سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

مهدی جعفری کیا

ناحیه چهار مشهد مقدس

www.mclass.ir

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست جزوه‌ی جبر و احتمال سوم ریاضی فیزیک

((امام علی علیه السلام : عاقل ترین مردم کسی است که در امور زندگیش بهتر برنامه ریزی کند و در اصلاح آخرتش بیشتر همّت نماید.))

فصل اول: استدلال ریاضی

انواع استدلال: در این فصل به انواع استدلال در ریاضیات می‌پردازیم. این استدلال‌ها عبارتنداز: ۱. درک شهودی ۲. تمثیلی ۳. استقرایی ۴. استنتاجی ۵. بازگشتی ۶. برهان خلف ۷. اصل لانه کبوتری

۱. درک شهودی:

این نوع درک بر اساس شهود و درک غریزی می‌باشد و نمی‌توان آن را بعنوان یک استدلال در نظر گرفت. نظیر حدس در مورد گرد بودن زمین.

۲. استدلال تمثیلی یا قیاسی:

این نوع استدلال بر اساس مقایسه و یا مثال می‌باشد و براحتی قابل فهم است. مثلا برای اثبات و درک اینکه حاصل ضرب دو عدد منفی مثبت می‌شود، می‌توان از قیاس زیر استفاده نمود:

اگر از منبع آبی که در حال تخلیه(-) می‌باشد فیلم برداری کنیم و فیلم را برعکس نمایش دهیم(-) باعث این می‌شود که پر شدن منبع(+) به نمایش کشیده شود.

۳. استدلال استقرایی:

نتیجه‌گیری کلی بر اساس تعداد محدودی از مشاهدات و آزمایش‌ها را گویند. مثلا: مشاهده می‌شود:

$1+3=4\ ,\ 1+3+5=9\ ,\ 1+3+5+9=16$ و از این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که احتمالا همیشه مجموع اعداد فرد متوالی مربع کامل می‌شود.

تذکر: استدلال استقرایی اثباتی دقیق برای مسایل نمی‌باشد ولی برای ایجاد حدس بسیار مفید می‌باشد.

((کسی که دارای عزمی راسخ است، جهان را مطابق میل خویش عوض می کند))

استقرای ریاضی:

اصل استقرای ریاضی: فرض کنید $p(n)$ حکمی‌برای اعداد طبیعی n باشد، اگر $p(1)$ صحیح باشد و از برقراری $p(k)$ برقراری $p(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ برای هر عدد طبیعی برقرار می‌باشد.

با توجه به اصل بالا برای اثبات احکام با استفاده از استقرای ریاضی ابتدا درستی $p(1)$را بررسی می‌کنیم. سپس فرض می‌کنیم $p(k)$ درست باشد آن‌گاه ثابت می‌کنیم حکم برای $p(k+1)$ نیز درست است.

مثال: با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n حکم های زیر برقرار هستند.

$$1)\quad 3+6+9+\dots+3n=\frac{3(n^2+n)}{2}$$

$$p(1):\begin{cases}3\\ \dfrac{3(1+1)}{2}=3\end{cases}$$

$$p(k): 3+6+9+\dots+3k=\frac{3(k^2+k)}{2}$$

$$p(k+1): 3+6+9+\dots+3k+3(k+1)=\frac{3((k+1)^2+(k+1))}{2}=\frac{3(k+1)(k+2)}{2}$$

$$3+6+9+\dots+3k+3(k+1)=\frac{3(k^2+k)}{2}+3(k+1)=\frac{3k(k+1)}{2}+\frac{6(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(3k+6)}{2}=\frac{3(k+1)(k+2)}{2}$$

$$2)\quad \frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\frac{1}{13\times 15}+\dots+\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}=\frac{n}{9(2n+9)}$$

$$p(1):\begin{cases}\dfrac{1}{9\times 11}=\dfrac{1}{99}\\[2mm] \dfrac{1}{9(2(1)+9)}=\dfrac{1}{99}\end{cases}$$

$$p(k):\frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\frac{1}{13\times 15}+\dots+\frac{1}{(2k+7)(2k+9)}=\frac{k}{9(2k+9)}$$

$$p(k+1):\frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\frac{1}{13\times 15}+\dots+\frac{1}{(2k+7)(2k+9)}+\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}=\frac{k+1}{9(2k+11)}$$

$$\frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\frac{1}{13\times 15}+\dots+\frac{1}{(2k+7)(2k+9)}+\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}=\frac{k}{9(2k+9)}+\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}$$

$$=\frac{k(2k+11)+9}{9(2k+9)(2k+11)}=\frac{2k^2+11k+9}{9(2k+9)(2k+11)}=\frac{(2k+9)(k+1)}{9(2k+9)(2k+11)}=\frac{k+1}{9(2k+11)}$$

$$3)\quad 11^n-1=10t\quad(\forall n\in\mathbb{N})\quad(87/3)$$

$$p(1):11-1=10$$

$$p(k):11^k-1=10t_1$$

$$p(k+1):11^{k+1}-1=10t_2$$

$$11^k-1=10t_1\xrightarrow{\times 11}11^{k+1}-11=10t_1\Rightarrow 11^{k+1}-1=10t_1+10\Rightarrow 11^{k+1}-1=10t_2$$

۴. (خرداد ماه ۹۲)

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P(1):1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}\Rightarrow 1=1\qquad(0/25)$$

فرض استقرا $P(K):1+2^2+3^2+\dots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}\qquad(0/25)$

حکم استقرا $P(K+1):1+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\qquad(0/25)$

$$P(K+1):1+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\qquad(0/25)$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\qquad(0/5)$$

((امام علی (ع): هر چیز دارای سیماست، سیمای دین شما نماز است))

اصل استقرای تعمیم یافته: فرض کنید $p(n)$ حکمی‌برای اعداد طبیعی n باشد، اگر $p(m)$ برای $m>1$ صحیح باشد و از برقراری $p(k)$ برای $k\geq m$ برقراری $p(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ برای هر عدد طبیعی برقرار می‌باشد.

با توجه به اصل بالا برای اثبات احکام با استفاده از استقرای تعمیم یافته ریاضی ابتدا m مناسب را بدست آورده و درستی $p(m)$ را بررسی می‌کنیم، سپس فرض می‌کنیم $p(k)$ برای $k\geq m$ درست باشد آن‌گاه ثابت می‌کنیم حکم برای $p(k+1)$ نیز درست است.

مثال: با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ حکم زیر برقرار هستند.

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}>n \quad (n\geq 2) \quad (89/6)$$

$$p(2):1+\sqrt{2}>2$$

$$p(k),(k\geq 2):1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{k}>k$$

$$p(k+1):1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>k+1$$

$$\begin{cases}1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>k+\sqrt{k+1}\\ k\geq 2\Rightarrow \sqrt{k+1}\geq\sqrt{3}>1\end{cases}\Rightarrow 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>k+1$$

مثال:

با استفاده ازاصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی $n>6$ ، ثابت کنید :

$$n!>3^n$$

$$p(7):7!>3^7 \qquad (0/25)$$

$$p(k):K!>3^k\ (0/25)$$

$$P(k+1):(k+1)!>3^{k+1} \qquad (0/25)$$

و طرف فرض را در $K+1$ ضرب می کنیم.

$$K!\,(k+1)>3^k(k+1)\ (0/25)$$

$$(k+1)!>3^k(k+1)\ (0/25)$$

باید ثابت کنیم : $3^k(k+1)>3^{k+1}$ (0/25)

$$3^k(k+1)>3^k\times 3\to(k+1)>3\ (0/25)$$

باتوجه به اینکه $k>6$ است درستی ، عبارت فوق بدیهی است. (0/25)

((پیامبر اکرم (ص): طلب علم بر هر مسلمانی واجب است ، همانا خدا جویندگان علم را دوست دارد))

استدلال استنتاجی:

اثبات بر اساس حقایقی که درستی آن ها را از قبل پذیرفته ایم را استدلال استنتاجی می‌گوییم.

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد مضرب چهار است.

$$(2k-1)^2-(2k'-1)^2=4k^2-4k+1-4k'^2+4k'-1=4(k^2-k'^2-k+k')=4t$$

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر $x>1$ آن‌گاه داریم: $4-x^2<3$.

$$x>1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow -x^2<-1\xrightarrow{+4}4-x^2<3$$

نکته: چون بین هر دو عدد صحیح متوالی یکی زوج است، پس حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است.

نکته: چون بین هر سه عدد صحیح متوالی یکی مضرب ۳ است، پس حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

$$(2k)(2k+2)(2k+4)=2\times2\times2\times\underbrace{k(k+1)(k+2)}_{3t}=8(3t)=24t$$

قضیه کلی:

احکامی‌هستند که همیشه برقرارند. مثلا: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است.

