درسنامه ی مشتق:

پیش نیاز این فصل: اتحاد جمله مشترک، اتحاد مزدوج و اتحادهای مثلثاتی. آموزش فشرده این مباحث را ابتدا ارائه می دهیم.

کاربرد این فصل: در نمودار، حد، پیدا کردن اکستر مم ها، نقاط عطف، نقاط بحرانی، محور و مرکز تقارن، تعیین یکنوایی توابع و بعضی دنباله ها.

پیش نیازها:

اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^۲ + \underbrace{(a+b)}_{\text{مجموع}}x + \underbrace{ab}_{\text{ضرب}}$$

مثال:

$$۱)\ (x+۳)(x+۵) = x^۲ + ۸x + ۱۵$$
$$۲)\ (\sqrt{x}+۱۰)(\sqrt{x}+۳) = \sqrt{x}^۲ + ۱۳\sqrt{x} + ۳۰ = x + ۱۳\sqrt{x} + ۳۰$$
$$۳)\ (\mathrm{Sin}\,x+۲)(\mathrm{Sin}\,x+۱) = \mathrm{Sin}^۲x + ۳\,\mathrm{Sin}\,x + ۲$$
$$۴)\ (f(x)+۲)(f(x)-۱) = f^۲(x) + f(x) - ۲$$
$$۵)\ (f(x)+۳x)(f(x)+x) = f^۲(x) + ۴xf(x) + ۳x^۲$$

معمولاً عکس این اتحاد مهمتر است. یعنی تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$۱)\ x^۲ + ۹x + ۱۸ = (x+۶)(x+۳)$$
$$۲)\ f^۲(x) + ۵f(x) + ۶ = (f(x)+۳)(f(x)+۲)$$
$$۳)\ x^۲ + ۱۰|x| + ۱۶ = (|x|+۸)(|x|+۲)$$
$$۴)\ x + ۵\sqrt{x} + ۴ = (\sqrt{x}+۴)(\sqrt{x}+۱)$$

یک حالت مهم تجزیه اتحاد جمله مشترک وقتی است که جمله اول ضریب داشته باشد. با مثال و آموزش زیر عملاً مراحل این کار را اجرا می کنیم.

می خواهیم عبارت مقابل را تجزیه کنیم: $۵x^۲ + x - ۴$

ضریب x^2 یعنی عدد ۵ را برداشته در عامل عددی، یعنی ۴-، ضرب می کنیم.

$$x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$$

حالا باید گام قبلی را پس بگیریم. عدد یکی از عوامل را بر ۵ تقسیم و x عامل دیگر را در ۵ ضرب می کنیم:

$$(x+\frac{5}{5})(5x-4) = (x+1)(5x-4)$$

تجزیه انجام شد.

تمرین: عبارت های $3x^2+8x-3$ و $2x^2+5x+2$ را تجزیه کنید (به ترتیب در کنکور تجربی ۱۳۹۲ و ۱۳۹۳ مورد استفاده قرار گرفتند)

اتحاد مزدوج: در منها کردن دو عبارت می تواند توان آنها را نصف کند:

$$x^{2x} - y^{2m} = (x^n - y^m)(x^n + y^m)$$

مثال: به تجزیه های زیر دقت کنید.

$$1)\ x^2 - y^4 = (x-y^2)(x+y^2)$$
$$2)\ x^2 - 5 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$
$$3)\ x - 1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$$

حالت خاص زیر در این فصل خیلی مدنظر است.

مثال: حاصل عبارت $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ را بدست آورید.

پاسخ: عبارت را در $(x-1)$ ضرب و تقسیم می کنیم، می شود.

$$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x-1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{x-1}$$
$$= \frac{(x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x-1)} = \frac{(x^8-1)(x^8+1)}{x-1} = \frac{x^{16}-1}{x-1}$$

برای بحثی جدی تر از کاربرد اتحاد مزدوج در توابع و بعضی محاسبه ها خواننده را به درسنامه جامع ریاضی در همین سایت و از همین نویسنده ارجاع می دهیم.

بیشترین چیزی که از مثلثات نیاز داریم سه فرمول بسط هستند.

$$۱)\ \mathrm{Sin}(x+y)=\mathrm{Sin}\,x\cos y+\mathrm{Sin}\,y\cos x$$
$$۲)\ \cos(x+y)=\cos x\cos y-\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,y$$
$$۳)\ \tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$$

که هر سه فرمول را معمولاً از راست به چپ نیاز داریم.

مثال: حاصل $\mathrm{Sin}\,۳x-۲\mathrm{Sin}\,x\cos ۲x$ را بدست آورید.

پاسخ: داریم:

$$\mathrm{Sin}(۲x+x)-۲\mathrm{Sin}\,x\cos ۲x=$$
$$\mathrm{Sin}\,۲x\cos x+\mathrm{Sin}\,x\cos ۲x-۲\mathrm{Sin}\,x\cos ۲x=$$
$$\mathrm{Sin}\,۲x\cos x-\mathrm{Sin}\,x\cos ۲x=\mathrm{Sin}(۲x-x)=\mathrm{Sin}\,x$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\mathrm{Tan}\,۵x+\mathrm{Tan}\,۲x}{۱-\mathrm{Tan}\,۵x\,\mathrm{Tan}\,۲x}$ را بدست آورید.

پاسخ: $\mathrm{Tan}(۵x+۲x)=\mathrm{Tan}\,۷x$

نکته: اگر $a=b+c$ آن گاه

$$\mathrm{Tan}\,a-\mathrm{Tan}\,b-\mathrm{Tan}\,c=(\mathrm{Tan}\,a)(\mathrm{Tan}\,b)(\mathrm{Tan}\,c)$$

مثال:

حاصل عبارت $\frac{\mathrm{Tan}\,۵x-\mathrm{Tan}\,۴x-\mathrm{Tan}\,x}{\mathrm{Tan}\,۵x\,\mathrm{Tan}\,۴x}$ را بدست آورید.

