x) = \sin(g(x)) \quad \text{یا} \quad f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow D_f = \{x \mid \cos(g(x)) \neq 0\}$$

$$f(x) = \cot(g(x)) \Rightarrow D_f = \{x \mid \sin(g(x)) \neq 0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_1 \cup D_2, \quad R_f = R_1 \cup R_2$$

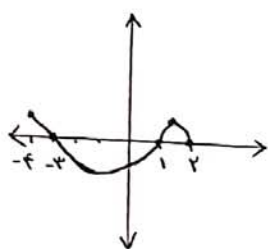
مثال) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + ax + b}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ باشد، $a+b$ کدام است.

۱) -۲۶ ۲) -۱۸ ۳) -۱۴ ۴) -۸

مثال) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x - |x-1|}$ به صورت $[a, +\infty)$ است. a کدام است.

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

مثال) شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{x+f(x)}$ کدام است.



- ۱) $[0, 2]$ ۲) $[-3, 2]$ ۳) $[1, 2] \cup [-4, -3]$ ۴) $[1, 2] \cup [-3, 0]$

عملیات روی توابع:

اگر f و g در توابع با دامنه‌های D_f و D_g و α یک عدد حقیقی باشد، دامنه توابع $f \pm g$ ،

αf و $f \cdot g$ برابر اشتراک دامنه توابع f و g خواهد بود.

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال) دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام ناحیه است.

- ۱) $(0, 1)$ ۲) $(0, 3)$ ۳) $[1, 2]$ ۴) $(2, 3)$

۱- اگر نمودارهای دو تابع با معادله های $y = ax^2 + bx - 2$ و $y = 2x + b$ در دو محور x ها در نقطه ای به طول ۱- تقاطع باشند a کدام است .

- ۲ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۵ ۵) ۴

۲- شکل دوم دو نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$ است . مقدار a کدام است .



- ۴ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

۳- نمودار تابع با معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها در نقطه ای به طول ۱ در محور y ها در نقطه ای به عرض ۶- قطع کرده است و از نقطه $(-2, -6)$ می گذرد . $f(-1)$ کدام است .

- ۸ ۱) -۷ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳ ۵) -۲

۴- اگر دامنه ترابع $f(x) = \frac{3x-1}{2x^2-x-m}$ و $g(x) = \frac{1}{\ln|x+2|}$ با هم برابر باشند a کدام گزینه در مورد m درست است ؟

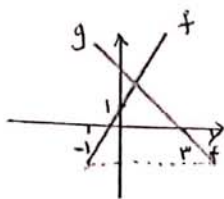
- ۱) $m = \frac{1}{8}$ ۲) $m = -\frac{1}{8}$ ۳) $m < \frac{1}{8}$ ۴) $m < -\frac{1}{8}$

۵- اگر $f = \{(1,0), (2,1), (3,4)\}$ و $g = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ در تابع باشند . مجموع مقادیر تابع $f \circ g$ کدام است .

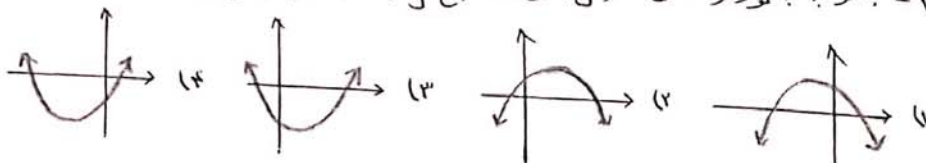
- ۲۴ ۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار $(f \circ g)(3)$ کدام است .

- ۱ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



۷- با توجه به نمودارهای f و g ، نمودار تابع $f \circ g$ به کدام صورت است .



رسم نمودار: فرض کنید k عددی مثبت و نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم.

برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به سمت راست $(-)$ یا چپ $(+)$ انتقال می دهیم.

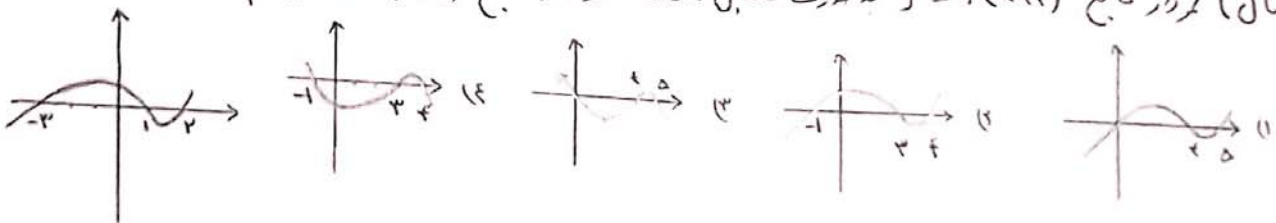
برای رسم نمودار $y = f(x) \pm k$ نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به سمت بالا $(+)$ یا پایین $(-)$ انتقال می دهیم.

اگر نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم نمودار تابع $y = -f(x)$ و اگر نسبت به محور y ها قرینه کنیم نمودار $y = f(-x)$ بدست می آید.

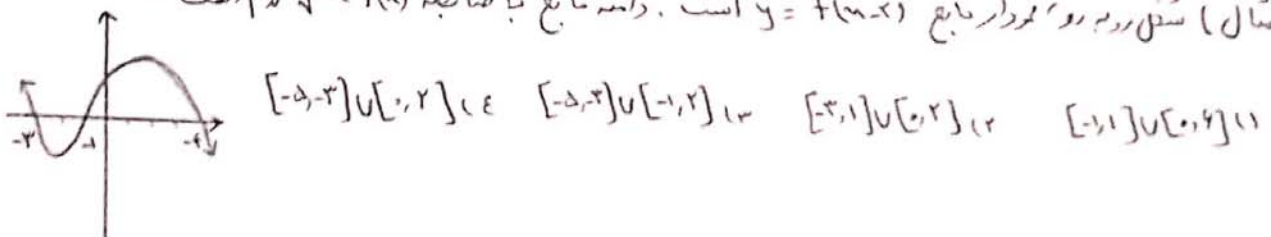
مثال ۱: نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و ۲ واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید نمودار اولیه با دام طولی مقاطع اند:

$$-2 \quad 1 \quad -2, 5 \quad 3 \quad -2 \quad 5 \quad -2, 5 \quad 1$$

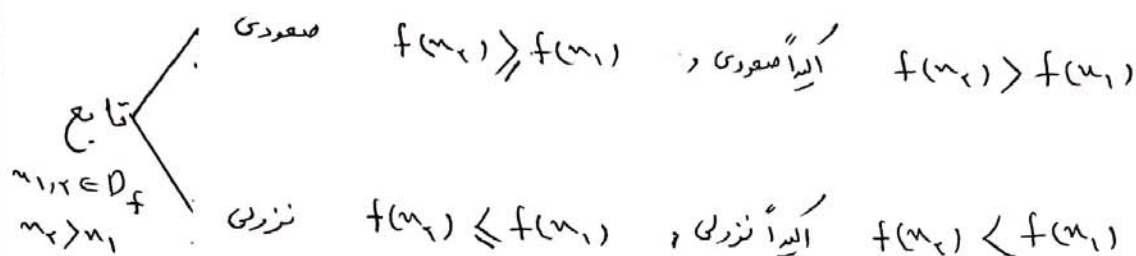
مثال ۲: نمودار تابع $y = f(x+1)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -f(x-2)$ کدام است.



مثال ۳: شکل زیر دو نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x+1}$ کدام است.



❑ برای رسم تابع به معادله $y = f(kx)$ باید طول هر نقطه از منحنی f را بر عدد k تقسیم و برای رسم تابع به معادله $y = k f(x)$ باید عرض هر نقطه از منحنی f را در عدد k ضرب کنیم.



❑ به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گویند.

❑ تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در تقسیم تابعی یکنوا است.

مثال) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ -x + 4 & x > 1 \end{cases}$ روی R چگونه است.

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا اکیداً صعودی بعداً نزولی ۴) ابتدا نزولی بعداً صعودی

مثال) در بازه ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، بردار آن با نمودار تابع

$g(x) = 2x^2 - x - 1$ در چند نقطه مشتک هستند. مثلاً

۱) ۲) ۳) ۴) ناقد نقطه مشتک

ترکیب دو تابع: ترکیب در تابع f و g را با نماد $f \circ g$ نشان می‌دهیم.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}, D_f \cap D_g \neq \emptyset \text{ (شرط)}$$

$$g \circ f(x) = \Rightarrow$$

مثال) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است. ۹۹

$$2x \quad (1) \quad x-1 \quad (2) \quad x+1 \quad (3) \quad 2x \quad (4)$$

مثال) اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{x})^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است. ۹۴

$$(-\frac{1}{2}, +\infty) \quad (1) \quad (\frac{1}{2}, +\infty) \quad (2) \quad (-2, 0) \quad (3) \quad (-1, \frac{1}{2}) \quad (4)$$

مثال) اگر $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ باشد، آنگاه دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است. ۹۳

$$[0, 2] \quad (1) \quad [0, 3] \quad (2) \quad [1, 2] \quad (3) \quad [1, 3] \quad (4)$$

مثال) اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ آنگاه $f(1-x)$ کدام است.

$$x^2 - 4x + 5 \quad (1) \quad x^2 + 4x + 5 \quad (2) \quad x^2 + 3 \quad (3) \quad x^2 - 4x + 5 \quad (4)$$

۱- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (9, 5), (2, 3)\}$ باشد، $g(f(a)) = 5$ کدام است. $\bar{a}$

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۲- در تابع باضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است. $\bar{a}$

- ۱ ۰ ۲ $4x$ ۳ $2x^2$ ۴ $4x^2$

۳- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشد، جواب معادله $g \circ f(x) = f \circ g(x)$ کدام است. $\bar{a}$

- ۱ $-1, -7$ ۲ $1, -7$ ۳ $-1, 7$ ۴ $1, 7$

۴- اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ مجموعه طول نقاطی که برای آن ها معضی تابع $f \circ g$ در بالای محور x

قرار گیرد، برابر کدام بازه است. $\bar{a}$

- ۱ $(-4, 1)$ ۲ $(-3, 2)$ ۳ $(-2, 1)$ ۴ $(-1, 4)$

۵- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشد، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ ، خط $y=3$ و

کدام است. $\bar{a}$

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۴,۵ ۴ ۶

تابع یک به یک

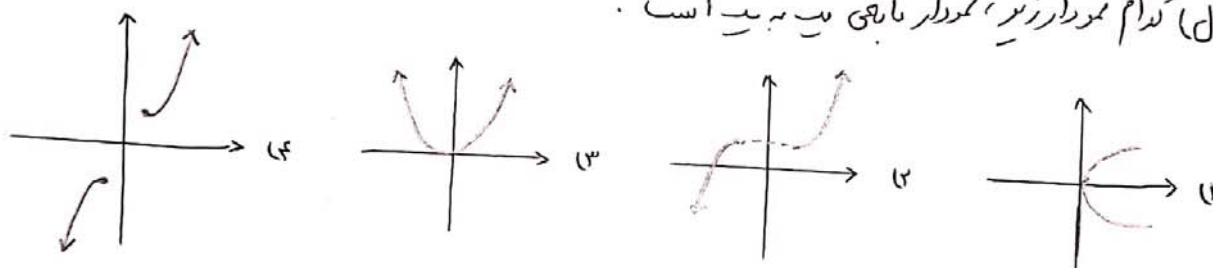
از روی زوج مرتب: هر دو عضو متمایز از دامنه، به دو عضو متمایز از برد نظیر شود.