مثال نقض:

اگر حکم مساله را با آوردن یک مثال رد کنیم، به آن مثال، مثال نقض می‌گوییم.

مثال: با استفاده مثال نقض حکم "عبارت $4+3^n$ همواره یک عدد اول است" را رد کنید.

$n=4\Rightarrow 4+3^4=4+81=85$ اول نمی‌باشد.

مثال: با استفاده مثال نقض حکم "برای هر عدد حقیقی a داریم: $a^2<a^3$" را رد کنید.

$$a=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(a^2=\frac{1}{4},a^3=\frac{1}{8}\right)\Rightarrow a^2>a^3$$

مثال: برای احکام نادرست زیر مثال نقض بیاورید.

الف) مجموع و ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) برای هر عدد n، عدد 3^n+2 عددی اول است.

الف)
$$\begin{cases}\left(1-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3}\right)\notin\mathbb{Q}\,,\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)=1\in\mathbb{Q}\\ \left(1-\sqrt{3}\right),\left(1+\sqrt{3}\right)\notin\mathbb{Q}\,,\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=1-3=-2\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

ب) اگر عدد n را عدد ۵ در نظر بگیریم، داریم: $n=5\Rightarrow 3^5+2=245$، که عددی اول نمیباشد.

قضیه شرطی:

احکامی‌هستند که به صورت شرطی بین می‌شوند. یعنی از دو قسمت فرض و حکم تشکیل شده است. $(p\Rightarrow q)$

نظیر: اگر $x>1$ آن‌گاه $x^2>x$ می‌باشد.

تذکر: اگر جای حکم و فرض را عوض کنیم عکس قضیه تشکیل می‌شود.

اثبات بازگشتی:

اگر از حکم مساله استفاده کنیم و به یک رابطه همیشه درست برسیم و نشان دهیم تمام مراحل برگشت پذیرند از اثبات بازگشتی مساله را حل کرده‌ایم.

مثال: با استفاده از استدلال بازگشتی روابط زیر را ثابت کنید.

$$((x,y>0)\Rightarrow x^4+y^4\geq x^3y+xy^3)\Leftrightarrow x^4+y^4-x^3y-xy^3\geq 0\Leftrightarrow x^3(x-y)-y^3(x-y)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow(x-y)(x^3-y^3)\geq 0\Leftrightarrow(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)\geq 0\Leftrightarrow(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geq 0$$

که چون رابطه اخیر یک رابطه همیشه درست است و همه مراحل نیز بازگشت پذیرند، پس حکم ثابت می‌شود.

$$x^2+y^2+1\ge xy+x+y \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+1\ge xy+x+y)\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\ge 0$$

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}$ و $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}\Leftrightarrow a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\ge a+b\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\ge 0$$
$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Leftrightarrow ab\le\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\Leftrightarrow 4ab\le a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2-4ab\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$$

برهان خلف(اثبات غیر مستقیم):

این نوع اثبات از سه مرحله: ۱. رد حکم ۲. نشان دادن اینکه رد حکم ما را به تناقض می‌رساند و ۳. در نهایت چون به تناقض می‌رسیم پس باید حکم برقرار باشد. تشکیل شده است.

مثال: با استفاده از برهان خلف نشان دهید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

به برهان خلف فرض می‌کنیم حکم صحیحی نباشد، یعنی:

$$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{a}{b},(a,b)=1\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2=2t\Rightarrow a=2t$$
$$(a^2=2b^2,a=2t)\Rightarrow 2b^2=4t^2\Rightarrow b^2=2t^2\Rightarrow b=2t$$
$$(a=2t,b=2t)\Rightarrow(a,b)=2\ne 1$$

چون به تناقض رسیدیم پس باید حکم درست باشد.

مثال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر n^2 مضربی از ۵ باشد، n مضربی از ۵ است.

به برهان خلف فرض می‌کنیم حکم صحیح نباشد، یعنی:

$$n\ne 5t\Rightarrow\begin{cases}n=5t+1\Rightarrow n^2=25t^2+10t+1=5(5t^2+2t)+1=5k_1+1\\ n=5t+2\Rightarrow n^2=25t^2+20t+4=5(5t^2+4t)+4=5k_2+4\\ n=5t+3\Rightarrow n^2=25t^2+30t+9=5(5t^2+6t+1)+4=5k_3+4\\ n=5t+4\Rightarrow n^2=25t^2+40t+16=5(5t^2+8t+3)+1=5k_4+1\end{cases}$$
$$\Rightarrow n^2\ne 5t$$

چون به تناقض رسیدیم پس باید حکم درست باشد.

((امام موسی کاظم (ع): هر که میخواهد که قوی ترین مردم باشد بر خدا توکل نماید.))

مثال: با استفاده از برهان خلف اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد، ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ نیز عددی گنگ است.

به برهان خلف فرض می‌کنیم حکم صحیح نباشد، یعنی:

$$\sqrt{\sqrt{3}+2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{\sqrt{3}+2}=\frac{a}{b}\Rightarrow\sqrt{3}+2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}-2\in\mathbb{Q}$$

چون به تناقض رسیدیم پس باید حکم درست باشد.

مثال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی، $x\ne 3$ و $x+4y^2=7$ آنگاه $y\ne -1$ است.

(فرض خلف): $y=-1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x+4(-1)^2=7\Rightarrow x=3$ (۰/۲۵) خلاف فرض مسأله است

پس فرض خلف باطل و حکم $y\ne -1$ برقرار است. (۰/۲۵) ص ۳۰

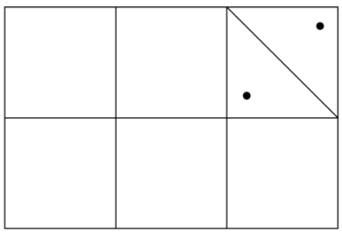
اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها از لانه ها بیشتر باشد، آن‌گاه لااقل یک لانه وجود دارد که در آن دست کم دو کبوتر باشد.

مثال: با استفاده از اصل لانه کبوتری تعیین کنید اگر در یک مهمانی ۳۹ نفر حضور داشته باشند، حداقل چند نفر روز تولدشان در یک روز هفته می‌باشد.

چون تعداد کبوتر ها=۳۹و تعداد لانه ها=۷ است و $۳۹=۷\times۵+۴$ پس حداقل $۵+۱=۶$ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند.

مثال: هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آن ها فاصله ای کمتر از $۲\sqrt{۲}$ متر را دارند.



چون تعداد لانه ها ۶ و تعداد کبوترها برابر ۷ می‌باشد و طول وترمربع رسم شده نیز برابر: $۲\sqrt{۲}=\sqrt{۴+۴}$ می‌باشد و همچنین: $۷=۶\times۱+۱$ پس بنا به اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آن ها کمتر از $۲\sqrt{۲}$ است.

مثال: اگر s یک زیر مجموعه ۶۵ عضوی از اعداد طبیعی است، اگر اعضای s را بر عدد ۱۶ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل ۵ عضو از s دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۱۶ دارند.

چون تعداد کبوتر ها ۶۵ و تعداد لانه ها ۱۶ می‌باشد(باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۶ اعداد ۰ تا ۱۵ می‌باشد) و $۶۵=۱۶\times۴+۱$ پس حداقل $۴+۱=۵$ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند.

مثال: **S یک زیر مجموعه ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۹ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۳۹ هستند.**

می‌دانیم مجموعه باقیمانده های هر عدد طبیعی بر ۳۹ به صورت $\{۰,۱,۲,.....,۳۸\}$ است. (۰/۲۵)

اگر اعضای S (۴۰نفر) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده (۳۹) را لانه کبوترها در نظر بگیریم $(۴۰>۳۹)$ (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از این مجموعه وجود دارد که دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۹ است . (۰/۲۵)

مثال: **یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش آموز در یک ماه از سال متولد شده باشند.**

تعداد کبوتر =m

n= تعداد لانه = ۱۲

طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها ۱۳=۱+۱۲ کبوتر است.(۰/۲۵)

و همچنین $m=(۱۲\times۱۲)+۱=۱۴۵$ (۰/۲۵) بنابراین در این مدرسه حداقل ۱٤۵ دانش آموزوجود دارد (۰/۲۵)

مثال: **در یک کلاس ۳۰ نفری حداقل چند دانش آموز در یک روز هفته متولد شده اند ؟چرا؟**

اگر ۳۰ نفر دانش آموز به منزله کبوتران و روزهای هفته به منزله لانه ها باشند (۰/۲۵)

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۷ \\ \underline{۲۸} & ۴ \Rightarrow \\ ۲ & \end{array} \quad ۴+۱=۵ \ (۰/۵)$$

بنا به اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر از دانش آموزان در یک روز هفته متولد شده اند. (۰/۵)

((امام صادق(ع): نه لباس شهرت بپوش و نه لباسی که تو را بیمقدار جلوه دهد))

فصل دوم: مجموعه ضرب دکارتی و رابطه

مجموعه:

تعریف مجموعه: مجموعه به دسته ای از اشیاء و عناصر مشخص و متمایز از یکدیگر گفته می‌شود. نظیر:

$$B=\{x|x\in\mathbb{R},x<3\}\ ,\ A=\{0,4,10\}$$

تذکر: عضو بودن یک عنصر را با نماد $\in$ و عضو نبودن را با نماد $\notin$ نشان می‌دهیم. مثلا: $4\in A,0\in B,2\notin A$.