پاسخ: چون $x+x۴x=۵x$ پس

$$\frac{\mathrm{Tan}\,۵x\,\mathrm{Tan}\,۴x\,\mathrm{Tan}\,x}{\mathrm{Tan}\,۵x\,\mathrm{Tan}\,۴x}=\mathrm{Tan}\,x$$

مثال: حاصل $\frac{\mathrm{Tan}(x+h)-\mathrm{Tan}\,x}{\mathrm{Tanh}}$ را بدست آورید.

پاسخ: عبارت Tanh را به صورت اضافه و کم می کنیم:

$$\frac{\mathrm{Tan}(x+h)-\mathrm{Tan}\,x-\mathrm{Tanh}+\mathrm{Tanh}}{\mathrm{Tanh}}$$

حال دقت کنید که: $\mathrm{Tan}(x+h)-\mathrm{Tan}\,x-\mathrm{Tanh}=\mathrm{Tan}(x+h)\,\mathrm{Tan}\,x\,\mathrm{Tanh}$

پس:

$$\frac{\mathrm{Tan}(x+h)\,\mathrm{Tan}\,x\times\mathrm{Tanh}+\mathrm{Tanh}}{\mathrm{Tanh}}=\mathrm{Tan}(x+h)\,\mathrm{Tan}\,x+۱$$

دو اتحاد دیگر برای «ساده کردن» خیلی مهم هستند و به نصف کمان معروفند:

$$\mathrm{Sin}\,۲x=۲\mathrm{Sin}\,x\cos x$$
$$\cos ۲x=\cos^۲ x-\mathrm{Sin}^۲ x$$

در ضمن:

$$۱ = \text{Sin}^۲ x + \cos^۲ x$$

مثال زیر مهمترین وضعیت در فصل مشتق است.

مثال: حاصل Sinx cosx به ازای $x = ۱۵^\circ$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\text{Sin}\, x \cos x = \frac{۲\text{Sin}\, x \cos x}{۲} = \frac{\text{Sin}\, ۲x}{۲} = \frac{\text{Sin}\, ۳۰^\circ}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\text{Sin}\, x + \cos x}{\cos ۲x} \times \frac{\text{Sin}\, ۲x}{۱ + \cos ۲x}$ را بدست آورید.

داریم:

$$\frac{۲\text{Sin}\, x \cos x}{\text{Sin}^۲ x + \cos^۲ x + \cos^۲ x - \text{Sin}^۲ x} \times \frac{\text{Sin}\, x + \cos x}{\cos^۲ x - \text{Sin}^۲ x}$$
$$= \frac{۲\text{Sin} \cos x}{۲\cos^۲ x} \times \frac{\text{Sin}\, x + \cos x}{(\cos x - \text{Sin}\, x)(\cos x + \text{Sin}\, x)} = \frac{\text{Sin}\, x}{-\text{Sin}\, x + \cos x}$$

که یک راه زیرکانه مهم برای ادامه آن تقسیم صورت و مخرج بر cosx است.

$$\frac{\text{Sin}\, x}{-\text{Sin}\, x + \cos x} = \frac{\text{Tan}\, x}{-\text{Tan}\, x + ۱}$$

معمولاً کار مفیدی است. که صورت و مخرج یک عبارت مثلثاتی بر cosx تقسیم کنیم.

وارد مشتق می شویم.

قضیه اول: مشتق هر عدد ثابتی صفر است.

قضیه اصلی در هر تابعی، ابتدا ضابطه را ساده کنید، بعد مشتق بگیرید.

مثال:

مشتق تابع $f(x) = \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} - x + ۲$ برابر صفر است. زیرا

$$f(x) = \frac{(x + ۲)(x - ۱)}{(x - ۱)} - x + ۲ = x + ۲ - x + ۲ = ۴$$

و ۴ عدد است. مشتق آن صفر است.

مثال: مشتق تابع $f(x) = \frac{\text{Tan}\, ۱۰x - \text{Tan}\, ۷x - \text{Tan}\, ۳x}{\text{Tan}\, ۱۰x\, \text{Tan}\, ۷x\, \text{Tan}\, ۳x}$ برابر صفر است. زیرا ساده شده ی ضابطه این تابع $f(x) = ۱$ است. (چرا؟)

مثال: مشتق تابع $f(x) = \text{Sin}^۲ \frac{\pi}{x} = + \cos^۲ \frac{\pi}{x} + ۴$ مساوی صفر است. زیرا $f(x) = ۵$ و عدد است.

مثال: تابع $f(x) = \text{Ln}۱۰$ با این که قیافه عجیب ناخوشایند زشتی دارد، ولی عدد است لذا خوشبختانه $f'(x) = ۰$.

قضیه دوم: مشتق تک جمله ای ها به صورت زیر است.

۱) $f(x)=ax \Rightarrow f'(x)=a$

۲) $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=anx^{n-1}$

۳) $f(x)=\sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

بخصوص : $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

۴) $f(x)=\dfrac{a}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-a}{x^2}$

مثال: مشتق توابع زیر را محاسبه می کنیم، به عملیات جبری دقت کنید.

۱) $f(x)=x\sqrt[3]{x\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=x\sqrt[3]{\sqrt{x^2x}}$

$=x\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}=x\sqrt{x}=x^{1+\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

۲) $f(x)=3x^5+2x-1 \Rightarrow f'(x)=15x^2+2$

در جمع می توانیم یک عامل یک عامل مشتق بگیریم. در ضرب و تقسم وضعیت کمی بد است.