مثال) اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، در نای (a, b) کدام است.

- ۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-1, 3)$ ۳) $(2, 1)$ ۴) $(2, 3)$

از روی نمودار: هر خط عمودی با محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال) کدام نمودار زیر، نمودار تابعی یک به یک است.



از روی ضابطه: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

مثال) تابع با کدام ضابطه زیر یک به یک است.

۱) $y = |x|$ ۲) $y = x^2$ ۳) $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ۴) $y = \begin{cases} -x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

مثال) توابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 1+x & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & x > 0 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ به ترتیب چگونه اند.

- ۱) یک به یک - یک به یک ۲) یک به یک - غیر یک به یک ۳) غیر یک به یک - غیر یک به یک ۴) غیر یک به یک - غیر یک به یک

۱- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ ، $g(x) = \log(x^2+2x)$ باشد، دامنه تابع fg کدام است. $\bar{94}$

- ۱ $[-4, 2]$ ۲ $[-2, 0]$ ۳ $[-4, -1] \cup [1, 2]$ ۴ $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۲- اگر $g(x) = 2x+1$ ، $fg(x) = 8x^2+9x+5$ باشد، تابع f برابر کدام است. $\bar{95}$

- ۱ $2x^2+2x+1$ ۲ $2x^2-2x+3$ ۳ $2x^2-x+4$ ۴ $2x^2+x+3$

۳- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ، تابع $g(x) = \tan x$ ؛ $|x| < \frac{\pi}{2}$ باشد، دامنه تابع fg کدام است. $\bar{87}$

کدام است. $\bar{87}$

- ۱ $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ۲ $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ۳ $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4}]$ ۴ $(-1, 0) \cup (0, 1)$

۴- ریشه ی نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تقسیم کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می دهیم.

نمودار حاصل، نیمی از ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می کند. $\bar{97}$

- ۱ -2 ۲ 5 ۳ 1 ۴ 1.5

۵- اگر f تابعی با دامنه $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 3f(1-\frac{x}{3})$ کدام است.

- ۱ $[-2, 4]$ ۲ $[-4, 5]$ ۳ $[1, 4]$ ۴ $[-4, 0]$

۶- اگر f تابعی با برد $[-3, 2]$ باشد، برد تابع $g(x) = -2f(2x+5)+4$ کدام است.

- ۱ $[-5, 4]$ ۲ $[-1, 8]$ ۳ $[0, 10]$ ۴ $[2, 12]$

تابع یک به یک

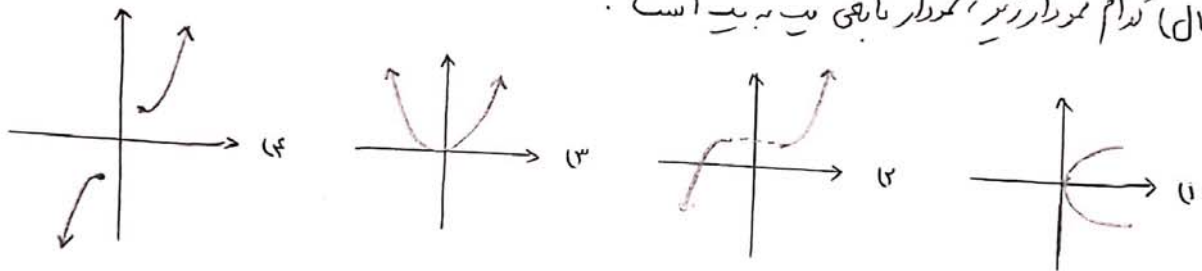
از روی زوج مرتب: هر دو عضو متمایز از دامنه، به دو عضو متمایز از برد نظیر شود.

مثال) اگر رابطه $f = \{(1, 2), (a, 5), (3, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، در تایی (a, b) کدام است؟

۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-1, 3)$ ۳) $(2, 1)$ ۴) $(2, 3)$

از روی نمودار: هر خط صواری با محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال) کدام نمودار زیر، نمودار تابعی یک به یک است.



از روی ضابطه: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

مثال) تابع با کدام ضابطه زیر یک به یک است.

۱) $y = |x|$ ۲) $y = x^2$ ۳) $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ۴) $y = \begin{cases} -x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

مثال) کدام تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & x > 0 \\ 1-x^2 & x < 0 \end{cases}$ به ترتیب چگونگی اند.

۱) یک به یک - یک به یک ۲) یک به یک - غیر یک به یک ۳) غیر یک به یک - غیر یک به یک ۴) غیر یک به یک - غیر یک به یک

تابع وارون

از روی زوج مرتب: اگر در تابع f ، جایی مولفه حاراً عوضی کنیم، تابع وارون (f^{-1}) بدست می آید.

مثال) اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,1)\}$ و $g = \{(2,3), (1,4), (4,1), (3,0)\}$ ، تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

- ۱ $\{(1,2), (2,0)\}$ ۲ $\{(2,4), (3,5)\}$ ۳ $\{(2,0), (1,4)\}$ ۴ $\{(5,3), (1,4)\}$

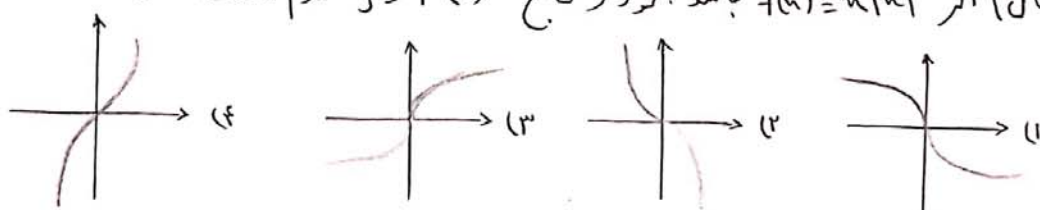
مثال) دو تابع $f = \{(2,5), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f(g(x)) = 9$ ، x کدام است؟

۹۶

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ $\frac{5}{2}$

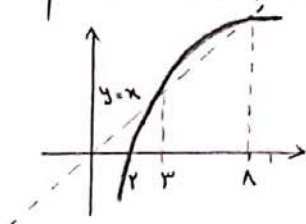
از روی نمودار: کافیت نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

مثال) اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



۹۷

مثال) شکل روبه در نمودار تابع $y = f(x)$ و رسم اولیه اول رسم است. دامنه تابع با همبسته $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟



- ۱ $(0,2)$ ۲ $[2,3]$ ۳ $[2,8]$ ۴ $[3,8]$

از روی ضابطه: ابتدا x را بر حسب y بدست آورده، سپس به جای y از عبار x به جای x از عبار f^{-1} استفاده می کنیم.

مثال ضابطه دارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است. $\frac{13}{14}$

$$y = -x^2 + 4x - 5, x \leq 2$$

$$y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$$

$$y = -x^2 + 4x - 5, x \geq 1$$

$$y = x^2 - 4x + 5, x \geq 1$$

✓ اگر $(a, b) \in f$ آنگاه $(b, a) \in f^{-1}$ ، یعنی f^{-1} با جابجایی تابع دارون را پیدا کنیم.

مثال ضابطه دارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ به کدام صورت است. $\frac{13}{14}$

$$y = \pm x|x|, x \in \mathbb{R} \quad (1) \quad y = x^2, x \in \mathbb{R} \quad (2) \quad y = \pm x^2, x \in \mathbb{R} \quad (3) \quad y = \pm x|x|, x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

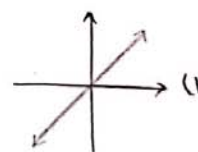
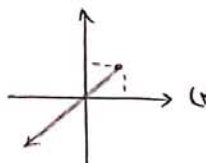
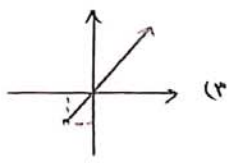
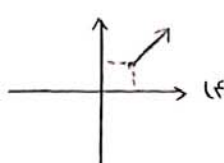
$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad D_{f^{-1}} = R_f, \quad D_f = R_{f^{-1}} \quad \checkmark$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \checkmark$$

مثال تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ بارانه (یا نه) است. نمودار تابع f را f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند. $\frac{12}{14}$

۱ ۲ ۳ ۴ غیر متقاطع

مثال اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ آنگاه نمودار تابع $y = f \circ f^{-1}(x)$ به کدام صورت است.



۱- در تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ ، $f(x) = \{(x, -1), (-1, x), (x, x), (-x, -x)\}$ ، g منفرجه. اگر $f(g(x)) = 3$ ، g کدام است؟ ۹۳

۱) -4 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 4

۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $R - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند. ۹۹

۱) $-1, -4$ ۲) $-1, 4$ ۳) $1, -4$ ۴) $1, 4$

۳- تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه R ، چگونه است. ۱۸

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون ناپذیر ۴) یک به یک

۴- ریشه خط به خط $4x - 2y = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می نامیم. عرض از مبدا خط d کدام است. ۹۷

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۵- تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه ای وارون پذیر است. ضابطه $f(x)$ در آن بازه کدام است. ۹۲

۱) $x > 4$ ، $\frac{1}{4}x + 1$ ۲) $x \leq 4$ ، $\frac{1}{4}x - 1$ ۳) $x > 4$ ، $\frac{1}{4}x - 1$ ۴) $x \leq 4$ ، $\frac{1}{4}x + 1$

۶- نمودار تابع $y = 4 + \sqrt{x+1}$ را نسبت به نیمساز نامی اول رسم کنید. ضابطه نمودار حاصل کدام است.

۱) $y = x^2 - 8x + 15$ ، $x \leq 4$ ۲) $y = x^2 - 8x + 15$ ، $x \geq 4$ ۳) $y = x^2 + 2x$ ، $x \leq -1$ ۴) $y = x^2 + 2x$ ، $x \geq -1$

۷- تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است. ۹۴

۱) $1 - \sqrt{1+x}$ ، $x < 0$ ۲) $1 - \sqrt{1-x}$ ، $x < 1$ ۳) $1 + \sqrt{1-x}$ ، $0 < x < 1$ ۴) $1 - \sqrt{1-x}$ ، $-1 < x < 1$

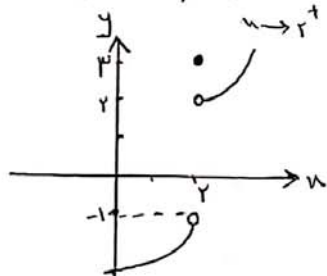
«حد و پیوستگی»

تعریف حد:

برای اینکه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حد باشد، آن است که بازه اطراف $x=a$ عفو داشته

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{و حد راست و چپ با هم برابر باشند.}$$

مثال (شکل مقابل زیر را تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow r^-} f(x) + f(r)$ کدام است؟



۴ (۴)

۲ (۳)

۰ (۲)

-۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} K = K$$

حد تابع ثابت: اگر $f(x) = K$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

حد تابع همانی: اگر $f(x) = x$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + l) = a\infty^n + b\infty^{n-1} + \dots + l = f(\infty)$$

حد تابع چندضابطه‌ای: مقادیر حد چپ و راست تابع در نقاط مرزی را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \quad f(x) = \begin{cases} ax-1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۱۲

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

سؤال) تابع f ، g با همبستگی های $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}n+1 & n \geq 2 \\ -n+3 & n < 2 \end{cases}$ ، $g(n) = \begin{cases} n+1 & n \geq 2 \\ n^2 & n < 2 \end{cases}$ داده شده اند.
 کدام تابع زیر در $n=2$ حد دارد؟

$f+g$ $f-g$ $\frac{f}{g}$ $f \cdot g$

سؤال) کدام گزینه در مورد حد تابع $f(n) = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+1} & n < -1 \\ \sqrt{n^2+3} & n > -1 \end{cases}$ صحیح می باشد.