تذکر: گزاره نما عبارتی است شامل نمادی از x که با جایگذاری عدد به جای آن درستی یا نادرستی آن روشن باشد. نظیر: $x\geq 3$ که با جایگذاری عدد ۵ بجای x به یک عبارت درست تبدیل می‌شود.

مثال: مجموعه مقابل را به صورت گزاره نما بنویسید. $A=\{0,3,8,15,24,\dots\}\ ,\ B=\{1\pm\sqrt{3}\}$

$$A=\{0,3,8,15,24,\dots\}=\{x^2-1|x\in\mathbb{N}\}$$

$$S=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=2\ ,\ P=(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=1-3=-2\ ,\ B=\{x|x^2-2x-2=0\}$$

نکته: دو مجموعه را برابر گوییم هرگاه همه اعضای اولی در دومی و همه اعضای دومی در اولی باشد. نظیر: $A=\{a,b,c\},B=\{a,c,b,b\}$

تذکر: با توجه به تعریف جابه جایی و تکرار اعضا در مجموعه‌ها بی تاثیر است.

تذکر: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، نامیده می‌شود. به صورت: $\varnothing=\{\}$ نمایش داده می‌شود.

((پیامبر اکرم(ص): برترین کار، با دوام‌ترین آنهاست، هر چند اندک باشد))

زیرمجموعه: مجموعه A زیرمجموعه مجموعه B است هرگاه همه اعضای A در B باشد. یعنی: $(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)\Rightarrow A\subseteq B$

مثلا: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{1,2,3,\dots,10\}$ باشد. می نویسیم: $A\subseteq B$

تذکر: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است. یعنی: $A\subseteq A$

تذکر: اگر $A\subseteq B$ و $A\neq B$ باشد آن‌گاه A زیرمجموعه سره(محض) B می‌باشدو به صورت $A\subset B$ نوشته می‌شود.

مثال: برای مجموعه $A=\{x,\{y\}\}$ داریم: $x\in A,\{y\}\in A,\{x\}\subseteq A,\{\{y\}\}\subseteq A$.

قضیه۱: دو مجموعه مساویند هرگاه هرکدام زیرمجموعه دیگری باشد. $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B,B\subseteq A$

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow A\subseteq B\\ \forall x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow B\subseteq A\end{cases}\qquad \left.\begin{array}{l}A\subseteq B\Rightarrow\forall x\in A\Rightarrow x\in B\\ B\subseteq A\Rightarrow\forall x\in B\Rightarrow x\in A\end{array}\right\}\Rightarrow A=B$$

قضیه ۲: برای سه مجموعه A و B و C اگر داشته باشیم: $A\subseteq B,B\subseteq C$ باشند، آن‌گاه داریم: $A\subseteq C$.

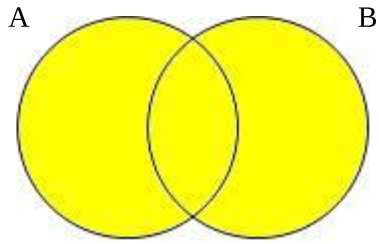
$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\Rightarrow\forall x\in A\Rightarrow x\in B\\ B\subseteq C\Rightarrow\forall x\in B\Rightarrow x\in C\end{array}\right\}\Rightarrow\forall x\in A\Rightarrow x\in C\Rightarrow A\subseteq C$$

مجموعه توانی: به مجموعه تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A مجموعه توانی آن می گوییم و با $P(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد مجموعه توانی آن دارای 2^n می باشد، یعنی: $n(P(A))=2^n$.

جبر مجموعه‌ها:

اجتماع مجموعه‌ها: اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است شامل اعضایی که در A یا در B و یا در هر دو باشد. یعنی:



$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

قضیه۱: اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ باشد آن‌گاه $A\cup B\subseteq C$.

$$x\in A\cup B\Rightarrow\begin{cases}x\in A\xrightarrow{A\subseteq C}x\in C\\ x\in B\xrightarrow{B\subseteq C}x\in C\end{cases}\Rightarrow x\in C$$

قضیه۲: برای سه مجموعه A و B و C داریم:

الف) $A\cup\varnothing=A$ ب) $A\cup A=A$ ج) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

الف)
$$\left.\begin{array}{l}x\in A\cup\varnothing\Rightarrow x\in A\Rightarrow A\cup\varnothing\subseteq A\\ x\in A\Rightarrow x\in A\cup\varnothing\Rightarrow A\subseteq A\cup\varnothing\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup\varnothing=A$$

ب)
$$\left.\begin{array}{l}x\in A\cup A\Rightarrow x\in A\Rightarrow A\cup A\subseteq A\\ x\in A\Rightarrow x\in A\cup A\Rightarrow A\subseteq A\cup A\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup A=A$$

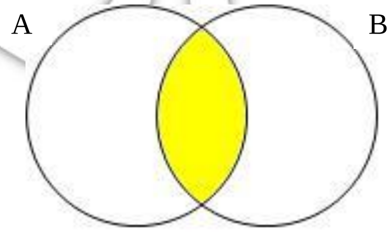
قضیه۳: اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\cup B=B$.

$$\left.\begin{array}{l}(A\subseteq B,B\subseteq B)\Rightarrow A\cup B\subseteq B\\ B\subseteq A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B=B$$

قضیه ۴: اگر برای دو مجموعه A و B داشته باشیم $A\cup B=B$، آن‌گاه نشان دهید $A\subseteq B$.

$$(A\subseteq A\cup B,A\cup B=B)\Rightarrow A\subseteq B$$

اشتراک مجموعه‌ها: اشتراک مجموعه‌ها شامل عناصر مشترک همه آن مجموعه است. یعنی: $A\cap B=\{x|x\in A,x\in B\}$.



((امام علی(ع): از هر کاری که در نهان انجام می‌شود و در آشکار از انجام آن شرم می‌شود، دوری کن.))

تذکر: مانند اجتماع مجموعه‌ها در اشتراک روابط زیر برقرار است.

$$A\bigcap B=B\bigcap A \quad , \quad A\bigcap B\subseteq A, A\bigcap B\subseteq B$$

تذکر: اگر $A\bigcap B=\varnothing$ باشد آنگاه A و B از هم جدا یا مجزا هستند .

قضیه۵: اگر سه مجموعه A ، B و C را داشته باشیم در آن صورت روابط زیر برقرارند:

$$A\bigcap\varnothing=A \quad , \quad A\bigcap A=A \quad , \quad ,(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$$

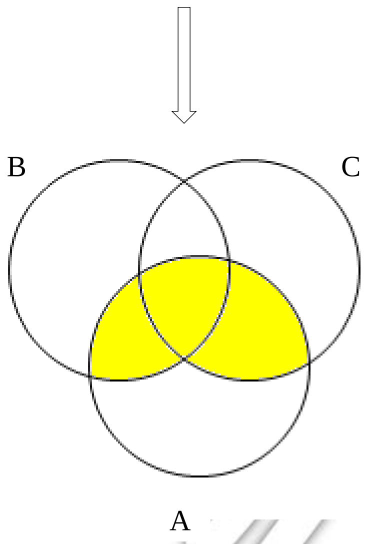
قضیه۶: اگر مجموعه‌های A و B را داشته باشیم و داریم: $A\subseteq B$ ، در آن صورت: $A\bigcap B=A$.