۳) $f(x)=\dfrac{x^2+x+3}{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{x}{x}+\dfrac{3}{x}$

$=x+1+\dfrac{3}{x} \to f'(x)=1+0-\dfrac{3}{x^2}=1-\dfrac{3}{x^2}$

۴) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}-2-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{13}{6}}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{13}{6}x^{-\frac{13}{6}-1}=-\dfrac{13}{6}x^{-\frac{19}{6}}=-\dfrac{13}{6\sqrt[6]{x^{19}}}$

۵) $f(x)=\left(\left(\dfrac{x^2+3x+2}{(x+3)}\right)\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+3)}\times\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+1)}\right)^{\frac{1}{2}}=\left((x+2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left((x+2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$=(x+2) \Rightarrow f'(x)=1$

مثال مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}$ به ازاء $x=\frac{1}{4}$

را بدست آورید (آزمون کانون- اردیبهشت ۹۲)

پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+1^2+2\sqrt{x}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x}+1\right|=\sqrt{x}+1$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\to f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x}}$ باشد، حاصل $f'(-1)$ را بیابید. (دشوار- دشوارتر)

پاسخ:

$$f(x)=\frac{x-x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{1-x^{\frac{1}{3}}}=-x^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{(-1)}}=\frac{2}{3}$$

قضیه سوم: مشتق توابع مثلثاتی

۱) $f(x)=\sin x$ $\quad$ $f'(x)=\cos x$

۲) $f(x)=\cos x$ $\quad$ $f'(x)=-\sin x$

۳) $f(x)=Tanx$ $\quad$ $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

۴) $f(x)=\cot x$ $\quad$ $f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$

مجدداً یادآوری می‌کنیم ابتدا ساده کنید بعد مشتق بگیرید.

مثال) از تابع $f(x)=\sin ۳x\cos ۲x-۲\sin x\cos x\cos ۳x$ مشتق بگیرید.

پاسخ:

$$f(x)=\sin ۳x\cos ۲x-\sin ۲x\cos ۳x=$$

$$\sin(۳x-۲x)=\sin x$$

پس:

$$f'(x)=\cos x$$

مثال: از تابع $f(x)=\dfrac{Tan۵xTan۴x}{Tan۵x-Tan۴x-Tanx}$ مشتق بگیرید.

پاسخ:

$$f(x)=\frac{Tan۵xTan۴x}{Tan۵xTan۴xTanx}=\frac{۱}{Tanx}=Cotx$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{\sin^{۲}x}$$

قضیه چهارم: مشتق تابع نمایی

۱) $y=e^{f(x)}\to y'=f'(x)e^{f(x)}$

۲) $y=a^{f(x)}\to y'=f'(x)a^{f(x)}Lna$ کاملتر

مثال: مشتق توابع زیر را بگیرید.

۱) $f(x)=e^{\sin x}\to f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$

۲) $f(x)=e^{x^{۳}-x}\to f'(x)=(۳x^{۲}-۱)e^{x^{۳}-x}$

۳) $f(x)=\sqrt{e^{x}}\Rightarrow f(x)=e^{\frac{۱}{۲}x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}e^{\frac{۱}{۲}x}=\frac{۱}{۲}\sqrt{e^{x}}$

۴) $f(x)=۵^{x^{۳}+۱}\Rightarrow f'(x)=(۳x^{۲})۵^{x^{۳}+۱}\ln ۵$

۵) $f(x)=۱۰^{x}+x^{۱۰}\Rightarrow f'(x)=۱۰^{x}\ln ۱۰+۱۰x^{۹}$

قضیه پنجم: مشتق تابع لگاریتم طبیعی:

(در شماره‌گذاری) $1)f(x)=\ln x \to f'(x)=\frac{1}{x}$

کاملتر $f(x)=\ln A(x) \to f'(x)=\frac{A'(x)}{A(x)}$

مثال:مشتق تابع $f(x)=\ln\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$ را بگیرید (مشابه ۹۲ تجربی)

ابتدا ساده می‌کنیم.

$$f(x)=Ln\left(\frac{\sin x}{1+cosx}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\sin x-\ln(1+\cos x)\right)$$

حالا مشتق:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\ln\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$ در نقطه‌ای به طول ۲ را بیابید. (مشابه ۹۴ خارج)

پاسخ:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(4x+1)-\ln(x^2-2x+3)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{4x+1}\right)-\frac{2x-2}{x^2-2x+3}\Rightarrow$$

$$f'(2)=\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=\frac{-4}{9}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\ln xe^{x^2-x}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$f(x)=\ln x+\ln e^{x^2-x}=\ln x+x^2-x$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}+۳x^{۲}-۱$$

قضیه ششم: مشتق تابع تواندار

$$\left(f^{n}(x)\right)'=nf^{n-۱}(x)\times f'(x)$$

این قضیه تقریباً در همه‌ی مسئله‌ها حضور دارد.