۱) حد موجود است. ۲) حد چپ موجود نیست. ۳) حد چپ و راست موجود نیست. ۴) حد چپ و راست موجود است.

در تابع قدر مطلق، اگر n به سمت رشته داخل قدر مطلق برود، باید درست چپ در است را تعیین کرد.
 تابع $y = [n]$ ، $y = [-n]$ در نقاط صحیح حد ندارند اما در نقاط غیر صحیح حد دارند.

سؤال) حد تابع $\frac{3n^2-2n-1}{\sqrt{n^2-2n+1}}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است.

۴ -۴ حد ندارد ۵

سؤال) حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|n| - [n]}{2|n| + [n]}$ کدام است.

۵ $\frac{1}{2}$ ∞ تعریف نشده

حدتوابع گزری : درگاه n به سمت رشته ساده بخرج میل کند، حد است، چپ را بدانند بررسی می کنیم.

مثال) حدتوابع $f(n) = e^{\frac{2}{n-1}}$ رشتی $n \rightarrow 1$ کدام است ؟

+ ∞ - ∞ حد ندارد 1

$$\lim_{n \rightarrow a} \sqrt{mn+n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow a} (mn+n)} = \sqrt{L}$$

حدتوابع رادیکالی : اگر $\lim_{n \rightarrow a} (mn+n) = L$ آنگاه

مثال : $\lim_{n \rightarrow 2} \sqrt{4n+1} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow 2} (4n+1)} = \sqrt{9} = 3$

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow 0} (\sqrt{n^2-n} + \frac{n+2}{n+1})$ کدام است ؟

2 1 -1 وجود ندارد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & , a > 1 \\ 0 & , 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = \begin{cases} 0 & , a > 1 \\ +\infty & , 0 < a < 1 \end{cases}$$

حدتوابع نمایی :

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \log_a n = \begin{cases} -\infty & , a > 1 \\ +\infty & , 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & , a > 1 \\ -\infty & , 0 < a < 1 \end{cases}$$

حدتوابع لگاریتمی :

$$1) \lim_{n \rightarrow a} \sin n = \sin a$$

$$3) \lim_{n \rightarrow a} \tan n = \tan a, \quad a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow a} \cos n = \cos a$$

$$4) \lim_{n \rightarrow a} \cot n = \cot a, \quad a \neq k\pi$$

مثال حاصل $\lim_{n \rightarrow \pi^+} (\sin n + \cos n)$ کدام است .

۱ ۰ -۱ -۲

مثال حد تابع $f(n) = \frac{\sin 2n}{\sqrt{1-2\cos 2n}}$ وقتی $n \rightarrow \pi^+$ کدام است .

-۲ ۲ -۱ ۱

قضیه فشردگی: به ازای هر n در بازه I که شامل نقطه a است، برای توابع $h(n)$ ، $g(n)$ ، $f(n)$

داشته باشیم $h(n) \leq f(n) \leq g(n)$ و $\lim_{n \rightarrow a} h(n) = \lim_{n \rightarrow a} g(n) = l$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = l$

مثال حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^2} \right)$ کدام است .

∞ -۱ ۱ ۰

قضیه کرانداري: اگر تابع f در همبستگی نقطه a کراندار باشد، حد تابع g در نقطه $n=a$ برابر با ۰ است.

آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} f(n) \times g(n) = ۰$ ($\times$ کراندار)

مثال هرگاه برای تابع $f(n)$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = ۱$ آنگاه حد تابع $(f(n)-۱) \cos \frac{\pi}{n^2}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است .

π ۲ ۱ ۰

۱- اگر تابع f در نقطه $n=1$ حد داشته باشد، $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(n)-1}{f(n)+1} = 5$ باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow 1} f(n)$ کدام است؟

۳ ۲ -۲ -۳

۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} (n+a)^2 & n \geq -1 \\ 2n+1 & n < -1 \end{cases}$ در نقطه $n=-1$ حد دارد؟

$\mathbb{R}$ $\emptyset$ $\{2\}$ $\{0\}$

۳- در تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} n^2+a & n < -2 \\ 3n+4 & n \geq -2 \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه $n=-2$ ، علی مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

۵ ۷ -۶ -۴/۵

۴- در تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \sqrt{1-n} & n \geq 0 \\ -\sqrt{1+n} & n < 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n^3-n)$ کدام است؟

-۱ ۱ ۰ موجود نیست

۵- تابع f با ضابطه $f(n) = \begin{cases} f_{n+1} & n \geq 0 \\ \frac{f_n}{n!} & n < 0 \end{cases}$ در $n=0$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۲ ۱ -۱ -۲

۶- در تابع با ضابطه $f(n) = (n+a)[n]$ اگر $\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) - \lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱ ۳ -۱ ۰

۷- حد تابع با ضابطه $y = \frac{\sin^2 n + 2 \cos n}{2 \sin^2 n - \cos n}$ وقتی $n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

-۲ ۲ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

۸- اگر حد تابع $f(n) = a \cos 2n + 2 \sin 2n$ در $n = \frac{\pi}{4}$ برابر ۳ باشد، $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۴ ۳ -۲ -۳

حد بی نهایت (ناشأه) وقتی n به سمت a میل می کند، حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ می شود.

$$\lim_{n \rightarrow a} f(n) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

حالات زیر را به خاطر بسپارید

$$\begin{cases} \infty + \infty = \infty \\ \infty \times \infty = \infty \\ \text{عدد} \times \infty = \infty \\ \text{مطلق} \times \infty = \infty \end{cases}$$

$$\frac{\text{عدد}^+}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}^+}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد}^-}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد}^-}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \text{ت.ن.}$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$$

$$\frac{0 \text{ مطلق}}{0} = \text{ت.ن.}$$

$$\frac{0 \text{ حدی}}{0} = \text{مبهم}$$

صفر { حدی، 0^+ یا 0^-
مطلق: 0

مثال (مقدار حد تابع $\frac{\sin n}{[n]}$ وقتی $n \rightarrow +\infty$ کدام است)

تعریف شده

۱

$+\infty$

۰

مثال) اگر $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{-2}{n^2 + an + b} = -\infty$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است.

-۲

-۱

۱

۲

۱- حد $\frac{-n}{n-1}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است .

1 +∞ -1 -∞

۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{[n]-1}{n^2-3n}$, $\lim_{n \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{[n]}{|2n+1|}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است .

+∞ , -∞ -∞ , +∞ -∞ , -∞ +∞ , +∞

۳- نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{n+1}{n^2+n}$ در نقطه $n=0$ به کدام سمت است .



۴- کدام یک از گزینه های زیر نادرست است .

$$\lim_{n \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \pi^-} \cot n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan n = +\infty$$

۵- معادله a , b برای آنکه داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{n}{n^2 - an + b} = +\infty$ کدام است .

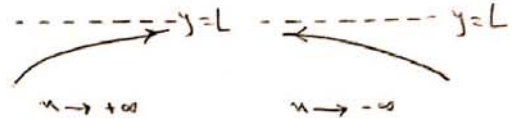
-a = b = -4 a = b = 4 a = b = -2 a = -b = 2

۶- اگر $\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{n-4}{n^2 + an + b} = -\infty$ باشد ، $a+b$ کدام است .

۱۲ ۶ ۳ -۳

حد در بی نهایت: وقتی n به سمت ∞ میل کند، ضرایب f عدد حقیقی می شود.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty \text{ یا } -\infty} f(n) = L$$



برای مثال نمودار تابع با ضابطه $f(n) = \frac{1}{n}$ به صورت است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = 0$$

✓ زنی کنید n عددی طبیعی باشد $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n^n} = 0$ (عدد غیر منفی $\pm\infty = 0$)

حد ضمیمه ای حاد در بی نهایت: $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (a_n^n + b_n^{n-1} + \dots + c) \approx \lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n^n$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n^m + b_n^{m-1} + \dots + c}{a'_n^n + b'_n^{n-1} + \dots + c'} \approx \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n^m}{a'_n^n} = \begin{cases} \infty & m > n \\ \frac{a}{a'} & m = n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

مثال اگر حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^3 + b_n^2 + c}{(a+2)n^2 + n - 1}$ برابر 1 باشد، مقدار $(a+b)$ کدام است.

2 -2 1 -1

اگر زیر رادیکال یک چند جمله‌ای داشته باشیم، حد آن وقتی $n \rightarrow \pm\infty$ برابر با حد جمله‌ای است که دارای بزرگترین درجه است.

مثال ۱) حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2\sqrt{n}} - 1}{3n^2\sqrt{n} + n - 2}$ کدام است .

$+\infty$

۰

$\frac{1}{3}$

مثال ۲) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1})$ کدام است

$\infty - \infty$

-2

-1

در توابع رادیکالی می‌توان لزوم از بزرگترین درجه وقتی $n \rightarrow \pm\infty$ استفاده کرد.

$$\sqrt{an^2 + bn + c} \sim_{n \rightarrow \pm\infty} \sqrt{a} \left| n + \frac{b}{2a} \right|, (a > 0)$$

$$\sqrt[3]{an^3 + bn^2 + cn + d} \sim_{n \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{a} \left(n + \frac{b}{3a} \right)$$

مثال ۳) حاصل $\lim_{n \rightarrow -\infty} (n + \sqrt{n^2 + 11n})$ کدام است .

۸

۴

-4

-8

۱. مثال ۴) حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{18n^3 + 2n^2} - 2n)$ کدام است .

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

✓ اگر $f(a) = 0$ باشد آنگاه $f(n)$ بر $n - a$ بخش پذیر است.

مثال) چند جمله ای $f(n) = n^3 + an^2 + bn - 6$ بر $n - 2$ بخش پذیر است و باقیمانده تقسیم $f(n)$ بر $n + 1$ برابر -15 است. مقدار $f(-2)$ کدام است.

۱۸ ۲۹ ۳۰ ۳۹

رفع ابهام :

تجزیه چند جمله ای ها اگر چند جمله ای به ازای $n = n_0$ برابر ۰ شود می توان با تجزیه صورت و مخرج عامل صفر شده را حذف کرد.

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^3 - 2n - 1}{n^2 - 1}$ برابر است با

۱ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$ ۰

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n - [n]}{2n^2 - n - 1}$ کدام است ؟

$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

توابع کسری: از قاعده هسپیتال (در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ نیز برقرار است) استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

مثال) اگر $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 + an + b}{n^2 - 4} = 3$ ، مقدار $a + b$ کدام است.

۶ ۸ -۱۲ -۱۴

مثال حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n}$ برابر است با

۰ ∞ ۲ e

توابع قدرمطلق: تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و پس حاصل را بدست می‌آوریم.

مثال، حاصل $\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{|n^3 - 2n + 1|}{2n^2 - 3n + 1}$ کدام است.

$\frac{1}{2}$ ۱ -۱ $-\frac{1}{2}$

توابع رادیکالی، تابع رابنه یک اعدادهای زوج یا چاق و لافز گویای لیم.

سؤال حاصل حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sqrt{n-1}}{\sqrt{2n-1} - 3}$ کدام است.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4}$$

سؤال حاصل $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+8}} - 2}{n^2 - n}$ کدام است.

$$\frac{5}{24} \quad \frac{7}{24} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{12}$$

□ وقتی $n \rightarrow \infty$ آنگاه حد هر چند جمله ای با حد یک جمله ای با آن همخوانی ندارد.