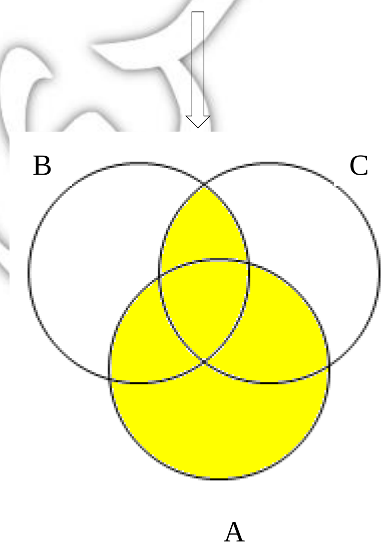
$$\left.\begin{array}{l} x\in A\bigcap B\Rightarrow x\in A\Rightarrow A\bigcap B\subseteq A \\ x\in A\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\Rightarrow x\in A\bigcap B\Rightarrow A\subseteq A\bigcap B \end{array}\right\}\Rightarrow A\bigcap B=A$$

قضیه۷: (پخش پذیری) اگر سه مجموعه A ، B و C را داشته باشیم در آن صورت:

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C) \quad , \quad A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

با استفاده از نمودار ون داریم:

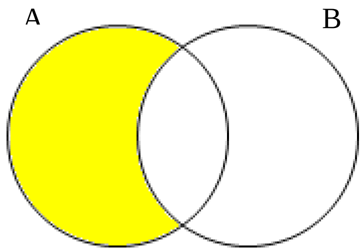




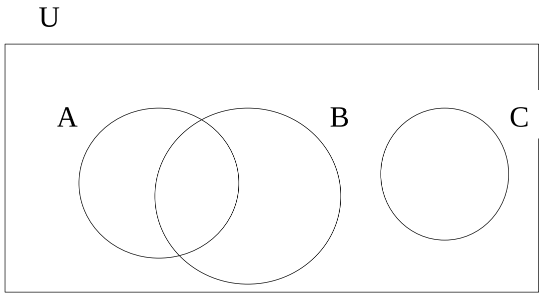
((به راستی که دانش، مایه حیات دل‌ها، روشن کننده دیدگان کور و نیروبخش بدن‌های ناتوان است.))

تفاضل دو مجموعه: تفاضل مجموعه B از A را به صورت: $A-B$ نشان می‌دهیم که شامل اعضایی از A است که در B نباشد. یعنی:

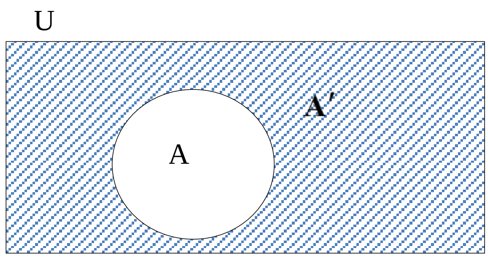
$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$



تذکر: مجموعه جهانی کاملترین مجموعه‌ای است که درمساله راجع به آن و زیرمجموعه‌هایش صحبت می‌شود. که با حرف U نشان داده می‌شود. این مجموعه را می توان به صورت نمودار ون زیر نشان داد:



متمم یک مجموعه: متمم مجموعه A عبارت است همه عناصر مجموعه ی جهانی بجز عناصر مجموعه . این مجموعه با نماد A' نشان داده می‌شود. یعنی: $A'=\{x|x\in U, x\notin A\}$



مثال: برای مجموعه‌های $A=\{x|x\in \mathbb{R}, x<2\}$ و $B=\{x|x\in \mathbb{R}, x\geq -3\}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$A=(-\infty,2) \quad , \quad B=[-3,+\infty)$$
$$A\bigcup B=\mathbb{R} \quad , \quad A\bigcap B=(-3,2] \quad , \quad A'=[2,+\infty] \quad , \quad B'=(-\infty,-3)$$

قضیه۸: (قضیه دمرگان) اگر A و B دوزیرمجموعه از جهانی U باشند، آن‌گاه:

$$(A\bigcup B)'=A'\bigcap B' \quad , \quad (A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$$

قضیه ۹: اگر A و B دوزیرمجموعه از جهانی U باشند، آن‌گاه:

$$\varnothing'=U \quad , \quad ,U'=\varnothing \quad , \quad (A')'=A \quad , \quad A-B=A\bigcap B'$$
$$A\bigcap A'=\varnothing \quad , \quad A\bigcup A'=U \quad , \quad A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$$

اثبات: $A\subseteq B\Rightarrow A\bigcup B=B\Rightarrow (A\bigcup B)'=B'\Rightarrow A'\bigcap B'=B'\Rightarrow B'\subseteq A'$

تذکر:(قانون جذب) اگر A و B دوزیرمجموعه از جهانی U باشند، آن‌گاه: $A\bigcap(A\bigcup B)=A, A\bigcup(A\bigcap B)=A$

$$A\bigcap(A\bigcup B)=A$$
$$A\bigcap(A\bigcup B)=(A\bigcup\varnothing)\bigcap(A\bigcup B)=A\bigcup(\varnothing\bigcap B)=A\bigcup\varnothing=A$$
$$A\bigcup(A\bigcap B)=A$$
$$A\bigcup(A\bigcap B)=(A\bigcap U)\bigcup(A\bigcap B)=A\bigcap(U\bigcup B)=A\bigcap U=A$$

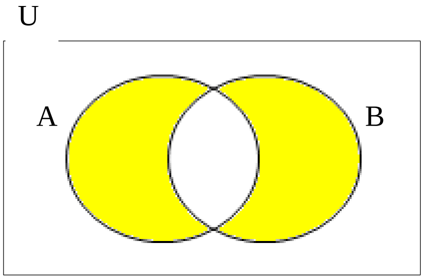
((امام علی(ع): با علما معاشرت کن تا علمت زیاد، ادبت نیکو و جانت پاک شود.))

تفاضل متقارن: تفاضل متقارن دو مجموعه A و B شامل عناصری از آن هاست که فقط به یکی از آن ها متعلق باشد. یعنی:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

با توجه به نمودار مقابل می توان گفت تفاضل متقارن بصورت

زیر است: $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$



مثال: با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، درستی رابطه های زیر را ثابت کنید.

$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=A\cup B$$
$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$$
$$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B-A)=[A\cap(B'\cup B)]\cup(B-A)$$
$$=[A\cap U]\cup(B\cap A')=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')=A\cup B$$

$$A\Delta A'=U$$
$$A\Delta A'=(A\cup A')-(A\cap A')=U-\varnothing=U$$

$$(A-B)\cup(A\cap C)=A-(B-C)$$
$$(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B')\cup(A\cap C)=A\cap(B'\cup C)=$$
$$=A-(B\cap C')=A-(B-C)$$

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=B$$
$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=[(A\cap A')\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup(B\cap B')]=$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap A')=B\cap(A\cup A')=B$$

حاصل ضرب دکارتی:

از سال‌های گذشته با محورهای مختصات و نقاط آن آشنا شده‌ایم. در این فصل با مفهوم ضرب مجموعه اعداد که زیر مجموعه‌ای از صفحه نقاط صفحه مختصات است، آشنا می‌شویم.

مثال: اگر $(۲^۴,x+y)$ و $(x^۲-y^۲,۲^۳)$ با یکدیگر مساوی باشند، x و y را بیابید.

$$\begin{cases}x+y=۲^۳\\ x^۲-y^۲=۲^۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۸\\ (x-y)(x+y)=۱۶\end{cases}\Rightarrow x-y=۲\quad,\quad\begin{cases}x+y=۸\\ x-y=۲\end{cases}\Rightarrow x=۵,y=۳$$

تعریف: حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B به صورت زیر تعریف می‌شود: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$

مثال: اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۰,۳\}$ باشد، داریم:

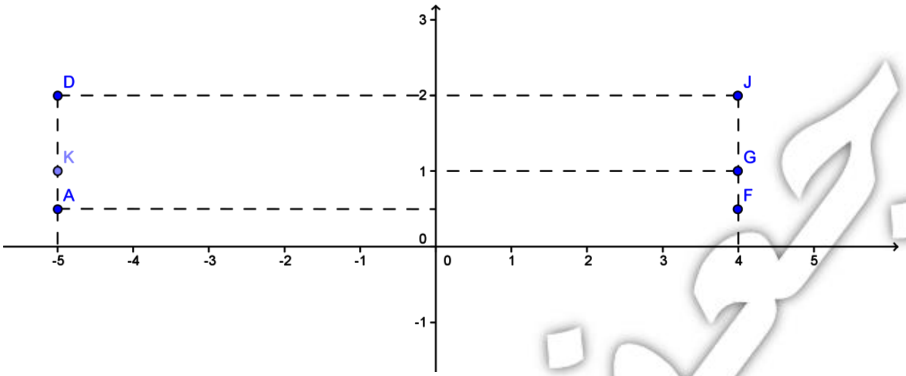
$$A\times B=\{(۱,۰),(۱,۳),(۲,۰),(۲,۳)\}\ ,\ B\times A\{(۰,۱),(۰,۲),(۳,۱),(۳,۲)\}$$

مثال: اگر $A=\{2^x \mid x\in\mathbb{Z}, -1\le x\le 1\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^2+x-20=0\}$ باشد، مطلوب است محاسبه $A\times B$ و رسم $B\times A$.

$$A=\{\frac{1}{2},1,2\}, B=\{-5,4\}$$

$$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}=\{(\frac{1}{2},-5),(\frac{1}{2},4),(1,-5),(1,4),(2,-5),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{(x,y) \mid x\in B, y\in A\}=\{(-5,\frac{1}{2}),(-5,1),(-5,2),(4,\frac{1}{2}),(4,1),(4,2)\}$$