مثال: به مشتق‌های زیر دقت کنید.

$$۱)\ f(x)=\sin^{۲}x \rightarrow f'(x)=۲\sin x\cos x=\sin ۲x$$

$$۲)\ f(x)=(x+x)\rightarrow f'(x)=۵(x+x)(۲x+۱)$$

$$۳)\ f(x)=\ln x \rightarrow f'(x)=(۵\ln x)\times\frac{۱}{x}$$

$$۴)\ f(x)=\ln x^{۵}\rightarrow f(x)=۵\ln x \rightarrow f(x)=\frac{۵}{x}$$

$$۵)\ f(x)=\left(\frac{۱۶}{x^{۳}}-\sqrt[۳]{x^{۲}}\right)^{۳}$$ مشابه (۹۱ تجربی)

$$f'(x)=۳\left(\frac{۱۶}{x^{۳}}-\sqrt[۳]{x^{۲}}\right)^{۲}\left(\frac{۱۶(-۳)}{x^{۴}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}\right)$$

$$=۳\left(\frac{۱۶}{x^{۳}}-\sqrt[۳]{x^{۲}}\right)^{۲}\left(\frac{-۴۸}{x^{۴}}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x^{۵}}}\right)$$

$$۵)\ f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}\right)^{۱۵}}{\left(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}\right)^{۷}}\rightarrow$$

(ریاضی پایه) $f(x)=\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}\right)^{۱۵}\left(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}\right)^{-۷}=$

$$\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}\right)^{۱۵}\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}\right)^{۷}=\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}\right)^{۲۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲۲\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}\right)^{۲۱}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)$$

قضیه هفتم: مشتق تابع مرکب هموگرافیک

$$y=\frac{a\,f(x)+b}{c\,f(x)+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{\left(c\,f(x)+d\right)^{۲}}\times f'(x)$$

مثال از توابع زیر مشتق بگیرید:

$$۱)\ f(x)=\frac{۳x+۵}{x+۱۱}\rightarrow f'(x)=\frac{۳۳-۵}{\left(x+۱۱\right)^{۲}}=\frac{۲۸}{\left(x+۱۱\right)^{۲}}$$

$$۲)\ f(x)=\frac{\sin x+۵}{subx+۲}\rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{\left(\sin x+۲\right)^{۲}}\times\cos x$$

۳ $f(x)=\dfrac{۱+\tan x}{۱-\tan x}$ ((سرلسری تجربی)

(خیلی مهم: باید منظم بنویسید. اول عبارت بعد عدد) $\rightarrow f(x)=\dfrac{Tanx+۱}{-Tanx+۱}$

$$f'(x)=\frac{۱-(-۱)}{\left(-Tanx+۱\right)^{۲}}\times\frac{۱}{\cos^{۲}x}=\frac{۲}{\left(-Tanx+۱\right)^{۲}Cos^{۲}x}$$

$$۴)\ f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\rightarrow f(x)=\frac{Tanx+۱}{Tanx-۱}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{\left(Tanx-۱\right)^{۲}}\times\frac{۱}{\cos^{۲}x}$$

$$۵)\ f(x)=\frac{x+۵\sqrt{x}+۴}{x+۷\sqrt{x}+۱۲}\rightarrow f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+۴\right)\left(\sqrt{x}+۱\right)}{\left(\sqrt{x}+۴\right)\left(\sqrt{x}+۳\right)}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{\left(\sqrt{x}+۳\right)^{۲}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$۶)\ f(x)-\frac{e^{۲x}+۳}{e^{۲x}+۱}\rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{\left(e^{۲x}+۱\right)}\times\left(۲e^{۲x}\right)$$

قاعده زنجیره‌ای: مشتق توابع مرکب با قاعده خیلی مفید زیر قابل محاسبه است:

$$\left(fog(x)\right)'=g'(x)\times f'\left(g(x)\right)$$

که به زبان خودمانی‌تر و عملی‌تر در مثال زیر با چند نوع شماره‌گذاری مطلب را تکمیل می‌کنیم.

مثال: مشتق تابع $f(x)=\ln\left(\sin\left(x^{۲}+۱\right)\right)$ را محاسبه کنید.

$$f(x)=\underbrace{\ln}_{۳}\left(\underbrace{\sin}_{۲}\left(\underbrace{x^{۲}+۱}_{۱}\right)\right)\to f'(x)=۲x\cos\left(x^{۲}+۱\right)\times\frac{۱}{\sin(۴+۱)}$$

روال کار این است که تابع‌هایی که ترکیب شده‌اند از داخل به بیرون یا از بیرون به داخل، شماره می-گذاریم و در هر مرحله فقط مشتق همان شماره را می‌گیریم.

در قضیه پنجم برای مشتق lnx نوشته‌ایم: «برای شماره‌گذاری» منظور این است که وقتی شماره-گذاری کردید حتماً باید مشتق lnx را از قاعده $\frac{۱}{x}$ محاسبه کنید.

گام آخر مثال بالا را ببینید.

مثال مشتق تابع $f(x)=\cos^{۳}\left(\frac{\lambda}{x}\right)$

در اینجا داریم $f(x)=\underbrace{\cos^{۳}}_{۲}\left(\frac{\pi}{\underbrace{x}_{۱}}\right)\to f'(x)=-\frac{\pi}{x^{۲}}\left(۳\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\right)$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۲x}$ را بگیرید.

$$f(x)=\sqrt{۲x}\Rightarrow f'(x)=۲\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲x}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x}}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ را حساب کنید.

$$f(x)=\underbrace{\sqrt{\underbrace{x+\sqrt{x}}_{۱}}}_{۲}\Rightarrow f'(x)=\left(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)\times\frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۱+\tan^{۲}\frac{۱}{x}}$ را در نقطه $x=\frac{۳}{\pi}$ محاسبه کنید. (سراسری تجربی)

پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{1+\tan^{2}\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^{2}\frac{1}{x}}}=\left|\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\right|$$

که در نقطه $x=\frac{3}{\pi}$ مقدار $\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}$ عددی مثبت است بنابراین:

$$f(x)=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\Rightarrow f'(x)=\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{\cos^{2}\frac{1}{x}}\right)$$

$$\to f'\left(\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{\pi^{2}}{9}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{\cos^{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)=-\frac{\pi^{2}}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 4=\frac{-2\pi^{2}}{9}$$

با استاندارد ما، این مسئله دشوار ارزیابی می‌شود.