سؤال حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{n^2 - 4n}$ کدام است.

$$0 \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \quad 1$$

□ در برخی موارد $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)}$ با قید متغیر $n-a=t$ همان مسئله را راحت حل کرد.

سؤال حاصل $\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{n^2-1} + n - 1}{2\sqrt{n-1} + n^2 - 1}$ کدام است.

$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

توابع مثلثاتی: از اینها رهای مثلثاتی یا هم ارزی استفاده می کنیم.

برخی از اینها رها: $1 \pm \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

برخی از هم ارزی ها: $(u \rightarrow 0)$ $\sin u \sim u$, $\tan u \sim u$

$$1 - \cos u \sim \frac{1}{2} u^2, \quad 1 - \cos^m u \sim \frac{m}{2} u^2$$

$$u - \sin u \sim \frac{1}{6} u^3, \quad \tan u - u \sim \frac{1}{3} u^3, \quad \tan u - \sin u \sim \frac{1}{4} u^3$$

مثال حاصل: $\lim_{u \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 u}{\sin^2 u}$ کدام است.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{3}{2}$$

مثال حد: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u - \sin u \cos u}{K \tan^2 u}$ وقتی $u \rightarrow 0$ برابر یک است، مقدار K کدام است.

$$\frac{1}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

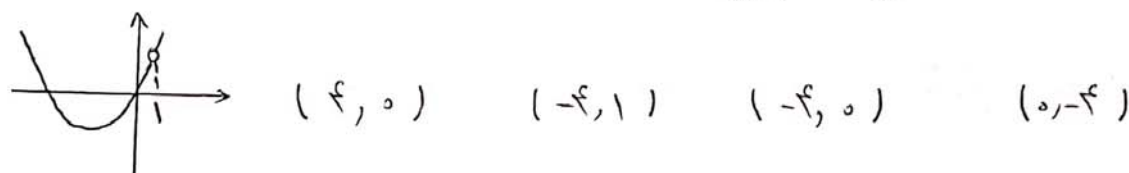
۱- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2an^2 - n - 2a}{an^2 + n(1-a) - 1}$ وجود داشته باشد، a چه قدر است؟

$$-3 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 3$$

۲- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + an + b}{n^3 - n} = -1$ حاصل $a \times b$ کدام است.

$$-12 \quad -6 \quad 6 \quad 12$$

۳- شکل مقابل نمودار تابع $f(n) = \frac{fn^3 + an + b}{n-1}$ است. در نای در ب (a, b) کدام است.



۴- قدر مطلق تفاضل حدیب ر راست تابع $y = \frac{n^2 - n - 1}{n - 1}$ در نقطه $n=1$ کدام است.

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 6$$

۵- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n| - [n]}{2|n| + [n]}$ کدام است.

$$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + [n]}{n^3 + 3n - 5}$ کدام است.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{9}$$

۷- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n+2}}{n^2 + 1}$ کدام است.

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -2 \quad 2$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \ln \frac{an+2a}{1-\sqrt{2n+4}} = 1 - \ln 2$$

-5 -2 2 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1-\sqrt{n}}{2-\sqrt{5-n}} = 1$$

4 2 -2 -4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{|n^2-n-2|}{2n-\sqrt{n+1}} = 1$$

2 2 -2 -2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2-\sqrt{n+4}}{\sqrt{n^2-5n+4}} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$ $-\frac{1}{12}$ $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n-\sqrt{2n-2}}{an+b} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

2 1 -1 -2

$$\lim_{n \rightarrow -1} \ln \frac{2n^2+5n+2}{2-\sqrt{2+\sqrt{2-n}}} = 1$$

24 14 12 1

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \frac{1-\sin 2n}{(1-\tan n)^2} = \frac{1}{2}$$

∞ 2 1 $\frac{1}{2}$

13- حد $\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \cot n}{1 + \tan n}$ را بیابید.

∞ 1 0 -1

14- حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{\cos n}}{\sin n}$ را بیابید.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 2 ∞

15- حد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{1 - \cos n}}$ را بیابید.

$3\sqrt{2}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{3}$ 3

16- حد $\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan n - 1}{\cos n}$ را بیابید.

1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1

17- در تابع $f(x) = \frac{ax + \sqrt{bx^2 + c}}{x + r}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود داشته باشد،

مقادیر a و b را بیابید.

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$

✓ هرگاه $n \rightarrow 0$: حدی ای با کمترین توان

✓ اگر $n \rightarrow +\infty$: بزرگترین باید قدرت
در توانهای

✓ اگر $n \rightarrow -\infty$: کوچکترین باید قدرت
در توانهای

← حدی ای نه بزرگترین درجه را دارد

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$: اگر توانیم لزوم ارزی بزرگترین جمله استفاده کرد، عوامل ∞ شوند را محسوس کردیم

÷ بدینهم . در توانهای مشکلی از هم ارزی ، $\tan n = \frac{1}{\cot n}$ ، $\cot n = \frac{1}{\tan n}$ استفاده می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4^n} = 4$$

مثال ۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cot 3n}{\cot 5n}$ برابر است با

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{25}$$

مثال ۲) در تابع با این جمله $f(n) = \frac{\sqrt[3]{3^n + 5n^2 + 11} - 3}{an^{n-1} + 12}$ ، اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n)$ برابر است با ؟

$$\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{27}} = 1$$

رفع ابهام $\infty \times 0$: عامل ∞ نشونده را مکتوس و در خروجی عامل صفر را می دهیم

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})$ کدام است .

1 0 ∞ -1

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n+4}} - 1 \right)$ برابر است با

$\frac{1}{8}$ $-\frac{1}{8}$ $-\infty$ $+\infty$

رفع ابهام $\infty - \infty$: اگر بتوانیم از هم ارزی مثلثاتی استفاده کنیم باید خروجی شکر گرفت تا به $\frac{0}{0}$ برسیم

مثال) $\lim_{n \rightarrow 0} (\sin n (\cot 2n - \cot 3n))$ برابر است با

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 3n - 4} + \frac{3}{n+4} \right)$ کدام است .

$-\infty$ $+\infty$ $-\frac{1}{5}$ 0

✓ در همدی حالت های رفع ابهام در صورت امکان می توان از هم ارزی استفاده کرد.

رفع اسهام 1^∞ : بهترین هم ارزی در حد های توانی استفاده لازم ارزی عدد e است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + n\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + an\right)^{\frac{b}{n}} = e^{ab}$$

✓ اگر عبارت f^g به شکل 1^∞ در آید برای رفع اسهام از هم ارزی $f^g \sim e^{(f-1)g}$ استفاده می کنند.

مثال) حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \tan n)^{\tan n}$ برابر است با

$$+\infty \quad 0 \quad \frac{1}{e} \quad e$$

مثال) حد دنباله $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n-3}$ کدام است. ($n \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^3}} \quad \sqrt[3]{e^3} \quad \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad e\sqrt{e}$$

$$1. \text{ حد عبارت } n \rightarrow \infty \text{ در } \left(\frac{n+2}{n^2+n} - \frac{2n-4}{n^2-2n} \right) \text{ را حساب کنید.}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -2 \quad 2$$

$$2. \text{ حد عبارت } n \rightarrow -2 \text{ در } \left(\frac{3}{2n^2+2n+2} - \frac{4}{n^2-4} \right) \text{ را حساب کنید.}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{11} \quad \frac{\delta}{11} \quad -\frac{\delta}{11} \quad -\frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$3. \text{ حد عبارت } n \rightarrow 2^- \text{ در } \frac{n+2}{n^2-2n} + \frac{2[n]}{2-n} \text{ را حساب کنید.}$$

$$+\infty \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\infty$$

"پیوستگی"

تابع f در نقطه $c \in \mathbb{R}$ پیوسته می‌گردد اگر و تنها اگر $\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow c^-} f(n) = f(c)$

متغیر از پیوستگی راست: $\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = f(c)$

متغیر از پیوستگی چپ: $\lim_{n \rightarrow c^-} f(n) = f(c)$

مثال (تابع f): $f(n) = \begin{cases} -n^2 + 2n & n \geq 1 \\ n^2 - n + 1 & 0 < n < 1 \\ \frac{n + \sqrt{1-n}}{n+1} & n < 0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طولی‌ها معرّفیت داده است.

۱) در $n=0$ پیوسته، در $n=1$ ناپیوسته، در $n=2$ پیوسته، در $n=3$ ناپیوسته، در $n=4$ ناپیوسته، در $n=5$ پیوسته.

مثال (اگر تابع $f(n) = \begin{cases} \frac{n^2-4}{n-2} & n < 2 \\ a \cdot [n] & n \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $n=2$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است.

۲۵ ۲۴ ۲۳ ۲۲

مثال (تابع $y = \cos(n[\frac{\pi}{2}])$ در $n=2$:

۱) فقط پیوستگی راست ۲) فقط پیوستگی چپ ۳) فقط پیوسته ۴) فقط دارای حد است.

پویستگی روی بازه

تابع f روی بازه (a, b) پویسته هرگاه در هر نقطه از این بازه پویسته باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ پویسته هرگاه در بازه (a, b) پویسته و در a پویستگی راست داشته باشد.

تابع f در بازه $[a, b]$ پویسته هرگاه در بازه (a, b) پویسته و در b پویستگی راست داشته باشد.

تابع f در بازه (a, b) پویسته هرگاه در بازه (a, b) پویسته و در a پویستگی چپ داشته باشد.

مثال (تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - [x]}{x^2 - x - 6} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در بازه $(2, 3)$ پویسته است. ۹۷)

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{11}$$

مثال به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 2x & \frac{\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ روی بازه $[0, 2\pi]$ پویسته است. ۹۸)

$$\text{هیچ مقدار } a$$

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}$$

✓ تابع $[f(n)]$ در نقاطی که $f(n)$ عدد صحیح باشد، پیوسته است.

✓ در تابع به ازای $f(n) = [g(n)]$ هرگاه $g(n)$ صعودی در $n=a$ ، $g(a)$ عدد صحیح شود $\Leftarrow$ پیوستگی چپ

✓ در تابع به ازای $f(n) = [g(n)]$ هرگاه $g(n)$ نزولی در $n=a$ ، $g(a)$ عدد صحیح شود $\Leftarrow$ پیوستگی راست

✓ تابع $f(n) = g(n)[n]$ در نقاطی که $g(n) = 0$ یا $n=a$ طول نقطه $\min$ نباشد تابع f پیوسته است.

مثال) اگر تابع $f(n) = (n^2 + an + b)[n]$ در نقاط ۱، ۲ پیوسته باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است.

$(2, 1)$

$(1, 2)$

$(-2, -1)$

$(-2, -1)$

مثال) تابع $f(n) = [n^2 - 2n]$ در نقطه ای بکدام طول پیوسته است.

۳

۲

۱

۰

✓ تابع چند عملی همه جا (روی R) پیوسته اند.

✓ تابع رادیکالی، مثلثاتی، نمایی و نمایی در دامنه شان پیوسته اند.

مثال) تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + a}$ روی R پیوسته است. عدد a کدام است.

$a \in R$ $a \in \{ \}$ $a < 4$ $a > 4$

مثال) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin 2x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ باشد، $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ در بازه $[0, \pi]$ پیوسته است. $a-b$ کدام است.