$\leftarrow B\times A$

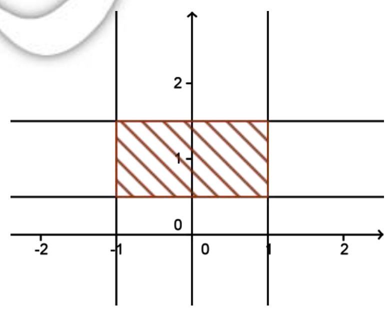
مثال: اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x\ge -1, 2^x\le 4\}$ و $B=\{y \mid y\in\mathbb{N}, y^2\le 4\}$ باشد، مطلوب است محاسبه $A\times B-B^2$.

$$A=\{0,1,2\}, B=\{1,2\}$$

$$A\times B-B^2=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}-\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}=\{(0,1),(0,2)\}$$

مثال: اگر $A_n=[\frac{-1}{n},\frac{2n-1}{n}]$ باشد، مطلوب است محاسبه: $A_1\times A_2$.

$$A_1=[-1,1], A_2=[\frac{-1}{2},\frac{3}{2}]\Rightarrow$$



((امرسون(فیلسوف): جهان هستی به کسی که می داند به کجا می رود،راه را نشان می دهد.))

رابطه: هر زیرمجموعه از حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B را یک رابطه از مجموعه A در مجموعه B می نامیم. رابطه را معمولا با حرف R نشان می‌دهیم. پس داریم: $R\subseteq A\times B$.

تذکر: اگر رابطه R از مجموعه A در مجموعه B تعریف شده باشد و $a\in A, b\in B, (a,b)\in R$ آن‌گاه برای راحتی کار از نماد زیر استفاده می‌کنیم: aRb و اگر $(a,b)\notin R$ می نویسیم: $a\not R b$.

مثال: اگر $R=\{(2,0),(-1,4),(7,3)\}$ رابطه ای روی $\mathbb{Z}$ باشد، داریم: $2R0 \,,\, 4\not R5 \,,\, -1R4 \,,\, 4\not R -1$

تذکر: رابطه عاد کردن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $a|b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ \ s.t\ \ b=ak, (a,b,k\in\mathbb{Z}$. در این‌صورت می‌گوییم a عاد می‌کند یا می‌شمرد b را. مثلا: $7|14 \,,\, 2|4 \,,\, -3|6 \,,\, 5|5 \,,\, 6|0 \,,\, 1|5$.

تذکر: اگر $A=B$ باشد می گوییم R رابطه ای روی A است.

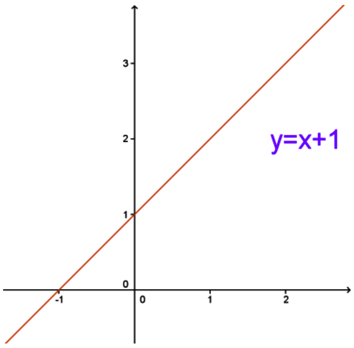
مثال: اگر $A=\{-۲,۰,۱\}$ باشد و R رابطه کوچکتری روی A باشد، اعضای R به صورت زیر خواهند بود:

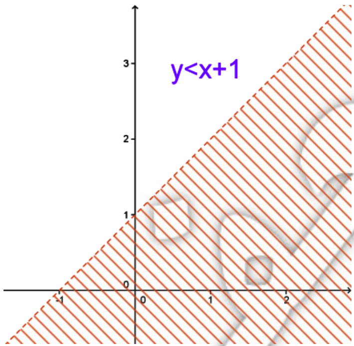
$$R=\{(-۲,۰),(-۲,۱),(۰,۱)\}$$

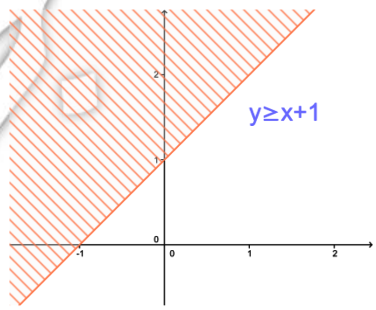
مثال: اگر $A=\{۲,۵,۱۰\}$ باشد و R رابطه عاد کردن روی A باشد، اعضای آن به صورت زیر خواهند بود:

$$R=\{(۲,۲),(۲,۱۰),(۵,۵),(۵,۱۰),(۱۰,۱۰)\}$$

تذکر: اگر رابطه از نوع تساوی باشد منظور سوال منطقه روی منحنی و اگر رابطه کوچکتری یا بزرگتری باشد منظور سوال معمولا یک طرف آن است. مثلا:



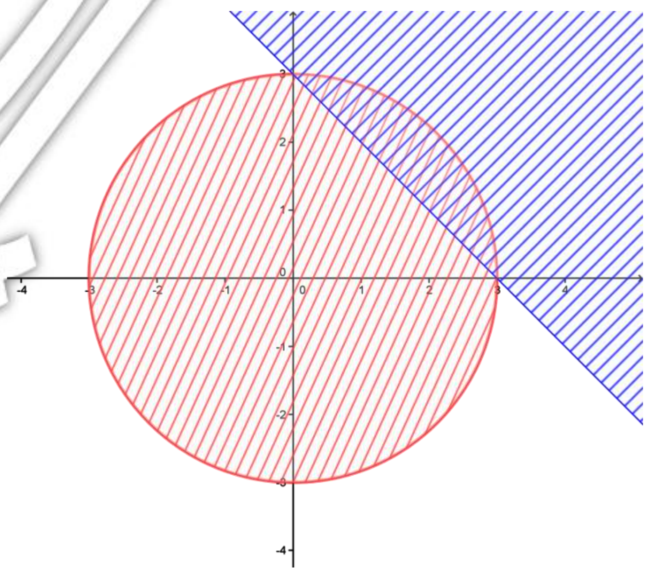


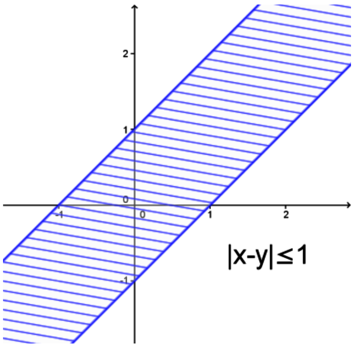


نکته: می‌دانیم $y=(x-a)^۲+b$ سهمی با راس (a,b) است. منظور از $y<(x-a)^۲+b$ نقاط خارج سهمی و منظور از $y>(x-a)^۲+b$ نقاط داخل سهمی است.

نکته: نمودار $x^۲+y^۲=R^۲$ دایره‌ی به مرکز O مبدا مختصات و شعاع R است و منظور از $x^۲+y^۲<R^۲$ نقاط داخل و منظور از $x^۲+y^۲>R^۲$ نقاط خارج دایره است.

مثال: نمودار رابطه $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},x^۲+y^۲\le ۹,y+x\ge ۳\}$ را رسم کنید.





مثال: نمودار رابطه $R=\{(x,y)\in R^2 \,\|x-y|\le 1\}$ را رسم کنید.

جواب مساله قسمت هاشور خورده و خطوط مرزی آن است.از اشکال روبرو است:

((امام علی(ع): به احترام پدر و معلمت از جای برخیز هرچند فرمان روا باشی.))

افراز یک مجموعه:

اگر مجموعه A را داشته باشیم $(A\neq\varnothing)$ می گوییم A به n زیرمجموعه A_1 و A_2 و ... و A_n افراز شده است هر گاه:

$$1:\forall A_i, 1<i<n \Rightarrow A_i\neq\varnothing \;,\; 2:\forall i\neq j, 1<i,j<n \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing \;,\; 3: A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A$$

مثال: سه افراز برای مجموعه $A=\{1,2,6,8\}$ بنویسید.

$$A_1=\{1\},A_2=\{2,6,8\} \quad , \quad A_1=\{1,2\},A_2=\{6\},A_3=\{8\} \quad , \quad A_1=\{1\},A_2=\{2,6\},A_3=\{8\}$$

تذکر: در مثال بالا: $A_1=\{1\},A_2=\{2,8\}$ افراز برای A نمی باشد، زیرا شرط سوم برقرار نمی باشد.

