فصل دوم: مجموعه ضرب دکارتی و رابطه

*** مجموعه:**

* تعریف مجموعه: مجموعه به دسته ای از اشیاء و عناصر مشخص و متمایز از یکدیگر گفته می شود. نظیر:

$A=\{0,4,10\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{R},x<3\}$

* تذکر: عضو بودن را با نماد $\in$ و عضو نبودن را با نماد $\notin$ نشان می دهیم. مثلا: $4\in A,0\in B,2\notin A$

* تذکر: گزاره نما عبارتی است شامل نمادی از x که با جایگذاری عدد به جای آن درستی یا نادرستی آن روشن باشد. نظیر: $x\geq 3$ که با جایگذاری عدد ۵ بجای x به یک عبارت درست تبدیل می شود.

* مثال: مجموعه مقابل را به صورت گزاره نما بنویسید. $A=\{0,3,8,15,24,...\}$

$A=\{0,3,8,15,24,...\}=\{x^2-1|x\in\mathbb{N}\}$

* دو مجموعه برابر: دو مجموعه را برابر گوییم هرگاه اعضایشان یکی باشد. نظیر:

$A=\{a,b,c\},B=\{a,c,b,b\}$

* مثال: اگر $(2^4,x+y)$ و $(x^2-y^2,2^3)$ با یکدیگر مساوی باشند، x و y را بیابید.

$$\begin{cases}x+y=2^3\\ x^2-y^2=2^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=8\\ (x-y)(x+y)=16\end{cases}\Rightarrow x-y=2\quad,\quad\begin{cases}x+y=8\\ x-y=2\end{cases}\Rightarrow x=6,y=4$$

* تذکر: با توجه به تعریف جابه جایی و تکرار اعضا در مجموعه ها بی تاثیر است.

* تذکر: مجموعه بدون عضو تهی نامیده می شود. به صورت: $\varnothing=\{\}$

*** زیر مجموعه:**

مجموعه A زیر مجموعه مجموعه B است هرگاه همه اعضای A در B باشد. یعنی: $(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)\Rightarrow A\subseteq B$

مثلا: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{1,2,3,...,10\}$ باشد، می نویسیم: $A\subseteq B$

تذکر: هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. یعنی: $A\subseteq A$

تذکر: اگر $A\subseteq B$ و $A\neq B$ باشد آن گاه A زیر مجموعه سره(محض) B می باشد و به صورت $A\subset A$ نوشته می شود.

* مثال: برای مجموعه $A=\{x,\{y\}\}$ داریم: $x\in A,\{y\}\in A,\{x\}\subseteq A,\{\{y\}\}\subseteq A$

* قضیه ۱: دو مجموعه مساویند هرگاه هرکدام زیرمجموعه دیگری باشد. $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B,B\subseteq A$

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow A\subseteq B\\ \forall x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow B\subseteq A\end{cases}\qquad\left.\begin{matrix}A\subseteq B\Rightarrow\forall x\in A\Rightarrow x\in B\\ B\subseteq A\Rightarrow\forall x\in B\Rightarrow x\in A\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=B$$

* قضیه ۲: برای سه مجموعه A و B و C اگر داشته باشیم: $B\subseteq C,A\subseteq B$ باشند، آن گاه داریم: $A\subseteq C$

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq B\Rightarrow\forall x\in A\Rightarrow x\in B\\ B\subseteq C\Rightarrow\forall x\in B\Rightarrow x\in C\end{matrix}\right\}\Rightarrow\forall x\in A\Rightarrow x\in C\Rightarrow A\subseteq C$$

*** مجموعه توانی:**

به مجموعه تمام زیر مجموعه های یک مجموعه مانند A مجموعه توانی آن مجموعه می گوییم و با P(A) نشان می دهیم. یعنی:

$P(A)=\{$همه زیر مجموعه های یک مجموعه$\}$

* قضیه: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد مجموعه توانی آن دارای 2^n می باشد. یعنی: $n(P(A))=2^n$