5 4 -4 -5

مثال) مقدار نقاط نامیوستی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & |x| \leq 2 \\ \frac{1}{x} x-1 & |x| > 2 \end{cases}$ کدام است.

0 1 2 بی شمار

مثال) اگر تابع f همواره پویسته باشد، تابع با ضابطه $y = \sqrt{f(n) + f(n)}$ در کدام فاصله ناپویسته است؟

$\{n: f(n) < 0\}$ $\{n: f(n) > -1\}$ $\{n: -1 < f(n) < 1\}$ $\{n: f(n) < 1\}$

☑ هرگاه تفسیر حد، مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم در تابع پویسته، پویسته است.

☑ تابع به ازای رشته های مخرج ناپویسته است.

مثال) مقدار تفاضل ناپویستی تابع با ضابطه $f(n) = \frac{1-n}{1+n}$ کدام است؟

$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$

مثال) مقدار تفاضل ناپویستی نزودار تابع با ضابطه $f(n) = \frac{3-\sqrt{n+4}}{1+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n+5}$ در بازه $(-4, +\infty)$ کدام است؟

$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$

۸- تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \sin n + 2 \cos n & n < \frac{\pi}{2} \\ -\cos n & \frac{\pi}{2} < n < \pi \end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ از نظر پیوستگی در $n = \frac{\pi}{2}$ چگونه است. ب

از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته - از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته - از چپ پیوسته - از راست پیوسته

۹- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} n^2 + an - 5 & n > 2 \\ an - 1 & n \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. ب

هر مقدار حقیقی a - هیچ مقدار a - فقط $a = -2$ - فقط $a = 2$

۱۰- اگر تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} an + b & n > 2 \\ n^2 + bn - 1 & n \leq 2 \end{cases}$ باشد $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است. ب

۱ - ۲ - ۳ - ۴

۱۱- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{n^2 + n - 21}{n - 1} & n \neq 1 \\ a & n = 1 \end{cases}$ بر R پیوسته است. ب

هر مقدار a - ۳ - ۲ - هیچ مقدار a

۱۲- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n < a \\ 1 - \frac{n}{4} & n \geq a \end{cases}$ همواره پیوسته است. ر ۹۵

۱ - ۲ - ۳ - هیچ مقدار a

۱۳- تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} n[n] & n < 1 \\ an + b & n \geq 1 \end{cases}$ روی R پیوسته است. a کدام است. ر ۸۵

۱ - $-\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{2}$ - ۱

۱۴- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{a(1 + \sqrt{1-n})}{n^2 - 2n} & n > 2 \\ n - a & n \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است. ر ۹۴

$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{6}$ - $\frac{3}{2}$

۱۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{n} & 1 < n < 4 \\ a + \cos \frac{\pi n}{4} & n \geq 4 \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی بزرگتر از ۱، پیوسته است. ب ۹۴

$-\frac{1}{4}$ - $-\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{2}$

۱- به ازای کدام مقدار تابع با مضابطه $f(n) = \begin{cases} 2n - [n] & n < 2 \\ a & n = 2 \\ n + 2 & n > 2 \end{cases}$ در نقطه $n=2$ پیوسته است. $\frac{1}{93}$

۴ $\frac{1}{4}a$ a $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$

۲- تابع با مضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{1-\sqrt{1-n}} & n \neq 1 \\ a & n = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $n=1$ پیوسته است. $\frac{1}{96}$

-۲ -1 1 2

۳- تابع با مضابطه $f(n) = \begin{cases} an + 2 & n < 3 \\ a \log_2(1+n) & n \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $n=3$ پیوسته است. $f(4)$ کدام است. $\frac{1}{97}$

-۲ $-1/2$ 1 0

۴- $f(n) = \begin{cases} n + a & n < 1 \\ 1 & n \geq 1 \end{cases}$ و $g(n) = \begin{cases} n + 1 & n < 1 \\ \frac{a}{n+1} & n \geq 1 \end{cases}$ باشد، به ازای کدام مقدار a تابع $f+g$ در $n=1$ پیوسته است. $\frac{1}{98}$

-۴ $\frac{1}{2}$ -2 2

۵- تابع با مضابطه $f(n) = \begin{cases} a \sin 2n & \frac{\pi}{4} < n < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(n + \frac{\pi}{4}) & \frac{\pi}{4} \leq n \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ در $n = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است. $\frac{1}{99}$

-۱ 0 $-\frac{1}{2}$ 1

۶- تابع با مضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{\sin^2 n}{1 - \cos n} & n > 0 \\ a \sin(n + \frac{\pi}{4}) & n \leq 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $n=0$ پیوسته است. $\frac{1}{100}$

۲ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ a a $\frac{1}{2}$

۷- اگر تابع $f(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & n > 2 \\ n^2 + 1 & n \leq 2 \end{cases}$ در نقطه $n=2$ پیوستگی چپ داشته باشد، مقدار $f(2)$ کدام است.

-۳ $f(2) - 3$ $f(2) - 2$ $f(2) - 1$ $f(2)$

« مشتق »

تعریف مشتق :

مشتق تابع f در نقطه a از دامنه این تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \xrightarrow{h = n - a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال (در تابع با مخرج حاصل) $f(n) = \sqrt{\frac{4n+5}{n+3}}$ مشتق را بیابیم .

$$\lim_{n \rightarrow \frac{5}{4}} \frac{f(n) - f(\frac{5}{4})}{n - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16} - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{16}}{-\frac{15}{8}} = -\frac{2}{3}$$

مثال (اگر تابع f در $n = -2$ مشتق پذیر باشد ، آنگاه مشتق $f(n)$ در $n = -2$ کدام است ؟

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{4}$$

۱۴ ۱۲ ۱۰ ۸

✓ اگر تابع f در $n=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} f'(a)$

✓ تابع همگرا افک: $y = \frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \cdot u'$

مثال اگر تابع f در $n=3$ مشتق پذیر باشد، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{2h} = 4$ باشد، مقدار $f'(3)$ کدام است.

$\frac{9}{2}$ 3 4 9

مثال اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ، آنگاه $f'(2)$ کدام است -

$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

✓ برای گرفتن مشتق توابع قدر مطلق، ابتدا علامت داخل قدر مطلق را در نقطه داده شده مشخص کرده و سپس مشتق می‌گیریم.

برای گرفتن مشتق توابع جزء صحیح، مقدار عدد جزء صحیح را تعیین کرده و سپس مشتق گیری می‌کنیم.

مثال در تابع با ضابطه $f(x) = |5 - x\sqrt{x}|$ مقدار $f'(1) + f'(4)$ کدام است.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ 3 0

مثال اگر $f(x) = [2x]^4 - 2x^2$ باشد، مقدار $f'(\frac{3}{2})$ کدام است.

48 52 54 60

✓ برای مشتق گرفتن از توابع با عامل مشترک: مشتق تابع $f(x) = (x-a) g(x)$ در نقطه a

$$f'(a) = \text{مشتق عامل مشترک} \times \text{مشتق تابع}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[4]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x=1$ کدام است. ر

$$\frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{16}$$

مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیره ای):

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u) \quad \text{یا} \quad (f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a))$$

مثال: اگر $f(x) = 4x$ باشد، مقدار مشتق تابع $f(x^2 + 1)$ برای $x=3$ کدام است.

$$12 \quad 6 \quad -6 \quad -12$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ، $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ، مقدار $g'\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است. ر

$$\frac{14}{15} \quad \frac{15}{16} \quad -\frac{15}{16} \quad -\frac{16}{15}$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ ، $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ ، $(g \circ f)'(1)$ کدام است. ر

$$-\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$$

۱- مشتق عبارت $\left(\frac{14}{x} - \sqrt{x^2}\right)^2$ در $x=8$ کدام است. ۸۸

۱ -۱ -۱/۲ ۱ ۲

۲- دامنه مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{4-3x-x^2}$ کدام است

$(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ $(-4, 1)$ $[-4, 1]$ $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$

۳- اگر f و g دو تابع مشتق پذیر در $x=1$ و $f(1)=g(1)=2$ ، $f'(1)=g'(1)=4$ باشند مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ کدام است

۴ ۳ ۲/۳ ۴/۳

۴- مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x=1$ برابر ۳ است. اگر $f(1)=4$ ، $f'(1)=-4$ و $g(1)$ صحیح و یابنده مقدار $g'(1)$ کدام است

۴/۳ -۳/۴ ۲/۴ ۴/۳

۵- در تابع با مناسبتی $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است. ۹۱

۲۱ -۱۸ ۱۲ ۱۵

۶- اگر $f(x) = (x^2 - x - 2) \sqrt{x^2 - 7x}$ باشد حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است. ۹۲

۹ -۳ -۲/۳ -۴/۳

۷- اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است. ۹۳

۳/۲ ۳/۲ ۱/۳ ۳/۲

۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{x+3})$ در نقطه $x=-1$ کدام است. ۸۷

۱/۶ ۱/۱۲ -۱/۶ -۱/۱۲

خط مماس : معادله خط مماس در نقطه $A(a, f(a))$ واقع بر منحنی f برابر است با

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (f'(a) \text{ عددی مخالف صفر باشد})$$

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a}$$

❖ تیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است.

❖ تیب هر خط افقی (مماسی) در $x=a$ برابر صفر در برای خط قائم (مماسی) صفر و هجا (تیب تعریف نمی شود)
 $(f'(a) = 0)$ $(f'(a) = \infty)$

مثال (خط مماس بر منحنی $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه به طول ۲، واقع بر آن محور و هجا را کدام از این قطع می کند؟)

۳ ۲ ۱

مثال معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{x}$ در نقطه ای به طول ۲، واقع بر آن کدام است.

$$4y + x = 4 \quad 2y + x = 3 \quad 4y - x = 0 \quad 2y - x = -1$$

مثال اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = \sqrt{x} + 1$ در تابع باشند معادله خط مماس بر منحنی f در نقطه ای به طول ۱، واقع بر آن کدام است.

$$4x - 3y = -5 \quad 2x - 4y = -9 \quad 4y - 5x = 7 \quad 5y - 4x = 1$$

مثال خط $y = -1$ بر منحنی تابع f با رابطه $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است. a کدام است.

$$\frac{9}{8} \quad \frac{7}{8} \quad -\frac{7}{8} \quad -\frac{9}{8}$$

خط مماس : معادله خط مماس در نقطه $A(a, f(a))$ دایره برنوردار f برابر است با

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (f'(a) \text{ عددی مخالف صفر باشد})$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

✓ نیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است.

✓ نیب هر خط افقی (موازی محور x ها) برابر مماس بر دایره ای خط قائم (موازی محور y ها) است یعنی $f'(a) = 0$ ()
 $(f'(a) = \infty)$ ()

سؤال (خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه به طول ۲ دایره بر آن محور y ها را با کدام عرض قطع می کند.)
 ۰ ۱ ۲ ۳

سؤال (معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{x}$ در نقطه ای به طول ۲ دایره بر آن کدام است .

$$4y + x = 4 \quad 2y + x = 3 \quad 4y - x = 0 \quad 2y - x = -1$$

سؤال (اگر $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ در تابع باشند معادله خط مماس برنوردار f و g در نقطه ای به طول ۱ دایره بر آن کدام است .

$$4x - 3y = -5 \quad 3x - 4y = -9 \quad 4y - 5x = 7 \quad 5y - 4x = 11$$

سؤال (خط $y = -1$ برنوردار تابع f با رابطه $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است . a کدام است .

$$\frac{9}{8} \quad \frac{5}{8} \quad -\frac{5}{8} \quad -\frac{9}{8}$$

✓ اگر خطی بر یک سری باشد، آنگاه این خط، سعی را در یافتن نقطه قطع می کند، بنابراین معادله تلاقی آن ها دارای ریشه مضاعف است.