رابطه هم‌ارزی:

رابطه R روی مجموعه A یک رابطه هم‌ارزی است اگر به ازای هر x و y و z از A سه ویژگی زیر برقرار باشد:

۱: هر عضو با خودش در ارتباط باشد. یعنی: xRx. (R انعکاسی یا بازتابی باشد)

۲: اگر xRy باشد، آن‌گاه yRx. (R تقارنی باشد)

۳: اگر xRy و yRz باشد، آن‌گاه xRz. (R تعدی باشد)

مثال: ثابت کنید $aRb \Leftrightarrow a^2+2b=b^2+2a$ یک رابطه ی هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

$$aRb \Leftrightarrow a^2+2b=b^2+2a$$
$$1:\quad aRa \Leftrightarrow a^2+2a=a^2+2a$$
$$2:\quad aRb \Rightarrow a^2+2b=b^2+2a \Rightarrow b^2+2a=a^2+2b \Rightarrow bRa$$
$$3:\quad (aRb,bRc) \Rightarrow (a^2+2b=b^2+2a, b^2+2c=c^2+2b) \xrightarrow{+} a^2+2c=c^2+2a \Rightarrow aRc$$

تذکر: رابطه R روی مجموعه A را در نظر بگیرید. دسته یا کلاس هم‌ارزی برای عضو $a\in A$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a]=\{x \mid x\in A, xRa\}$$

مثال: در مثال بالا کلاس هم‌ارزی عدد ۲ و ۵ را بیابید.

$$[2]=[a]=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},xR2\right\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},x^2+2(2)=2^2+2x\right\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},x^2-2x=0\right\}=\{0,2\}$$

$$[5]=[a]=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},xR5\right\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},x^2+2(5)=5^2+2x\right\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},x^2-2x-15=0\right\}=\{-3,5\}$$

مثال: ثابت کنید $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{0\}$ است و سپس کلاس هم‌ارزی $[(-1,7)]$ را بیابید.

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d}$$

$$1-(a,b)R(a,b)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2a-3}{b}$$

$$2-(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d}\Leftrightarrow\frac{2c-3}{d}=\frac{2a-3}{b}\Leftrightarrow(c,d)R(a,b)$$

$$3-\big((a,b)R(c,d),(c,d)R(e,f)\big)\Rightarrow\left(\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d},\frac{2c-3}{d}=\frac{2e-3}{f}\right)\Rightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2e-3}{f}\Rightarrow(a,b)R(e,f)$$

$$[(-1,7)]=\left\{(a,b)\,\middle|\,(a,b)R(-1,7)\right\}\Rightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2(-1)-3}{7}\Rightarrow b=-\frac{14}{5}a+\frac{21}{5}$$

مثال: ابتدا ثابت کنید $xRy\Leftrightarrow 4|x-y$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathbb{R}$ است و سپس مشخص کنید رابطه R این مجموعه را به چند کلاس هم‌ارزی دسته‌بندی می‌کند؟

$$xRy\Leftrightarrow 4|x-y$$

$$1:\ xRx\Leftrightarrow 4|x-x=0$$

$$2:\ xRy\Leftrightarrow 4|x-y\Rightarrow 4|y-x\Leftrightarrow yRx$$

$$3-(xRy\,,\,yRz)\Rightarrow(4|x-y\,,\,4|y-z)\Rightarrow 4|(x-y)+(y-z)\Rightarrow 4|x-z\Rightarrow xRz$$

$$[0],[1],[2],[3]$$

فصل سوم: احتمال و پدیده های تصادفی

پدیده تصادفی:

تعریف پدیده قطعی: پدیده‌ای که نتیجه آن از قبل مشخص باشد. مانند رها کردن یک توپ که نتیجه، اصابت توپ به زمین خواهد بود و حالت دیگری برای آن اتفاق نخواهد افتاد.

تعریف پدیده تصادفی: پدیده‌ای که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد. مانند پرتاب یک سکه که نتیجه آن مشخص نیست و ممکن است سکه رو یا پشت بیاید.

تعریف فضای نمونه‌ای: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن می نامیم و با حرف S نشان می دهیم.

تعریف فضای نمونه‌ای گسسته: اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای متناهی و شمارش پذیر باشد، فضای نمونه‌ای گسسته نامیده می‌شود.

پدیده‌هایی مانند پرتاب سکه و تاس از این دسته‌اند.

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه را بنویسید. $S=\{R,P\}$

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه را بنویسید. $S=\{RR,RP,PR,PP\}$

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس را بنویسید. $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس را بنویسید. $S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۶,۶)\}$

تعریف فضای نمونه‌ای پیوسته: اگر فضای نمونه‌ای نامتناهی باشد(نظیر بازه‌ها)، فضای نمونه‌ای پیوسته نامیده می‌شود.

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک دارت به سمت صفحه آن اگر شعاع صفحه آن ۱۵ سانتی‌متر باشد را مشخص کنید.

فضای نمونه‌ای دایره های است به شعاع ۰/۱۵ متر یعنی: $S=\left\{(x,y)\middle|x^۲+y^۲\le(۰/۱۵)^۲\right\}$

تعریف پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصافی می نامیم.

مثال: در پرتاب دو سکه پیشامد دو بار رو آمدن را بیابید. $S=\{RR,RP,PR,PP\}\Rightarrow A=\{RR\}$

مثال: در پرتاب دو تاس پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده از ۱۰ بیشتر باشد را بیابید.

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۶,۶)\}\Rightarrow A=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

مثال: در مثال پرتاب دارت بالا پیشامد آن که دارت در فاصله بیشتر از ۱۰ سانتی متری از مرکز به صفحه اصابت کند را بیابید.

$$S=\left\{(x,y)\middle|x^۲+y^۲\le(۰/۱۵)^۲\right\}\Rightarrow A=\left\{(x,y)\middle|(۰/۱)^۲<x^۲+y^۲\le(۰/۱۵)^۲\right\}$$

تذکر: به S پیشامد قطعی(حتمی) و به $\varnothing$ پیشامد نشدنی گفته می‌شود.

((امام علی(ع): دانش روشنی بخش اندیشه است.))

عملیات بر روی پیشامدها:

پیشامد $A\cup B$: زمانی از اجتماع استفاده می‌شود که پیشامد آن را بخواهیم که A یا B و یا هر دو اتفاق بیافتد.

<u>پیشامد</u> $A\cap B$: زمانی از اشتراک استفاده می‌شود که پیشامد آن را بخواهیم که A و B با هم اتفاق بیافتد.

<u>پیشامد</u> A': زمانی از متمم پیشامد A استفاده می‌شود که پیشامد آن را بخواهیم که A اتفاق نیافتد.

<u>مثال</u>: یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. **(۹۱/۵)**

الف: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. ب: پیشامد A که در آن سکه پشت و عدد تاس بزرگتر از ۳ باشد را مشخص کنید.

پ: پیشامد B که در آن سکه رو و عدد تاس زوج باشد را بنویسید. ت: پیشامد $A'\cap B'$ را بنویسید.

الف: $S=\{(R,۱),(R,۲),\dots,(P,۶)\}$ ب: $A=\{(P,۴),(P,۵),(P,۶)\}$

پ: $B=\{(R,۲),(R,۴),(R,۶)\}$

ت:
$$A'\cap B'=(A\cup B)'=\left(\{(R,۲),(R,۴),(R,۶),(P,۴),(P,۵),(P,۶)\}\right)'$$
$$=\{(R,۱),(R,۳),(R,۵),(P,۱),(P,۲),(P,۳)\}$$

<u>مثال</u>: روی ۱۵ کارت یکسان اعداد از یک تا ۱۵ را نوشته‌ایم، کارتی به تصادف خارج می کنیم: **(۹۰/۳)**

الف: پیشامد A را طوری بنویسید که عدد روی کارت مضرب ۳ یا اول باشد.

ب: پیشامد B آن که عدد روی کارت فرد و اول باشد.

الف: $A=\{۱,۳,۵,۶,۷,۹,۱۱,۱۲,۱۳,۱۵\}$ ب: $A=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}$

<u>مثال</u>: کیسه‌ای دارای ۴ مهره یکسان است که ۲ سفید و ۲ قرمز هستند، از این کیسه ۲ مهره به تصادف خارج می کنیم. مطلوبست: **(۸۹/۶)**

الف: فضای نمونه‌ای متناسب برای ترکیب رنگ های مهره های خارج شده را بنویسید.

ب: پیشامد A آن که فقط یکی از مهره ها سفید باشد.

پ: پیشامد B آن که حداقل یکی از مهره ها قرمز باشد. د: پیشامد $A\cup B'$ را بیابید.

الف: $S=\{(W,W),(W,R),(R,W),(R,R)\}$ ب: $A=\{(W,R),(R,W)\}$

پ: $B=\{(W,R),(R,W),(R,R)\}$

ت: $B'=\{(W,W)\}\ ,\ A\cup B'=\{(W,W),(W,R),(R,W)\}$

<u>مثال</u>: ارقام ۹و۰و۳و۵ را در نظر بگیرید، مطلوب است تعیین: **(۸۷/۶)**

الف: فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد. ب: پیشامد A آن که اعداد دو رقمی مضرب ۵ باشد.