قاعده ضرب

$$\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

که از راست به چپ نیز مهم است.

مثال: مشتق بگیرید.

1) $f(x)=x^{2}\sin x\to f'(x)=2x\sin x+x^{2}\cos x$

2) $f(x)=x^{2}Tan\left(x^{3}+1\right)\to f'(x)=2xTan\left(x^{3}+1\right)+x^{2}\left(3x^{2}\times\frac{1}{\cos^{2}\left(x^{3}+1\right)}\right)$

در مسائل کمی مفهومی‌تر، این قاعده بر مبنای دقت دانش‌آموز در عددگذاری است.

مثال: اگر $f(2x+1)-x^{3}-x$ آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\sqrt{x}\right)$ در نقطه‌ای به طول ۹ را بیابید.

پاسخ: نقطه به طول ۹ در $f\left(\sqrt{x}\right)$ باعث می‌شود وضعیت f(۳) رخ دهد. اما برای اینکه در $f(2x+1)$ به f(۳) برسیم باید x=1باشد. نتیجه‌های این صحبت به همراه قاعده زنجیره‌ای می‌شود:

$$\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)\right)_{x=۹}=\frac{۱}{۶}f'(۳)$$

اما: $\left(۲f'(۲x+۱)=۳x^{۲}-۱\right)_{x=۱}\Rightarrow ۲f'(۳)=۲$

$$\Rightarrow f'(۳)=۱$$

پس:

$$\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\frac{۱}{۶}f'(۳)=\frac{۱}{۶}$$

مثال: اگر $f(x)=۲۵x+\frac{۱}{x}$ باشد، مقدار مشتق تابع $\left(f\left(\sqrt[۳]{x-۱}\right)\right)'$ به ازاء x=۸ را بیابید. (کانون – اردیبهشت۹۳)

$$\left(f\left(\sqrt[۳]{x}-۱\right)\right)'_{x=۸}=\left(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}f'\left(\sqrt[۳]{x-۱}\right)\right)_{x=۸}=\frac{۱}{۱۲}f'(۱)$$

اما: $f'(x)=۲۵-\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۱)=۲۵-۱=۲۴$

پس: $\frac{۱}{۱۲}f'(۱)=\frac{۱}{۱۲}\times ۲۴=۲$

3) $f(x)=x^{۳}\ln x\to f'(x)=۳x^{۲}\ln x+\left(x^{۳}\right)\left(\frac{۱}{x}\right)=۳x^{۲}\ln x+x^{۲}$

4) $f(x)=xe^{x^{۲}-۴}\to f'(x)=۱e^{x^{۲}-۴}+x\left(۲xe^{x^{۲}-۴}\right)$ (خارج ۹۳)

مثال: اگر $g(x)=x^{۳}\cot x, f(x)=\tan x$ حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ را بدست آورید.

پاسخ: داریم

$$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=\left(f(x)g(x)\right)'=\left((\tan x)\left(x^{۳}\cot x\right)\right)'=\left(x^{۳}\right)'=۳x^{۲}$$

مثال: اگر $g(x)=Tanx, f(x)=\cos^{۳}x$ حاصل $f'(x)g'(x)+g''(x)f(x)$ را بدست آورید.

(آزمون کانون- اردیبهشت ۹۳)

پاسخ: $f'(x)g'(x)+g''(x)f(x)=\left(f(x)g'(x)\right)'$

$$=\left(\left(\cos^{۳} x\right)\left(\frac{۱}{\cos^{۲} x}\right)\right)'=\left(\cos x\right)'=-\sin x$$

قاعده تقسیم:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

مثال: مشتق بگیرید:

$$۱) f(x)=\frac{x^{۳}}{\sin x}\rightarrow f'(x)=\frac{۳x^{۲}\sin x-x^{۳}\cos x}{\sin^{۲} x}$$

$$2)\ f(x)=\frac{\ln x}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{۱}{x}\right)x-۱(\ln x)}{x^{۲}}=\frac{۱-\ln x}{x^{۲}}$$

$$3)\ f(x)=\ln x^{x}\rightarrow f(x)=x\ln x\rightarrow f'(x)=۱\times\ln x+x\times\frac{۱}{x}=\ln x+۱$$

$$4)\ f(x)=\frac{(x+۵)\sqrt{x}-x\sqrt{x+۵}}{\sqrt{x^{۲}+۵x}}$$ (سراسری تجربی)

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x+۵}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+۵)}}$$

$$=\sqrt{x+۵}-\sqrt{x}\rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۵}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

قضیه مشتق عامل صفرشونده:

اگر $f(a)=۰$ آن‌گاه $\left(f(x)g(x)\right)'_{x=a}=f'(a)g(a)$ یعنی کافی است فقط از عامل صفر شونده مشتق بگیریم.

مثال: اگر $f(x)=\frac{(x^{۲}-۹)\sin^{۲}\frac{۲\pi}{x}}{۱-\cos\frac{\pi}{x}}$ آن‌گاه (۳) f' را بیابید. (دشوار- دشوارتر)

پاسخ: دقت بفرمائید که $x^{۲}-۹$ وقتی x=3 باشد عامل صفرشونده است. لذا

$$f'(۳)=\left(\frac{۲x\sin^{۲}\frac{۲\pi}{x}}{۱-\cos\frac{\pi}{x}}\right)_{x=۳}=\frac{۶\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۳}}{۱-\cos\frac{\pi}{۳}}=\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۹$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}$ باشد، آن‌گاه f'(1) را بیابید. (مشابه ۹۴ تجربی خارج)

پاسخ: x-1 عامل صفرشونده است:

$$f'(۱)=\frac{۱}{\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{۱}}=۱$$

دانش‌آموزان عزیز رشته ریاضی، برای فصل مشتق، قبل از هر چیز باید درسنامه مشتق تجربی‌ها را به خوبی و با دقت بخوانند. چیزی که در اینجا می‌آوریم ادامه مطالب از قسمت تجربی‌ها است.