مثال: به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 4$ برنخیز از ناحیه اول محورهای مختصات می باشد؟ $\frac{93}{93}$

۱۲

۱۲، -۴

-۱۲، ۴

(۴)

مشتق های یک طرفه

$$f'_+(a) = \lim_{n \rightarrow a^+} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق راست :

$$f'_-(a) = \lim_{n \rightarrow a^-} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق چپ :

مثال: اگر $f(x) = |x-2| + \sqrt{x}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ کدام است. ت.

$\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$

-۲

مثال: اگر تابع f در x_0 مشتق پذیر، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ را در x_0 مشخص کنید.

-۲

۲

$2 + f'(x_0)$

$2 - f'(x_0)$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = |x| [x]$ - $f'_+(0)$ - $f'_-(0)$ - $f'(0)$ کدام است. ت.

۲

(۱)

۰

-۱



✓ اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

✓ اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، آنگاه با برقراری در حد a زیر، مقادیر پارامتر را بدست می آوریم.

$$\text{پوستگی در } a : \lim_{n \rightarrow a^+} f(n) = f(a) = \lim_{n \rightarrow a^-} f(n)$$

$$\text{مشتق پذیری در } a : f'_+(a) = f'_-(a)$$

مثال) تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} an^2 + bn & n < 1 \\ \sqrt{4n-3} & n \geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد صحیح مشتق پذیر است. کدام است. ۹۲

۲ $\frac{3}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$

مثال) اگر $f(n) = \frac{4}{5}n - \frac{1}{5}|n|$ و $g(n) = 4n + |n|$ باشند، مشتق تابع g و f کدام است. ۹۳

مشتق ندارد ۴ ۳ ۲

مثال) اگر تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} 1 + a \cos n & n > 1 \\ b n^2 + n & n \leq 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر باشد، a کدام است. ۹۴

$\frac{1}{2}$ -۱ $-\frac{1}{2}$ ۱

تابع f ممکن است در $x=a$ پیوسته باشد ولی در حالت های زیر مشتق پذیر نباشد

(۱) $f'_+(a), f'_-(a)$ هر دو موجود، مشابهی ولی نابرابر (نقاط گوشه ای)

(۲) $f'_+(a), f'_-(a)$ یکی مشابهی و دیگری نامشابهی (نقطه گوشه ای)

(۳) $f'_+(a), f'_-(a)$ هر دو نامشابهی باشند.

سؤال: تابع f با عبارت مقابل در چند نقطه ناپیوسته، در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x^2+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

✓ اگر $x=a$ ریشه ساده غیر تکراری معادله $f(x)=0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق ناپذیر است.

✓ تابع $|x-a|$ در $x=a$ مشتق پذیر است.

سؤال: تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع $f(x)=||x|-1|$ بر روی R کدام است. ^{۸۳}

۳ ۲ ۱ ۰

سؤال: تابع $f(x)=x^2+ax+b$ در همه نقاط R مشتق پذیر است. $a-b$ کدام است.

۱۴ ۱۲ -۱۲ -۱۴

کما تابع $[A] = y$ در نقاطی که به ازای آن ها مقدار f برابر یک عدد صحیح شود، مشتق تابع f است به جزء نقاطی که دارای مینیمم است. و در سایر نقاط مشتق برابر ۰ است، یعنی بی شمار نقطه بحرانی دارند.

✓ فرض لن تابع تابع است $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^n}$ باشد

(1) اگر $n > m \leftarrow f$ در $n = a$ مشق نماید

$$f'(a) = -1, f'(a) = 1 \quad \leftarrow \text{? } m \quad \leftarrow m = n \quad \mu_1(y)$$
$$f'(a) = 1, f'_t(a) = 1 \quad \leftarrow \text{مكرر}$$

(۲) اگر $m < n$ و $f \leftarrow n = a$ متوقف می‌شود و $f'(a) = 0$

مثال) تابع با مرتبه n : $f(n) = \begin{cases} \sqrt[3]{(n-1)(n+1)^3} & n \\ |(n+1)(n+2)^2| & n \end{cases}$ در نقطه مشتق پذیر است ؟

Δ

✓

3

2

✓ در حالتی که $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود داشته باشند اما برابر نباشند آنگاه f در $a = m$ خط مماس ندارد (مثلاً $f(a)$ در a چتر دارد). اما می‌توان در این نقطه دو نیم مماس یکی با شیب $f'_+(a) = m$ که به آن نیم مماس راست، $f'_-(a) = m$ که به آن نیم مماس چپ را رسم کرد.

مثال ۱ اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ باشد، معادله نیم میانس راست بر نمودار f در نقطه $x=0$ کدام است.

$$x_4 + x_5 = 12$$

$$xy - xz = x$$

$$w - \delta y = -1.$$

$$r_n + dy = 1.$$

مشتق پذیری روی بازه :

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه در (a, b) مشتق پذیر و در $x=a$ مشتق پذیر راست داشته باشد.

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در (a, b) مشتق پذیر و در $x=b$ مشتق پذیر چپ داشته باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر هرگاه در (a, b) مشتق پذیر و در $x=a$ مشتق پذیر راست و چپ داشته باشد.

لذا تمام چند جمله ای ها روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیرند. (اگر $D_f = \mathbb{R}$ و در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد $\leftarrow$ تابع در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.)

مثال ۱) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. کدام گزینه نادرست است.

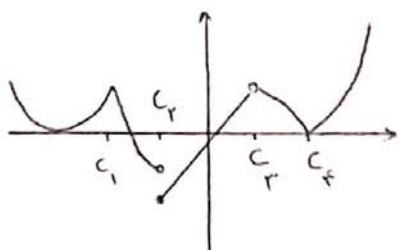
۱) تابع f روی بازه $[2, 3]$ مشتق پذیر است.

۲) تابع f روی بازه $(0, -\infty)$ مشتق پذیر است.

۳) تابع f روی بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است.

۴) تابع f روی بازه $[0, -1]$ مشتق پذیر نیست.

لذا هر جا نمودار تابع دچار شکستگی شده است (نقطه زاویه دار)، در این نقاط مشتق راست و چپ با هم برابر نیست.



مثال ۲) تابع f در هر نقطه مشتق پذیر است.

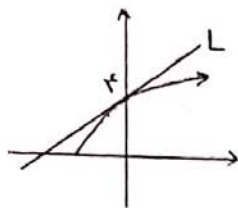
۴

۳

۲

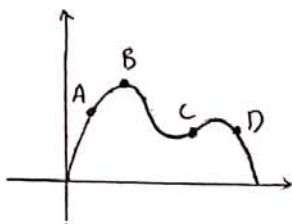
۱

۱- نمودار روبرو، نمودار تابع f است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{4}$ باشد، خط L مماس m ها را با کدام طول قطع می‌کند.



۳- ۵- ۶- ۸-

۲- باره به به نمودار مقابل، در مورد ریب منفی در این نقاط، کدام گزاره صحیح است.



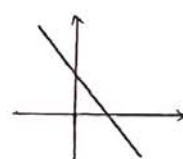
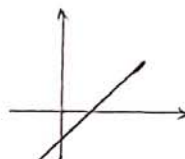
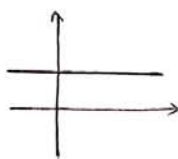
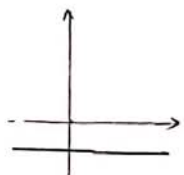
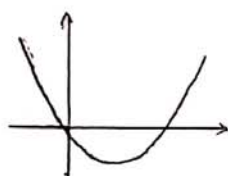
$$m_A > m_D > m_C > m_B \quad (1)$$

$$m_D > m_A > m_B > m_C \quad (2)$$

$$m_A > m_C > m_B > m_D \quad (3)$$

$$m_C > m_A > m_D > m_B \quad (4)$$

۳- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع f' به کدام صورت است.



۴- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 + 1$ به خط به معادله $y = 2 - 3x$ مماس است. این خط مماس از نقطه با کدام مختصات گذرد.

$$(2, -4)$$

$$(2, -6)$$

$$(1, 4)$$

$$(1, 3)$$

۵- مشتق $f(\sqrt{6n+2})$ در نقطه $n=1$ برابر ۲- است. ریب خط مماس بر نمودار f در نقطه A به طول $2\sqrt{2}$ است.

$$-4$$

$$-3$$

$$-\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{4}$$

۶- منحنی های f و g با معادله $f(n) = -n^2 + bn + 3$ به خط به معادله $y = 7$ مماس اند. فاصله در نقطه مماس کدام است.

$$6$$

$$5$$

$$4$$

$$3$$

۷- اگر f تابعی مشتق پذیر روی R باشد، معادله خط مماس بر نمودار f در $n=1$ کدام است.

$$y = 2n$$

$$y = 3n - 1$$

$$y = n + 1$$

$$y = 1$$

۸- تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{3}{n} - 5 & n \geq 1 \\ n^2 + an + b & n < 1 \end{cases}$ در نقطه $n=1$ مشتق پذیر است، کدام است. $\bar{p}_{93}$

۴ ۳ ۲ ۱

۹- اگر تابع با ضابطه $f(n) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{n}}{n} & n \geq 1 \\ an^2 + bn & n < 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است، کدام است. $\bar{p}_{97}$

۵ ۳ -۱ -۲

۱۰- اگر $f(n) = \sqrt{n^2 - [n] + n}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است. $\bar{p}_{97}$

$\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{2}$

۱۱- مشتق راست تابع با ضابطه $f(n) = (n - [n])\sqrt[3]{9n}$ در نقطه $n=3$ کدام است. $\bar{p}_{93}$

$\frac{7}{3}$ -۴ -۵ $-\frac{16}{3}$

۱۲- تابع با ضابطه $y = n\sqrt{n^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در هر نقطه است. $\bar{p}_{87}$

پیوسته و مشتق پذیر پیوسته اما مشتق پذیر نیست ندر پیوسته و نه مشتق پذیر نقطه از راست پیوسته و از راست مشتق پذیر

۱۳- مقدار مشتق چپ تابع $f(n) = n^2 - 3n$ در نقطه گوشه ای تابع کدام است.