ج: پیشامد B آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد. د: پیشامد $A\cap B'$.

الف: $S=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$ ب: $A=\{۳۰,۳۵,۵۰,۹۰,۹۵\}$ ج: $B=\{۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$

د: $B'=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰\}\ ,\ A\cap B'=\{۳۰,۳۵,۵۰\}$

مثال: یک سکه را ۳ بار می اندازیم. مطلوبست تعیین: (۸۶/۳)

الف: فضای نمونه‌ای.

ب: پیشامد A که در آن لااقل دو بار رو بیاید.

ج: پیشامد B که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود.

د: پیشامد $A\Delta B$.

الف: $S=\{RRR,RRP,RPR,PRR,RPP,PRP,PPR,PPP\}$

ب: $A=\{RRR,RRP,RPR,PRR\}$ ج: $B=\{RRR,PPP\}$

د: $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=\{RRP,RPR,PRR,PPP\}$

مثال: هر یک از اعداد دو رقمی متشکل از ارقام ۴و۳و۲و۱ (بدون تکرار ارقام) را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت ها یکی را به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوبست تعیین: (۸۸/۱۰)

الف: فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی.

ب: پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

ج: پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

د: پیشامد $A\cap B'$.

الف: $S=\{۱۲,۱۳,۱۴,۲۱,۲۳,۲۴,۳۱,۳۲,۳۴,۴۱,۴۲,۴۳\}$ ب: $A=\{۱۲,۲۴,۴۲\}$

ج: $B=\{۱۳,۲۳,۳۱,۴۱,۴۳\}$ د: $B'=\{۱۲,۱۴,۲۱,۲۴,۳۲,۳۴,۴۲\}, A\cap B'=\{۱۲,۲۴,۴۲\}$

((امرسون(فیلسوف): صدای آنچه انجام می دهید، به قدری بلند است که آنچه می گویید، شنیده نمی شود.))

فصل چهارم: اندازه گیری شانس

احتمال هم شانس در فضای گسسته:

اگر فضای مساله از نوع گسسته باشد(نظیر پرتاب تاس) و احتمال وقوع تمام پیشامدهای تک عضوی مجموعه مورد بحث مساله برابر یکدیگر باشد(معمولا در مسایل از کلمه "سالم" برای بیان این موضوع استفاده می شود) این نوع احتمال اتفاق می افتد. برای محاسبه این نوع احتمال از رابطه: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ استفاده می شود. یعنی احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S از تقسیم تعداد اعضای A بر تعداد اعضای S بدست می آید.

مثال: کیسه ای شامل ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره سیاه است. از این کیسه ۳ مهره به تصادف بیرون می آوریم، مطلوبست احتمال آنکه حداقل ۲ مهره ی سفید خارج شده باشد. **(۹۱/۵)**

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{۱۴}{۳۳}$$

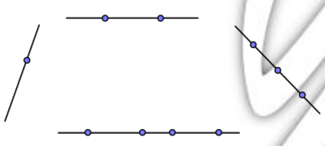
مثال: درون کیسه ای ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف خارج می کنیم، مطلوبست: **(۹۱/۳)**

الف: احتمال آنکه دقیقا ۲ تا از مهره ها ی خارج شده سفید باشند.

ب: احتمال آن که مهره های خارج شده از ۳ رنگ مختلف باشند.

الف: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{\binom{۵}{۲}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۵}{۳}}=\dfrac{۲۰}{۹۱}$ ب: $P(B)=\dfrac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۵}{۳}}=\dfrac{۲۴}{۹۱}$

مثال: از میان ۱۰ نقطه مطابق شکل زیر، چهار نقطه به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آن را بیابید که با این نقاط چهار نقطه یک چهارضلعی ساخته شود که روی هر خط فقط یک راس قرار بگیرد. **(۸۹/۶)**



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۴}{۳۵}$$

مثال: ۵ دانش آموز در نظر می گیریم. احتمال این که روز تولد هیچ دو نفری از آن ها در یک روز هفته نباشد را مشخص کنید. **(۸۷/۳)**

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۷}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۷^{۵}}=\frac{۳۶۰}{۲۴۰۱}$$

احتمال غیر هم شانس در فضای گسسته:

اگر احتمال وقوع پیشامدهای تک عضوی مجموعه مورد بحث مساله برابر یکدیگر نباشند و فضای مساله نیز گسسته باشد، این نوع احتمال اتفاق می افتد. برای محاسبه این نوع احتمال باید بدانیم اگر $S=\{e_۱,e_۲,...,e_n\}$ باشد، آن گاه:

$$۱.\ (\forall e_i, ۱\le i\le n)\Rightarrow ۰\le P(e_i)\le ۱ \qquad ۲.\ P(e_۱)+P(e_۲)+...+P(e_n)=۱$$

((امرسون(فیلسوف): بزرگ ترین شکوه و سربلندی ما نه در هرگز سقوط نکردن، بلکه در " برخاستن " پس از هر شکست است.))

مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم: $P(a)=۳P(b)$ و $P(c)=\frac{۱}{۲}$ و $P(d)=\frac{۱}{۸}$، مطلوب است محاسبه: $P(a')$ و $P(b)$. **(۹۱/۵)**

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱\Rightarrow ۳P(b)+P(b)+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}=۱\Rightarrow P(b)=\frac{۳}{۳۲},P(a)=\frac{۹}{۳۲},P(a')=۱-\frac{۹}{۳۲}=\frac{۲۳}{۳۲}$$

مثال: سه دونده **a** و **b** و **c** در یک مسابقه شرکت می کنند، اگر شانس برد **a** سه برابر شانس برد **b** و شانس برد **b** نصف شانس برد **c** باشد، احتمال برنده نشدن c چقدر است: **(۸۶/۱۰)**

$$P(a)+P(b)+P(c)=۱\Rightarrow ۳P(b)+P(b)+۲P(b)=۱\Rightarrow ۶P(b)=۱,P(b)=\frac{۱}{۶},P(a')=۱-P(A)=۱-\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد و $P\{a,b,c\}=\frac{۱}{۲}$ و $P\{a,b,d\}=\frac{۲}{۳}$ باشد آن گاه $P\{a,b\}$ را بدست آورید.

$$P\{a,b\}+P(c)+P(d)=۱\Rightarrow P\{a,b\}=۱-(P(c)+P(d))=۱-(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۶}$$ **(۸۶/۳)**

احتمال دو جمله‌ای:

اگر در یک آزمایش احتمال فقط به شکل برد یا باخت ممکن باشد(نظیر پرتاب سکه) و در مورد k بار برد در **n** آزمایش سوال شود، از رابطه زیر برای محاسبه احتمال استفاده می شود:

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

مثال: آزمونی شامل ۱۵ سوال دو گزینه ای(درست-غلط) می باشد.دانش آموزی به طور تصادفی به همه سوالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه به ۷ سوال پاسخ درست داده باشد چقدر است؟ **(۹۱/۵)**

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}=\frac{\binom{۱۵}{۷}}{۲^{۱۵}}$$

مثال: ۵۰ درصد افرادجامعه ای باسواد هستند، احتمال آن که از ۲۰ نفر آن ها ۶ نفر بی سواد بوده باشند را محاسبه کنید. **(۹۰/۳)**

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}=\frac{\binom{۲۰}{۶}}{۲^{۲۰}}$$

مثال: سه وجه مکعبی زرد و سه وجه دیگرآن به رنگ سبز است، این مکعب را ۷ بار پرتاب کرده ایم، احتمال آن که سه بار سبز آمده باشد را بیابید. **(۸۸/۶)**

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}=\frac{\binom{۷}{۳}}{۲^{۷}}$$

احتمال در فضای پیوسته:

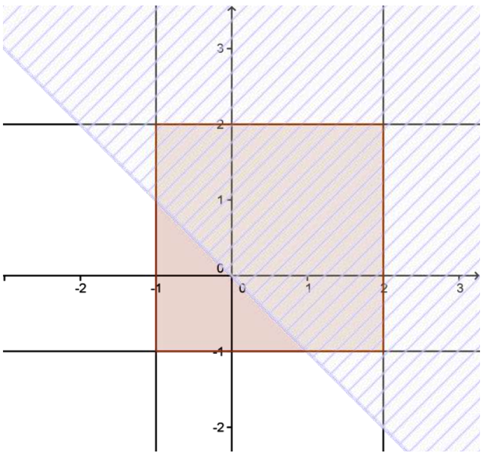
این نوع احتمال در مسایلی پیش می آید که در آن طول، مساحت و یا حجم بکار رفته باشد. و برای هر مورد احتمال وقوع **A** در فضای نمونه‌ای **S** از رابطه های زیر بدست می آید: طول: $P(A)=\frac{l_A}{l_S}$ مساحت: $P(A)=\frac{a_A}{a_S}$ حجم: $P(A)=\frac{v_A}{v_S}$