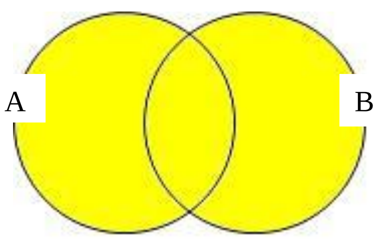
اثبات: ابتدا باید بدانیم با افزایش یک عضو به مجموعه تعداد زیر مجموعه هادو برابر می شودزیرا عضو اضافه شده خود با تمام زیر مجموعه های قبلی، زیر مجموعه جدید می سازد. حال به استقرا نیز حکم را ثابت می کنیم:

$$P(1): n=1 \Rightarrow P(A)=\{A,\varnothing\} \Rightarrow n(P(A))=2^1=2$$
$$P(k): n(P(A))=2^k \xrightarrow{k\to k+1} n(P(A))=2(2^k)=2^{k+1}$$
$$P(k+1): n(P(A))=2^{k+1}$$

*** جبر مجموعه ها:**

* اجتماع مجموعه ها: اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه ای است شامل اعضایی که در A یا در B و یا در هر دو باشد.

یعنی: $A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$



* قضیه ۱: اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ باشد آن گاه $A\cup B\subseteq C$.

$$x\in A\cup B \Rightarrow \begin{cases} x\in A \xrightarrow{A\subseteq C} x\in C \\ x\in B \xrightarrow{B\subseteq C} x\in C \end{cases} \Rightarrow x\in C$$

* قضیه ۲: برای سه مجموعه A و B و C داریم:

الف) $A\cup\varnothing=A$ ب) $A\cup A=A$ ج) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

الف) $$\left.\begin{array}{l} x\in A\cup\varnothing \Rightarrow x\in A \Rightarrow A\cup\varnothing\subseteq A \\ x\in A \Rightarrow x\in A\cup\varnothing \Rightarrow A\subseteq A\cup\varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup\varnothing=A$$

ب) $$\left.\begin{array}{l} x\in A\cup A \Rightarrow x\in A \Rightarrow A\cup A\subseteq A \\ x\in A \Rightarrow x\in A\cup A \Rightarrow A\subseteq A\cup A \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup A=A$$

ج) $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} B\subseteq B\cup C \Rightarrow B\subseteq A\cup(B\cup C) \\ A\subseteq A\cup(B\cup C) \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B\subseteq A\cup(B\cup C) \\ C\subseteq B\cup C \Rightarrow C\subseteq A\cup(B\cup C) \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$$

و به همین ترتیب می توان گفت: $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$ پس در نتیجه: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

* قضیه ۳: اگر $A\subseteq B$ آن گاه $A\cup B=B$.

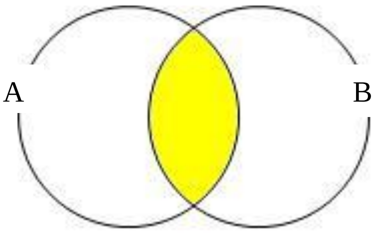
$$\left.\begin{array}{r}A\subseteq B,B\subseteq B\Rightarrow A\cup B\subseteq B\\ B\subseteq A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B=B$$

* قضیه ٤: اگر برای دو مجموعه A و B داشته باشیم $A\cup B=B$ آن گاه $A\subseteq B$.

$$(A\subseteq A\cup B, A\cup B=B)\Rightarrow A\subseteq B$$

* اشتراک مجموعه ها: اشتراک مجموعه ها شامل عناصر مشترک همه آن مجموعه است . یعنی:

$$A\cap B=\{x|x\in A,x\in B\}$$



* تذکر: مانند اجتماع مجموعه ها در اشتراک روابط زیر برقرار است.

$$A\cap B=B\cap A \quad , \quad A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$$

* تذکر: اگر $A\cap B=\varnothing$ باشد آنگاه A و B از هم جدا یا مجزا هستند .