۱۸ -۹ ۱۸ ۹

۱۴- اگر نیم ماس های چپ، راست تابع $f(n) = n(n+a)$ در نقطه گوشه ای آن برابر عدد باشند، مجموعه مقادیر a کدام است. $\bar{p}_{90}$

$\{-1\}$ $\{1\}$ $\{-1, 1\}$ $\emptyset$

۱۵- تابع با ضابطه $f(n) = \sqrt{1 + |n|}$ در نقطه $n=a$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(a) - f'_-(a)$ کدام است. $\bar{p}_{85}$

-۱ $\frac{1}{2}$ ۱ تعریف نشده

آهنـب تغییر: اگر x در $a \leq x \leq b$ تغییر کند، آهنـب متوسط تغییر برابر است با

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{یا} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همین آهنـب لحظه ای تغییر تابع f در $x=a$ همان $f'(a)$ است.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

× مثال) در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنـب متوسط تغییر تابع از نقطه $x=4$ تا $x=9$ (آهنـب لحظه ای آن در نقطه $x=4$ چقدر کمتر است؟)

$$\frac{1}{12} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{36}$$

مثال) در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ تفاضل آهنـب لحظه ای در نقطه $x = a + \frac{h}{4}$ از آهنـب متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a+h$ تغییر کند، کدام است؟

$$0 \quad 2h \quad 2h \quad h$$

مثال) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{34}{x^2}$ آهنـب متوسط تغییر تابع از $x=2$ تا $x=3$ چقدر از آهنـب لحظه ای آن در $x = \sqrt{12}$ بیشتر است؟

$$2,5 \quad 2 \quad 1,5 \quad 1$$

مثال) در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{4}}$ آهنـب متوسط تغییر تابع از نقطه $x=4$ تا $x=11$ ، از آهنـب لحظه ای آن در نقطه $x=4$ چقدر کمتر است؟

$$\frac{7}{54} \quad \frac{7}{27} \quad \frac{11}{54} \quad \frac{7}{84}$$

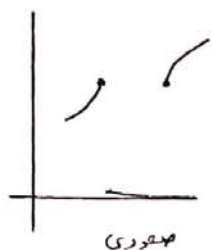
مثال) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ آهنـب متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه $x=1$ با $h=0,44$ ، از آهنـب لحظه ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{3}$$

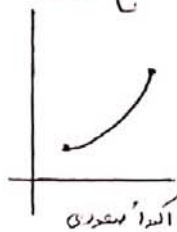
کاربرد مشتق

کنشایی:

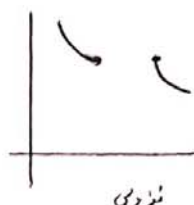
مطلوبه از کنشایی تابع بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع است.



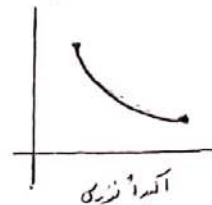
صعودی



الگدا صعودی



نزولی



الگدا نزولی

تابع الگدا کنه یا کید بیک در شیم معلوس ندر است.

آزمون کنشایی: در یک بازه از دامنه تابع f ، اگر مقدار f' موجود در مثبت $\rightarrow f$ در آن بازه الگدا صعودی
موجود در منفی $\rightarrow f$ در آن بازه الگدا نزولی
موجود در برابر صفر $\rightarrow f$ تابعی ثابت (صعودی و نزولی)

مثال) تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ روی بازه $(2, 3)$ چگونه است.

همواره صعودی

همواره نزولی

ابتدا نزولی، سپس صعودی

ابتدا صعودی و سپس نزولی

تشخیص کنشایی توابع پیوسته: ۱- از تابع مشتق گرفته و تعیین علامت می کنیم. ۲- اگر مشتق مثبت، تابع الگدا صعودی و اگر مشتق منفی، تابع الگدا نزولی است.

برای تشخیص مثبت یا منفی بودن تابع $f(x)$ ، برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ را تعیین علامت می کنیم.

مثال) تابع با مشتق $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x: x < 1\}$ چگونه است.

منفی

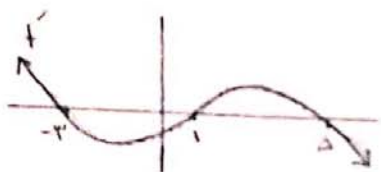
صعودی

مثبت

نزولی

مثال) تابع با عبارت $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1$ در بازه (a, b) ابتدا صعودی است بیشترین مقدار ۵-۵ کدام است.

۱ ۲ ۳ ۴



مثال) نمودار f به صورت مقابل است. کدام گزینه نادرست است.

f در بازه $(-\infty, -3)$ ابتدا صعودی است.

f در بازه $(0, 4)$ ابتدا صعودی است.

f در بازه $(1, 5)$ ابتدا صعودی است.

f در بازه $(5, +\infty)$ ابتدا نزولی است.

مثال) کدام گزینه در مورد تابع $y = \sin u + \cos u$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ صحیح است.

محدوده صعودی محدوده نزولی ابتدا صعودی سپس نزولی ابتدا نزولی سپس صعودی

مثال) عدد a را در کدام فاصله در نظر بگیریم تا تابع با عبارت $f(x) = \frac{ax-2}{x+a-3}$ ابتدا صعودی باشد.

$(2, +\infty)$

$[2, +\infty)$

$(-\infty, 0]$

$(-\infty, 1]$

نقطه بحرانی: نقطه به طریقی c از دامنه تابع f را نقطه بحرانی برای تابع f گوئیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر شود یا موجود نباشد.

مثال) تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ چند نقطه بحرانی دارد.

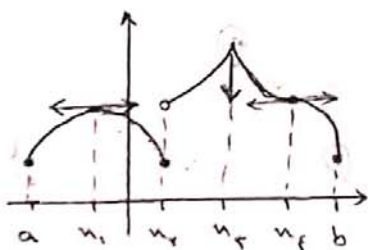
۲ ۳ ۴ ۵

مثال) تابع $y = x^2 - \ln x$ چند نقطه بحرانی دارد.

۲ ۳ ۴ ندارد.

✓ ابتدا، انتهای بازه باز جزء نقاط بحرانی نیست ولی ابتدا، انتهای بازه بسته جزء نقاط بحرانی است (در این مثال مشتق چپ و راست).

مثال) شکل مقابل نمودار تابع f است. تابع f چند نقطه بحرانی دارد؟



۳ ۴ ۵ ۶

✓ نقاط بحرانی توابع چند مجهولی، تریگنومی، نمایی، توابع $\sin x$ ، $\cos x$ ، ترکیب توابع و توابع فقط از ضرایب معکوس $f'(x) = 0$ بدست می آید.

مثال) نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث اند. ربع مثلث کدام است. ب

مستوی الاضلاع نقطه مساوی اسامی نقطه قائم الزامی قائم الزامی، مساوی اسامی

۱- تابع با مضابطه $f(n) = \frac{n}{n^2+1}$ در بازه $(-a, a)$ اکیدا صعودی است. بیشترین مقدار a کدام است.

۱ ۲ ۳ ۴

۲- تابع با مضابطه $f(n) = n^3 + an^2 + n$ همواره صعودی است. تغییرات a کدام است. ت

$a < 2$ $-\sqrt{3} < a < 2$ $|a| \leq \sqrt{3}$ $|a| \leq 2$

۳- طول نقاط بحرانی تابع f با مضابطه $f(n) = n^{\frac{4}{3}} - n^{\frac{2}{3}}$ بر $(-1, 1)$ کدام است. ت

$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

۴- مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع با مضابطه $f(n) = (n^2 - 2n)\sqrt{n}$ کدام است. ت

$\{-2, 2\}$ $\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ $\{-2, 0, 2\}$ $\{-7, 0, 1\}$

۵- تابع $f(n) = |n-4|$ چند نقطه بحرانی دارد.

۰ ۱ ۲ ۳

۶- مقدار نقاط بحرانی تابع f با مضابطه $f(n) = |\sin n|$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است. ر

۲ ۳ ۴ ۵

۷- تابع $f(n) = [n]$ در بازه $[0, 3]$ چند نقطه بحرانی دارد.

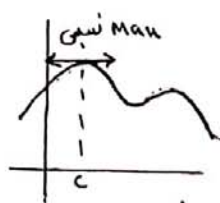
۰ ۱ ۲ ۵ شمار

۸- مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با مضابطه $f(n) = |n-2|\sqrt{n}$ کدام است. ر

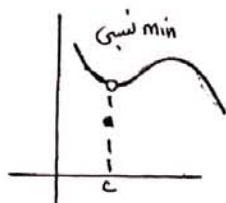
$\{0, \frac{4}{3}, 2\}$ $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$ $\{0, 1\}$ $\{\frac{2}{3}, 2\}$

اکسترم های تابع : اکسترم های تابع اشاره به ماکزیمم (بیشترین مقدار) یا مینیمم (کمترین مقدار) تابع دارند

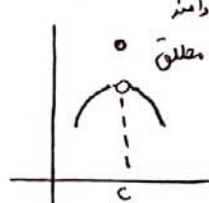
در نقاط اکسترم نسبی (یا مطلق) مشتق تابع یا 0 است یا وجود ندارد و یا همین است تابع ناپوشیده باشد.



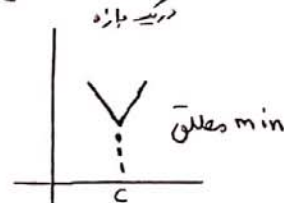
$$0 = f'(c)$$



f در c ناپوشیده



f در c ناپوشیده



$f(c)$ وجود ندارد

ماکزیمم نسبی : تابع f در نقطه ای به طول $c \in D_f$ ماکزیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی از c باشد 1 باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$f(c) \geq f(x)$$

مینیمم نسبی : تابع f در نقطه ای به طول $c \in D_f$ مینیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی از c باشد 1 باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$f(c) \leq f(x)$$

✓ طول نقاط اکسترم نسبی ریشه معادله $f'(x) = 0$ است.

تصفیه ماکزیمم نسبی از مینیمم نسبی : فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پوشیده و همچنین f در c

همسایگی محدود c مشتق پذیر باشد. اگر علامت f' در $x=c$ از $-$ به $+$ تغییر کند، $x=c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی در

اگر از $+$ به $-$ تغییر کند، $x=c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

x	c
f'	$+$ 0 $-$
f	$\nearrow$ $\searrow$
	max

x	c
f'	$-$ 0 $+$
f	$\searrow$ $\nearrow$
	min

✓ ابتدا انتهای بازه، طول نقاط max یا min نسبی تابع نیست زیرا شد وجود همسایگی برقرار نیست.

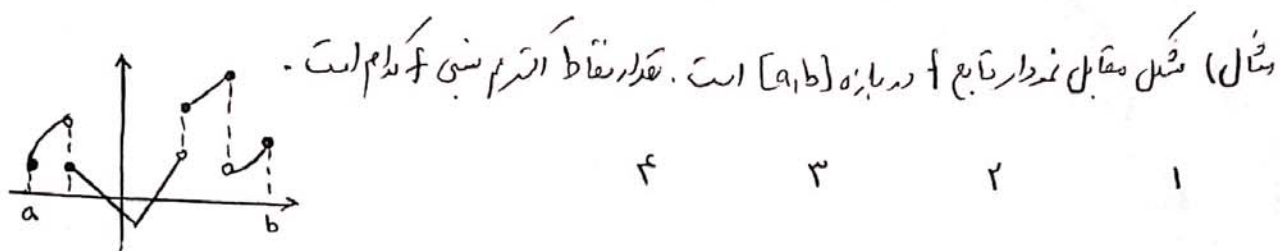
✓ مختصات نقطه اکسترم نسبی در معادله تابع مدون می گردد.

✓ که تابع همین است به شمار اکسترم نسبی داشته باشد.

✓ اگر تابع f در بازه $[a, b]$ آید، ابتدا بازه $[a, b]$ نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی دارد.

✓ تمام ریشه های ساده، دگر در معادله $f'(x) = 0$ طول نقاط اکسترم نسبی تابع f است.

✓ هر نقطه اکسترم نسبی که در دومی باشد، نقطه بحرانی است.



مثال) تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکتریم نبی کدام وضع را دارد. ۹

مینیم نبی ماکزیم نبی مینیم نبی ماکزیم نبی

مثال) تابع $f(x) = |x-1|$ از نظر اکتریم نبی کدام وضع را دارد.

مینیم نبی ماکزیم نبی مینیم نبی ماکزیم نبی

مثال) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{ax+b}$ در نقطه $(2, 4)$ اکتریم نبی دارد. مقدار $f(-1)$ کدام است.