قضیه تابع معکوس: اگر نقطه $(x_{\circ},y_{\circ})$ روی نمودار تابع y=f(x) باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $(y_{\circ},x_{\circ})$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ است. یعنی در این حالت داریم $x_{\circ}=f^{-۱}(y_{\circ})$

مثال: در تابع $f(x)=x^{۳}+x+۲$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ برابر ۱ است.

زیرا $f(۱)=۴$ است.

مثال: در تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ برای اینکه $f^{-۱}(۵)$ را بدست آوریم باید معادله‌ی f(x)=۵ را حل کنیم.

$$f(x)=۵\rightarrow x+\sqrt{x}=۵\xrightarrow{\sqrt{x}=T\geq ۰}T^{۲}+T=۵$$

$$\rightarrow T^{۲}+T-۵=۰\rightarrow T=\frac{-۱+\sqrt{۲۱}}{۲}$$

بنابراین: $$x=f^{-۱}(۵)=\sqrt{\frac{-۱+\sqrt{۲۱}}{۲}}$$

قضیه مشتق تابع معکوس: فرض کنید $(x_{\circ},y_{\circ})$ نقطه‌ای از تابع y=f(x) است در اینصورت

$$\left(f^{-۱}(x)\right)'_{y_{\circ}}=\frac{۱}{\left(f'(x)\right)_{x_{\circ}}}$$

مثال: اگر $f(x)=x^{3}+x+1$ آن‌گاه مشتق $f^{-1}(x)$ را در نقطه‌ای به طول ۳ روی نمودارش بیابید:

پاسخ:

نقطه به طول ۳ ولی روی $f^{-1}(x)$ در حقیقت یعنی $y_{0}=3$ خودبخود $x^{3}+x+1=3$ نتیجه می‌دهد. $x_{0}=1$ است.

بنابراین: $$\left(f^{-1}(x)\right)'_{x=3}=\left(\frac{1}{f'(x)}\right)_{x=1}=\left(\frac{1}{3x^{2}+1}\right)_{x=1}=\frac{1}{4}$$

مثال: اگر $f(x)=x^{3}+5x$ باشد، مشتق $f^{-1}(2x)$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن را بیابید.

پاسخ: یعنی طول مورد نظر $f^{-1}(6)$ است. این یعنی $f(x)=6$ که $x=1$ نتیجه می دهد. بنابراین

$$\left(f^{-1}(2x)\right)'_{x=3}=2(f^{-1})'(6)=2\times\left(\frac{1}{f'(1)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{3x^{2}+5}\right)_{x=1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

طبق همین قضیه، مشتق توابع معکوس مثلثاتی عبارت است از

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},\ (\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(\mathrm{Tan}^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^{2}}\qquad(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{1+x^{2}}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}(1-x)$ را بدست آورید:

پاسخ:

$$f'(x)=(-1)\times\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1-(1+x^{2}-2x)}}=\frac{-1}{\sqrt{2x-x^{2}}}$$

قضیه مشتق صفر: اگر روی بازه I داشته باشیم $f'(x)=0$ آن گاه روی این بازه $f(x)$ تابعی ثابت است.

مثال: حاصل $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x+\cos^{-1}x$ را بدست آورید.

پاسخ: چون $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}=0$ است پس $f(x)=c$ تابعی ثابت است. اما

$$f(0)=\mathrm{Sin}^{-1}0+\cos^{-1}0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

پس:

$$f(x)=\frac{\pi}{۲}$$

تبصره: از این مسئله نتیجه می شود که توابع

$$f_۱(x)=\sin^{-۱}\frac{۲}{x}+\cos^{-۱}\frac{۲}{x}$$

و

$$f_۲(x)=\sin^{-۱}(\tan x)+\cos^{-۱}(\tan x)$$

نیز مقادیری ثابت و در حقیقت همان $\frac{\pi}{۲}$ هستند. به قضیه بعد دقت کنید.

قضیه: اگر $f(x)$ تابعی ثابت باشد، آن گاه برای هر تابع $g(x)$ نیز $f\left(g(x)\right)$ همان مقدار ثابت است.

مثال: حاصل $f(x)=\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲^x}\right)+\cot^{-۱}\left(\frac{۱}{۲^x}\right)$ را بدست آورید.

پاسخ: ما می توانیم همان تابع $y=\tan^{-۱}x+\cot^{-۱}x$ را در نظر بگیریم.

در این صورت:

$$y'=\frac{۱}{۱+x^۲}+\frac{-۱}{۱+x^۲}=۰$$

پس y ثابت است.

$$y(۰)=\tan^{-۱}۰+\cot^{-۱}۰=۰+\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

لذا $y=f(x)=\frac{\pi}{۲}$

در رشته ی ریاضی توجه به تفاوت $f'\left(g(x)\right)$ و $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ حائز اهمیت است.

مثال: در تابع $f(x)=x^۳+x+۱$ مقدارهای زیر را بیابید.