* قضیه ٥: اگر سه مجموعه C,B,A را داشته باشیم در آنصورت روابط زیر برقرارند:

$$A\cap\varnothing=A \quad , \quad A\cap A=A \quad , \quad ,(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

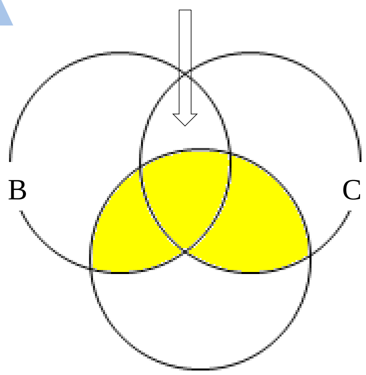
* قضیه ٦: اگر مجموعه های B,A را داشته باشیم و داریم: $A\subseteq B$ در آنصورت: $A\cap B=A$

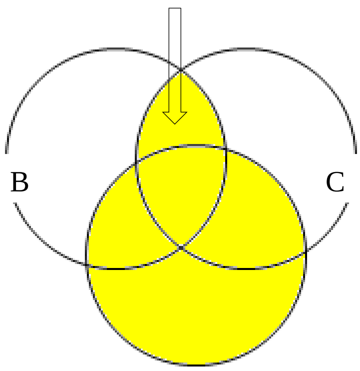
$$\left.\begin{array}{l}x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\Rightarrow A\cap B\subseteq A\\ x\in A\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow A\subseteq A\cap B\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap B=A$$

* قضیه ۷: (پخش پذیری)اگر سه مجموعه C,B,A را داشته باشیم در آنصورت:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad , \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

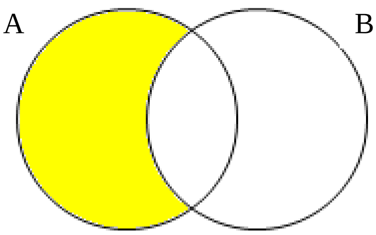
با استفاده از نمودار ون داریم:



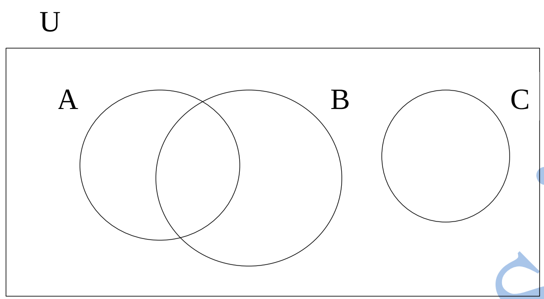


A A

* تفاضل دو مجموعه: تفاضل مجموعه $\mathbf{B}$ از $\mathbf{A}$ را به صورت: $\mathbf{A-B}$ نشان می دهیم که شامل اعضایی از $\mathbf{A}$ است که در $\mathbf{B}$ نباشد. یعنی: $\mathbf{A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}}$

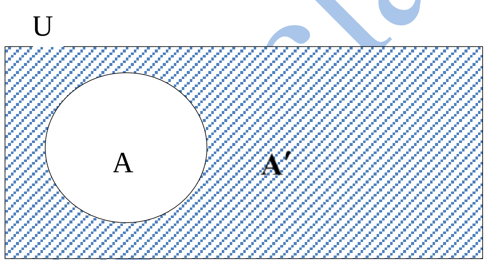


تذکر: مجموعه جهانی کاملترین مجموعه ای است که درمساله راجع به آن و زیر مجموعه هایش صحبت می شود. که با حرف $\mathbf{U}$ نشان داده می شود. این مجموعه را می توان به صورت نمودار ون زیر نشان داد:



* متمم یک مجموعه: متمم مجموعه $\mathbf{A}$ عبارت است همه عناصر مجموعه ی جهانی بجز عناصر مجموعه . این مجموعه با نماد $\mathbf{A'}$ نشان داده می شود.