مثال: فرض کنیم دو قطعه چوب داریم که طول های آن ها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر باشد. قطعه بزرگتر را با اره به دو قسمت می کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می شود. احتمال این که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند چقدر است؟ **(۸۶/۳)**

قطعات ایجاد شده روی چوب ۱ متری را x و $1-x$ فرض می کنیم. داریم:

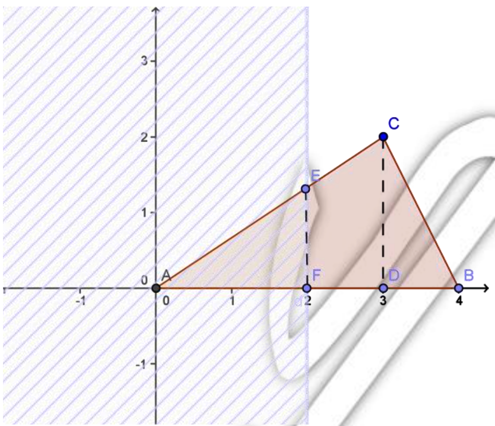
$$\begin{cases} x+1-x>۰/۵ \Rightarrow 1>۰/۵ \\ x+۰/۵>1-x \Rightarrow ۲x>۰/۵ \Rightarrow x>۰/۲۵ \\ 1-x+۰/۵>x \Rightarrow ۲x<۱/۵ \Rightarrow x<۰/۷۵ \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{۰/۷۵-۰/۲۵}{۱}=۰/۵$$

مثال: دو عدد حقیقی به تصادف از بازه ی $[-۱,۲]$ انتخاب می کنیم، احتمال آن که مجموع این دو عدد مثبت باشد را محاسبه کنید. **(۹۱/۵)**



$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{۹-\frac{۲\times۲}{۲}}{۳\times۳}=\frac{۷}{۹}$$

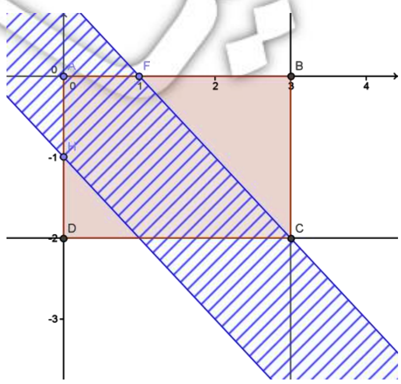
مثال: یک نقطه به تصادفی درون یک مثلث با راس های $(۰,۰)$ و $(۳,۲)$ و $(۴,۰)$ انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آن که طول نقطه ی انتخاب شده کمتر از ۲ باشد. **(۹۰/۱۰)**



$$\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{CD}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{EF}{۲}\Rightarrow EF=\frac{۴}{۳}$$

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۲\times\frac{۴}{۳}}{۲}}{\frac{۲\times۴}{۲}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{۴}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: دو عدد حقیقی x و y را به تصادف انتخاب می کنیم ب طوری که: $x\in[۰,۳]$ و $y\in[-۲,۰]$. مطلوبست احتمال آن که: $|x+y|\le ۱$.
(۸۸/۶)



$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{۳\times۲-(\frac{۱\times۱}{۲}+\frac{۲\times۲}{۲})}{۳\times۲}=\frac{\frac{۱۲-۵}{۲}}{۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

گوته(فیلسوف): کوشش اولین وظیفه انسان است.

قوانین احتمال:

اصول و قوانینی که در احتمال برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ای S به کار می روند به صورت زیر هستند:

اصل۱: همیشه داریم: $\circ \le P(A) \le ۱$ و اگر $P(A)=۱$ باشد A پیشامد قطعی یا حتمی و اگر $P(A)=\circ$ باشد A پیشامد نشدنی نامیده می شود.

اصل۲: همیشه داریم: $P(S)=۱$

اصل۳: اگر A و B ناسازگار باشند، یعنی: $A\cap B=\varnothing$ باشد، داریم: $P(A\cap B)=\circ \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

قضیه۱: در مورد پیشامدهای دوبه دو ناسازگار A و B و C داریم: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

قضیه۲: برای هر دو پیشامد A و B که $A\subseteq B$ داریم: $P(A)\le P(B)$ و $P(B-A)=P(B)-P(A)$

قضیه۳: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

نتیجه: برای پیشامد مکمل A یعنی A' داریم: $P(A')=۱-P(A)$

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

مثال: از مجموعه‌ی اعداد $\{۱,۲,...,۱۰۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم: (۹۱/۵)

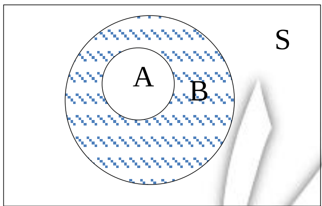
الف: احتمال آن که عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد را بیابید.

ب: احتمال آن که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد را بیابید.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} \quad \text{و} \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} \quad \text{و} \quad P(A\cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۶۶}{۱۰۰۰}$$

الف: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۴۶۷}{۱۰۰۰}$ ب: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲۶۷}{۱۰۰۰}$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $A\subseteq B$ ثابت کنید: $P(B-A)=P(B)-P(A)$



$$B=(B-A)\cup A \Rightarrow P(B)=P\big((B-A)\cup A\big)$$
$$\xrightarrow{(B-A)\cap A=\varnothing} P(B)=P(B-A)+P(A)$$
$$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$$

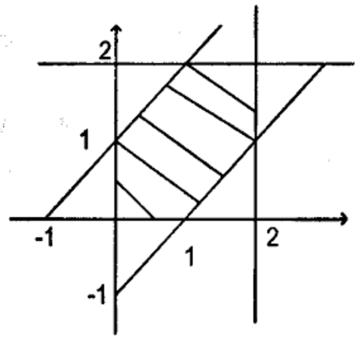
بعضی از سوالات خرداد و شهریور و دی ۹۳

۱: اگر $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی و $P(b)=\frac{۱}{۳}$ و $P(\{b,d\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(\{b,c\})=\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه $P(a)$ را بیابید.

$$\begin{cases} P(\{b,d\})=P(b)+P(d)=\frac{۱}{۲} \\ P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{۲}{۳} \end{cases} \xrightarrow{P(b)=\frac{۱}{۳}} p(d)=\frac{۱}{۶},p(c)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱ \Rightarrow P(a)=۱-\big(P(b)+P(c)+P(d)\big)=\frac{۱}{۶}$$

۲: دو عدد حقیقی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌کنیم، احتمال $|x-y|<۱$ را محاسبه کنید.



$$P(A)=\frac{l(A)}{l(S)}=\frac{۲\times۲-\left(۲\times\frac{۱\times۱}{۲}\right)}{۲\times۲}=\frac{۴-۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

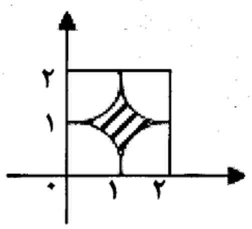
۳. احتمال آن‌که عددی انتخابی از مجموعه $\{۱,۲,...,۱۰۰۰\}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد را بیابید.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۴}\right]-\left[\frac{۱۰۰۰}{۲۸}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۲۵۰-۳۵}{۱۰۰۰}=\frac{۲۱۵}{۱۰۰۰}$$

۴: چقدر احتمال دارد در بین ۱۰ نفر هیچ دو نفری روز تولد یکسانی در سال نداشته باشند؟

$$\frac{۳۶۵}{۳۶۵}\times\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\times...\times\frac{۳۵۶}{۳۶۵}=\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times...\times۳۵۶}{۳۵۶^{۱۰}}$$

۵: برروی مربع $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid ۰\le x,y\le ۲\}$ یک نقطه انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌را بیابید که فاصله این نقطه از هر راس مربع از یک بیشتر باشد.



$$P(A)=\frac{l(A)}{l(S)}=\frac{۲\times۲-\pi(۱)^۲}{۲\times۲}=\frac{۴-\pi}{۴}$$

۶: اگر $P(A)=\frac{۲}{۵}$ و $P(B')=\frac{۳}{۷}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}$ باشند، مطلوب است: $P(A-B),P(A\cup B)$.

$$P(B')=۱-P(B)=\frac{۴}{۷},P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۴}{۷}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲۷}{۳۵}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

۷: اگر یک عدد چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ارقام ۱،۳،۵،۷ و ۹ به وجود آید، احتمال بخش‌پذیر بودن آن‌را بر عدد ۵ بیابید.(تکرار ارقام غیر مجاز است)

$$n(A)=\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۱۲,n(S)=\underline{۲}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۴۸,P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۴۸}=\frac{۱}{۴}$$