الف) $f'(\sqrt{x})$

$$f'(x)=۳x^۲+۱\rightarrow f'(\sqrt{x})=۳x+۱$$

ب) $\left(f(\sqrt{x})\right)'$

$$\left(f(\sqrt{x})\right)'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x+۱)$$

مثال: اگر $f(x)=۲-x^۳$ آن گاه $f\left(xf\left(۱-x\right)\right)$ را مشتق بگیرید.

$$\left(\underset{۲}{f}\underbrace{(xf(۱-x)}_{۱}\right)'=\left(۱\times f\left(۱-x\right)+x(-۱)f'(۱-x)\right)f'\left(xf\left(۱-x\right)\right)$$

اما چون $f'(x)=-۳x^۲$ لذا

$$\left(f(1-x)-xf'(1-x)\right)f'\left(xf(1-x)\right)=$$
$$\left(\left(2-(1-x)^3\right)-x\left(-3(1-x)^2\right)\right)-3\left(xf\left(1-x\right)\right)^2$$

$$\left(2-(1-x)^3+3x(1-x)^2\right)(-3)\left(x^2\right)\left(2-(1-x)^3\right)^2$$

که قطعاً عبارت ناهنجاری است. اما:

مثال: اگر $f(x)=2-\sqrt{x+1}$ باشد. از تابع $f\left(xf(x)\right)$ مشتق بگیرید.

(مشابه ریاضی ۹۱)

$$\left(\underset{2}{f}\underbrace{(xf(1-x)}_{1}\right)'=\left(1\times f\left(1-x\right)+x(-1)f'(1-x)\right)f'\left(xf\left(1-x\right)\right)$$

که:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

بنابراین:

$$\left(2-\sqrt{x+1}+x\left(\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\right)\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{xf(x)+1}}\right)$$
$$=\left(2-\sqrt{x+1}-\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x\left(2-\sqrt{x+1}\right)+1}}\right)$$

مثال: اگر $f(x)=\operatorname{Sin}x$ آن گاه مشتق تابع $f\left(x+f(x)\right)$ را بیابید.

$$\left(\underset{2}{f}\underbrace{(x+f(x)}_{1}\right)'=\left(1+f'\left(x\right)\right)\left(f'\left(x+f(x)\right)\right)\left(1+\cos x\right)\left(\cos\left(x+\operatorname{Sin}x\right)\right)$$

ادامه دارد ...

شاد و سرافراز باشید.

میلاد منصوری

مشتق: قسمت دوم

مشتق‌گیری ضمنی: ضابطه‌هایی مانند $x^۳-۲xy+y=۵$ که x و y با هم در یک طرف تساوی شرکت کرده‌اند را ضمنی می‌گوییم. قضیه زیر در تشخیص اینکه یک ضابطه ضمنی تابع است یا نه تا حدی کمک می‌کند.

قضیه: اگر ضابطه‌ی ضمنی یک اتحاد باشد، ضابطه تابع نیست.

مثال: ضابطه‌ی $(x+y)^۲=x^۲+۲xy+y^۲$ تابع نیست. زیرا اتحاد است.

اگر یک ضابطه ضمنی تابع باشد، برای محاسبه‌ی $y'(x)$ یا همان $\frac{dy}{dx}$ می‌توان از دو طرف تساوی مشتق گرفت. حواستان باشد که مثلاً مشتق $x^۳$ همان $۳x^۲$ است اما مشتق y^3 برابر $3y^2y'$ است.

مثال: از ضابطه‌ی ضمنی $x^۳-۲xy^۲+y=x-y^۳$ ضابطه $y'(x)$ بدست آورید.

پاسخ: در اینجا داریم:

$$۳x^۲-(۲y^۲+۲x(۲yy'))+y'=۱-۳y^۲y'$$

$$۳x^۲-۲y^۲-۴xyy'+y'=۱-۳y^۲y'\rightarrow$$
$$۳x^۲-۲y^۲-۱=۴xyy'-y'\rightarrow ۳x^۲-۲y^۲-۱=y'(۴xy-۱)$$
$$\rightarrow \frac{۳x^۲-۲y^۲-۱}{۴xy-۱}=y'$$

این روش بخصوص وقتی مسأله پیچیده‌تر است خیلی مفید می‌باشد.

مثال: در ضابطه‌ی $f(x)+۳f(۱-x)=x^۲+x$ مقدار $f'(۲)$ را بیابید.

از دو طرف مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)-۳f'(۱-x)=۲x+۱$$

حال مقادیر $x=۲$ و $x=-۱$ را عددگذاری می‌کنیم (رجوع شود به درسنامه جامع ریاضی پایه در قسمت کنکوری ها بخش چهارم ریاضی)

$$\begin{array}{l} x=۲: f'(۲)-۳f'(-۱)=۵ \\ x=-۱: f'(-۱)-۳f'(۲)=۰ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a-۳b=۵ \\ b-۳a=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=\frac{-۵}{۸}\ ,\ a=\frac{-۵}{۲۴}$$

یعنی $f'(۲)=\frac{-۵}{۲۴}$

روش دیگری که در ضوابط ضمنی مورد "عنایت ویژه" طراحان کنکور است، ساده کردن و استفاده از فرمول زیر می‌باشد:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\text{عدد است } y}{\text{عدد است } x}$$

مثال: مقدار مشتق ضمنی $\frac{dy}{dx}$ از ضابطه $x^۳-y^۳=۷y$ در نقطه (۱، ۲) را بدست آورید.

نکته‌ی اصلی این است که در استفاده از این روش حتماً باید تمام عبارت را به سمت چپ انتقال دهیم.

$$x^۳-y^۳-۷y=۰\rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۳x^۲}{-۳y^۲-۷}$$

قرار دهید $x=۲$ و $y=۱$:

$$y'=-\frac{۱۲}{-۱۰}=۱/۲$$

مثال: از رابطه $\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}=6$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه (۴، ۱) را بدست آورید. (۸۶ – تجربی)

پاسخ:

$$\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}-6=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=\left(-\frac{\frac{-\sqrt{y}}{x^2}+\frac{y}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2x\sqrt{y}}+\sqrt{x}}\right)(1,4)=-\frac{-2+2}{\frac{1}{4}+1}=0$$

$$-\frac{-۲+۲}{\frac{۱}{۴}+۱}=۰$$

مثال: از رابطه‌ی $(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})=x^۲-y$ مقدار y' را بدست آورید.