یعنی: $\mathbf{A'=\{x|x\in U,x\notin A\}}$



* مثال: برای مجموعه های $\mathbf{A=\{x|x\in \mathbb{R},x<۲\}}$ و $\mathbf{B=\{x|x\in \mathbb{R},x\geq -۳\}}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\mathbf{A=(-\infty,۲)\quad,\quad B=[-۳,+\infty)}$$

$$\mathbf{A\bigcup B=\mathbb{R}\quad,\quad A\bigcap B=(-۳,۲]\quad,\quad A'=[۲,+\infty]\quad,\quad B'=(-\infty,-۳)}$$

* قضیه۸: [قضیه دمرگان] اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دوزیر مجموعه از جهانی $\mathbf{U}$ باشند، آن گاه:

$$\mathbf{(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'\quad,\quad (A\bigcap B)'=A'\bigcup B'}$$

اثبات:

$$\mathbf{(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'}$$

$$\mathbf{x\in (A\bigcup B)'\Leftrightarrow x\notin (A\bigcup B)\Leftrightarrow (x\notin A,x\notin B)\Leftrightarrow (x\in A',x\in B')\Leftrightarrow x\in (A'\bigcap B')}$$

قضیه ۹ : اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دوزیر مجموعه از جهانی $\mathbf{U}$ باشند، آن گاه:

$$\varnothing' = U \quad , \quad U' = \varnothing \quad , \quad (A')' = A \quad , \quad A - B = A \cap B'$$

$$A \cap A' = \varnothing \quad , \quad A \cup A' = U \quad , \quad A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

اثبات برخی از قسمت های قضیه:

$$A - B = A \cap B'$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in B'\} = \{x | x \in A \cap B'\} = A \cap B'$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow (A \cup B)' = B' \Rightarrow A' \cap B' = B' \Rightarrow B' \subseteq A'$$

* تذکر: [قانون جذب] اگر **A** و **B** دوزیر مجموعه از جهانی **U** باشند، آن گاه:

$$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$$

اثبات:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

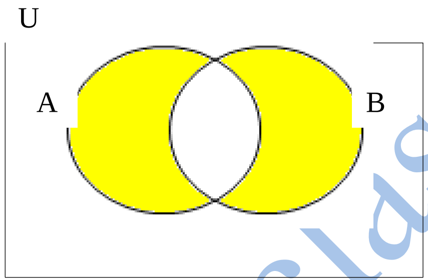
$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup (\varnothing \cap B) = A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$$

* تفاضل متقارن: تفاضل متقارن دو مجموعه A و B شامل عناصری از آن هاست که فقط به یکی از آن ها متعلق باشد.یعنی:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



با توجه به نمودار مقابل می توان گفت تفاضل متقارن بصورت زیر است:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

* مثال: با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، درستی رابطه های زیر را ثابت کنید.

* $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = [(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$$
$$= [(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B - A) = [A \cap (B' \cup B)] \cup (B - A)$$
$$= [A \cap U] \cup (B \cap A') = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = A \cup B$$

* $A \Delta A' = U$

$$A \Delta A' = (A \cup A') - (A \cap A') = U - \varnothing = U$$

* $(A - B) \cup (A \cap C) = A - (B - C)$

$$(A - B) \cup (A \cap C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C) =$$
$$= A - (B \cap C') = A - (B - C)$$

* $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')] =$$
$$= (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B$$