۱ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -۱

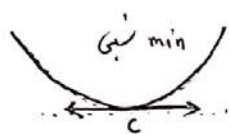
۸۹) مثال) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(1, -2)$ دارای اکتریم نبی است. عدد a وضع اکتریم نبی کدام است.

$-\frac{4}{3}$ مینیم $-\frac{4}{3}$ ماکزیم $\frac{4}{3}$ مینیم $\frac{4}{3}$ ماکزیم

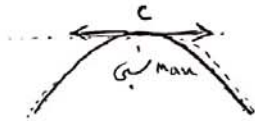
✓ در توابع قدر مطلق که درون آن ها عبارت درجه ۲ است، همواره ۲ min نبی، یک Max نبی داریم.

مثال) تابع با ضابطه ی $y = |x^2 - 4x + 2|$: $y = |f(x)|$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$ (نبی min) , $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (نبی max)



$f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$
(تقریباً سمت بالا)



$f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$
(تقریباً سمت پایین)

تفسیر: فرض کنید $f'(c) = 0$, $f''(c)$ موجر باشد.

الف) اگر $f''(c) > 0$ باشد، c طول نقطه min نبی است.

ب) اگر $f''(c) < 0$ باشد، c طول نقطه max نبی است.

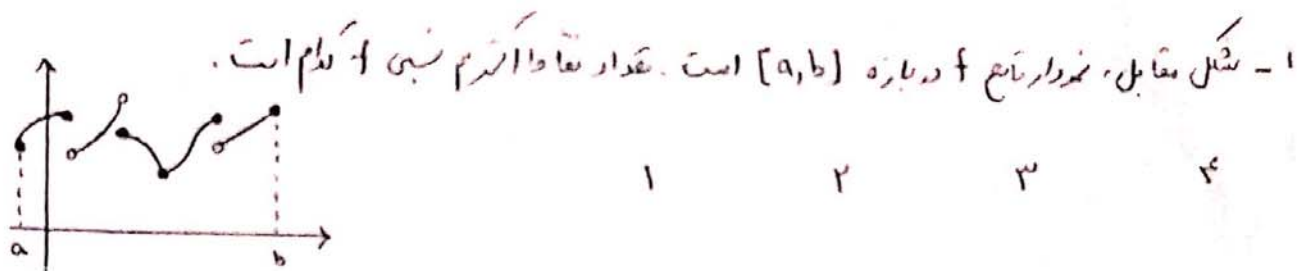
مثال) در تابع $y = \sin x + \cos x$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ طول چه نقطه ای است.

محمولی

عطف

min نبی

max نبی



۱ ۲ ۳ ۴

۲- تابع با ضابطه $f(x) = |\cos x|$ در بازه $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ از نظر اکتریم برای چگونه است.

$\frac{3}{2}$ max برای $\frac{2}{3}$ min برای $\frac{2}{3}$ max برای $\frac{3}{2}$ min برای $\frac{3}{2}$ max برای $\frac{2}{3}$ min برای

۳- تابع $f(x) = x - [x]$ در بازه $(0, 4)$ به ترتیب چند نقطه بحرانی و اکتریم برای دارد.

۳, ۳ ۴, ۳ ۳, ۴ ۴, ۴

۴- طول نقطه ماکزیمم برای تابع $f(x) = x^2 - 5x + 1$ کدام است.

$\frac{4}{3}$ ۲ ۳ ۴

۵- تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ در چند نقطه اکتریم برای دارد؟

۴ ۳ ۲ ۱

۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$ چند اکتریم برای دارد؟

۵ ۱ ۲ ۳

۷- نقطه بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه $(-1, 2)$ چگونه است.

مینیم ماکزیم گوشه ای مشتق ناپذیر

۸- در نقطه به طول های ۳، ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار مینیمم برای

این تابع کدام است.

۸۴ -۸۱ -۵۷ -۷۵

۹- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+a}$ دارای آثرم نبی باشد، معادله a کدام است. $\frac{1}{25}$

• $a < -2$ یا $a > 2$ $-2 < a < 0$ $0 < a < 2$ $a < -2$ یا $a > 2$

۱۰- اگر تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ فاقد آثرم نبی باشد، حدود m کدام است.

$2 \leq m \leq 5$ $0 \leq m \leq 4$ $-3 \leq m \leq 2$ $-5 \leq m \leq 1$

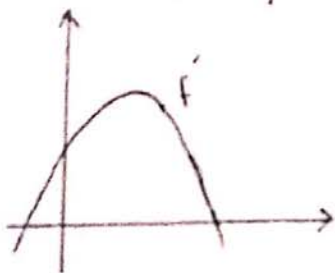
۱۱- اگر تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 14x$ دارای ماکزیم و مینیم با طول های منفی باشد، حدود m کدام است.

$m < -3$ $-3 < m < 0$ $m > 5$ $0 < m < 5$

۱۲- تابع f روی بازه (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است.

هر نقطه بحرانی، نقطه آثرم نبی است هر نقطه آثرم نبی، نقطه بحرانی است.
در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است در هر نقطه آثرم نبی، مشتق تابع صفر است

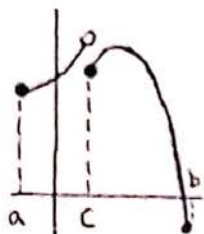
۱۳- نمودار f' (مشتق تابع f)، به صورت شکل زیر است. تابع f از نظر ماکزیم و مینیم نبی چگونه است.



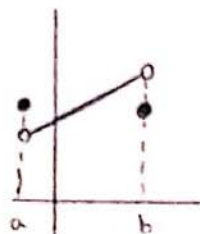
فقط یک ماکزیم درست راست محور و ها
یک ماکزیم، یک مینیم درست چپ محور و ها
یک مینیم درست چپ محور و ها، یک ماکزیم درست راست محور و ها
یک ماکزیم درست چپ محور و ها، یک مینیم درست راست محور و ها

ماکزیم مطلق نقطه c از دامنه تابع f ، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$

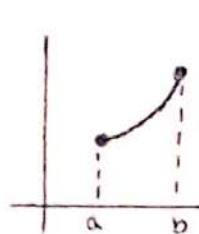
مینیم مطلق نقطه a به طول c از دامنه تابع f ، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$



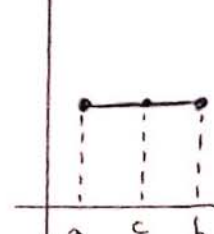
در b مین مطلق دارد
در a مین مطلق ندارد



در a و b مین مطلق دارد



در b مین مطلق دارد
در a مین مطلق ندارد



در c مین مطلق و
در a و b مین مطلق دارد

اگر f مطلق تابع می تواند در نقاط ابتدای یا انتهای دامنه باشد.

اگر f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، f در این بازه هم ماکزیم مطلق و هم مینیم مطلق دارد.

اگر مقدار $\min$ یا $\max$ مطلق در صورت وجود منحصر به فرد است.

یافتن اکترم مطلق: ثابت نقاط بحرانی را بدست آوریم، مقادیر تابع را به ازای نقاط بحرانی، ابتدا، انتهای بازه تعیین کنیم. بیشترین مقدار ماکزیم مطلق، کمترین مقدار مینیم مطلق است.

$$\text{مثال) مقدار مینیم مطلق تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ کدام است.}$$

۲

۰

-۱

۱

اگر معادله $f(x) = 0$ ریشه ساده (۱) داشته باشد، در f نقاط اکترم داریم و اگر ریشه ساده نداشته باشد (۲) f فاقد نقطه اکترم است.

✓ در تابع $y = \sqrt[n+1]{f(x)}$ ریشه های معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی هستند.

مثال) مقدار نقاط بحرانی تابع با مناسبت $f(x) = x^3 - x$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است. ۹۰

۳ ۵ ۴ ۶

مثال) مقدار نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ کدام است.

۴ ۳ ۱ صفر

✓ در تابع $y = f(x)g(x)$ ریشه های معادله $f(x) = 0$ و $(f(x)g(x))' = 0$ طول نقاط بحرانی هستند.

مثال) مقدار نقاط بحرانی تابع با مناسبت $f(x) = x^2 - 1$ روی بازه $(-2, 2)$ کدام است.

۶ ۵ ۴ ۳

✓ ریشه خارج مشتق اگر مفروضه باشد، بحرانی است.

✓ ریشه های مناسبتی اگر مفروضه تابع اصلی باشد، بیوسه باشد اما مشتق ناپذیر باشد، بحرانی است.

مثال) تابع با مناسبت $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x & x \geq 0 \\ x^2 - 2x & x < 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارند.

۴ ۳ ۲ ۱

مثال ۱) بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه $[-2, 2]$ کدام است. ب ۹۲

۱۷

۱۲

۹

۱۰

مثال ۲) مقادیر ماکزیمم، بیشیم مطلق تابع با مناسبت $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ کدام است. ب ۹۵

۳۹ ، -۲۷

۲۷ ، -۳۶

۲۷ ، -۴۵

۲۴ ، -۱۸

مثال ۳) ماکزیمم مطلق تابع با مناسبت $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است. ب ۹۵

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}$

مثال ۴) نمودار تابع با مناسبت $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x$ در نقطه $x=1$ کدام وضع را با محور x دارد. ب ۸۴



✓ در تابع یوئسه اگر بیشترین مقدار تابع به ترتیب M ، m باشد آنگاه بردار f برابر $R_f = [m, M]$ است. ب ۸۴

مثال ۵) بردار تابع f با مناسبت $f(x) = x^3 - 12x + 8$ در بازه $[-3, 1]$ کدام است. ب ۸۴

$[-3, 24]$

$[-3, 17]$

$[-8, 24]$

$[-8, 17]$

۱- کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 3x + 1$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟ ^{۸۷}
 مینیمم مطلق دارد ماکزیمم مطلق دارد در نقطه اکстрیم نمی دارد فاصله اکстрیم نمی

۲- تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نادرست است. ^{۹۰}

- اگر c نقطه اکстрیم نمی، $f(c)$ مقدار داشته باشد آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.
- اگر c نقطه بحرانی باشد، آنگاه c نقطه اکстрیم نمی است.
- اگر c نقطه اکстрیم نمی باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.
- اگر c نقطه اکстрیم مطلق باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.

۳- نمودار منحنی ناشی تابع با ضابطه $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ در نزدیکی نقطه ای به طول $n=2$ به کدام محدود است. ^{۸۸}



۴- از میان مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است، مثلثی را اختیار کرده ام که مساحت آن ماکزیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی متر مربع است؟ ^{۸۹}

- ۳۰ ۳۲ ۳۴ ۳۶

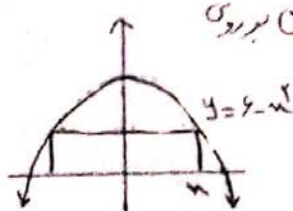
۵- کوتاه ترین فاصله نقطه $A(8, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{x}$ کدام است. ^{۸۵}

- $2\sqrt{11}$ $2\sqrt{5}$ $4\sqrt{3}$ $5\sqrt{2}$

۶- اگر n و y در مثلث قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $y^2 + 4x + 2n$ کدام است. ^{۹۱}

- $25\sqrt{2}$ $28\sqrt{2}$ ۳۶ ۴۰

۷- ماکزیمم محیط از مستطیل هایی که یک ضلع آن منطبق بر محور x ها و در رأس آن بر روی



منحنی تابع $y = 6 - x^2$ قرار دارند، کدام است.

- ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