این رابطه یک اتحاد است. لذا تابع نیست و مشتق ندارد.

مثال: مشتق ضمنی تابع $\ln(x^۲-y)=\sqrt{y+۱}-x$ در نقطه (۳، ۲) را بدست آورید. (مشابه تجربی ۹۰)

به سادگی: $\ln(x^۲-y)-\sqrt{y+۱}+x=۰$ پس

$$y' = -\frac{f'x}{f'y} = (-\frac{\frac{2x}{x^2-y}+1}{\frac{-1}{x^2-y}-\frac{1}{2\sqrt{y+1}}}$$

$$= -\frac{4+1}{-1-\frac{1}{4}} = -\frac{5}{-\frac{5}{4}} = 4$$

آهنگ تغییر:

آهنگ تغییر متوسط تابع *f(x)* در بازه‌ی $[x_۱, x_۲]$ برابر است با:

$$\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

گاهی به جای بازه‌ی $[x_۱, x_۲]$، مقدار $x_۱$ و نمو یا تغییرات Δx را می‌دهند. در اینصورت از فرمول $\frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x}$ استفاده می‌کنیم.

هر دو فرمول در حقیقت شیب خط واصل بین دو نقطه $A(x_۱, f(x_۱))$ و $B(x_۲, f(x_۲))$ را محاسبه می‌کند.

تنها نکته مهم درباره‌ی این قسمت دقت کردن به تابع است.

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه *x*=۱ با نمو متغیر ۰/۲۱، را بدست آورید. (مشابه ۹۴ تجربی)

پاسخ: داریم $\Delta x = ۰/۲۱, x_۱ = ۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ و مقدار متوسط

$$\frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x} = \frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۰/۲۱} = \frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}$$

$$= \frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱} = \frac{۰/۱}{۰/۲} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

مثال: تابع $y=f(x)$ به گونه‌ای است که $f(۲x)-f(x)=x^۲+۱$ است. مقدار متوسط تابع $y=x+f(x)$ را در بازه‌ی [۴، ۱] بدست آورید.

پاسخ: باید مقدار $\frac{(4+f(4))-(1+f(1))}{4-1}$ را بدست آوریم.

عجالتاً ساد شده‌ی عبارت می‌شود:

$$\frac{f(۴)-f(۱)+۳}{۳}$$

مقدار $f(۴)-f(۱)$ را با عددگذاری بدست می‌آوریم (درسنامه جامع ریاضی پایه را ببینید).

$$x=۲\rightarrow f(۴)-f(۲)=۵$$
$$x=۱\rightarrow \underline{f(۲)-f(۱)=۲}$$
جمع دو رابطه $\quad f(۴)-f(۱)=۷$

لذا جواب نهایی مسئله می‌شود:

$$\frac{۷+۳}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_۰$ برابر با $f'(x_۰)$ است. این مقدار مساوی با شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه $(x_۰, f(x_۰))$ است.

مثال: در تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{\sqrt{۲x+۵}}$ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ را بیابید.

پاسخ:

$$f'(۲)\xrightarrow{\text{عامل صفر شونده}}\left(\frac{۲x}{\sqrt{۲x+۵}}\right)_{x=۲}=\frac{۴}{۷}$$

مثال: اگر $۸y^۲-۲xy^۳=-۱۶$ باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x دو نقطه (۲و ۳) را بیابید (کتاب درسی)

پاسخ: $y'(۳,۲)=\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right)(۳,۲)=\left(-\frac{-۲y^۳}{۱۶y-۶xy^۲}\right)(۳,۲)$

$$=\frac{۱۶}{۳۲-۷۲}=\frac{۱۶}{۴۰}=-۰/۴$$

مثال: اگر $f(x)=Sinx$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر شیب خط مماس نمودار بر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۳}$ را بیابید.

پاسخ: شیب خط مماس بر نمودار از رابطه $f'(x)=\cos x$ پیروی می‌کند.

لذا آهنگ تغییر لحظه‌ای شیب خط مماس مشتق این عبارت یعنی $-Sinx$ است. بنابراین

$$(-Sinx)_{x=\frac{\pi}{۳}}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال فرض کنید M(x,y) روی نمودار $y=\sqrt{x+7}$ در حرکت باشد. اگر T فاصله نقطه M(x,y) از مبدا مختصات باشد، آهنگ تعییر لحظه ای T به متغیر x در لحظه ای که x=2 چقدر است،

پاسخ: دقت فرمایید آهنگ تغییر T را می خواهیم نه yو یعنی مشتق y را نباید محاسبه کنیم.

$$T(x)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x+7}$$

بنابراین:

$$T'(2)=(2x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+v}}=\frac{5}{2\sqrt{13}}$$

مثال: اگر $f(2x+1)=x^3-x^2+2$ باشد، آهنگ تغییر لحظه ای $f(1-x)$ که x=2 باشد بیابید.

پاسخ: آهنگ تغییر لحظه $f(1-x)$ در x=2 یعنی:

$$(f(1-x)'=-f'(1-2)=-f'(-1)$$

برای محاسبه $f'(-1)$ از دو طرف تساوی اصلی مسئله x=2 مشتق می گیریم.

$$2f'(-5)=5\rightarrow f'(-1)=\frac{5}{2}$$

لذا جواب مسله $-\frac{5}{2}$ است.

نویسنده: میلاد منصوری

موفق و موید باشید