*** حاصل ضرب دکارتی:**

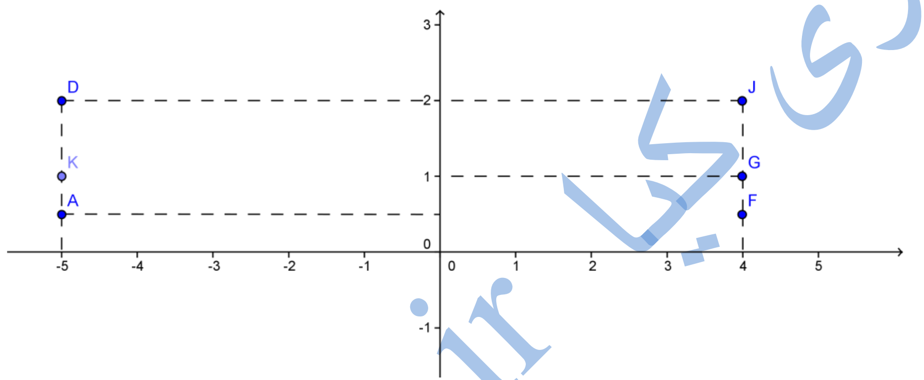
حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B به صورت زیر تعریف می شود:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}$$

* مثال: اگر $A=\{2^x\,|\,x\in\mathbb{Z},-1\le x\le 1\}$ و $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,x^2+x-20=0\}$ باشد، مطلوب است محاسبه $A\times B$ و رسم $B\times A$.

$$A=\{\frac{1}{2},1,2\},B=\{-5,4\}$$

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}=\{(\frac{1}{2},-5),(\frac{1}{2},4),(1,-5),(1,4),(2,-5),(2,4)\}$$



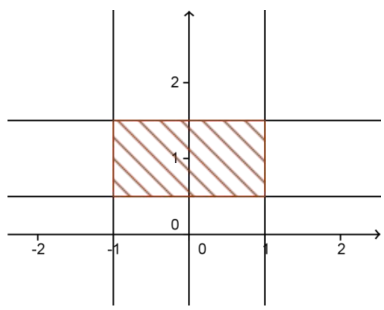
$\leftarrow B\times A$

* مثال: اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},x\ge -1,2^x\le 4\}$ و $B=\{y\,|\,y\in\mathbb{N},y^2\le 4\}$ باشد، مطلوب است محاسبه $A\times B-B^2$.

$$A=\{0,1,2\},B=\{1,2\}$$

$$A\times B-B^2=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}-\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}=\{(0,1),(0,2)\}$$

* مثال: اگر $A_n=[\frac{-1}{n},\frac{2n-1}{n}]$ باشد، مطلوب است محاسبه $A_1\times A_2$.



$$A_1=[-1,1],A_2=[\frac{-1}{2},\frac{3}{2}]\Rightarrow$$

*** رابطه:**

هر زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی مجموعه **A** در مجموعه **B** را یک رابطه از مجموعه **A** به مجموعه **B** می نامیم.

رابطه را معمولا با حرف **R** نشان می دهیم. پس داریم: $R\subseteq A\times B$

* تذکر: اگر رابطه R از مجموعه A در مجموعه B تعریف شده باشد و $a \in A, b \in B, (a,b) \in R$ آن گاه برای راحتی کار از نماد زیر استفاده می کنیم: aRb و اگر $(a,b) \notin R$ می نویسیم: $a \not{R} b$

* تذکر: اگر $A = B$ باشد می گوییم R رابطه ای روی A است.

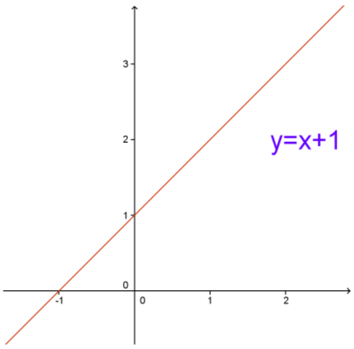
* مثال: اگر $R = \{(2,0),(-1,4),(5,3)\}$ رابطه ای روی $\mathbb{Z}$ باشد، داریم: $2R0, 4\not{R}5, -1R4$

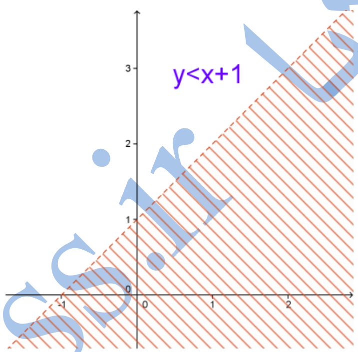
* تذکر: رابطه عاد کردن را به صورت زیر تعریف می کنیم: $a|b \Leftrightarrow b = ak, (k \in \mathbb{Z})$

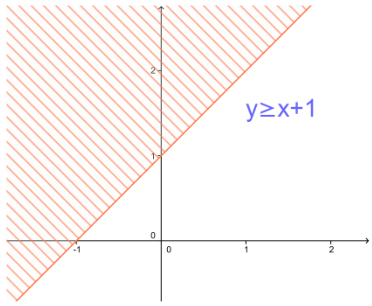
* مثال: اگر $A = \{2,5,10\}$ باشد و R رابطه عاد کردن روی A باشد اعضای آن به صورت زیر خواهند بود:

$$R = \{(2,2),(2,10),(5,5),(5,10),(10,10)\}$$

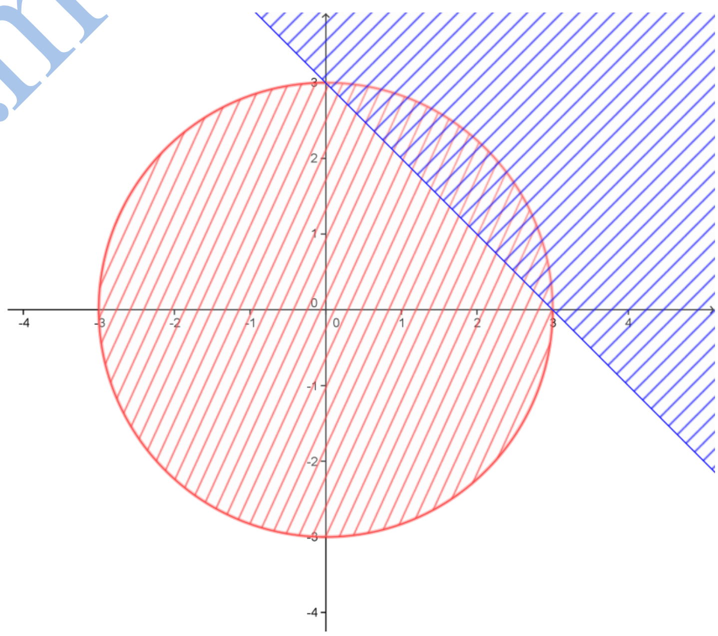
* تذکر: اگر در رابطه از نوع مساوی باشد منظور سوال روی منحنی و اگر رابطه کوچکتری یا بزرگتری باشد منظور سوال یک طرف آن است. مثلا:





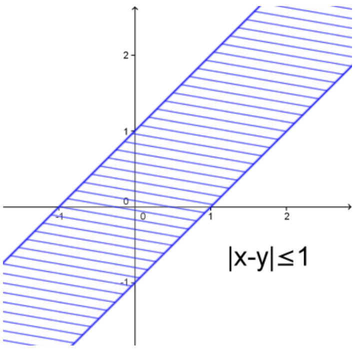


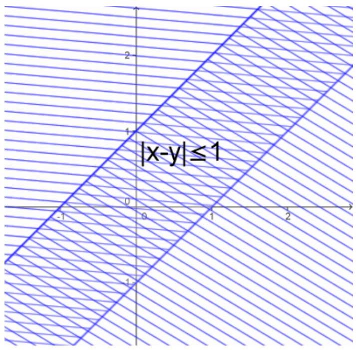
* مثال: نمودار رابطه $R = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \le 9, y + x \ge 3\}$ را رسم کنید.



* مثال: نمودار رابطه $R=\{(x,y)\in R^2 \,\big|\, |x-y|\le 1\}$ را رسم کنید.

جواب مساله هر کدام از اشکال روبرو است:





* **افراز یک مجموعه:**

اگر مجموعه A را داشته باشیم $(A\neq\varnothing)$ می گوییم A به n زیر مجموعه A_1 و A_2 و ... و A_n افراز شده است هر گاه:

$$1:\quad \forall A_i, 1<i<n \Rightarrow A_i\neq\varnothing$$

$$2:\quad \forall i\neq j, 1<i,j<n \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$$

$$3:\quad A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A$$

* مثال: سه افراز برای مجموعه $A=\{1,2,6,8\}$ بنویسید.

$$A_1=\{1\},A_2=\{2,6,8\}\quad,\quad A_1=\{1,2\},A_2=\{6\},A_3=\{8\}\quad,\quad A_1=\{1\},A_2=\{2,6\},A_3=\{8\}$$

* تذکر: در مثال بالا: $A_1=\{1\},A_2=\{2,8\}$ افراز برای **A** نمی باشد زیرا شرط سوم برقرار نمی باشد.

* **رابطه هم ارزی:**

رابطه **R** روی مجموعه **A** یک رابطه هم ارزی است اگر به ازای هر **x** و **y** و **z** از **A** سه ویژگی زیر برقرار باشد:

1: هر عضو با خودش در ارتباط باشد. یمنی: **xRx**. [R انعکاسی یا بازتابی باشد]

2: اگر **xRy** باشد آن گاه **yRx**. [R تقارنی باشد]

3: اگر **xRy** و **yRz** باشد آن گاه **xRz**. [R تمدی باشد]

* مثال: ثابت کنید $aRb \Leftrightarrow a^2+2b=b^2+2a$ یک رابطه ی هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

$$aRb \Leftrightarrow a^2+2b=b^2+2a$$

$$1-aRa \Leftrightarrow a^2+2a=a^2+2a$$

$$2-aRb \Rightarrow a^2+2b=b^2+2a \Rightarrow b^2+2a=a^2+2b \Rightarrow bRa$$

$$3-(aRb,bRc) \Rightarrow (a^2+2b=b^2+2a, b^2+2c=c^2+2b) \xrightarrow{+} a^2+2c=c^2+2a \Rightarrow aRc$$

* تذکر: رابطه **R** روی مجموعه **A** را در نظر بگیرید. دسته یا کلاس هم ارزی برای عضو $a\in A$ بصورت زیر تمریف می شود:

$$[a]=\{x \,|\, x\in A, xRa\}$$

* مثال: در مثال بالا کلاس هم ارزی عدد ۲ را بیابید.

$$[2]=[a]=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},xR2\right\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},x^2+2(2)=2^2+2x\right\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{Z},x^2-2x=0\right\}=\{0,2\}$$

* مثال: ثابت کنید $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d}$ یک رابطه ی هم ارزی روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{0\}$ است و سپس کلاس هم ارزی $[(-1,7)]$ را بیابید.

هم ارزی است زیرا:

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d}$$

$$1-(a,b)R(a,b)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2a-3}{b}$$

$$2-(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d}\Leftrightarrow\frac{2c-3}{d}=\frac{2a-3}{b}\Leftrightarrow(c,d)R(a,b)$$

$$3-\big((a,b)R(c,d),(c,d)R(e,f)\big)\Rightarrow\left(\frac{2a-3}{b}=\frac{2c-3}{d},\frac{2c-3}{d}=\frac{2e-3}{f}\right)\Rightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2e-3}{f}\Rightarrow(a,b)R(e,f)$$

$$[(-1,7)]=\left\{(a,b)\,\middle|\,(a,b)R(-1,7)\right\}\Rightarrow\frac{2a-3}{b}=\frac{2(-1)-3}{7}\Rightarrow b=-\frac{14}{5}a+\frac{21}{5}$$